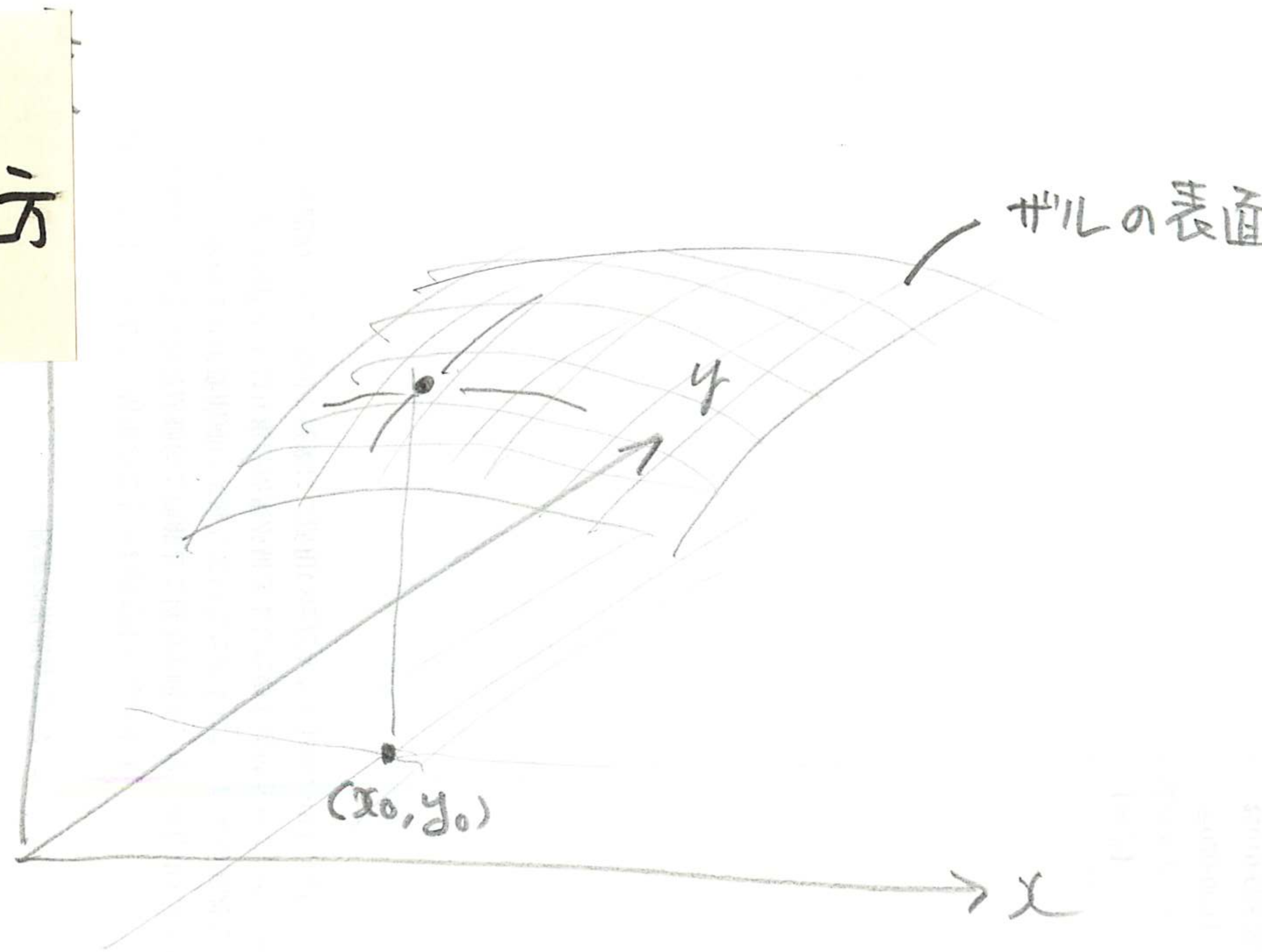
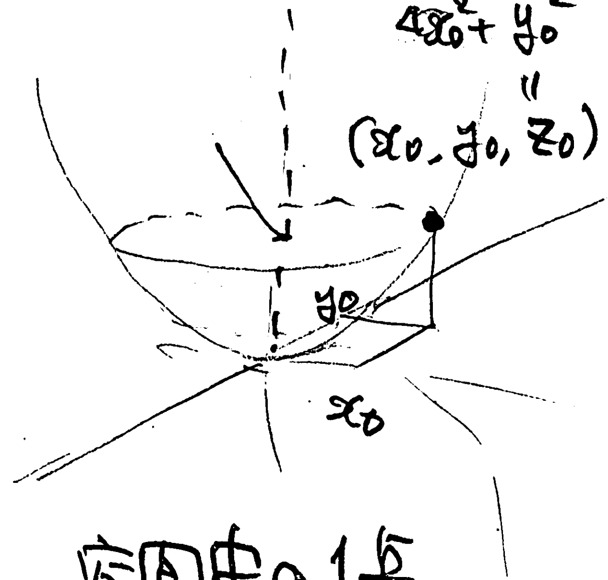
二変数 f
微分の考え方



