関数空間

無限次元の
線形空間

任意の複素関数を要素とする
集合 U

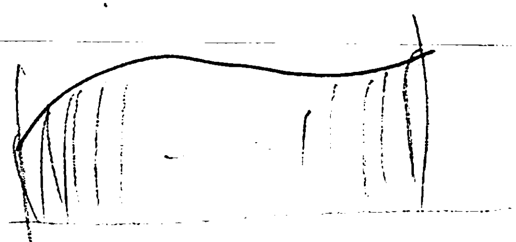
$f, g \in U \quad u = f + g \in U$

$k \in \mathbb{C} \quad v = kf \in U$

ベクトルの値

$\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 離散

$u(x) = \{ u(x_0) \mid x_0 \in I \}$ 連続
無限



内積

$$(u, v) = \int_a^b dx\, u(x) \overline{v(x)}$$

正規性

$$\int_a^b dx \cdot |u(x)|^2 = 1$$

正規直交

$$\int_a^b dx\, \phi_i(x) \overline{\phi_j(x)} = \delta_{ij}$$

完全 $\forall f \in U \supset \{ \phi_k(x) \}$

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k \psi_k(x) \right|^2 = \int_a^b dx \left| f(x) - \sum f_k \psi_k(x) \right|^2 \to 0$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \phi_k(x)$$

関数空間 (2)

正規直交関数系

$\{\phi_k(x)\}$

$$f(x)=\sum_1^n f_k\phi_k(x)$$ スペクトル分解

$$f_k=\int_a^b dx\, f(x)\overline{\phi_k}(x)$$ 射影

$$f(x)=\sum_1^n\left(\int_a^b dx' f(x')\overline{\phi_k(x')}\right)\phi_k(x)$$

フーリエ式展開

$$=\int_a^b dx'\left(\sum_1^n \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(x')}\right)f(x')$$

$$\sum_1^n\varphi_k(x)\varphi_k(x')=\delta(x'-x)$$

$\{\phi_k(x)\}$ が完全である

$\Updownarrow$

$$\|f\|^2=\int_a^b dx\,|f(x)|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|^2$$