5章 大数の法則と中心極限定理

大数の法則　コイン投げ、表の出る割合の挙動

↓ 回数を増やす

1/2に近い値

中心極限定理　繰り返す回数が増える

↓

安定した性質が得られる

5.1 確率収束と分布収束

数列の収束　$x_n = 1/n$ の場合

$\{x_n\}$ は一通りに定まり、

$x_\infty = 0$ と一つに 〃

コイン投げの繰返し 表の出る回数の収束)

i 回目の表か裏かを $X_i = 0, 1$

n 回投げて表が出る割合を

$Y_n = \sum X_i / n$

$Y_n = 1$ のケースもあり得るが、その可能性は低く、

$Y_n = 1/2$ の近くにいる可能性が高いと思われる。

確率変数の収束

確率収束

$X_n \to X$ と考える

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

X_n は X に確率収束する

$$X_n \xrightarrow{P} X$$ と記述する

概収収 — 本書では扱わない、確率収束のみ

確率収束よりも強い収束.

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$$

どっかから先、$X_n = X$ となる

確率分布の収束

確率変数 X_n と X，その分布関数

$$\begin{cases} F_n(x) = P(X_n \leq x) \\ F(x) = P(X \leq x) \end{cases}$$ と表わす.

もし

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x) \quad (x \text{ は } F(x) \text{ の連続点})$$

ならば

分布収束

X_n は X に分布収束する

法則収束する(ともいう)

$X_n \xrightarrow{d} X$ (converge in distribution)

$X_n \xrightarrow{L} X$ (〃 law)

分布収束の例

$X_n \xrightarrow{d} N(0,1)$

$X_n \xrightarrow{d} \chi^2_p$

5.2 大数の法則

コイン投げをn回繰り返す

対応する確率変数を X_i $i=1:n$ $X_i \in \{0,1\}$

このとき

$\bar{X} = \sum X_i / n$ は表の出る割合を表わし

$\bar{X} \xrightarrow{P} 1/2$ （$\bar{X}$は$\frac{1}{2}$に確率収束する）

一般化

確率変数X $\begin{cases} 平均 & \mu = E[X] \\ 分散 & \sigma^2 = V[X] \end{cases}$

X_i $i=1:n$ も同じ分布に従う，独立に。

$X_i \sim_{i.i.d} X$

$\Downarrow$

大数の法則

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu \quad (n \to \infty)$$

大数の法則の驚くべきところ

もとの確率変数 X の確率分布が何であっても

算術平均 $\bar{X}$ は真の平均 μ に確率収束する.

の分布の平均の期待値は

大数の法則の証明

チェビシェフの不等式による

$$\left(P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \right), \quad \begin{aligned} \mu &= E[X] \\ \sigma^2 &= V[X] \end{aligned}$$ all.

$$\begin{aligned} &P(|\bar{X}-\mu| \geq \varepsilon) \\ &= P(|\bar{X} - E[\bar{X}]| > \varepsilon) \leq \frac{V[\bar{X}]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0 \\ &\qquad (n \to \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\bar{X}] &= E[(X_1 + \cdots + X_n)/n] \\ &= (E[X_1] + \cdots + E[X_n])/n \\ &= n\mu/n \\ &= \mu. \end{aligned}$$

X_i は独立なので

$$\begin{aligned} V[\bar{X}] &= V[(X_1 + \cdots + X_n)/n] \\ &= (V[X_1] + V[X_2] + \cdots + V[X_n])/n^2 \\ &= n\sigma^2/n^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

5.3 中心極限定理

大数の法則の証明の鍵

$\bar{X}$ の中心化 $\bar{X}-\mu$ の分散が

σ^2/n になること

（分散が $1/n$ になる）

中心化した $\bar{X}-\mu$ の分散を調整して、分散が一定値に落ち着く場合.

$$Z_n = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2/n}} \cdot \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n \frac{X_i-\mu}{\sigma}$$

$$\left(\because E[\bar{X}] = n\mu/n = \mu,\ V[\bar{X}] = n\sigma^2/n^2 = \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