2変数関数とグラフ

$$z = f(x, y)$$
$$= 4x^2 + y^2$$



点　$z_0 = f(x_0, y_0)$　空間中の1点

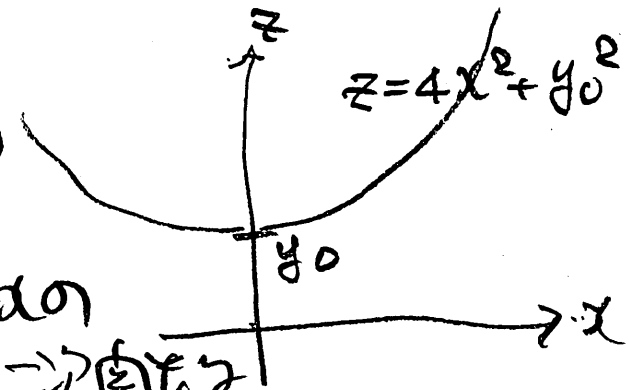
$$= 4x_0^2 + y_0^2$$

等高曲線（xy平面平行）　$z_0 = f(x, y)$　$z = z_0$ での等高線（曲）

$$= 4x^2 + y^2 \leftarrow \text{だ円}$$

x曲線?（xz平面平行）　$z = f(x, y_0)$

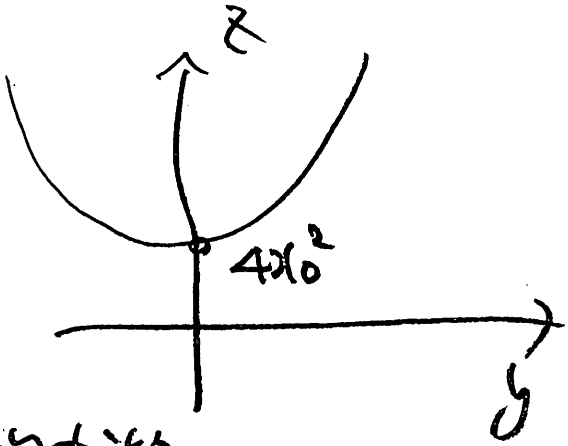
$$= 4x^2 + y_0^2 \leftarrow \text{xの二次関数}$$

