測度の定義　　よくわかる測度論とルベーグ積分より

集合のサイズのこと

対象は集合族，それは

1.1 完全加法族

SはXの部分集合からなる集合族

$s \in S$ は $s \subset X$

（σ－加法族）

SがX上の完全加法族

(1) $E \in S \Rightarrow E^c \in S$

(2) Sの集合列 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対し，

$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in S$

1.2 測度

写像 $\mu : S \to [0, \infty]$

(1) $\mu(\phi) = 0$

(2) 互いに排反なSの集合列 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対し

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

1.3 測度空間 (X, S, μ)

「完備である」とは

$E \in S$, $\mu(E) = 0$の時，

$F \subset E$に対し $F \in S$かつ

$\mu(F) = 0$

1.4 測度の性質

相排反なE_jに対し

$$\mu(\bigcup E_j) = \sum \mu(E_j)$$

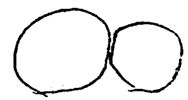
$E \subset F$ ならば

$$\mu(E) + \mu(F - E) = \mu(F)$$

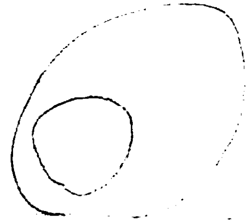
裏へ

μの性質

(1) $E_j \cap E_k = \phi \to \mu\left(\bigcup^{N} E_j\right) = \sum^{N} \mu(E_j)$



(2) $E \subset F \to \mu(E) + \mu(F - E) = \mu(F)$



$$\begin{array}{l}\mu(E) < \infty \\ \mu(F) < \infty\end{array} \longrightarrow \mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$$

(3) $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$に対し $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$

(4) $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$が単調増加 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(E_j)$$

(5) 単調減少 かつ $\mu(E_1) < \infty$ ならば

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(E_j)$$

確率空間 (S, E, P)
(probability space)

標本 イベント Sを含む.

$$\left.\begin{cases} \text{可測空間}\ (S, E) \\ P(S)=1\ \text{確率測度} \end{cases}\right\}$$ となる 測度空間

コルモゴロフの確率論の公理的構成から

確率論は 確率空間における
確率測度の理論

ボレル集合

○ 位相空間の
開(or閉)集合から
可算回の合併,交叉,差
によって得られる集合の総称。

○ 位相空間Xに対し
X上のボレル集合全体の成す族は
完全加法族 (σ-集合体)をなし,
ボレル集合体 (algebra)

$\cup, \cap, {}^c$
で閉じてる

全ての開集合を含む,
最小の完全加法族

距離, 面積, 体積 などの
一般化。

○ 測度

ハウスドルフ空間

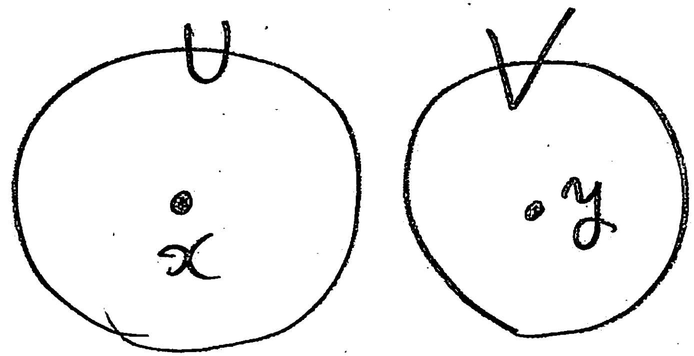
位相空間 X,

$x, y \in X : x \neq y$

xの 近傍 Uと
yの 〃 Vで

$$U \cap V = \phi$$

となる U, Vが必ず存在する



二項分布
確率モデル

Ω : 全事象を表わす集合

$\mathbb{B}$: Ω上のσ-加法的集合族

μ : 事象 $A \in \mathbb{B}$ の確率

1. $0 \leq \mu(A) \leq 1$
2. $\mu(\Omega) = 1$
3. $\mu(\sum A_i) = \sum \mu(A_i)$

長さNのベルヌイ列の確率モデル

$$\Omega = \{ \overset{\vec{x}_N}{(x_1, \cdots x_N)} \mid x_i = 1 \text{ or } 0 \}$$

N次元の 2^N 個から成る格子

$\mathbb{B}$ = Ωの部分集合の全体 2^{Ω}

$$P(x_1, \cdots, x_N) = p^{\sum x_i} q^{N - \sum x_i}$$

$$\mu(A) = \sum_{(x_1, \cdots, x_N) \in A} P(x_1, \cdots, x_N)$$

二項分布
確率モデル(2)

長さNのベルヌイ列でEがr回
起こる確率を考える
(これを長さNのベルヌイ列の確率
モデル上で考える)

この事象を A_r とする

$A_r = \{(x_1, \cdots, x_N) \mid x_1 + \cdots + x_N = r\}$

標本の集合.

