

4. 命題論理

4.1。基本命題 K_1, \dots, K_n は命題である

。 A, B が命題であるとき,

$\neg A,$

$A \vee B$

$A \wedge B$

$A \supset B \quad (A \rightarrow B)$

} は命題である

$\neg > \wedge > \vee > \supset$

結合の強さ

\wedge, \vee は左結合的

\supset は右結合的

4.2 形式と意味 — semantics, モデル論

形式的体系 (formal system)
 直感と意味と排して決める
 万人に共通.

(意図した)

モデル ~ 形式的体系によって表わし得る世界.

形式的体系と意味論の関係.

健全性: 形式的体系で証明できることは,
 意味(モデル)のもとでも正しい.

完全性: どんな意味(モデル)のもとでも正しいことは
 形式的体系で証明できる

健全性と完全性が成り立つ時.

形式的体系と意味論は「完全一致している」という

4.3 命題論理の意味論

↑
真理値表で意味を与える

命題に対する真理値とは、「真」か「偽」のこと

形式化する前の命題は、真か偽であるが定まっているので、形式化後もこの値で定める。

真理値表の意味

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \supset B$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

命題 P に対応する真理値が全 T $\neg A \vee B$
 のとき、P は恒真式 (Tautology) と呼ぶ。

$\models P$ と書く。

4.4 形式的体系としての命題論理

基本的命題 (定義済み)

判断は $\Gamma \vdash A$ という形 \uparrow
命題の有限列, 空列も可.

宣言と呼ばれる文脈と呼ばれる

推論規則

判断を \vdash の形に組み上げるためのもの

$$\frac{(\text{任意の } A \in \Gamma \text{ のとき})}{\Gamma \vdash A} \text{ assume}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp \text{ 消去}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg \text{ 導入}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \neg \text{ 消去}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad \wedge \text{導入}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \quad \wedge \text{消去 (左)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \quad \wedge \text{消去 (右)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \vee \text{導入 (左)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \vee \text{導入 (右)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \quad \vee \text{消去}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B} \supset \text{導入}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \supset B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \supset \text{消去}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg \neg A}{\Gamma \vdash A} \neg \neg \text{消去}$$

推論規則を有限回適用して

$\Gamma \vdash A$ が推論できたときに

「宣言 Γ のもとで命題 A は導出可能」という