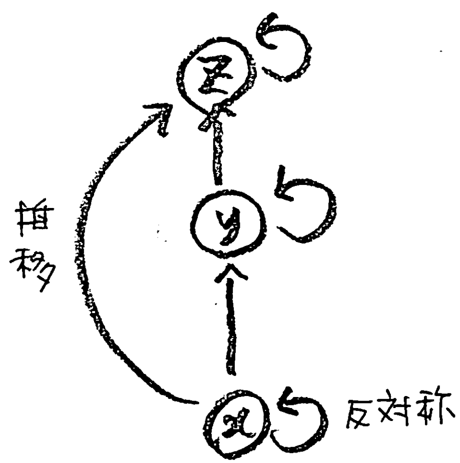



## 12.2 順序関係とその性質

Xの中の関係Rが

反射性
反対称性
推移性

を満たす

Rを**順序関係**という

順序 (order)

$a \leq_R b$

$$a \leq_R b$$

Rの意味で大きい

| | |
|---|---|
| 順序集合 $(X, R)$ | $X$：集合<br>$R$：順序関係<br>$(X, R)$：$X$と$R$の組を順序集合という<br>$R$という関係を持った集合$X$ |
| 例 $(\mathbb{N}, \leq)$ | $\begin{cases} \mathbb{N}：自然数の集合 \\ \leq：〃の大小関係 \end{cases}$ |
| $(\mathbb{N}, \mid)$ | $\mid \overset{\text{def}}{\equiv} \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N},\ b は a の倍数\}$ |

例

$(\mathbb{N}, |)$

倍数

$|$ は順序関係である

(1) $\forall a \in \mathbb{N} : a = a \times 1 \longrightarrow a | a$ 反射性

(2) $a|b,\ b|a \longrightarrow b = a \times h$

$a = b \times k$

倍数の意味

$\longrightarrow a = a \times h \times k$

$\longrightarrow h = k = 1,\ a = a$ 反対称性

(3) $a|b,\ b|c \longrightarrow b = a \times h$

$c = b \times k$

$\longrightarrow c = a \times h \times k$

$c = a \times h'$ 推移性

$\longrightarrow a | c$

| | |
|---|---|
| Xの べき集合 $2^X$ | $2^X$： 集合Xの すべての部分集合を要素にもつ 集合 |
| 例 | $X = \{0, 1\}$ ならば |
| | $2^X = \{ \emptyset,$ … 要素数 0 |
| | $\{0\}, \{1\},$ 〃 1 |
| | $\{0, 1\}$ 〃 2 |
| | $\}$ |
| 順序集合 $(2^X, \subseteq)$ | $(2^X, \subseteq)$： 順序集合の良い例. |

全順序

Rが比較可能性を満たす

$$\forall x, y \in X : \ xRy \text{ または } yRx$$

Rを全順序関係という

$(X, R)$を全順序集合という

例

$(\mathbb{N}, \leq)$

これまでの例の中で、

$(\mathbb{N}, \leq)$が全順序集合

ハッセ図

## 順序集合 $(X, R)$ の図解法

(1) $X$の各要素を，名前を添えた，○で表わす

(2) ○の位置は$R$の大小で上下に配置する

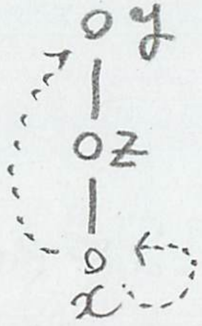
(3) 次の条件を満たす ○$x$ と ○$y$ を結ぶ

隣接する

(3a) $xRy$

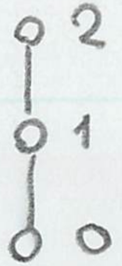
(3b) $x \neq y$

(3c) $xRz$ かつ $zRy$ となる $z$ は $x, y$ の他にない. ?

