

$$p = (|X| + |Y| - |X \cap Y|)/52 \\ = (13+12-3)/52 = 22/52 = 0.42\dots$$

□

定理 1.6 任意の有限集合  $X, Y$  について

- (1)  $|X \times Y| = |X| \times |Y|$
- (2)  $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

[証明] (1)  $X \times Y$  の要素  $(x, y)$  の数は,  $x \in X$  が  $|X|$  通り,  $y \in Y$  が  $|Y|$  通りあるのだから, その組合せで  $|X| \times |Y|$  個である.

(2)  $X = \{a_1, \dots, a_n\} (n=|X|)$  とする.  $X$  の部分集合  $U$  の選びかたは,

$a_1$  を入れるか否か,  $a_2$  を入れるか否か,  $\dots$ ,  $a_n$  を入れるか否か

で定まり, その組合せは

$$2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n = 2^{|X|} (\text{通り})$$

□

ある.

例題 1.10  $n$  個の相異なる実数の列  $x_1, x_2, \dots, x_n$  は, 長さ  $\lceil \sqrt{n} \rceil$  以上の単調増加部分列か, 単調減少部分列かを含んでいることを示せ.

ここで  $\lceil x \rceil$  は,  $x$  以上の最小の整数 ( $x$  の端数を切り上げた値) を示す.

[例] 7 個の実数の列 4.1, 2.4, 6.1, 1.5, 5.9, 3.2, 7.6 は長さ 3 以上の単調部分列を含んでいる ( $\sqrt{7} = 2.64\dots$ ). たとえば

$$2.4, 5.9, 7.6.$$

[解]  $U_i = x_i$  で始まる最長の単調増加部分列の長さ,

$D_i = x_i$  で始まる最長の単調減少部分列の長さ

とおく. すると,  $n$  個の順序対

$$(U_1, D_1), (U_2, D_2), \dots, (U_n, D_n)$$

はすべて互いに異なる. 実際, 任意の  $i < j$  について,

もし  $x_i < x_j$  ならば  $U_i > U_j$ ,

もし  $x_i > x_j$  ならば  $D_i > D_j$

である.

さて, 最長の単調部分列の長さを  $k$  とすると,

解

う30分

講

26 1. 集合

$$(U_i, D_i) \in \{1, 2, \dots, k\} \times \{1, 2, \dots, k\}.$$

$n$  個の相異なる順序対があるのだから、

$$\begin{aligned} n &\leq |\{1, 2, \dots, k\} \times \{1, 2, \dots, k\}| \\ &= |\{1, 2, \dots, k\}| \times |\{1, 2, \dots, k\}| = k^2. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\sqrt{n} \leq k.$$

$k$  は整数だから、 $\lceil \sqrt{n} \rceil$  以上でなければならない。 □

### 1.3.2 全単射とその応用

関数  $f: X \rightarrow Y$  は、次の条件をみたすとき、**単射**と呼ばれる。

$$f(a) = f(b) \text{ ならば } a = b.$$

これは同じ関数值に対応する変数值がひとつしかないこと、すなわち対応が一対一であることにほかならない。いいかえれば、

$$a \neq b \text{ ならば } f(a) \neq f(b)$$

ということでもある（変数值が変われば、関数值も変わる）。

$f$  はまた、次の条件をみたすとき、**全射**と呼ばれる。

$$(\forall y \in Y) (\exists x \in X) f(x) = y.$$

これはどの  $y \in Y$  にも  $x \in X$  のどれかが対応していること、すなわち対応が漏れがないことをあらわしている。単射でありかつ全射であるような関数、すなわち一対一で対応漏れがないような関数は、**全単射**と呼ばれる。

[例1] 図1.9に示される関数  $f$  は、単射であるが全射でない。関数  $g$  は全射であるが単射でない。合成関数  $g \circ f: X \rightarrow Z$  は全単射である。

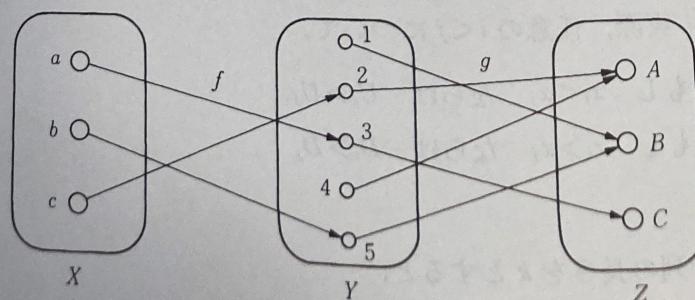


図1.9 単射と全射