小針さん
P100
合成積

§4 合成積 たたみ込み
convolution

$f, g : R \to R$

定ぎ

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\cdot g(t)\,dt$$

命題47

i) $f*g = g*f$

ii) $(f*g)*h = f*(g*h)$

iii) $f*(g+h) = f*g + f*h$

明らか

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} f(t')\,g(x-t')\,(-dt')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t')\,f(t')\,dt'$$

$$(f*g)*h = \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x-t)\cdot h(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \underline{f(x-t-s)}\,g(s)\,ds \right) h(t)\,dt$$

$t' = t+s$
$ds = t'-t$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t')\,g(t'-t)\,dt' \right) h(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t') \left(\int g(t'-t)\,h(t)\,dt \right) dt'$$

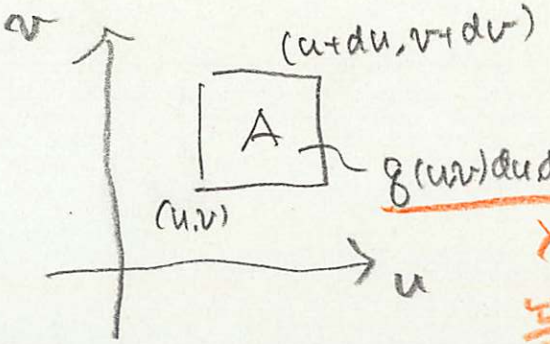
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t')\,(g*h)(t')\,dt'$$

§4 合成積 -2

2変数の分布 $p(x,y)$

$$\left\{\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right. \text{ のとき}$$

u, v の分布 $g(u,v)$ は?

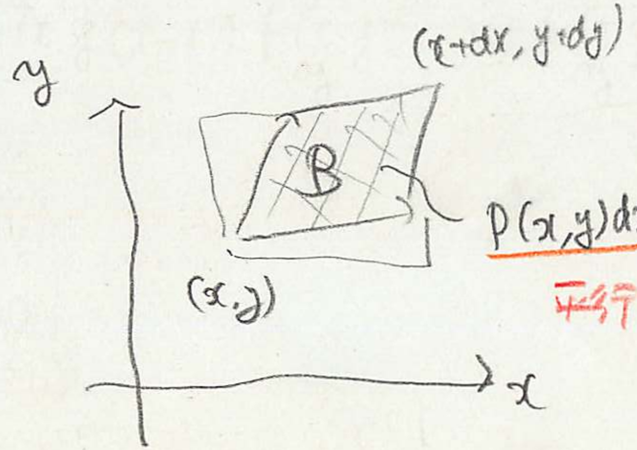


$\underline{g(u,v)\,du\,dv}$

等しい

$\underline{p(x,y)\,dx\,dy}$

平行四辺形になる



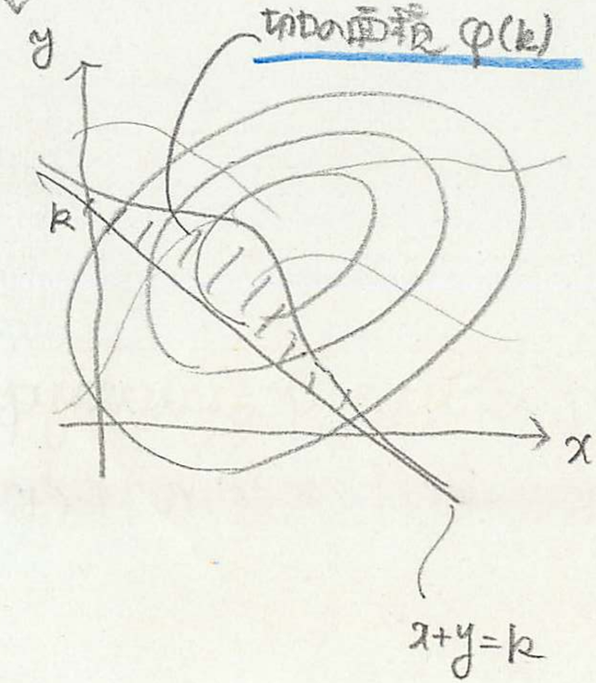
命題 4.8

$$\left.\begin{array}{l} g(u,v)\,du\,dv = p(x,y)\,dx\,dy \\[2ex] dx\,dy = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} g(u,v) = p(x(u,v), y(u,v)) \\ \qquad \times \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \end{array}$$

§4 合成積

① 変数変換

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y \end{cases}$$



② $u = x+y$ の分布とは

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u, v)\, dv \text{ のこと}$$

①

分布：$p(x, y)$ がある時

$u = x + y$ の分布 $\varphi(u)$ は

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u - v, v)\, dv$$

で与えられる。

x と y が独立なら

$$\varphi(u) = (g * r)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u-t)\, r(t)\, dt$$

$$\begin{cases} x \text{の分布 } g(x) \\ y \text{の 〃 } r(y) \end{cases}$$

$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$ なので

③ $\psi(u, v) = p(u-v, v)$

なので

③

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u-v, v)\, dv$$

周辺分布

④ x と y が独立

$p(x, y) = g(x)\, r(y)$

$\varphi(u)$