Z_n は $\mu=0$, $\sigma^2=1$ の分布に従う

$n\to\infty$ のときの Z_n の振舞い,

形式的に　$Z_n \xrightarrow{d} N(0,1)$

$$\left(\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx \right)$$

中心極限定理の驚くべきところ

Xが従う分布が何であっても，
繰り返し多数回実験を行なえば

標準化されたそれの確率的挙動を
正規分布だけで捉えられる．

⇓

正規分布の重要性がここにある．

中心極限定理をイメージで

χ^2分布の和

$X_{i=1:n} \sim$ 独立に χ^2_1 とする

このとき

$Y_n = \sum X_i \sim \chi^2_n$

$$\Rightarrow \begin{cases} E[Y_n] = n \\ V[Y_n] = 2n \end{cases}$$

標準化

$Z_n = \dfrac{Y_n - n}{\sqrt{2n}}$ … Y_nの線形変換なので

$f_Y(y)$の 〃 で $f_Z(z)$を求める

$Y_n = \sqrt{2n} \cdot z + n$ なので　　　$Y_n > 0$ なので

$f_Z(z) = f_Y(\sqrt{2n} \cdot z + n)\sqrt{2n}$　$(z > -\sqrt{n/2})$

$(\because y > 0)$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} (\sqrt{2n} \cdot z + n)^{n/2 - 1}$$

$$\times e^{-(\sqrt{2n} \cdot z + n)/2} \cdot \sqrt{2n}$$

二次形式

転置.

$A = [\vec{a}^T \vdots A_2]$

中心極限定理の証明の概略.

Z_n: 標準化確率変数
確率変数の和がベース ⇒ モーメント母関数の利用.

$Y = (X-\mu)/\sigma$ のモーメント母関数 $\phi(t)$

$$
\begin{cases}
\phi(t) = E[e^{tY}] \\
\phi(0) = 1 \\
\phi'(0) = E[Y] = 0 \\
\phi''(0) = E[Y^2] - \{E[Y]\}^2 = 1
\end{cases}
$$

$Y_i = (X_i - \mu)/\sigma$ とおくと

$$Z_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)/\sqrt{n}$$

$$
\begin{aligned}
\phi_{Z_n}(t) &= E[e^{tZ_n}] \\
&= E[e^{t\sum Y_i/\sqrt{n}}] \\
&= \prod E[e^{(t/\sqrt{n})Y_i}] \\
&= \{\phi(t/\sqrt{n})\}^n \quad \text{——— } (*)
\end{aligned}
$$

$$\phi(t/\sqrt{n}) = \phi(0) + \phi'(0)(t/\sqrt{n}) + \phi''(0)(t/\sqrt{n})^2/2 + o(1/n)$$

テイラー展開して

$$= 1 + (t^2/2n) + o(1/n)$$

㊟の続き

$$\{\phi(t/\sqrt{n})\}^n$$

$$\simeq \{1 + (t^2/2n) + o(1/n)\}^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{t^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{n}\right)^n \qquad \frac{1}{m} = \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$n = \frac{t^2}{2}m$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{t^2}{2}\cdot m}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{t^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$\therefore \phi_{Z_n}(t) \longrightarrow \underbrace{e^{\frac{t^2}{2}}}_{N(0,1)\text{のモーメント母関数}} \quad (n\to\infty)$$

Z_n は $N(0,1)$ に分布収束する

ここからはメモ

大数の法則
小針 p61

$N \to \infty$ の時の 二項分布

$$B_{n,p}(k) = {}_nC_k \cdot p^k q^{n-k}$$

$$\begin{cases} \mu = Np \\ \sigma^2 = Npq \end{cases}$$

命題3.5　$N \to \infty$ のとき $t = k/n$ の分布 $P_n(t)$ は
ディラックのデルタ関数 $\delta_p(t)$ に近づく.

近づくことの意味
　分布を表わすグラフが似てくる.　　確率収束.
　(関数列の収束に似ている?)

wikipedia
stat

大数の法則

中心化

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon)=0$$ 弱法則

$$P(\lim_{n\to\infty}\bar{X}_n=\mu)=1$$ 強法則

「期待値の存在」を前提としている

chebyshevの不等式

$$P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

μとσ^2の関係。

↓

独立な確率変数の和

$$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$$
$$V[X+Y]=V[X]+V[Y]+2Cov[X,Y]$$