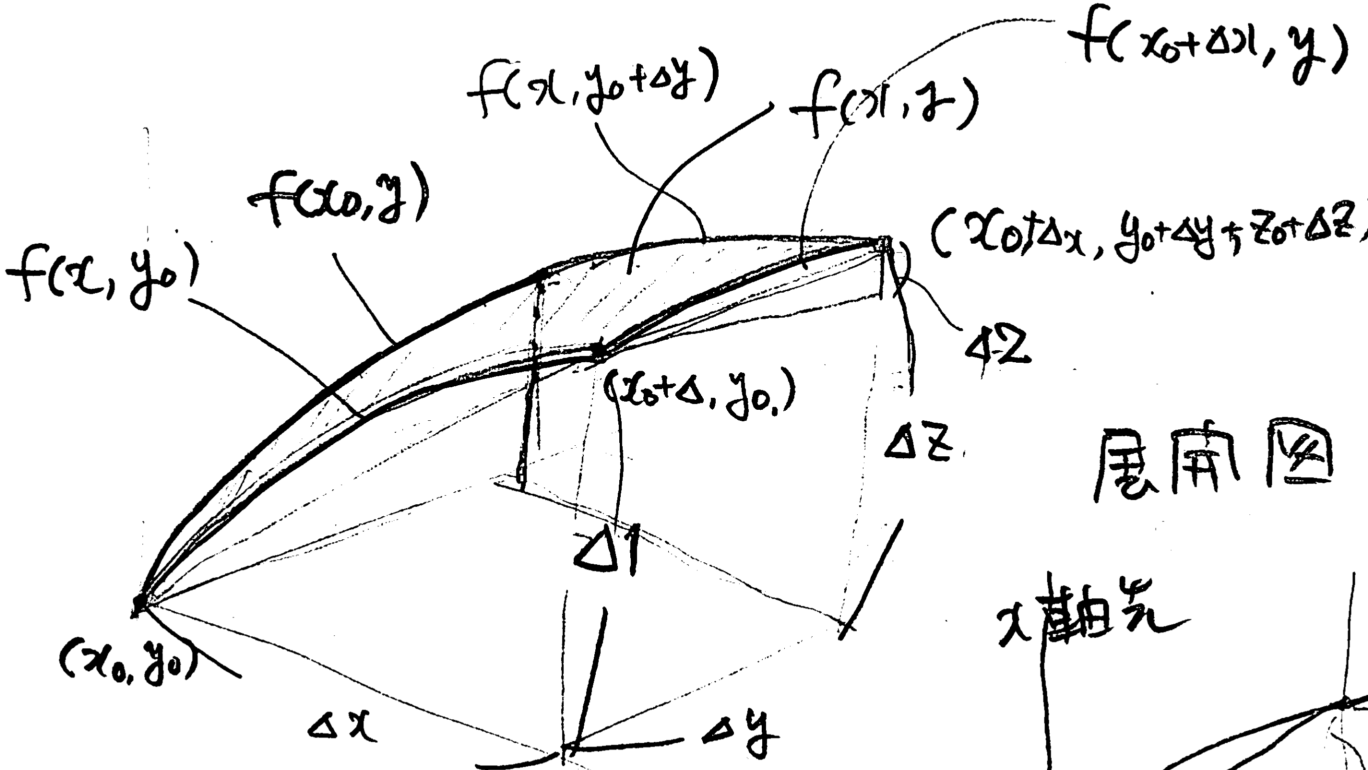


y曲線（yz平面平行）　$z = f(x_0, y)$

$$= 4x_0^2 + y^2$$

↑ yの二次関数



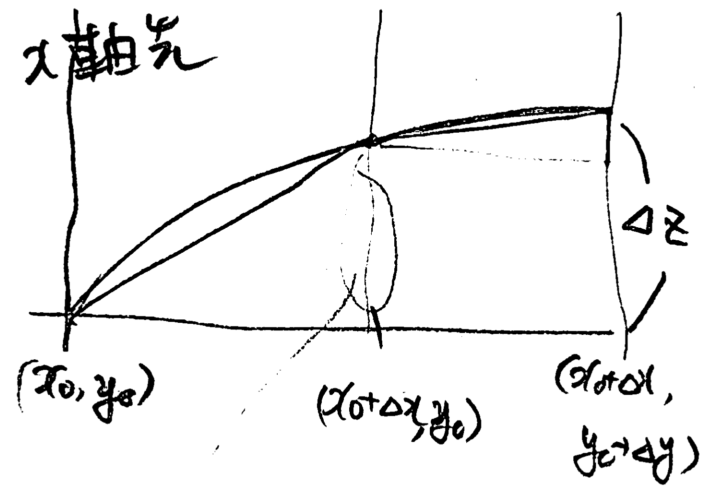


