集合と概念（前節）

「「もの」の概念」を「「具体的なものの集合」で表現
?

人間 ⟷ 人間の集合

偶数 ⟷ 偶数の 〃 $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

集合と関係（本節）

大小などの順序、
親兄弟などの親族関係、
同値（「等しい」の拡張）関係

集合論的に取り扱う

「関係」の性質

1.2.1 関係概念とその表現

直積

新しい集合の構成方法

座標 (x, y) の考えの一般化

順序対　要素 x, y の対 (x, y)

(x, y) と (y, x) は異なる

順序対の＝

$$(x, y) = (x', y') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

二つの対の等しさ。

直積 $X \times Y$

集合 X と Y の直積 $X \times Y$ は順序対の集合

$$X \times Y \overset{\text{def}}{\equiv} \{ (x, y) \mid x \in X \text{ かつ } y \in Y \}$$

X^2

$$X^2 \overset{\text{def}}{\equiv} X \times X$$

直積の構成
例

$$X = \{x_1, x_2\}$$
ならば
$$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$$

$$X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3)\\ (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}$$

$$X^2 = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2)\\ (x_2, x_1), (x_2, x_2)\}$$

関係概念の例

Older
年長関係

$x, y \in \{父, 兄, 弟\}$

に対する年令の関係「xはyより年長」

（年長(x, y)と表わしても良い）

述語，真か偽を返す関数

$$\mathrm{Older} = \{(x, y) \mid x, y \in \{父, 兄, 弟\},\ 年長(x, y)\}$$

wins
勝ち負け関係

$\alpha, \beta \in \{石, 紙, 鋏\}$，に対する勝ち負けの関係、

αはβに勝つ $(\mathrm{win}(\alpha, \beta))$

$$\mathrm{wins} = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \{石, 紙, 鋏\},\ \mathrm{win}(\alpha, \beta)\}$$

年長関係と集合

$\mathrm{Older} = \{(父, 兄), (父, 弟), (兄, 弟)\}$ とおき、

$x, y \in \{父, 兄, 弟\}$ に対して

$$\mathrm{older}(x, y) \overset{\mathrm{def}}{\iff} (x, y) \in \mathrm{Older}$$

$\mathrm{Wms} = \{(石, 鋏), (鋏, 紙), (紙, 石)\}$

$$\mathrm{wm}(\alpha, \beta) \iff (\alpha, \beta) \in \mathrm{Wms}$$

関係の定義

X：空でない集合

Xの中の(2項)関係 R とは

$$R \subseteq X \times X \quad (\text{直積 } X^2 \text{ の部分集合})$$

のこと。

$(a, b) \in R$ のとき「a, b は関係 R をもつ」といい

aRb

$$aRb$$

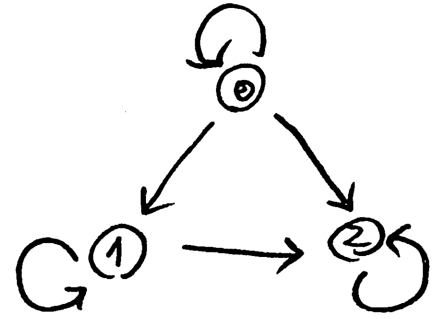
と表わす。

例

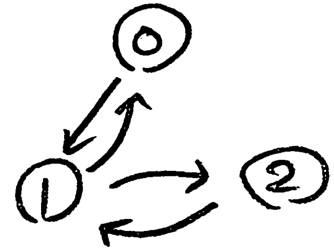
≦

$X = \{0, 1, 2\}$

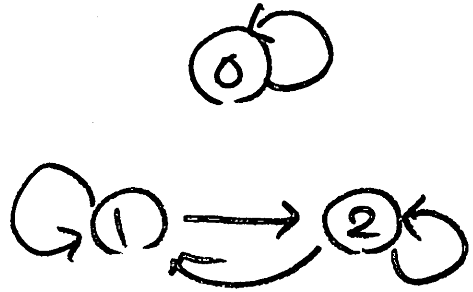
(1) $\leqq = \{(0,0), (0,1), (0,2),$
$(1,1), (1,2),$
$(2,2)\}$



(2) $D = \{(0,1), (1,0), (1,2), (2,1)\}$

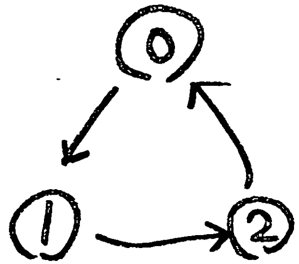


(3) $E = \{(0,0),$
$(1,1), (1,2),$
$(2,1), (2,2)\}$

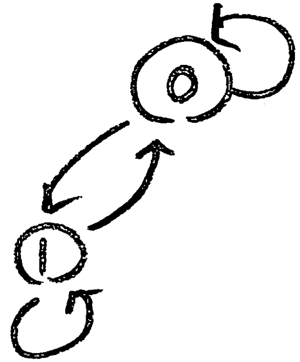


例 続き

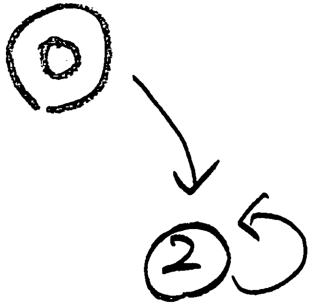
$F = \{(0,1)$
$(1,2)$
$(2,0)\}$



$G = \{(0,0)$
$(0,1), (1,0)$
$(1,1)\}$



$H = \{(0,2),$
$(2,2)\}$



特殊な関係		$\left\{ \begin{array}{l} R \text{ を } X \text{ の中の関係}, \\ x, y, z \in R \end{array} \right\}$ とする
反射性	(1)	$\forall x \in X : \ x R x$
対称性	(2)	$x R y \to y R x$
反・対称性	(3)	$x R y$ かつ $y R x \to x = y$
推移性	(4)	$x R y$ かつ $y R z \to x R z$
比較可能性	(5)	$\forall x, y \in X : \ x R y$ または $y R x$

例題. 1.6

関係 $\leq$ は 反射性, 対称性, 反対称性 を満たすか.

$\forall x \in X : x \leqq x$ ○

$x \leqq y$ である時, $y \leq x$ ではない ×

$x \leq y$ かつ $y \leq x$ の時は, $y = x$ ○

関係 E は 〃

$\forall x \in X : (x, x) \in E$ なので ○

$x E y \to (x, y) \in E$ ならば $(y, x) \in E$ なので ○

$x E y$ かつ $y E x \to$ ○

関係 F は

反射性は × (2について (2,2) が入ってない)

対称性は ○

反〃 は × ((0,1) と (1,0) が入ってる)

Rの推移的閉包

R^*

Xの中の任意の関係 R

Rから新しい関係 R^* を次の様に構成する

$$R^* = \{(x, y) \mid x_{i=0:n} \in X,$$

$$(1)\ x = x_0,\ x_n = y$$

$$(2)\ (x_0, x_1), \cdots (x_{n-1}, x_n) \in R\}$$

すると、

R^*は推移性を満たす

Rが反射性、対称性を満たせば

R^*も 〃

Rに推移性があれば

$$R = R^*$$

$$R \subseteq R' \rightarrow R^* \subseteq R'^*$$