フーリエ変換　小針晛宏の確率統計入門

▷ $f: R \to C$，積分可能な関数

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x} dx$$

$\hat{f}(\lambda)$ ← fのフーリエ変換

有限次元のベクトル空間とエルミート行列

$A = A^*$ 共役転置
ユニタリ行列で
対角化可

Eがベクトル空間である $\Leftrightarrow$ ${}^\forall \vec{f}, \vec{g} \in E$

${}^\forall \alpha, \beta \in C$

$\alpha \vec{f} + \beta \vec{g} \in E$

E内の内積とは

$$\langle \alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2, \vec{g} \rangle = \alpha_1 \langle f_1, g \rangle + \alpha_2 \langle f_2 g \rangle$$

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \overline{\langle \vec{g} . \vec{f} \rangle}$$

$\vec{f} \neq 0$ なら $\langle \vec{f}, \vec{f} \rangle > 0$

正規直交基底

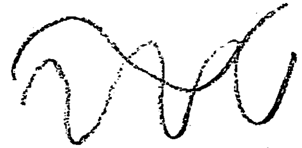
$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$
$$= 1 \quad (i = j)$$

${}^\forall f \in E$　$f = f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$ と書ける

座標 $f_i = \langle f, e_i \rangle$ ，

$e^{\pm i\lambda x}$　　λを連続

↑ 基底　　無限 |R| 個の基底
　　　　　　　|C|



$f(x)\cdot e^{-i\lambda x}$　　$e^{-i\lambda x}$ 成分

$e^{-i\lambda x}$ 成分
射影

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\lambda x}\, dx$$

何故反転？ 共役，内積

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, \underline{e^{i\lambda x}}\, d\lambda$$

↑ 基底

$\underline{F(\lambda)\, e^{i\lambda x}}$

$e^{i\lambda x}$ ミつクール

ピタゴラスの定理

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_i f_i^2$$

線形作用素. $H : E \to E$

$$H(\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}) = \alpha H(\vec{f}) + \beta H(\vec{g})$$

$Hf = \lambda f$ となる λ と f

固有値　固有ベクトル

Hがエルミート作用素.

$$\langle Hf, g \rangle = \langle f, Hg \rangle$$

$H^* = H$　共役転置

固有値はすべて実数

異なる固有値に対する固有ベクトルは直交

固有ベクトルから正規直交基底を作ると

$$\forall f \in E : f = \sum_{i=1}^{n} \langle f, e_i \rangle e_i$$

$$Hf = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, e_i \rangle e_i$$

$$\langle Hf, e_i \rangle = \lambda_i \langle f, e_i \rangle$$

e_iへの射影作用素をP_iとすると

$$H=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \underline{P_i}$$ スペクトル分解する

$$Hf=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\underbrace{(\boxed{P_i}f)}_{\langle f,e_i\rangle e_i}=\sum_{1}^{m}\lambda_i\langle f,e_i\rangle\cdot e_i$$

ベクトル空間 Eとして. $f: R \to C$ が

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < +\infty \\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty \end{cases}$$

となるfが作る空間.

これは ベクトル空間であり 内積として.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{f(x) \cdot \overline{g(x)}}\, dx$$

Hを

$$Hf = -i \frac{d}{dx} f$$

$$\langle Hf, g \rangle = -i \int_{-\infty}^{\infty} f' \cdot g\, dx$$

$$= \underbrace{\Big[-i f \cdot g\Big]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + i \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot g'\, dx$$

0となる関数のみ考える

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f\, \overline{(-i g')}\, dx$$

$$= \langle f, Hg \rangle$$

小針 晛宏 フーリエ ⑤

$H = -i\dfrac{d}{dx}$ エルミート作用素 の

実数 λ に対する固有ベクトル(固有関数)

$$e^{i\lambda x}$$

$$He^{i\lambda x} = -i(i\lambda)e^{i\lambda x} = \lambda e^{i\lambda x}$$

$$\langle e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_1 x} e^{-i\lambda_2 x}\,dx$$

$$e^{i(\lambda_1-\lambda_2)x}$$

$$\cos\lambda_1 x + i\sin\lambda_1 x,\ \cos\lambda_2 x - i\sin\lambda_2 x$$

$$\cos\lambda_1 x\cdot\cos\lambda_2 x + \sin\lambda_1 x\cdot\sin\lambda_2 x$$

$$+\, i\sin\lambda_1\cos\lambda_2 - i\sin\lambda_2\cos\lambda_1 x$$

$$= \delta(\lambda_1-\lambda_2)$$

$$\langle f(x), e^{i\lambda x}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$$

フーリエ変換

ベクトル $f(x)$ の

基底 $e^{i\lambda x}$ への射影

$$\langle f(x), e^{i\lambda x}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx = \hat{f}(\lambda)$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$ 逆変換.

ピタゴラスの定理 → パーシヴァルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\lambda)|^2d\lambda$$

$$Hf=-i\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$ $Hf=\lambda f$

$$=\lambda\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda}_{f(x)}$$

$$\langle Hf, e^{i\lambda x}\rangle=\lambda\langle f, e^{i\lambda x}\rangle$$

$$-i\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{-i\lambda x}dx=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}$$

$$\widehat{f'}=i\lambda\hat{f}$$

↑

導関数のフーリエ変換

$\widehat{xf} = i\lambda \hat{f}$ を導きたい

$H_\lambda = i\dfrac{d}{d\lambda}$ になるの？

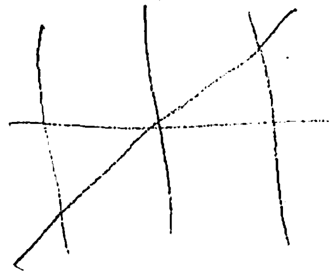
$$H_\lambda \hat{f} = -i\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\lambda x}dx$$

$$= -x\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}dx$$

$$= -\lambda \hat{f}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \sin x \, dx$$

$$x\cos x - \int \sin x \, dx$$



$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-i\omega x} dx$$

$$x\left(\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x}\right)'$$

$$x\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} + \frac{1}{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} dx$$

$A v_1 = \lambda_1 v_1$

$A v_2 = \lambda_2 v_2$

$$A \underbrace{\overset{P}{[v_1\, v_2 \cdots v_n]}}_{行列} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \overset{P}{[v_1\, v_2 \cdots v_n]}$$

$\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \lambda_1$

v_1^t

v_2^t

$\vdots$

v_n^t

$v_1^t A = \lambda_1 v_1^t$