各標本には

$P(x_1, \cdots, x_N) = p^r q^{N-r}$

A_r の個数は ${}_N C_r$

従って

$$\mu(A_r) = \sum_{(x_1, \cdots x_N) \in A_r} P(x_1, \cdots, x_N)$$

$$= {}_N C_r \cdot p^r q^{N-r}$$

確率モデルの例

例4′

$\Omega = \mathbb{R}^n$

$\mathbb{B}$ = n次元のボレル集合族

$p(\vec{x})$ は

$$\int_V p(\vec{x})\,d\vec{x} = 1$$

$\mu(A)$ は

$$= \int_A p(\vec{x})\,d\vec{x}$$

$(\Omega, \mathbb{B}, \mu)$ は確率モデル.

例5′

$\Omega = \mathbb{Z}^n$

$\mathbb{B} = 2^\Omega$

$p(\vec{m})$ は Ω 上の正値 f.

$$\sum_{\vec{m} \in \Omega} p(\vec{m}_i) = 1$$

$$\mu(A) = \sum_{\vec{m} \in A} p(\vec{m})$$

$(\mathbb{Z}^n, 2^\Omega, \mu)$ は確率モデル.

確率変数

小針 p24 25

確率モデル $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ があって

$$x : \Omega \to R$$

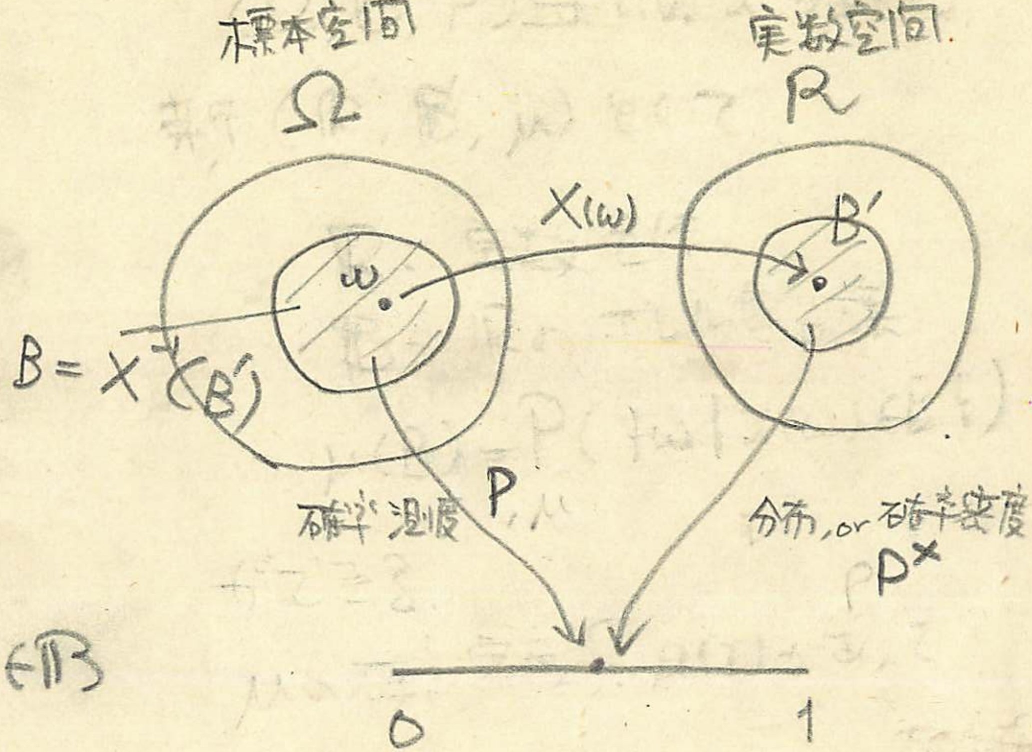
確率変数

$\{\omega \mid a < x(\omega) < b\}$ が

計算可能

R の任意のボレル集合 B' に対し

$$x^{-1}(B) = \{\omega \mid x(\omega) \in B'\} \in \mathbb{B}$$



$$P^X(B') = P(X^{-1}(B'))$$
$$= P(B)$$

○ 確率 model $\overset{M}{\shortparallel}(\Omega, \mathbb{B}, \overset{(x)}{P})$ があって

M 上の r.v. X があるとき、

○ 新しい model $M' = (\mathbb{R}, \mathbb{B}', \overset{(x)}{\mu})$ がある

$\mathbb{R}$のボレル集合

$$\mu(B') = P\{\omega \mid X(\omega) \in \mathbb{B}'\}$$

○ このような確率モデルは多くの場合次のようになる

$$P(x \in B') = \mu(B') = \int_{B'} \rho(x)\,dx \quad \text{or} \quad \sum_{n \in B'} \rho(n)$$

確率変数 X の分布という

○ 特に、$(\Omega, \mathbb{B}, P)$ で $\Omega = \mathbb{R}$,

$$X(\omega) = \omega \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

ならば、X の分布 μ は P 自身である

その意味で $\Omega = \mathbb{R}$ の時は、

自然な確率変数が P に対して一つ対応している

$\Omega = R$