1.3節 集合と計数

有限集合の「要素の個数」の評価法

1.3.1 基本公式

$|X|$ 有限集合 X の「要素の個数」の表記 $|X|$ とする。

例
$$\begin{cases} |\{1, 2, 3\}| = 3 \\ |\phi| = |\{\ \}| = 0 \end{cases}$$

定理 1.5 有限集合 X, Y について

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

系 $X \cap Y = \phi$ であれば

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|$$

例題1.9

一組のトランプ（Joker除く52枚）から
ランダムに1枚のカードをぬく。
そのカードがハートであるか絵札（K, Q, J）であるか
の確率を求める

例題1.9
解

ハートの集合を X
絵札の 〃 Y
とする

どのカードもぬかれる確率は $1/52$（とする）

ハートをぬく確率 $|X|/52 = 13/52 = 1/4$
絵札 〃 $|Y|/52 = (3\times4)/52 = 12/52$

ハートまたは絵札をぬく確率は

$$|X \cup Y|/52$$

ハートで絵札である確率は

$$|X \cap Y| = 3/52$$

$$\therefore |X \cup Y|/52 = (\overset{13}{|X|} + \overset{12}{|Y|} - \overset{3}{|X \cap Y|})/52$$

$$= 22/52$$

定理1.6　任意の有限集合 X, Y について，

(1) $|X \times Y| = |X| \times |Y|$

(2) $|2^X| = 2^{|X|}$

定理1.6の証明

(1) $|X \times Y| = |X| \times |Y|$

$(a,b) \in X \times Y$ の個数は,

a のとり方が $|X|$ 通り
b の 〃 $|Y|$ 〃

$\therefore$ (a,b) のとり方は $|X| \times |Y|$ 通り.

(2) $|2^X| = 2^{|X|}$

$X = \{a_1, \cdots, a_n\}$ とする。 $|X| = n$

部分集合の作り方は

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1\text{を入れる} \\ a_1\text{を入れるn} \end{pmatrix}}_{2\text{通り}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} a_2\text{を入れる} \\ a_2\text{を 〃} \end{pmatrix}}_{2\text{通り}} \times \cdots \times \underbrace{\begin{pmatrix} a_n\text{を入れる} \\ a_n\ \text{入れるn} \end{pmatrix}}_{2\text{通り}}$$

$\therefore 2^{|X|}$

例題10

n個の相異なる実数の列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

は長さ$\lceil \sqrt{n} \rceil$以上の$\left\{\begin{array}{l}\text{単調増加}\\ \text{〃 減少}\end{array}\right\}$部分列を含むことを示せ

(例) 7個の列 4.1, 2.4, 6.1, 1.5, 5.9, 3.2, 7.6

は$\lceil \sqrt{7} \rceil = \lceil 2.64\cdots \rceil = 3$以上の単調部分列を含んでいる

例題10
解

$$\begin{cases} UP_i : x_i \text{ で始まる最長の単調増加部分列長} \\ DOWN_i : \quad 〃 \qquad\qquad 〃 \text{ 減少 } 〃 \end{cases}$$

n個の順序対は全て異なる

$$(UP_1, DOWN_1), (UP_2, DOWN_2), \cdots, (UP_n, DOWN_n)$$

任意の $i<j$ に対し

$$\left.\begin{array}{l} x_i < x_j \longrightarrow UP_i > UP_j \\ x_i > x_j \longrightarrow DOWN_i > DOWN_j \end{array}\right\} \text{どっちかが変わる}$$

最長の部分列の長さを k とすると

$$\underset{\uparrow n\text{個ある}}{(UP_i, DOWN_i)} \in \underbrace{\{1,2,\cdots,k\} \times \{1,2,\cdots,k\}}_{k^2\text{個}}$$

$$n \leq k^2$$

$$\therefore \sqrt{n} \leq k$$

1.3.2 全単射とその応用

単射

一対一の対応.

