1回1回の試みでは、

Eが起こるか起こらないかは
何とも言えないが、

長い間続けていると、
その起こる割合は
$\underbrace{\text{一定の値}}_{\mu}$に近づいてくる

大数の弱法則。　小針晛宏

www.math.s.chiba-u.ac.jp
~wang/teaching

大数の弱法則

1. 独立性　$X_1 \cdots X_n$ が互いに独立
2. 平均の同一性　$E(X_i) = \mu,\ i = 1:n$
3. 分散の有限性　$\sigma_i^2 = V(X_i) \leq \sigma^2$　1:n

このとき　$\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\underbrace{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}}_{\bar{X}} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0$$

$\bar{X}$ が μ に確率収束
(converge in probability)

大数の弱法則の証明

$$Y = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$ とおくと $E(Y) = \mu$

独立性より

$$V(Y) = \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n^2} \leq \frac{\sigma^2 + \cdots + \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

チェビシェフの不等式

$$P(|Y - E(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}$$

より

$$P(|Y - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

したがって

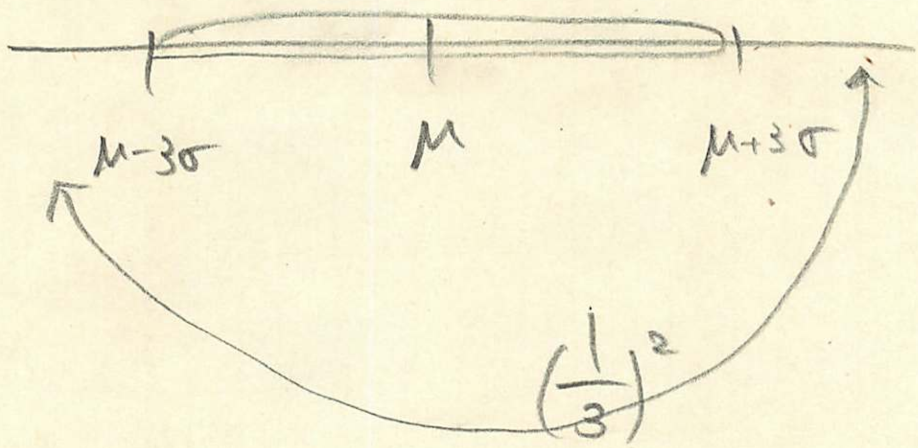
$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Chebyshev の不等式

prob. var. X (μ, σ^2)

$$\forall k > 0 : \quad P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$$

$\pm k\sigma$ を超える確率 $1/k^2$ である

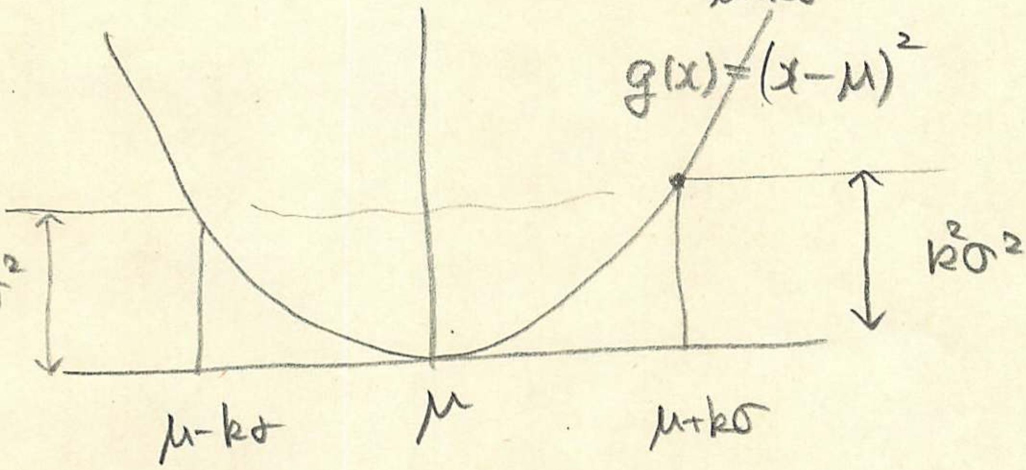


Chebyshevの不等式の証明

$$\sigma^2 = V(X)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$\geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$



$$\geq k^2\sigma^2 \left[\int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} f(x)\,dx \right]$$

