- 2以上は
  本質は同じ

- 連続と離散は
  $\int$ と $\sum$ の違い

2つ以上の
確率変数の分布

同時確率密度 $f$.

$\forall X_1, X_2 \ \exists f(x_1, x_2)$

① $f(x_1, x_2) \geq 0$

② $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = 1$

③ $P(a < X_1 < b,\ c < X_2 < d)$
$= \int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$

$f(x_1, x_2)$ は $X_1, X_2$ の
同時確率密度 $f$

$X_1$ と $X_2$ に対し、

$\exists f(x_1, x_2) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$$

$\forall a, b, c, d : a < b,\ c < d$

$$P(a < X_1 < b,\ c < X_2 < d)$$

$$= \int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1$$

確率変数
の
独立

確率
周辺密度 $f$

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2 \quad \begin{aligned} &= P(a < X_1 < b,\ -\infty < X_2 < \infty) \\ &= P(a < X_1 < b) \end{aligned}$$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1 \qquad ''$$

$X_1$ と $X_2$ が互いに
独立 $\equiv f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \quad (x_1, x_2) \in R^2$

$$P(a < X_1 < b,\ c < X_2 < d)$$

$$= \int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1$$

$$= \int_a^b f_1(x_1)\, dx_1 \int_c^d f_2(x_2)\, dx_2$$

$$= P(a < X_1 < b) \cdot P(c < X_2 < d)$$

$f(x_1, x_2)$が given

$$P(a < X_1 < b)$$
$$= P(a < X_1 < b, -\infty < X_2 < +\infty)$$
$$= \int_a^b \Big\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2}_{f_1(x_1)} \Big\} dx_1$$

$X_1$の密度f. → $f_1(x_1)$

$X_1$の辺周確率密度f.

$X_2$に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1$$

$X_1, X_2$ の同時密度 $f$

$f(x_1, x_2)$

$X_1$ と $X_2$ が独立の時

周辺D f, $f_1(x_1), f_2(x_2)$

if $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f(x_2)$ の時は, $X_1, X_2$ は独立,

$P(a<X_1<b, c<X_2<d)$

$= \int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$

$= \int_a^b f_1(x_1)\, dx_1 \cdot \int_c^d f_2(x_2)\, dx_2$

$= P(a<X_1<b) \cdot P(a<X_2<d)$

確率変数
$n$個

$X_1, \cdots, X_n$

同時密度関数

$f(\overset{\vec{x}}{x_1, x_2, \cdots, x_n})$

$f(\overset{\vec{x}}{x_1, \cdots, x_n}) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x})\, d\vec{x} = 1$$

$\vec{a} < \vec{b}$

$$P(\vec{a} < \vec{X} < \vec{b}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} f(\vec{x})\, d\vec{x}$$

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x_n)\, dx_2 \cdots dx_n$$

$X_1$の周辺密度 $f$.

$f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ の時.

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立

$$P(\vec{a} < \vec{X} < \vec{b}) = P(a_1 < X_1 < b_1) \cdots P(a_n < X_n < b_n)$$

$$M_{X_1 + \cdots + X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

$\varphi(X_1, X_2)$の

平均

$E\{\varphi(X_1, X_2)\}$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

定理1　$X_1$と$X_2$は独立

$\varphi(X_1), \varphi(X_2)$も独立

$$\boxed{\begin{aligned} &E(\varphi_1(X_1)\cdot\varphi_2(X_2)) \\ &\quad = E(\varphi_1(X_1))\cdot E(\varphi_2(X_2)) \end{aligned}}$$