$f: X \to Y$ $\quad \forall a, b \in X : \left(f(a) = f(b) \to a = b \right)$

$\left(a \neq b \to f(a) \neq f(b) \right)$

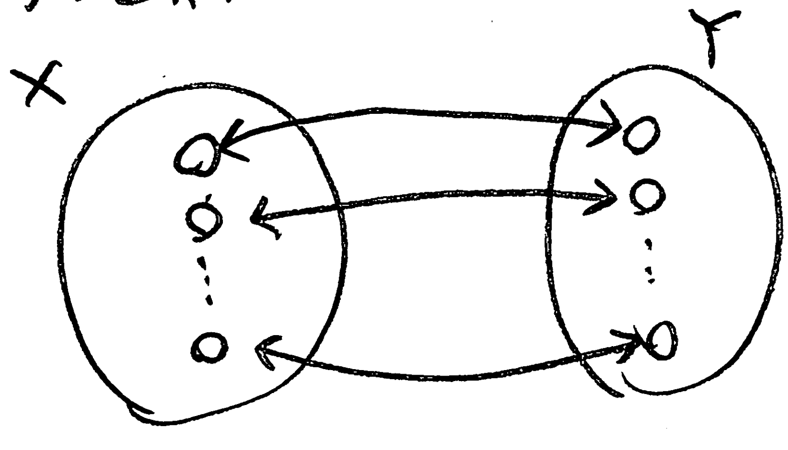
全射

$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)$
$f(x) = y$

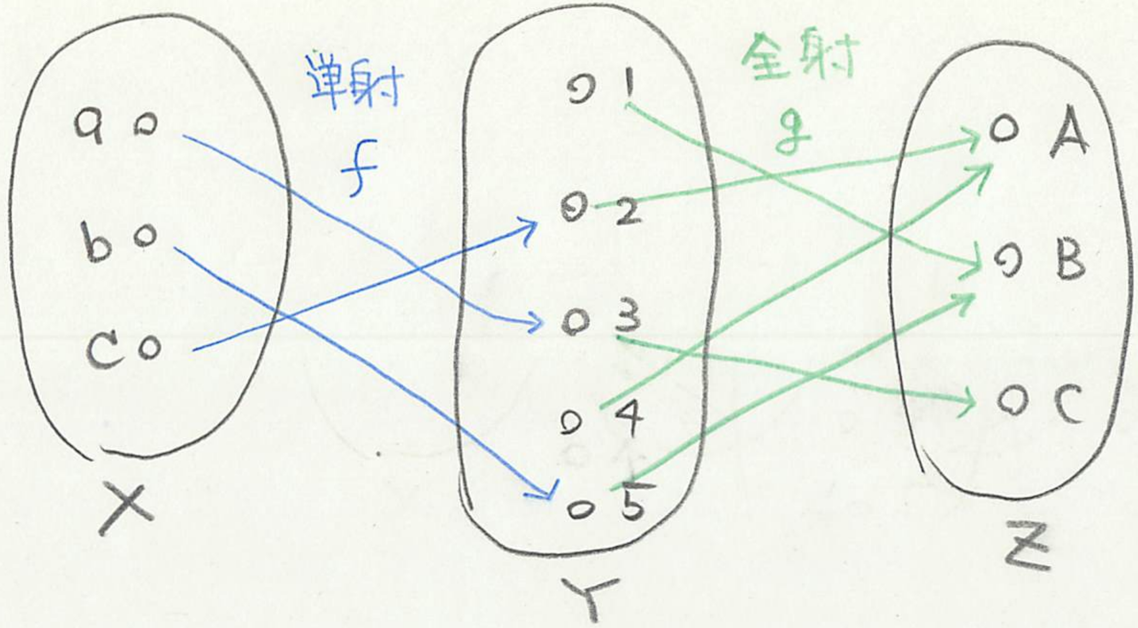
全てのyに対応するxがある

全単射

単射かつ全射



例1



$g \circ f : X \to Z$ は全単射

例2 X上の置換とは
Xから X への全単射

例3 $I_X : X \to X$
$\forall x : I_X(x) \to x$
} 恒等関数 (identity)

定理 1.7　$f: X \to Y$ が全単射であれば

$\exists g: Y \to X$ で

$$\left\{ \begin{array}{l} g \circ f = I_X \\ f \circ g = I_Y \end{array} \right\}$$ となる g が唯一存在する

f の逆関数

逆に

このような g が存在すれば

f は全単射である。

定理1.7 証明

fが全射 $\rightarrow$ $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ y = f(x)$

$\hookrightarrow$ yからxへ戻れる

fが単射 $\rightarrow$ 上のxは唯一.