σ^2

$$= k^2\sigma^2 P\{|X-\mu| \geq k\sigma\}$$

$$\frac{1}{k^2} \geq P\{|X-\mu| \geq k\sigma\}$$

大数の強法則
(strong law of large number)

1 prob. v. X_i $i=1:n$ 互いに独立，同一分布

2 $\mu = E(X_i)$

$\sigma^2 = V(X_i)$ $i=1:n$

$v_4 = E(X_i-\mu)^4$

$\frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} - 3$ 尖度

このとき，

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} = \mu\right) = 1$$

$\overline{X}$ が μ に概収束

大数の強法則の証明

事象 $\lim_{n\to\infty} \overline{X} = \mu$ であるか

$\parallel$

等価 $^\forall\varepsilon>0\ ^\exists N_\varepsilon : {}^\forall n > N_\varepsilon$

$$|\overline{X} - \mu| < \varepsilon$$

余事象

$^\exists\varepsilon\ ^\exists n > {}^\forall N :$

$$|\overline{X} - \mu| \geq \varepsilon$$

$n > N > \nu_4 \sigma$ のとき Chebyshev の不等式より

$$\begin{aligned} P_n &= P(|\overline{X} - \mu| \geq \varepsilon) \\ &\leq \frac{E(\overline{X}-\mu)^4}{\varepsilon^4} = \frac{1}{n^2\varepsilon^4}\left[\frac{1}{n}\nu_4 + 3\left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma^4\right] \\ &< \frac{1+3\sigma^4}{\varepsilon^4} \cdot \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

1つの $\varepsilon > 0$ と $^\forall N$ に対し、

$$\begin{aligned} P(\lim_{n\to\infty}\overline{X} = \mu) &= 1 - P(|\overline{X} - \mu| \geq \varepsilon \mid \text{for some } n > N) \\ &\geq 1 - (P_N + P_{N+1} + \cdots) \\ &\geq 1 - \frac{1+3\sigma^4}{\varepsilon^4}\left\{\frac{1}{N^2} + \cdots\right\} \\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} 1 \end{aligned}$$

中心極限定理

Central Limit Theorem

1. $X_1, \cdots, X_n$ は独立で同じ分布,

2. $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ $i = 1:n$

prop. v. $Y = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$ は標準正規分布に弱収束する

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{\sqrt{n}(X - \mu)}{\sigma} \leq y \right] = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

中心極限定理の証明

「Yの積率母関数が標準正規分布のそれに近づく」ことを証明.

X_iの積率母f.の存在を仮定.

$Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$ とおいて
$$E(Y_i) = 0$$
$$V(Y_i) = 1$$
$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Y_iの積率母関数を$M(t)$とおいて

$$M_{Y_i}(0) = E(e^{0Y_i}) = 1$$

$$M'_{Y_i}(0) = E(Y_i) = 0$$

$$M^{(2)}(0) = E(Y_i^2) = V(Y_i) + E(Y_i)^2 = 1$$

$\psi(t) = \log M(t)$

$$\psi'(t) = \frac{M'(t)}{M(t)},\quad \psi''(t) = \frac{M''(t)M(t) - (M'(t))^2}{(M(t))^2}$$

$$\psi(0) = 0,\ \psi'(0) = 0,\ \psi''(0) = 1$$

中心極限定理の証明の続き

ある $|\theta| < |t|$

$$\psi(t) = \psi(0) + \frac{\psi^{(1)}(0)}{1!}t + \frac{\psi^{(2)}(0)}{2!}t^2 + \frac{\psi^{(3)}(\theta)}{3!}t^3$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + \frac{\psi^{(3)}(\theta)}{6}t^3$$

Yの積率母関数

$$E(e^{Yt}) = E\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{1}^{n} Y_i t}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_i}\right) \quad 2\ \text{同じ母関数}$$

$$= \left[M\left(t/\sqrt{n}\right)\right]^n$$

$$= e^{n\log\left(M\left(t/\sqrt{n}\right)\right)}$$

$$= \exp\left\{n\left[\frac{1}{2}\left(t/\sqrt{n}\right)^2 + \frac{\psi^{(3)}(\theta)}{6}\left(t/\sqrt{n}\right)^3\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}t^2 + \frac{\psi^{(3)}(\theta)}{6}\cdot\frac{t^3}{\sqrt{n}}\right\}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left\{\frac{1}{2}t^2\right\}$$