

フーリエ変換

小針明宏の確率統計入門

▷ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 積分可能な関数

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

 \uparrow
 f のフーリエ変換

有限次元のベクトル空間とエルミート行列

 $A = A^*$ エルミート置
 ユニタリ行列で
 対角化可能

$$E \text{ がベクトル空間である} \Leftrightarrow \begin{aligned} &\forall \vec{f}, \vec{g} \in E \\ &\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \\ &\alpha \vec{f} + \beta \vec{g} \in E \end{aligned}$$

E 内の内積とは

$$\langle \alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2, \vec{g} \rangle = \alpha_1 \langle \vec{f}_1, \vec{g} \rangle + \alpha_2 \langle \vec{f}_2, \vec{g} \rangle$$

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \overline{\langle \vec{g}, \vec{f} \rangle}$$

$$\vec{f} \neq 0 \text{ ならば } \langle \vec{f}, \vec{f} \rangle > 0$$

正規直交基底

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= 0 & (i \neq j) \\ &= 1 & (i = j) \end{aligned}$$

$$\forall f \in E \quad f = f_1 e_1 + \dots + f_n e_n \text{ と書ける}$$

$$\text{座標 } f_i = \langle f, e_i \rangle$$

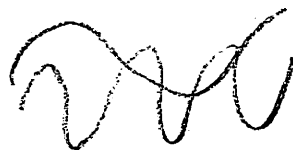
$e^{\pm i\lambda x}$

↑

基底

$\lambda \in \mathbb{R}$ 連続

無限 $|\mathbb{R}|$ 個の基底
 $|\mathbb{C}|$



$f(x) \cdot e^{-i\lambda x}$

$e^{-i\lambda x}$ 成分

$e^{-i\lambda x}$ 成分

射量

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

何故反転? 共役, 内積

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

↑
基底

$$\frac{F(\lambda) e^{i\lambda x}}{e^{i\lambda x} \cdot e^{-i\lambda x}}$$

$e^{i\lambda x} \cdot e^{-i\lambda x}$

ヒルベルト空間の定理

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_i f_i^2$$

線形作用素. $H: E \rightarrow E$

$$H(\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}) = \alpha H(\vec{f}) + \beta H(\vec{g})$$

$$Hf = \lambda f \quad \text{とある } \lambda \text{ と } f$$

\uparrow 固有値 固有ベクトル

Hがエルミート作用素,

$$\langle Hf, g \rangle = \langle f, Hg \rangle$$

$$H^* = H \quad \text{共役転置}$$

固有値 はすべて実数

異なる固有値に属する固有ベクトルは直交

固有ベクトルから 正規直交基底を作ると

$$\forall f \in E: f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i$$

$$Hf = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle f, e_i \rangle e_i$$

$$\langle Hf, e_i \rangle = \lambda_i \langle f, e_i \rangle$$

e_i の射影作用素 $E P_i$ とすると

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i \quad \text{正規分解}$$

$$Hf = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \underbrace{(P_i f)}_{\langle f, e_i \rangle e_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle f, e_i \rangle \cdot e_i$$

ベクトル空間 E_c 上. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty \\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty \end{cases} \quad \text{と仮定する空間.}$$

これは ベクトル空間, 2つの内積と1つ.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{f(x) \cdot \overline{g(x)}} dx$$

H は

$$Hf \equiv -i \frac{d}{dx} f$$

$$\langle Hf, g \rangle = -i \int_{-\infty}^{\infty} f' \cdot g dx$$

$$= \underbrace{[-if \cdot g]}_{\text{境界項が0}} + i \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot g' dx$$

境界項が0

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \overline{(-ig')} dx$$

$$= \langle f, Hg \rangle$$

$$H = -i \frac{d}{dx} \quad \text{エルミート作用素. の}$$

実数 λ に対する固有ベクトル (固有関数)

$$e^{i\lambda x}$$

$$H \underline{e^{i\lambda x}} = -i(i\lambda) \underline{e^{i\lambda x}} = \lambda \underline{e^{i\lambda x}}$$

$$\langle e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_1 x} e^{-i\lambda_2 x} dx$$

$$\cos \lambda_1 x + i \sin \lambda_1 x, \cos \lambda_2 x - i \sin \lambda_2 x \quad e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)x}$$

$$\cos \lambda_1 x \cdot \cos \lambda_2 x + \sin \lambda_1 x \cdot \sin \lambda_2 x$$

$$+ i \sin \lambda_1 \cos \lambda_2 - i \sin \lambda_2 \cos \lambda_1 x$$

$$= \delta(\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\langle f(x), e^{i\lambda x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

ベクトル $f(x)$ の

基底 $e^{i\lambda x}$ への射影

フーリエ変換

$$\langle f(x), e^{i\lambda x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \hat{f}(\lambda)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\lambda x} d\lambda \quad \text{逆変換,}$$

Parsevalの定理 \rightarrow Plancherelの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\begin{aligned} Hf &= -i \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega & Hf &= \lambda f \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\hat{f}(\omega)}_{f(x)} e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

$$\langle Hf, e^{i\lambda x} \rangle = \lambda \langle f, e^{i\lambda x} \rangle$$

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} f'(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$\hat{f}' = i\lambda \hat{f}$$

\uparrow

導関数のフーリエ変換

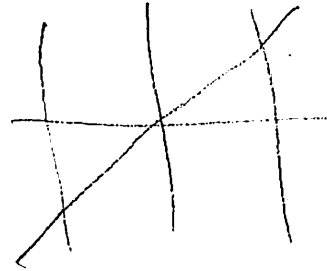
$$\widehat{x}f = i\lambda \widehat{f} \quad \varepsilon \frac{\hbar}{2m} \in \mathbb{R}$$

$$H_\lambda = i \frac{d}{dx} \quad \text{is } \partial a?$$

$$\begin{aligned} H_\lambda \widehat{f} &= -i \frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \\ &= -\lambda \widehat{f} \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \sin x dx$$

$$x \cos x - \int \sin x dx$$



$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-i\omega x} dx$$

$$x \left(\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x} \right)'$$

$$x \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} + \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} dx$$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2$$

\vdots

P

$$A \underbrace{[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]}_{\text{matrix}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$$

$$\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \lambda_1$$

$$v_1^t A = \lambda_1 v_1^t$$

$$v_1^t$$

$$v_2^t$$

$$\vdots$$

$$v_n^t$$

$$[]^T A$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$