小針さん
p100
合成積

§4 合成積 たたみ込み

convolution

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

定ギ

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \cdot g(t)\, dt$$

命題 47

i) $f*g = g*f$

ii) $(f*g)*h = f*(g*h)$

iii) $f*(g+h) = f*g + f*h$

明らか

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt$$
$$= \int_{+\infty}^{-\infty} f(t')\, g(x-t')\, (-dt')$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t')\, f(t')\, dt'$$

$$(f*g)*h = \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x-t) \cdot h(t)\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t-s)\, g(s)\, ds \right) h(t)\, dt$$

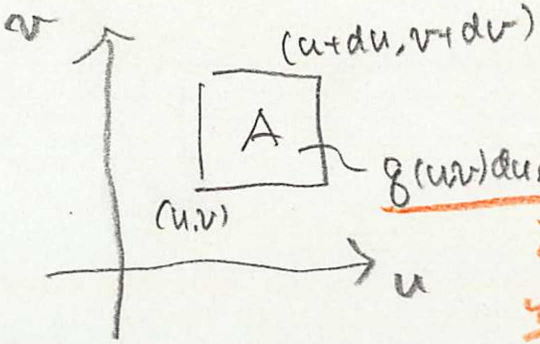
$t' = t+s$

$ds = dt'$ $s = t'-t$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t')\, g(t'-t)\, dt' \right) h(t)\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t') \left(\int g(t'-t)\, h(t)\, dt \right) dt'$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t')\, (g*h)(t')\, dt'$$

§4 合成積 - 2

2変数の分布 $p(x, y)$

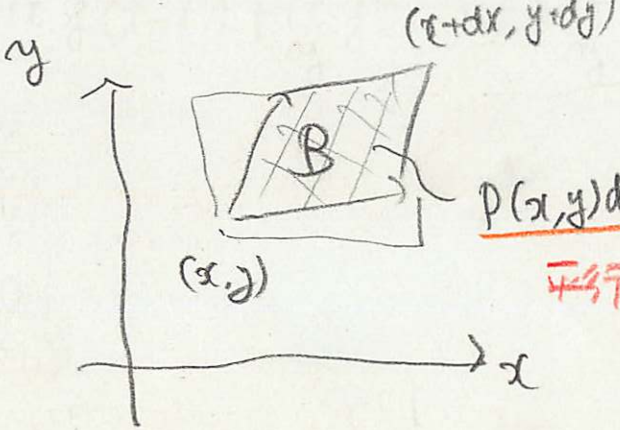


$g(u,v)dudv$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$ のとき

等しい

u, v の分布 $g(u,v)$ は？



$p(x,y)dxdy$

平行四辺形になる

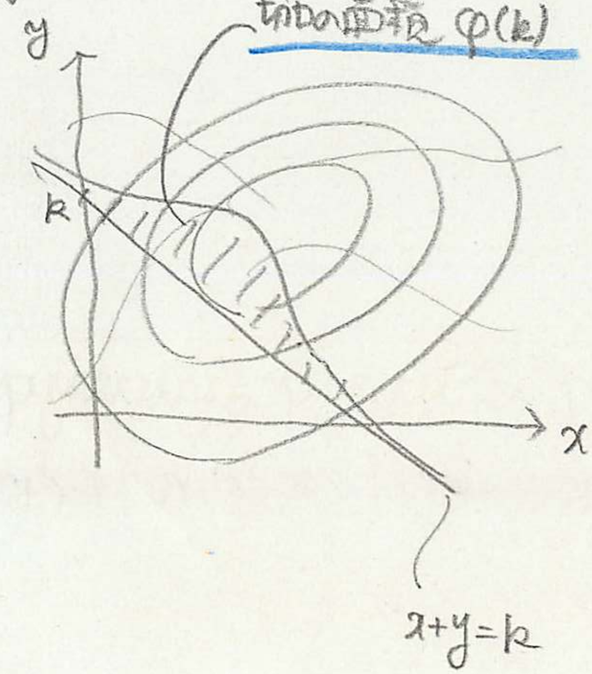
命題 4.8

$$\left.\begin{aligned} g(u,v)dudv &= p(x,y)dxdy \\ dxdy &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \end{aligned}\right\} \longrightarrow g(u,v) = p(x(u,v), y(u,v)) \times \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

§4 合成積

① 変数変換

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y \end{cases}$$



② $u = x + y$ の分布とは

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u, v)\, dv \text{ のこと}$$

分布：$p(x, y)$ がある時

$u = x + y$ の分布 $\varphi(u)$ は

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u - v, v)\, dv$$

で与えられる。

x と y が独立なら

$$\varphi(u) = (q * r)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} q(u - t)\, r(t)\, dt$$

$$\begin{cases} x \text{ の分布 } q(x) \\ y \text{ の〃 } r(y) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1 \text{ なので}$$

③ $\psi(u, v) = p(u - v, v)$

なので

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u - v, v)\, dv$$

周辺分布

④ x と y が独立

$$p(x, y) = q(x)\, r(y)$$