系1.　$E(X_1 X_2) = E(X_1)(X_2)$

独立性より

$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$

同2

$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)$

定理1の証明

$$E(\varphi_1(X_1) \cdot \varphi_2(X_2))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x_1) f_1(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x_2) f_2(x_2) dx_2$$

$$= E(\varphi_1(X_1)) \cdot E(\varphi_2(X_2))$$

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

系2 $X_1$ と $X_2$ は互独立，積率母関数

$$M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t)$$

$$M_{X_1+X_2}(t) = E(e^{t(X_1+X_2)})$$

$$= E(e^{tX_1} \cdot e^{tX_2})$$

$$= E(e^{tX_1}) \cdot E(e^{tX_2})$$

$$= M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t)$$

例2



$X_1, X_2$: 独立

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\quad f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)$

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\quad f_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)$

$Y = X_1 - X_2$ はどんな分布

$M_{X_1}(t) = E(e^{tX_1}) = \exp(\mu_1 t + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2)$

$M_{X_2}(t) = E(e^{tX_2}) = \exp(\mu_2 t + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2)$

$M_{X_1 - X_2}(t) = E(e^{t(X_1 - X_2)})$

$= \cancel{\exp} E(e^{tX_1}) \cdot E(e^{-tX_2})$

$= \exp(\mu_1 t + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2) \cdot \exp(-\mu_2 t + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2)$

$= \exp((\mu_1 - \mu_2)t + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2)$

$Y = X_1 - X_2$

$\sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

例13 独立 $X_1, X_2 \sim N(0,1)$

$$Y = X_1^2 + X_2^2$$

の 密度f $g(y)$ を求める

$X_i^2 \sim \chi^2(1)$ なので $M_{X_i^2}(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$

$t < \frac{1}{2},\ i=1,2$

$$M_Y(t) = M_{X_1^2}(t) \cdot M_{X_2^2}(t)$$

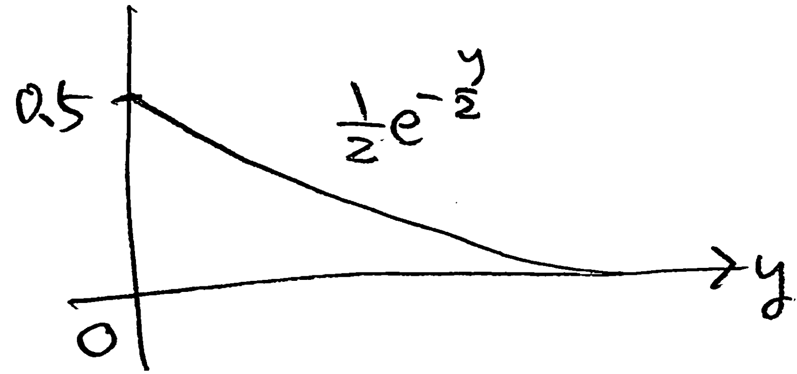
$$= (1-2t)^{-1},\ t < \frac{1}{2}$$

$\therefore Y \sim \chi^2(2)$

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2}) 2^{\frac{r}{2}}} x^{\frac{r}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \quad 0 < x < \infty$$

$$g(y) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{y}{2}\right)$$

$0 < y < \infty$



# 独立な確率変数の和の分布

独立 $X_1, X_2 \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

定理2

$$Y = k_1 X_1 + k_2 X_2$$

$$\sim N(k_1\mu_1 + k_2\mu_2,\ k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2)$$

定理3

$X_1$ と $X_2$ は独立でなくても

① $E(k_1X_1 + k_2X_2) = k_1E(X_1) + k_2E(X_2)$

② $V(k_1X_1 + k_2X_2)$

$= k_1^2V(X_1) + k_2^2V(X_2)$

$$E(k_1X_1+k_2X_2)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(k_1x_1+k_2x_2)f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$=k_1\int_{-\infty}^{\infty}x_1\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)dx_2\right\}dx_1$$

$$+k_2\int_{-\infty}^{\infty}x_2\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)dx_1\right\}dx_2$$

$$=k_1\int_{-\infty}^{\infty}x_1f_1(x_1)dx_1+k_2\int_{-\infty}^{\infty}x_2f_2(x_2)dx_2$$

$$=k_1E(X_1)+k_2E(X_2)$$

$$E(k_1X_1+\cdots+k_nX_n)$$

$$=k_1E(X_1)+k_2E(X_2)+\cdots+k_nE(X_n)$$

$$= \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

$$M_X(t) = E\{e^{tX}\}$$

$$Y = k_1 X_1 + k_2 X_2$$

$$\sim N(k_1\mu_1 + k_2\mu_2, k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2)$$