↓

独立

↓

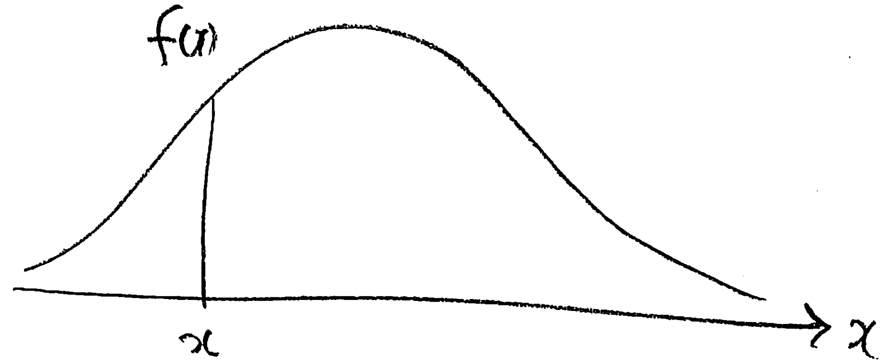
同一分布に基づく時

↓

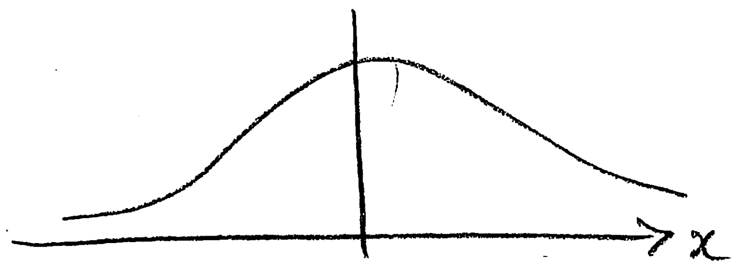
平均

$$E[\bar{X}]=\mu$$
$$V[\bar{X}]=\frac{\sigma^2}{n}$$

X と書くと

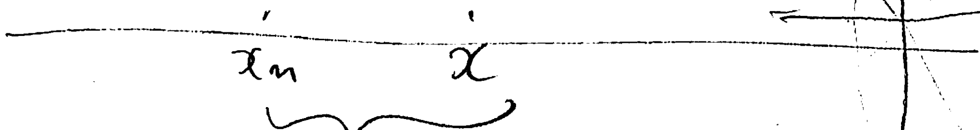


$X-\mu$,　$X \sim$ 分布$(\mu, ?)$ の状況下で

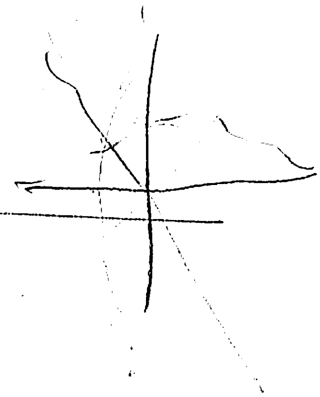