$g(y) = x$ となるように gを定めることができる。

すると, $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y$

逆に $\forall x \in X$に対して $y = f(x)$ とおくと

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$$

$\therefore$ $f \circ g$ も $g \circ f$ も 恒等関数である

定理1.7 証明続き

「$\exists g: Y \to X$ で、$g \circ f = I_X$, $f \circ g = I_Y$」ならば

条件

$$\forall y \in Y: f(g(y)) = y$$

全射

となる。つまり f は全射である

また $f(x) = f(y)$ であるなら

$$x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$$

$\therefore$ $x = y$.

単射

$\therefore$ f は単射

唯一性

g_1 と g_2 が条件を満たすと仮定すると

$$\forall x \in X: f(g_1(x)) = x = f(g_2(x))$$

f は単射なので $g_1(x) = g_2(x)$

$\therefore$ g_1 と g_2 は同じ

計数の基本

X, Y が有限集合で，

$f : X \to Y$ が全単射ならば

$$|X| = |Y|$$

例題 1.11

n個のピンポン玉を，

1～k番までの番号付き箱に入れる。

そのやり方は何通りあるか，但し，空の箱は許さない

$$\overbrace{\circ\circ\cdots\circ}^{n_1}\,\Big|\,\overbrace{\circ\cdots\circ}^{n_2}\,\Big|\cdots\cdots\Big|\,\overbrace{\circ\cdots\circ\circ}^{n_k}$$

例　$n=4,\ k=2$ の場合

$\circ\circ\circ|\circ$，$\circ\circ|\circ\circ$，$\circ|\circ\circ\circ$ の3通り

例題1.11の解

1対1対応

「箱 i に n_i を入れる, $i=1:k$ やり方」は,

「n 個の○の間に $(k-1)$ 個の仕切りを入れるやり方」

$(n-1)$ 個の隙間に $(k-1)$ 個の仕切りを入れる箇所を選ぶやり方

$$\underbrace{{}_{(n-1)}}_{\text{個から}}C_{\underbrace{(k-1)}_{(k-1)\text{個を選ぶ}}}$$

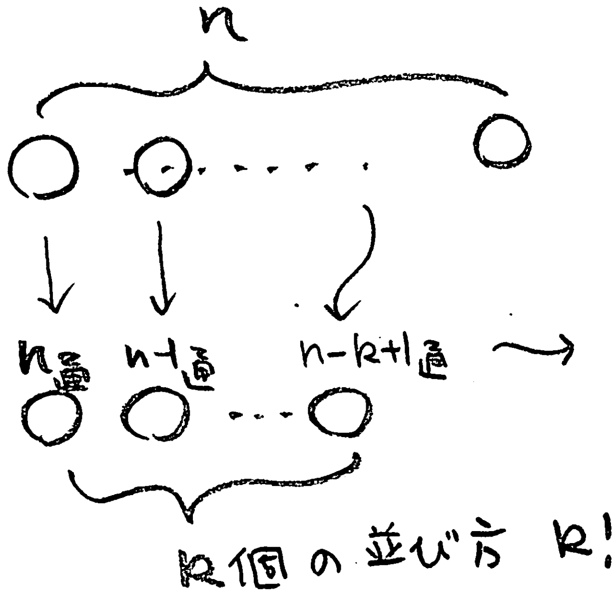
検算

${}_{4-1}C_{2-1} = {}_3C_1 = 3$ で $n=4$, $k=2$ の場合と適合.

組み合せの数

$_nC_k$

$$_nC_k \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

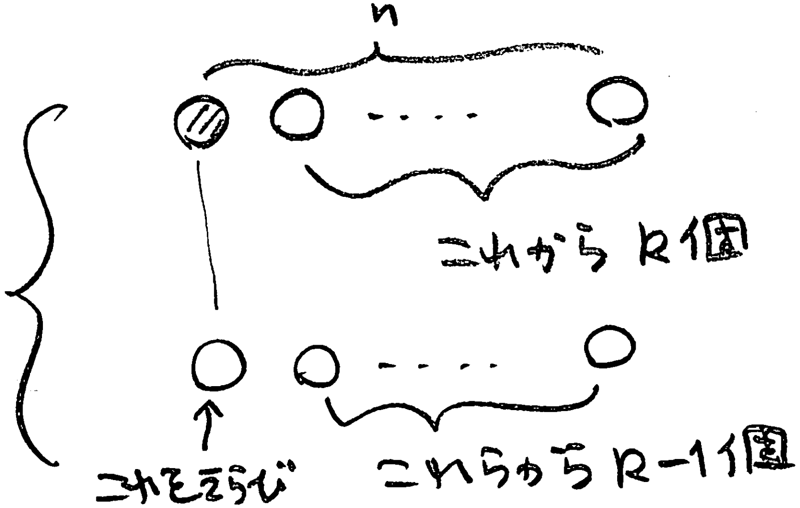


$$\longrightarrow n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\begin{cases} _nC_0 = 1 \\ _nC_n = 1 \end{cases} \qquad 0! = 1$$