の証明

$$M_Y(t) \overset{\text{定義}}{=} E\{\exp(t(k_1 X_1 + k_2 X_2))\}$$

$$= E\{\exp(tk_1 X_1) \cdot \exp(tk_2 X_2)\}$$

$$= \exp\left\{(k_1\mu_1 + k_2\mu_2)t + \frac{1}{2}(k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2)t^2\right\}$$

(2) 分散

$$V(k_1X_1+k_2X_2)=E\{[(k_1X_1+k_2X_2)-E(k_1X_1+k_2X_2)]^2\}$$

$$=E\{[k_1(X_1-\mu_1)+k_2(X_2-\mu_2)]^2\}$$

$$=k_1^2E\{(X_1-\mu_1)^2\}+k_2^2E\{(X_2-\mu_2)^2\}$$

$$+2k_1k_2\underbrace{E\{(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)\}}_{\text{共分散 (co variance)}} \rightarrow X_1X_2-\mu_1\underbrace{X_2}_{\mu_2}-\mu_1\underbrace{X_1}_{\mu_1}+\mu_1\mu_2$$

$E(X_1)E(X_2)$

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-\underbrace{E(X_1)E(X_2)}_{0}$$

$X_1$と$X_2$が互独立なら

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0$$

$$\therefore V(k_1X_1+k_2X_2)=k_1^2V(X_1)+k_2^2V(X_2)$$

定理4 $X_1, \cdots, X_n \sim \chi^2(r_i)$ $i=1 \sim n$

この時 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ は　　再生的

自由度 $r_1 + \cdots + r_n$ の $\chi^2$分布

$$M_{X_i}(t) = E\{e^{tX_i}\} = (1-2t)^{-\frac{r_i}{2}}$$

$$t < \frac{1}{2}$$

$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t)$ なので

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}\sum r_i}, \quad t < \frac{1}{2}$$

例4 $X_1$と$X_2$は独立

$X_1 \sim$ パラメータ2の指数分布

$X_2 \sim \chi^2(4)$

$Y = 4X_1 - X_2$ の時

$E(X_1) = \frac{1}{2}$　　$E(X_2) = 4$

$V(X_1) = \frac{1}{4}$　　$V(X_2) = 8$

$E(4X_1 - X_2) = 4E(X_1) - E(X_2) = -2$

$V(4X_1 - X_2) = 4^2 V(X_1) + V(X_2) = 12$

# 確率変数の和の確率密度関数

$X_1$ と $X_2$ は互いに独立

$f(x_1), f(x_2)$ が密度 $f$.

$Y = X_1 + X_2$, その密度 $f$. $g(y)$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y - x_1) \cdot f_1(x_1)\, dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y - x_2) \cdot f_2(x_2)\, dx_2$$

# 証明

$X_1, X_2, Y$ の分布関数

$F_1(x),\ F_2(x),\ G(y)$ とする

$$G(y) = P\{X_1 + X_2 \le y\}$$

$$= \iint_{x_1+x_2 \le y} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) \left\{ \int_{-\infty}^{y-x_1} f_2(x_2)\, dx_2 \right\} dx_1$$