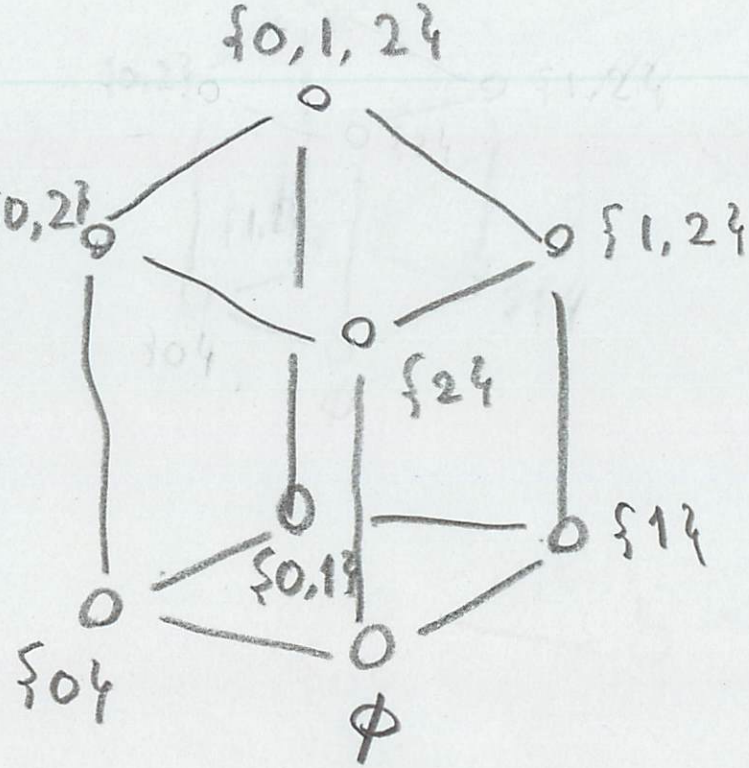


ハッセ図 続き

$(\{0,1,2\}, \leq)$




$(2^{\{0,1,2\}}, \subseteq)$

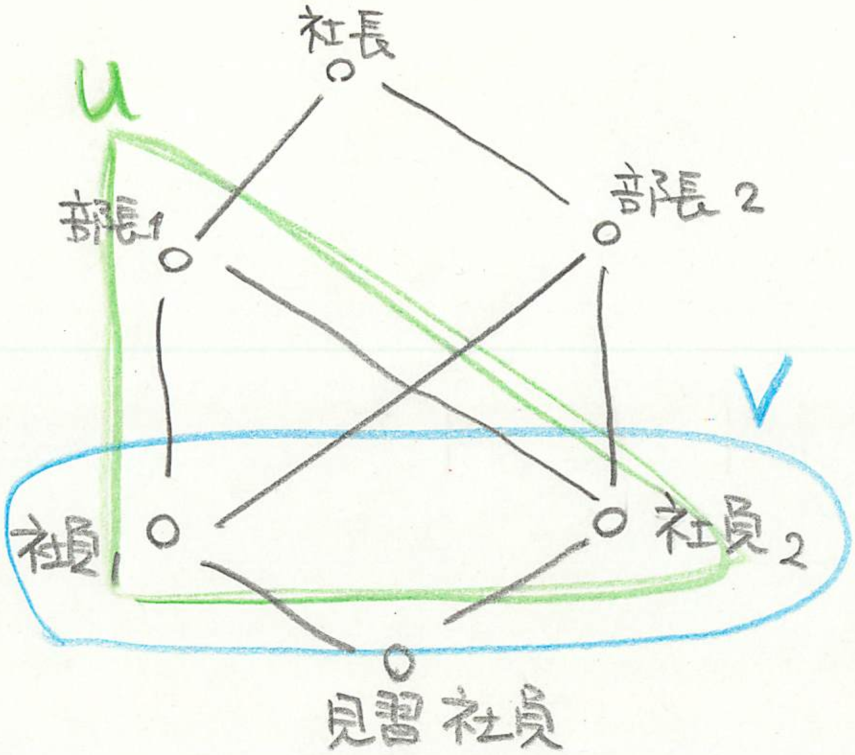



$xRy$ が成り立つか?

$x$ から $y$ に上方に向って到達できるか?

| 順序集合を特徴づける概念 | 順序集合 $(X, R)$, $U \subset X$, $U \neq \emptyset$ |
| --- | --- |
| $U$の上界 | $(\forall y \in U)\ y \leq_R x$ を満たす $x \in X$ |
| $U$の最大元 | $(\forall y \in U)\ y \leq_R x$ 〃 $x \in U$ |
| $U$の極大元 | $(x \leq_R y$ かつ $x \neq y$ ならば $y \notin U)$ となる $x \in U$ |
| $U$の下界 | $(\forall y \in U)\ x \leq_R y$ を満たす $x \in X$ |
| $U$の最小元 | $(\forall y \in U)\ x \leq_R y$ 〃 $x \in U$ |
| $U$の極小元 | $(y \leq_R x$ かつ $y \neq x$ ならば $y \notin U)$ となる $x \in U$ |
| $U$の上限 | $U$の最小上界 |
| $U$の下限 | $U$の最大下界 |

例




U = {部長1, 社員1, 社員2}

Uの最大元は部長1

上界は社長と部長1

Uの最小元はナシ

社員1, 社員2は極小元

下界は見習社員

V = {社員1, 社員2}

上界の集合は {社長, 部長1, 部長2}

| | |
|---|---|
| 束の定理 1.1 | $(X, R)$ が束のとき<br>$\forall x, y \in X$ に対して,<br>結び $x+y \overset{\text{def}}{=} \{x, y\}$ の上限<br>交わり $x \cdot y \overset{\text{def}}{=} \{x, y\}$ の下限 |
| 結合律 | (1) $x+(y+z)=(x+y)+z$<br>$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ |
| 交換律 | (2) $x+y=y+x$<br>$x\cdot y=y\cdot x$ |
| べき等律 | (3) $x+x=x$<br>$x\cdot x=x$ |
| 吸収律 | (4) $x+(x\cdot y)=x$<br>$x\cdot(x+y)=x$ |

