論理式

- 命題とは　真か偽かが確定できる文
  - 「モーツァルトは1756年に生まれた」→真なる命題
  - 「モーツァルトは2003年に死んだ」→偽なる〃
  - 「あなたは何才ですか?」→命題ではない
- 述語(命題関数)　$P(x)$

「xは3より小さい」　$P(x)=$「$x<3$」

$x\in\mathbb{Z}$とあると、xの値ごとに真偽が定まる

全てのxに対して$P(x)$が真となるとき

述語Pは恒真

述語 $P(x)$ の書き方

- $P(x) \overset{\text{def}}{\iff} x \leq 3$

  $x=4$ とした場合

  $P(4)$ は「$4 \leq 3$」という命題.

  これは偽

- $Q(x,y) \overset{\text{def}}{\iff} x^2+y^2 \geq 2xy$

▷ <u>対象領域</u>

変数に代入して良い集合

$\forall x \in X : P(x)$

全てのx

xの対象領域

▷ 「$P(x) \overset{\text{def}}{\iff} x \geq 0$」とする

$\forall x \in \mathbb{N}$ $P(x)$は恒真

$\forall x \in \mathbb{Z}$ $P(x)$は恒真ではない

$\forall x \in \mathbb{C}$ $P(x)$は論理式ではない.

論理結合子 (logical connective) の定義

・$P \wedge Q$ 論理積 conjunction

P	Q	$P \wedge Q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	偽
偽	偽	偽

・$P \vee Q$ 論理和 (disjunction)

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- $P \Rightarrow Q$ 含意(がんい) (implication)

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- $\neg P$ 否定 (negation)

P	$\neg P$
T	F
F	T

- $P \Leftrightarrow Q$ 論理的同値

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例　P かつ「Q または R」 : $P \wedge (Q \vee R)$

$\Leftrightarrow$ 「P かつ Q」または「P かつ R」　$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(2) 全称記号 $\forall$

$\forall x \in X$ 対称領域

属する

any すべての

Aの逆さま

$\forall x$ 対象領域が省略

(3) 存在記号 ∃

$\exists x \in X$

対象領域

exist

ある〜が

存在する

例 $P=(\forall x\in\mathbb{Z})[(\forall y\in\mathbb{Z})\ x^2+y^2\geqq 2xy]$

$Q=(\exists x\in\mathbb{Z})[(\forall y\in\mathbb{Z})\ x+y=0]$

$R=(\forall x\in\mathbb{Z})[(\exists y\in\mathbb{Z})\ x+y=0]$

例題 1.4

Qは真か？

ある整数 x が決まると
任意の 〃 y に対し
$x+y=0$
となる。
そんな整数 x は存在しないので、
偽 〃

Rは真か？

任意の整数 x に対し、
ある整数 y が存在して
$x+y=0$ となる

$x+y=0$ より $y=-x$ とすると $x+y=0$ となる