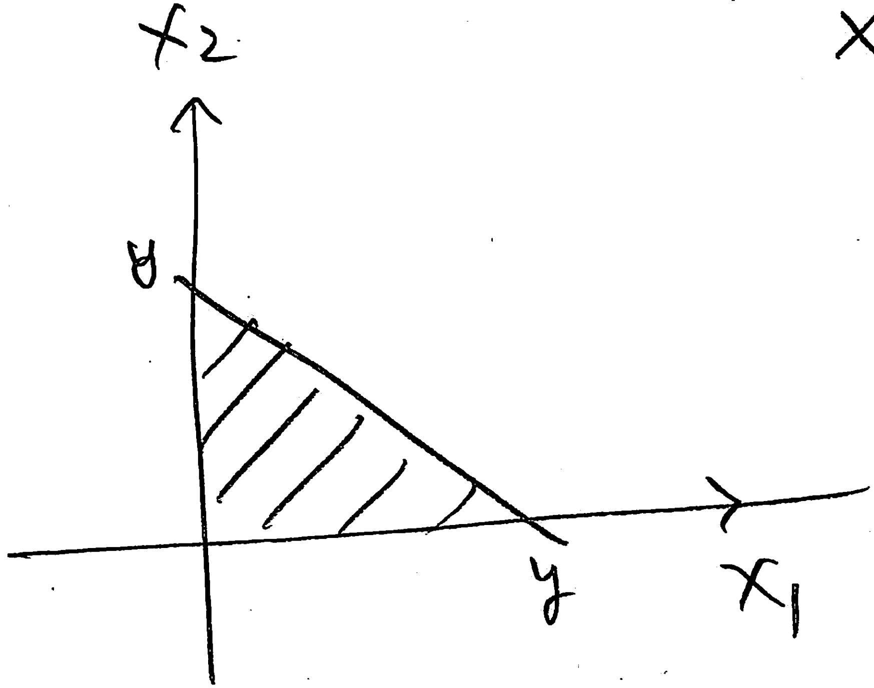
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\, F(y - x_1)\, dx_1$$

$$\because F(\infty) = 0$$

$$g(y) = G'(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(y - x_1)\, dx_1$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2) f_1(y - x_2)\, dx_2$$