${}_nC_k$の性質

$${}_nC_k = {}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k$$



$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots\cdots(x+y)}$$

この計算で $x^k y^{n-k}$ となるのは

n個の $(x+y)$ の中で k個 x と $(n-k)$個 y

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k y^{n-k}$$

nCrの性質.

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i \, x^i y^{n-i}$$

$x=1, y=1$ を入れると

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i = {}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_n$$

$x=1, y=-1$ を入れると

$$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n$$

スターリング数

S_n^k

「玉に番号がついていて、
k個の区別できない箱に、
空の箱を許さずに入れる」やり方の数を S_n^k とする。

$$S_n^1 = S_n^n = 1$$

$$S_{n+1}^k = S_n^{k-1} + k \cdot S_n^k$$

n個を(k−1)個の箱に入れ
最後の箱に1個入れる
やり方の数

k個の箱にn個を入れて、
k個の(箱の)中から1個えらび
1個入れるやり方の数

分割数

n個　k個

玉にも箱にも番号がない場合で
空の箱がないようにわける仕方の数

一対一対応

$$\begin{cases} n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \\ n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1 \end{cases}$$

このような整数の列の数を分割数 P_n^k と表わす。

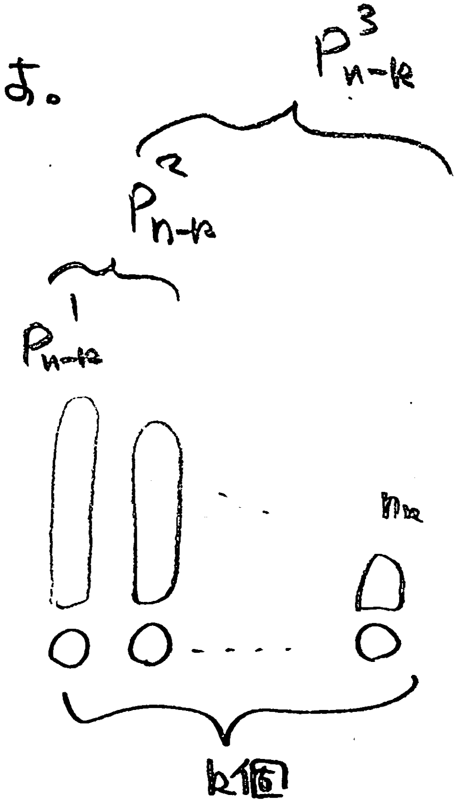
$$P_n^1 = P_n^n = 1$$

$k > n$ ならば

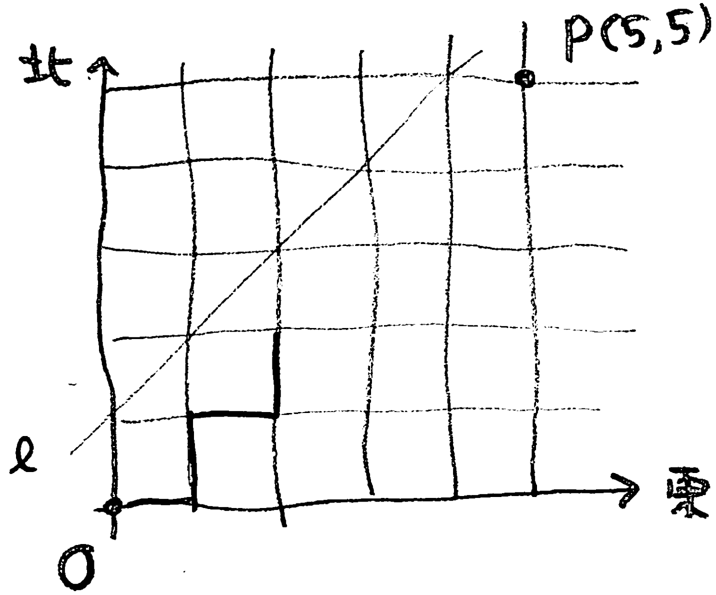
$$P_n^k = 0$$

$n > k$ の時、

$$P_n^k = P_{n-k}^1 + P_{n-k}^2 + \cdots + P_{n-k}^k$$



経路の数 (格子上の道路)



(1) O から P にゆく最短経路は何通りか?