例題　順序集合 $(X, R)$ と $U \subseteq X$（有限部分集合）について

次の性質が成り立つことを示せ

(1)　$\forall u \in U$ : $\exists u^+$ は $U$ の極大元 :

$$u \leq_R u^+$$

(2)　$(\forall u \in U)$ : [ $(\exists u^- \in U)$ $u^-$ は $U$ の最小元で

$$u^- \leq_R u \,]$$

証明が納得いかない
全順序でないので
大小判断できない
状態が続くかも

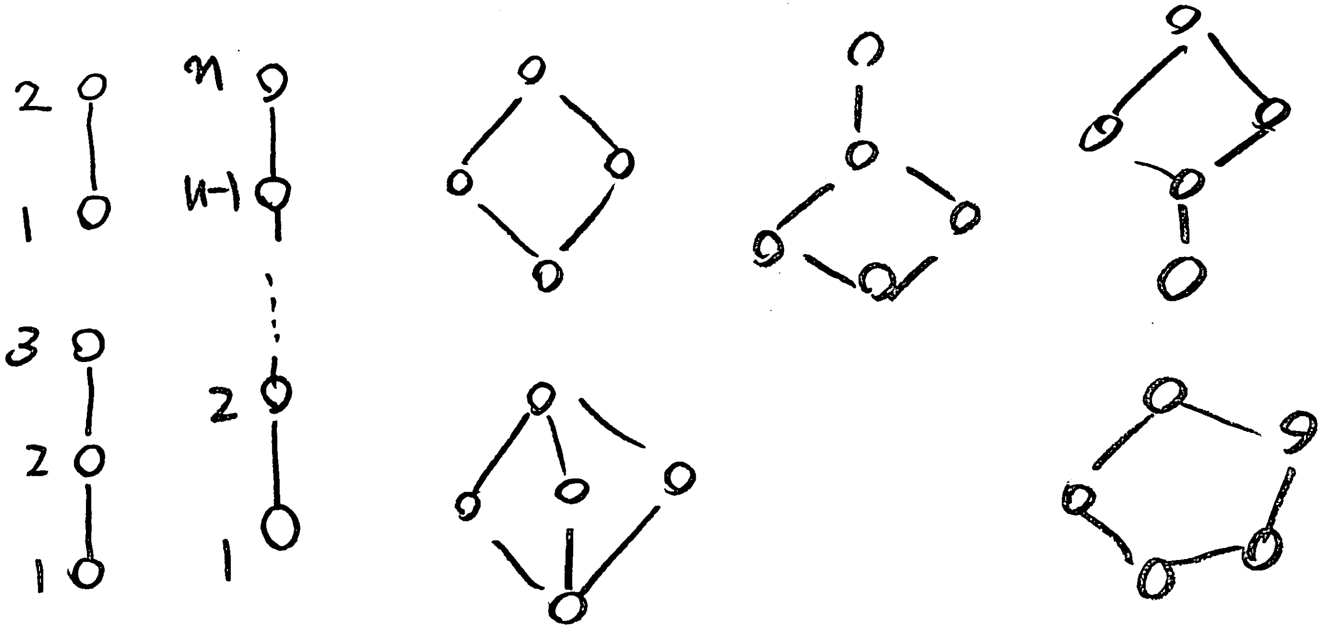
**完備**　$X$は完備 $\overset{def}{\iff}$ $\forall U \subseteq X$: $U$に上下限をもつ

例　$(2^X, \subseteq)$は完備である

**束**　$X$は束 $\overset{def}{\iff}$ $\forall U$は$X$の有限部分集合: $U$は上下限をもつ

束の例　有限全順序集合はすべて束である

有限束



**結合律**

(1) 「$x+(y+z)$」は $\left\{\begin{array}{l}x\text{の上界であるから}\\ y+z\text{の上限 〃}\end{array}\right\}$ なので

$$\left\{\begin{array}{ll} x+(y+z) \geq_R & x \\ \quad〃 & y \\ \quad〃 & z \end{array}\right.$$

一方、$\{x, y, z\}$の任意の上界を$u$とする

$u$は$\{y, z\}$の上界でもある

$\{y, z\}$の最小上界 $y+z \leq_R u$

∴ $u$は$\{x, y+z\}$の最小上界である
（上限）

同様に、$\{x+y, z\}$の最小上界である
（uは）（上限）

上限は高々1つしかないので $\{x+y, z\}$の上限 $=$ $\{x, y+z\}$の上限

∴ $x+(y+z) = (x+y)+z$

定理1.1の続き

(2) 交換律 $x+y=y+x$, $x\cdot y=y\cdot x$ の証明

(3) べき等

$\{x,y\}$の上限 $=$ $\{y,x\}$の上限

同様

(4) 吸収律 $x+(x\cdot y)=x$, $x\cdot(x+y)=x$

$x\cdot y$ は $\{x,y\}$の下限なので

$x\cdot y\leq_R x$ なので

$x$は$\{x, x\cdot y\}$の最大限，したがって上限．

$\therefore\ x+x\cdot y=x$