$X_1, X_2 > 0$

$$g(y) = \int_0^y f_1(x_1) f_2(y - x_1)\, dx_1$$

$$= \int_0^y f_2(x_2) f_1(y - x_2)\, dx_2$$

例5 $X_1, X_2$ 互独立

$\sim \lambda$の指数分布

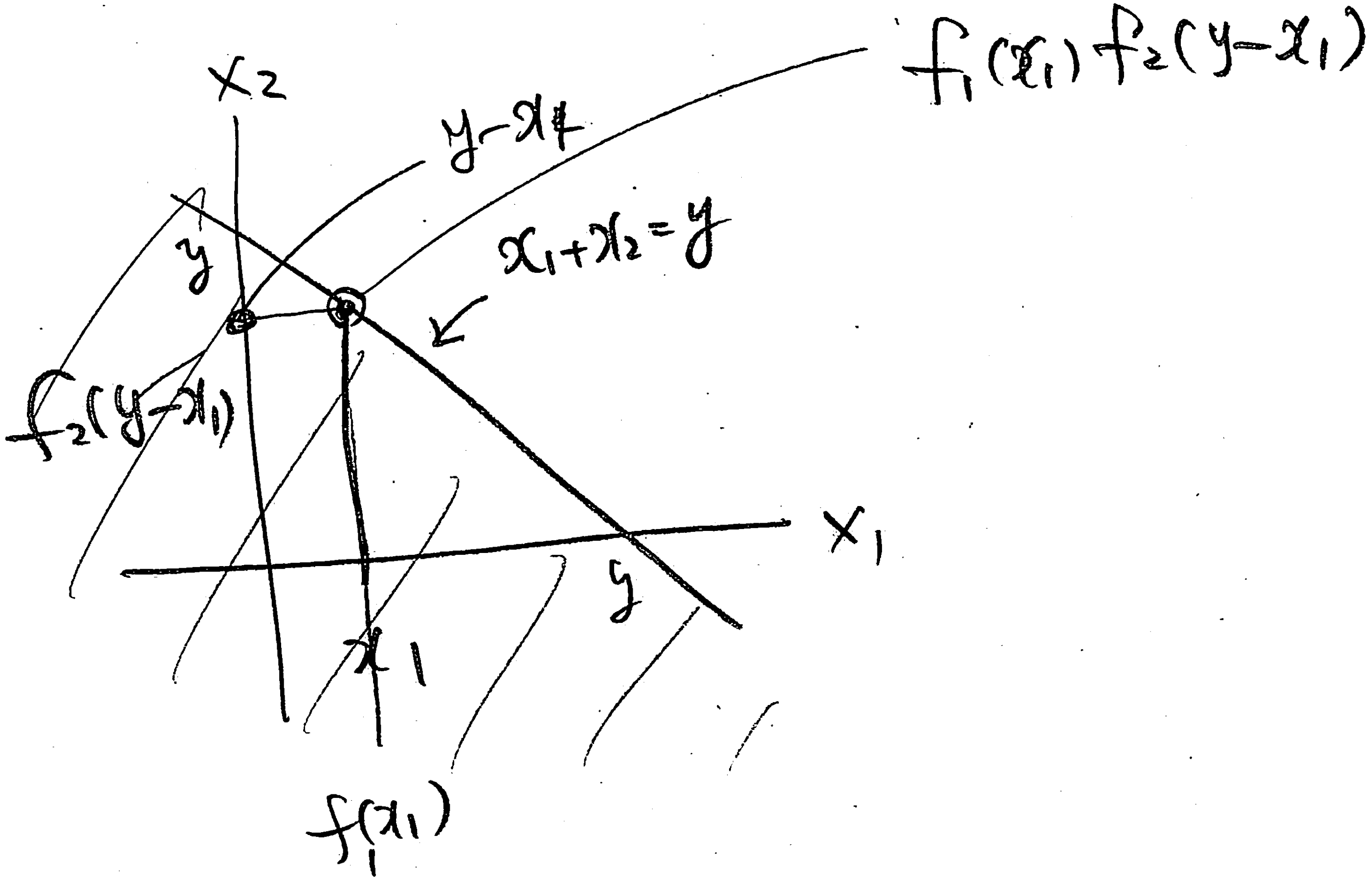
$Y = X_1 + X_2$

$X_i$の密度f $\lambda e^{-\lambda x_i}$

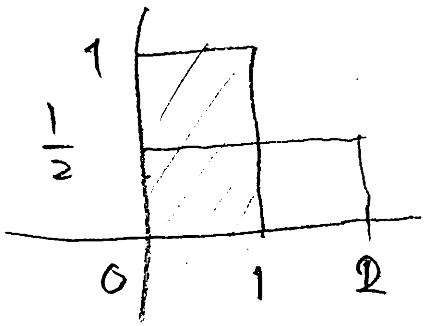
$$g(y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda(y-x_1)} \cdot \lambda e^{-\lambda x_1} dx_1$$

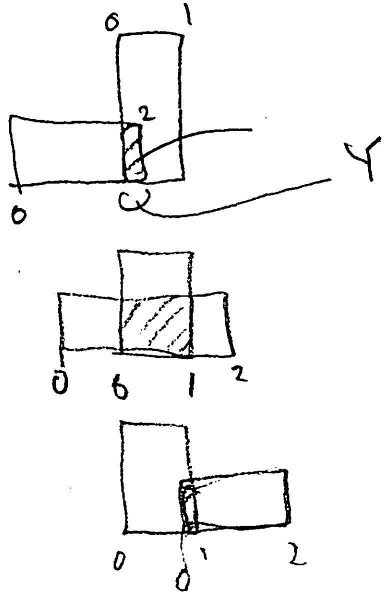
$$= \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda y} dx_1$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda y} \quad (0 < y < \infty)$$



$X_2$
$y-x_1$
$f_1(x_1)f_2(y-x_1)$
$y$
$x_1+x_2=y$
$f_2(y-x_1)$
$X_1$
$y$
$x_1$
$f_1(x_1)$





