1.2.3
同値関係、

Xの中の関係、Rが下の性を満たす時

$$\begin{cases} \text{反射性} & xRx \\ \text{対称性} & xRy \leftrightarrow yRx \\ \text{推移性} & xRy,\ yRz \rightarrow xRz \end{cases}$$

Rを<u>同値関係</u>という

同値関係
$a \sim_R b$

$a \sim_R b \iff$ aとbはRの意味で同値である

↑ 記法 ↑ 意味

同値関係の例

日常	同窓・同郷・同姓・同性 など
数学的	等しい.(=)
	合同 (≡)
mod	(mod k)での合同関係　$m \equiv n \pmod{k}$
	$\Leftrightarrow$ $(m-n)$がkの倍数
	↓
	kを法として合同
例	$365 \equiv 1 \pmod{7}$
	$1000 \equiv -1 \pmod{13}$

例題1.8

(k)と略記

kを法とする合同関係が、

同値関係であることを確かめよ

例題1.8の解

(1) 反射性を示す　$m \equiv m \pmod{k}$

$\longrightarrow\ m - m = 0 = 0 \cdot k$

意味

(2) 対称性　$m \equiv n \pmod{k}$ ならば

$m - n = d \cdot k$　ならば

$n - m = (-d) \cdot k$　〃

$n \equiv m \pmod{k}$

(3) 推移性　$m \equiv n \pmod{k}$, $l \equiv m \pmod{k}$

$\rightarrow\ l \equiv n \pmod{k}$ を示す

$m - n = d \cdot k$ かつ $l - m = e \cdot k$ ならば

$l - n = e \cdot k + d \cdot k = (e + d) \cdot k$

$\therefore\ l \equiv n \pmod{k}$

同値類

同値関係 R による，

集合 X の $\underbrace{\text{ブロック}}_{\text{同値}}$ への分割

$[x]_R$

$x \in [x]_R$

- $x \in X$ を含む同値類 $[x]_R \overset{\text{def}}{\equiv} \{ y \in X \mid y \sim_R x \}$

  x に同値な要素から成る集合

- X の R に関する同値類系 $X/R = \{ [x]_R \mid x \in X \}$

  商集合，分割 などと呼ばれる

同値類別

$X=\mathbb{Z}$, $R=$"2を法とする合同関係 (2)" とおくと

$$[0]_{(2)} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$$

= 偶数全体の集合

$$[1]_{(2)} = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots -3, -1, 1, 3, \cdots\}$$

= 奇数全体の集合

$\mathbb{Z}$の分割

$$\mathbb{Z}/(2) = \{[0]_{(2)}, [1]_{(2)}\}$$

直和分割

$$[0]_{(2)} \cup [1]_{(2)} = \mathbb{Z}$$

$$[0]_{(2)} \cap [1]_{(2)} = \phi$$

直和分割

$\mathcal{F}$ を X の部分集合のある集合 ($\mathcal{F} \subseteq 2^X$)

$\mathcal{F}$ が X の直和分割である

$\mathcal{F}$ を X の被覆

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (1) & X = \bigcup_{C \in \mathcal{F}} C \\ (2) & \forall C, C' \in \mathcal{F} : C \neq C' \to C \cap C' = \phi \end{cases}$$

直和分割 $\mathcal{F}$ に属する C ($\subseteq X$) は

$\mathcal{F}$ の ブロック と呼ばれる

直和分割の例

$\mathbb{Z}/(2)$ は $\mathbb{Z}$ の直和分割

そのブロックは $[0]_{(2)}$ と $[0]_1$ である

同値関係
定理1.2

集合X（≠∅）の任意の同値関係Rについて
同値類系 X/R は,
Xの直和分解。

定理1.2の証明

(1) $\forall x \in X:\ x \in [x]_R$ なので (1)は明らか。

(2) (2)の対偶をとって

$$\left([x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset\right) \to [x]_R = [y]_R$$