(2) $x-y \geqq 0$ であるような地点 (x, y) だけを通ってゆくとしたら、最短経路は何通りか?

(1)の解

OからPまでゆくには，東にn，北にn進めば良い.

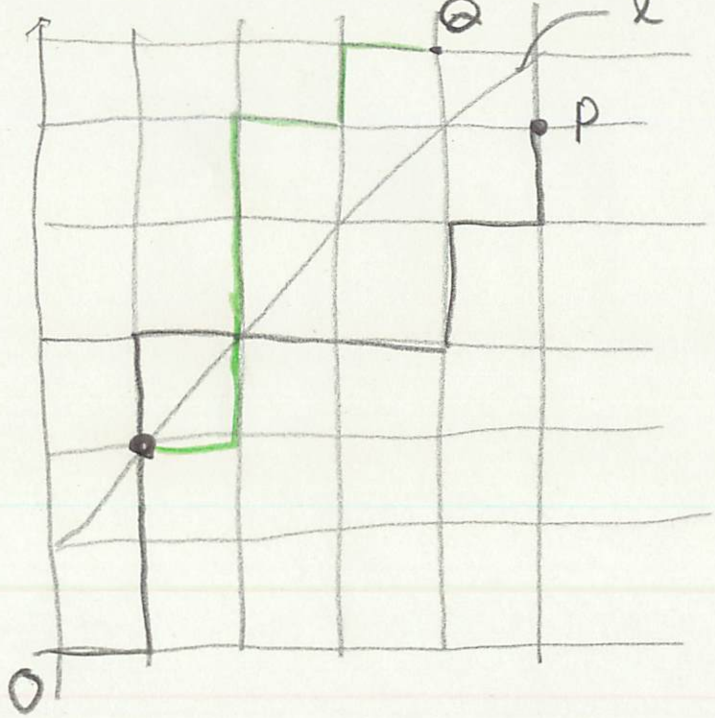
2n個の列中，n個が東，n個が北の列

$x_1 x_2 \cdots x_{2n}$，$x_{i=1:2n}$ = 東 or 北

2n個中の東の位置のみ決めれば，2nの列は決まる

${}_{2n}C_n$ 通りある.

(2)の解



OからPへいく l に触れる経路の集合 C

OからQへいく経路の集合 D とする

φ:「Dの経路で，最初に l に触れた点で，l について対称に折り返す」と，Cの経路になる

$\mathcal{D}$と$\mathcal{C}$の関係から全単射へ.

$\psi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$
(最初のlとの接触点での折り返し)

$^\forall d \in \mathcal{D}$に対し,「折り返し」が可能.
∴ 全射

$\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$
(最初のlとの接触点での折り返し)

「最初のlとの接触点での折り返し」を2回行なうともとにもどる.

$$\therefore \psi \circ \varphi = I_{\mathcal{C}}$$

$$\varphi \circ \psi = I_{\mathcal{D}}$$

$\mathcal{D}$の中の経路の数は

$(0,0)$から$(n-1, n+1)$へ行く

$2n$個の列中，東を$(n-1)$個，北を$(n+1)$個選ぶやり方

$\therefore\ {}_{2n}C_{n-1}$

OからPへの経路の数は，${}_{2n}C_n$でした。

$x-y \geq 0$である経路の数は

$$
\begin{aligned}
{}_{2n}C_n - |\mathcal{C}| &= {}_{2n}C_n - |\mathcal{D}| \\
&= {}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1} \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!} \\
&= \left(1 - \frac{n}{n+1}\right){}_{2n}C_n \\
&= \frac{1}{n+1}\,{}_{2n}C_n
\end{aligned}
$$

応用
括弧構造

n組の括弧を含む正しい数式から
括弧以外の記号を全て消した残りを
「n重の括弧構造」と呼ぶ。
これは何通りあるか？

例

3重の場合
( )( )( ), ( )(( )), (( ))( ), ((( )))

解

左括弧を東に，右括弧を北に対応させる。
$x-y \geq 0$ の条件が，正しい括弧構造となる。

$$\therefore \frac{1}{n+1}\,{}_{2n}C_n$$