例6

独立 $X_1, X_2$

$$X_1 \sim f_1(x_1) = 1,\ 0 < x_1 < 1$$

$$X_2 \sim f_2(x_2) = \frac{1}{2},\ 0 < x_2 < 2$$

の時

$Y = X_1 + X_2$ の確率密度 $f$

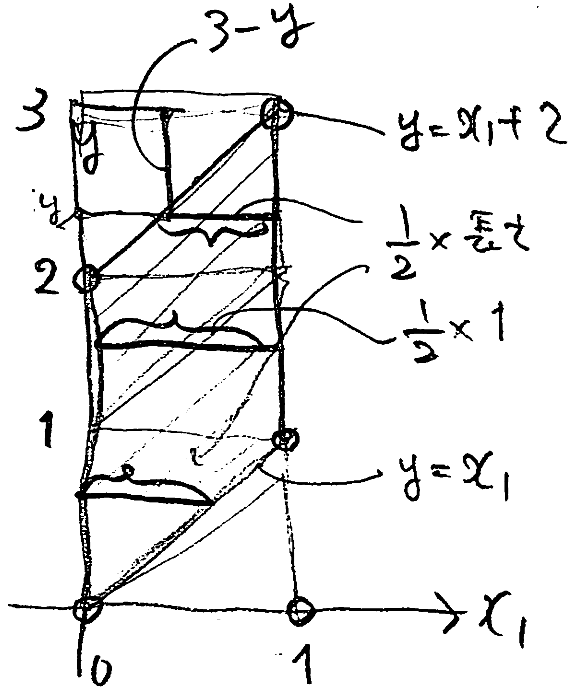
$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(y-x_1)}_{\frac{1}{2}[0<y-x_1<2]} \underbrace{f(x_1)}_{1[0<x_1<1]} dx_1$$

$0<y-x_1<2$ = $x_1 < y < x_1+2$

$$= \int_0^y \frac{1}{2} dx_1 = \frac{y}{2} \quad 0 < y \le 1$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} dx_1 = \frac{1}{2} \quad 1 \le y < 2$$

$$= \int_{3-y}^1 \frac{1}{2} dx_1 = \frac{-1}{2}(y-3) \quad 2 \le y < 3$$



例16 独立 $X_1, X_2$

$X_1 \sim f_1(x_1) = 1 \quad 0 < x_1 < 1$

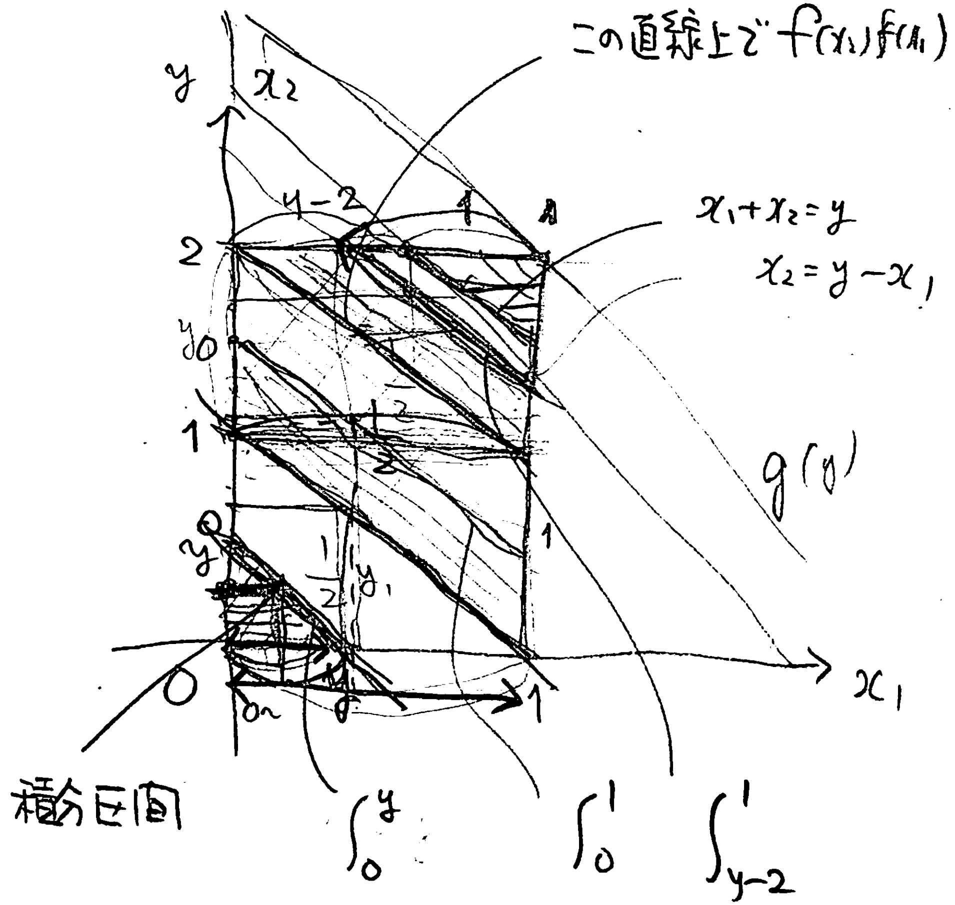
$X_2 \sim f_2(x_2) = \frac{1}{2} \quad 0 < x_2 < 2$