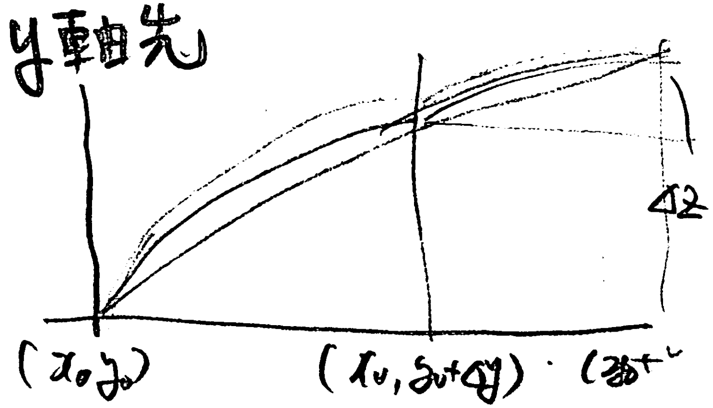
2変数関数の変化量 Δz

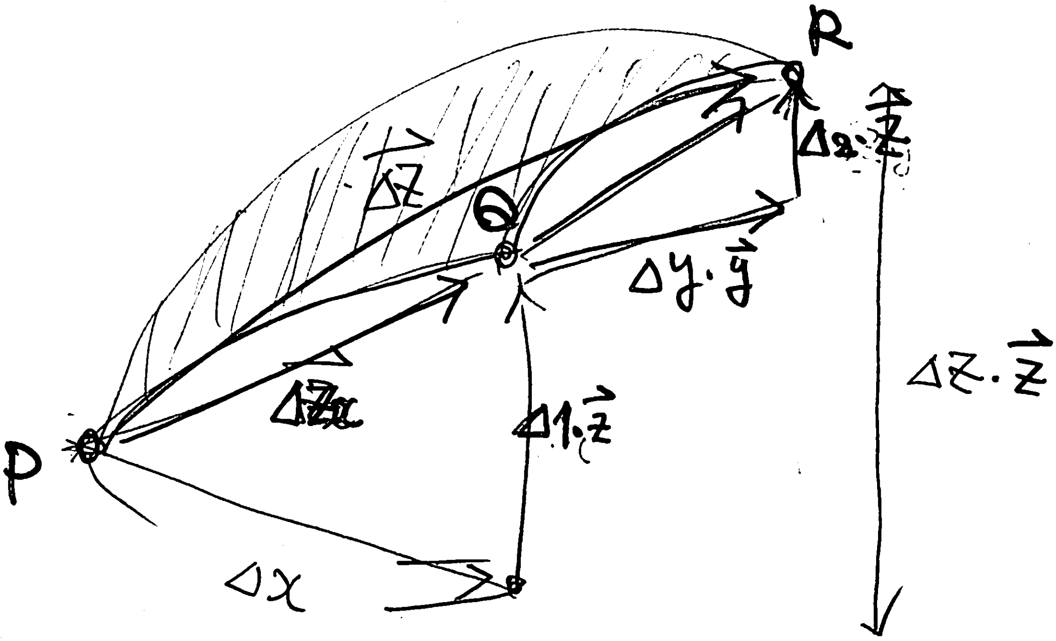
$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = dz$$ （全微分）