中心化

$X_n - X$　たたみ込み

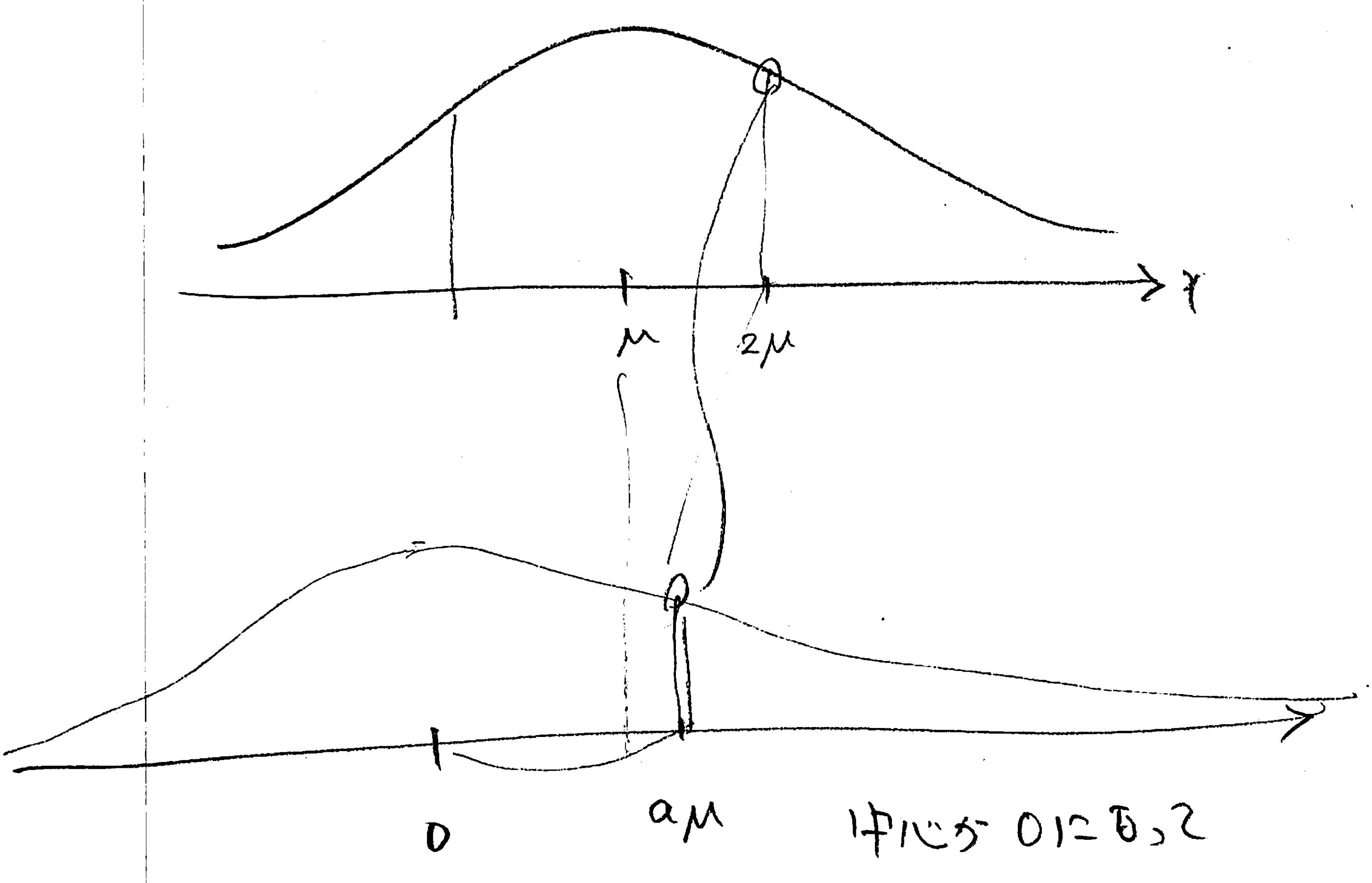


の確率分布の違い

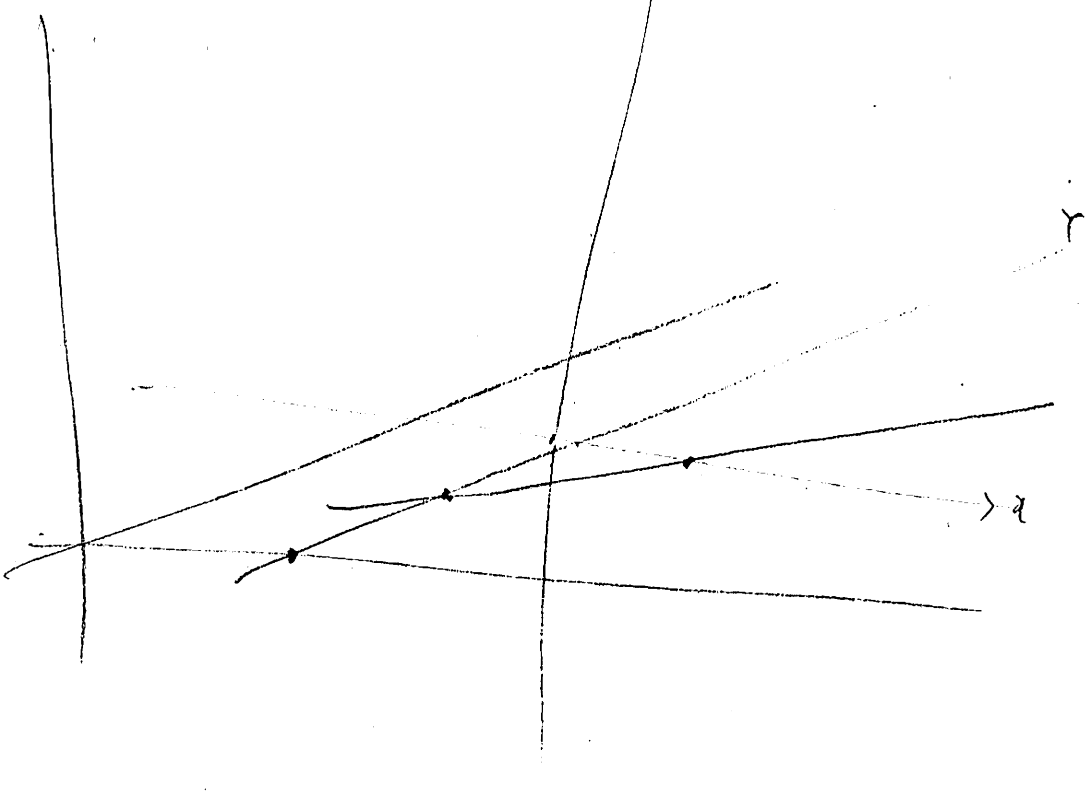


$X_1 + X_2$　たたみ込み

$y = a(x - \mu)$



中心が0になって
x軸がa倍になる



変数と定数

確率収束で

$$\lim_{n\to\infty}\left(|\bar{X}_{(n)}-\mu|\geq\varepsilon\right)=0$$ は納得

大数，

$\bar{X}-N$

正規分布

変数同士