の時

$Y = X_1 + X_2$ の確率分布fは

$0 \le y \le 3$ で $\neq 0$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\boxed{f(y-x_1)}}_{0<y-x_1<2\text{で定ぎ}}^{\frac{1}{2}} \overbrace{\boxed{f(x_1)}}^{1\ (0<\ <1)} dx_1$$




$f(y - x_1) \quad 0 < y - x_1 < 2$ で定義

$x_1 < y < 2 + x_1$

$0 < x_1 < 1$

$0 < y < 3$

# 4.3 無作為標本

定義3.

互いに独立 $X_1, \cdots, X_n$ 同じ分布に従う $\Rightarrow$ 大きさ $n$ の**無作為標本**

(random sample)

$X_1, \cdots X_n$ の同時密度 $f(x_1, \cdots, x_n)$

とする $X_i$ の周辺密度 $f_i(x_i)$

共通密度 $f(x)$

$X_1 \cdots X_n$ が互いに独立

$\Longrightarrow f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$

同じ分布に従う $= f(x_1) \cdots f(x_n)$

無作為標本ならば

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$$

定義4. 無作為標本 $X_1 \ldots X_n$ だけの関数 $Y = \varphi(X_1, \cdots, X_n)$ を統計量 (statistic)

例えば

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

標本平均 sample mean

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

標本分散

# 無作為標本

定理6　$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ に従う

無作為標本とする

標本平均

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

$$\sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

平均は同じで
分散は $1/n$ になる

定理2

$$E\left(\sum k_i X_i\right) = \sum_i k_i E(X_i) \longrightarrow k_i = \frac{1}{n}$$

$$V\left(\sum k_i X_i\right) = \sum k_i^2 V(X_i)$$

$$E\left(\sum \frac{1}{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \sum \mu_i$$

$$V\left(\sum \frac{1}{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum \sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sigma^2$$

定理7

母集団

「$X_1, \cdots X_n$ は $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさnの無作為標本」とする

$$\sum\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\left\{\sum(X_i - \mu)\right\}^2$$ は

自由度 n の $\chi^2$ 分布に従う

$\because X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\rightarrow \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right) \sim N(0,1)$

$\rightarrow \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2(1)$

定理4

$X_i \sim \chi^2(r_i)$ の時

$Y = \sum X_i$ は 自由度 $\sum r_i$ の $\chi^2$ 分布に従う

$\chi^2_{\sum r_i}$

$$\therefore \sum_1^n \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right) \sim \chi^2_n$$

再生性