を証明する。

(仮定) $[x]_R$と$[y]_R$の両方に属する要素hが存在する

すると $x \sim_R h,\ y \sim_R h$ である

$\forall x' \in [x]_R$ について $x' \sim_R x \sim_R h \sim_R y$

$\therefore\ x' \sim_R y$

同様に $\forall y' \in [y]_R:\ y' \sim_R y \sim_R h \sim_R x$

$\therefore\ y' \sim_R x$

したがって $[x]_R = [y]_R$

定理 1.3 $X\ (\neq \emptyset)$ の任意の直和ブロック $\mathcal{F}$ について、
関係 R を次のように決める：

$$x \sim_{R(\mathcal{F})} y \overset{\mathrm{def}}{\iff} x\text{ と }y\text{ は同じブロックに属する}$$

すると、$R(\mathcal{F})$ は X の中の同値関係になる

同値関係、
定理1.3 証明

(1) 反射性　$R(\mathcal{F})$ の反射性は $\forall x \in C$: $x R(\mathcal{F}) x$ が成り立つ

$C \in \mathcal{F}$、$\mathcal{F}$ のブロック

(2) 対称性　$R(\mathcal{F})$ の定義より $\forall x, y \in C$: $x R(\mathcal{F}) y$ かつ $y R(\mathcal{F}) x$

$C \in \mathcal{F}$

(3) 推移性　(仮定) $x \sim_{R(\mathcal{F})} y$, $y \sim_{R(\mathcal{F})} z$

$\to$ $x, y \in C$ かつ $y, z \in C'$　($C \in \mathcal{F}$, $C' \in \mathcal{F}$)

$\to$ y は C と C' の共通要素なので

$C = C'$

$\to$ x と z は同じブロックに属する

関係の $\left\{\begin{array}{l}\text{細かさ}\\\text{粗さ}\end{array}\right.$

$X (\neq \phi)$ 中の関係 R と R' について,

「R が R' より細かい」とは

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad x \sim_R y \rightarrow x \sim_{R'} y$$

R が細かい

$R \subseteq R'$

$R \subseteq R'$ で表わされる

$$(x, y) \in R \rightarrow (x, y) \in R'$$

細粗の例

R を「生年月日が同じ」,

R' を「同年生まれ」

定理 1.4

X の中の全ての同値関係の集合を $\mathcal{E}$ とする

$\subseteq$ は $\mathcal{E}$ の中の順序関係で,

$(\mathcal{E}, \subseteq)$ は完備な順序集合 (∴束) である

定理1.4の証明

包含関係は順序関係である。 $\begin{cases} X \subseteq X, & X \subseteq Y \text{かつ} Y \subseteq X \to X = Y \\ X \subseteq Y \text{かつ} Y \subseteq Z \to X \subseteq Z \end{cases}$

「$(\mathcal{E}, \subseteq)$ が完備である」ことを示す。 どんな部分集合も上下限をもつ

$\mathcal{E}$の任意の部分集合Dに対して、

$$L = \bigcap_{R \in D} R, \quad G = \bigcup_{R \in D} R$$ とおく。

するとLは同値関係

LがDの最大下界(下限)である

Gは反射性と対称性しか満たさないが、

Gの推移的閉包G^*は同値関係

定理1.4
証明続き

推移閉包 G^*，

G^*は同値関係（∵推移性を満たす）

しかもどの$R \in \mathcal{D}$よりも粗い（$R \subseteq G^*$）

$\mathcal{D}$の任意の上界$D \in \mathcal{E}$について，

上界の定義より　$G \subseteq D$

したがって　$G^* \subseteq D^*$

Dは（$D \in \mathcal{E}$より）同値関係なので

$G^* \subseteq D^* = D$

ゆえにG^*は$\mathcal{D}$の最小上界（下限）

$\forall \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$が上限$G^*$と下限$L$をもつので，

$(\mathcal{E}, \subseteq)$は完備である