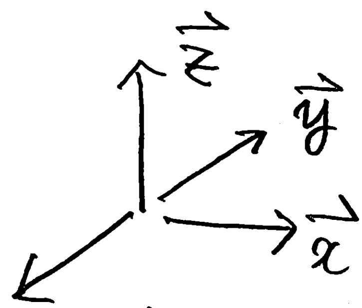
全成分の変化量の合計

展開図（一変数の和）









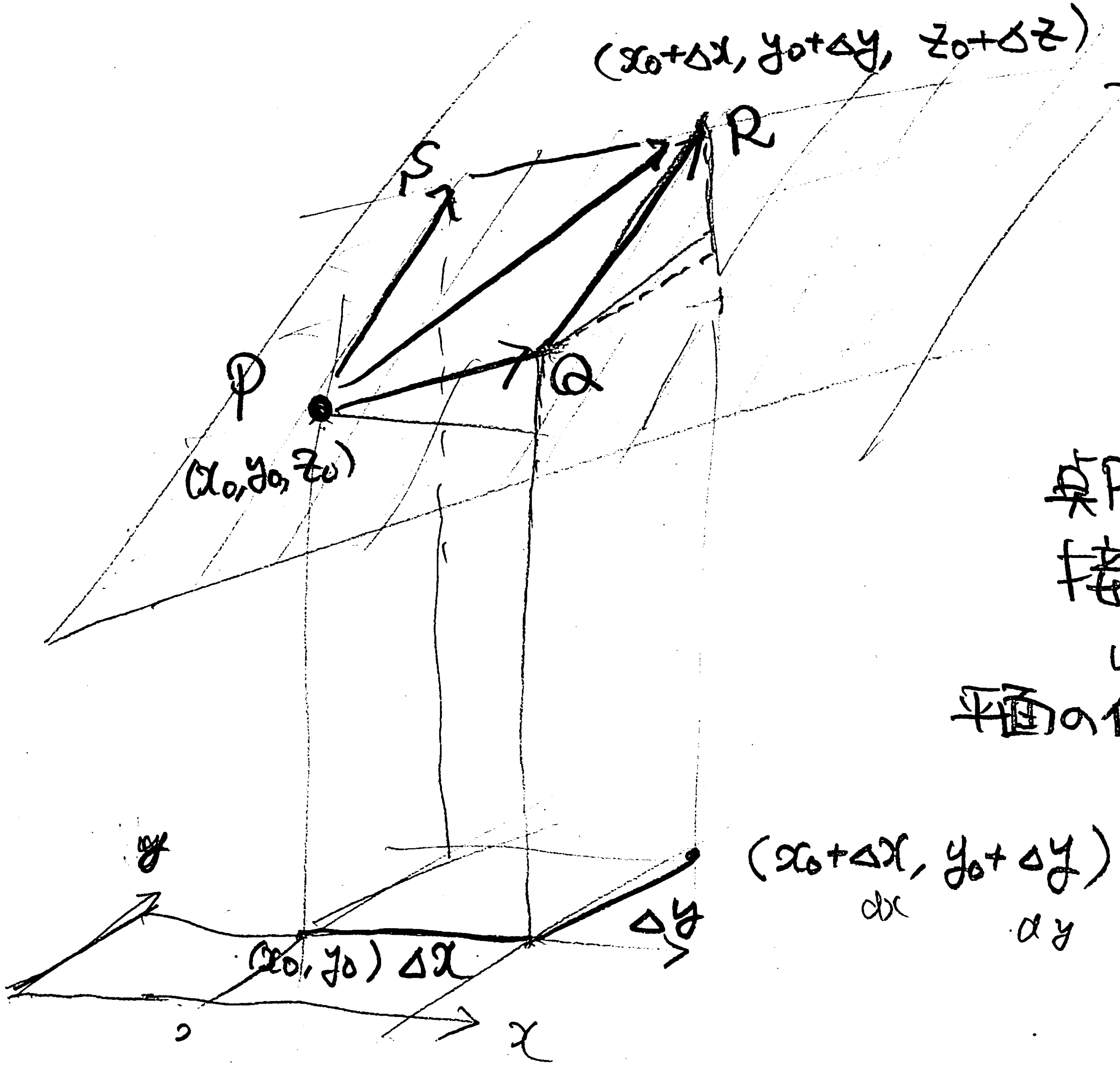
単位ベクトル

ベクトルで考える
ことにする

$$\vec{PQ} = \overrightarrow{\Delta z_x} = \Delta x\,\vec{x} + \Delta 1 \cdot \vec{z}$$

$$\vec{QR} = \overrightarrow{\Delta z_y} = \Delta y\,\vec{y} + \Delta 2 \cdot \vec{z}$$

$$\vec{PR} = \overrightarrow{\Delta Z} = \Delta x\,\vec{x} + \Delta y \cdot \vec{y} + (\Delta 1 + \Delta 2)\vec{z}$$



曲面が
平面とみな
せるほど接近
=
点Pにおける
接平面
↙
各方向の
平面の傾きが変化を
決める。

$$\overrightarrow{AR} = \Delta x \cdot \vec{x} + \Delta y \cdot \vec{y} + \Delta z \cdot \vec{z}$$

$$= (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

ベクトル

$$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

xz平面上の直線

yz 〃

$$= (\Delta x, 0, \Delta 1) + (0, \Delta y, \Delta 2)$$

$\therefore$ $\begin{cases} \Delta z = \Delta 1 + \Delta 2 \\ \Delta 1 \text{ は } x \text{方向の変化にのみ依存している} \\ \Delta 2 \text{ は } y \quad 〃 \end{cases}$

極限を考える

両方近づける

$$\lim_{R \to P} \overrightarrow{PR} = \lim_{\substack{R \to Q \\ Q \to P}} (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR})$$

$$\Delta 1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$\lim_{\substack{R \to Q \\ Q \to P}} \Delta 1 = \lim_{\Delta x \to 0} \{ f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \}$$

$f(x, y_0)$ を $f_{y_0}(x)$ と考える

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \{ f_{y_0}(x_0 + dx) - f_{y_0}(x_0) \}$$

$$= \frac{d f_{y_0}(x_0)}{dx} \cdot dx$$

$$\lim_{\substack{R \to Q \\ Q \to P}} \overrightarrow{QR} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (0, \Delta y, \Delta z)$$ ← yz平面上のベクトル

$$\Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \{ f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) \}$$

$f(\underbrace{x_0+\Delta x}_{\text{固定}}, y)$ を $f_{x_0+\Delta x}(y)$ と考える（一変数関数）

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \{ f_{x_0+\Delta x}(y_0+\Delta y) - f_{x_0+\Delta x}(y_0) \}$$

y方向の変化に対するzの変化量

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\frac{f_{x_0+\Delta x}(y_0+\Delta y) - f_{x_0+\Delta x}(y_0)}{\Delta y} \cdot \Delta y \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{d}{dy} f_{x_0+\Delta x}(y_0) \cdot dy$$

$$= \frac{d}{dy} f_{x_0}(y_0) \cdot dy$$

$$= f'_y(x_0, y_0) \cdot dy$$

$$\therefore \lim_{P \to Q} \overrightarrow{PQ} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (\Delta x, \Delta y, \Delta 1 + \Delta 2)$$

$$= \left(dx, dy, f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy\right)$$