

# Voronoi 図の性質と構成法

学籍番号：061601139

氏名：中川雅之

指導教員名：久保仁 准教授

2021 年 1 月 15 日

## 1.1 ボロノイ図 (Voronoi diagram) と基本的性質

2次元平面  $R^2$ における2点  $p, q$  に対して、そのユークリッド距離を  $d(p, q)$  で表す。平面上に  $n$  個の点の集合  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  が与えられたとする。このとき

$$R(S; p_i) = \bigcap_{p_j \in S \setminus \{p_i\}} \{p \in \mathbf{R}^2 \mid d(p, p_i) < d(p, p_j)\} \quad (1.1.1)$$

を  $p_i$  のボロノイ領域 (Voronoi region) という。これは、平面上の点  $p \in \mathbf{R}^2$  で、 $S$  の中で最も近い点が  $p_i$  であるという性質をもつものを集めてできる集合である。これは  $S$  に属す各点  $p_i$  が、他よりも自分に近い点の集合を囲い込んでできる領域で、いわば勢力圏とみなすことができよう。

平面全体は  $R(S; p_1), R(S; p_2), R(S; p_3), \dots, R(S; p_n)$  とそれらの境界へ分解される。この分割図形を  $S$  に対するボロノイ図 (Voronoi diagram) という。ボロノイ図の例を図1に示した。

図中の水色の点  $S$  の要素で実線がボロノイ領域の境界線である。

ボロノイ図において、2つのボロノイ領域の共通の境界をボロノイ辺 (Voronoi edge) と呼び、3つ以上のボロノイ領域の共通の境界点をボロノイ点 (Voronoi point) と呼ぶ。 $S$  の要素はこのボロノイ図の生成元 (generator) または母点 (generation point) と呼ばれる。

ボロノイ図の定義から導かれる基本的な性質をまとめておこう。

性質1 ボロノイ領域は凸である。

- 式 (1.1.1) で定義したように、ボロノイ領域は平面を直線で分けてできる半平面の共通部分であるので明らか。

性質2 ボロノイ辺は両側の母点を結ぶ線分の垂直二等分線の上にある。

- ボロノイ図は、どの母点に最も近いかによって平面を分割したものであるから、ボロノイ辺は両側の母点から等しい距離にあるので明らか。

性質3 ボロノイ点はその点を領域境界にもつ3つの母点を通る円の中心である。そして、この円の内部に他の母点は含まれない。

- ボロノイ点は周りから3つの母点から等しい距離にあり、ほかの母点はもっと遠くにあるから明らか。また、4つ以上のボロノイ領域の境界点となることもある。そのようなボロノイ点を退化ボ

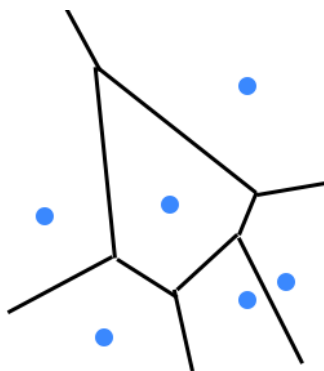


図1 ボロノイ図

ロノイ点 (*degenerate Voronoi point*) と呼ぶとする。

性質 4 退化ボロノイ点  $q$  を共通の境界点に持つ母点を  $p_1, p_2, \dots, p_k (k \geq 4)$  とする。このとき、 $p_1, p_2, \dots, p_k$  は同一円周上にある。

- 性質 3 と同様にして明らか。

## 1.2 Voronoi 図の複雑さ

次にボロノイ図の複雑さについてについてみてみよう。母点の数を  $n$  とする： $|S| = n$ 。  $S$  に対するボロノイ図のボロノイ辺の数を  $n_e$ 、ボロノイ点の数を  $n_v$  とする。また無限に伸びるボロノイ領域の数を  $n_1$ 、有界なボロノイ領域の数を  $n_2$  とする。ボロノイ領域の数と母点の数は一致するから  $n = n_1 + n_2$  である。また、無限にのびるボロノイ辺の数は  $n_1$  に一致する。

ここで  $S$  を囲む十分大きな閉曲線を考え、無限にのびるボロノイ辺は、この閉曲線上に端点を持つものとする。こうすることでボロノイ辺やボロノイ点を見つけやすくなる。無限にのびるボロノイ辺は  $n_1$  本あるから、この閉曲線上には  $n_1$  個の端点ができ、閉曲線自体も  $n_1$  個の曲線分に分けられる。そして、ボロノイ点および閉曲線上に設けた端点を頂点 (*vertex*) と呼び、ボロノイ辺および閉曲線が分割されてできる曲線分を辺 (*edge*) と呼ぶことにする。

閉じたボロノイ図においては、各辺は端点を 2 つもち、各頂点は 3 本以上の辺と接続する。したがって

$$2(n_e + n_1) \geq 3(n_v + n_1) \quad (1.2.1)$$

が成り立つ。特に、どのボロノイ点も退化していなければ式 (1.2.1) は等号で成り立つ。

一方、平面上に描かれた連結な図形においては、

頂点の数、辺の数、面の数を  $V, E, F$  とするとオイラーの公式

$$V - E + F = 2 \quad (1.2.2)$$

が成り立つ。閉じたボロノイ図では  $V = n_v + n_1, E = n_e + n_1$  である。また、ボロノイ領域に加えて閉曲線の外側にももう一つ面ができるから  $F = n + 1$  である。これらを式 (1.2.2) に代入して

$$(n_v + n_1) - (n_e + n_1) + (n + 1) = 2 \quad (1.2.3)$$

である。式 (1.2.3) より  $n_v = n_e - n + 1$  であり、これを式 (1.2.1) に代入して

$$n_e \leq 3n - n_1 - 3 \quad (1.2.4)$$

を得る。

一方、式 (1.2.3) より  $n_e = n_v + n - 1$  であるから、これを式 (1.2.1) に代入して

$$n_v \leq 2n - n_1 - 2 \quad (1.2.5)$$

を得る。

よって  $n$  個の母点に対するボロノイ図のボロノイ辺の数  $n_e$  とボロノイ点の数  $n_v$  は式 (1.2.4), (1.2.5) を満たす。

また、閉じたボロノイ図には  $n+1$  個の面が含まれる。一方、それぞれの辺は両側の面の境界に貢献する。従っ

て、すべての面の角数の合計は  $2(n_e + n_1)$  である。1 つの面当たりの平均の角数を  $f$  とすると、 $f = \frac{2(n_e + n_1)}{n+1}$  であるがこれは式 (1.2.4) より

$$f \leq \frac{2(3n - n_1 - 3 + n_1)}{n+1} = 6\frac{n+1}{n+1} - \frac{12}{n+1} < 6 - \frac{12}{n+1} \quad (1.2.6)$$

となる。これより、ボロノイ領域をなす多角形の平均角数はほぼ 6 (6 よりわずかに少ない) となる。

式 (1.2.4), (1.2.5) より、ボロノイ辺の数は母点の 3 倍以下、ボロノイ点の数は母点の 2 倍以下であることが分かる。従って、母点数を  $n$  とすると、ボロノイ辺の数もボロノイ点の数も  $O(n)$  である。このようにボロノイ図の構造は  $n$  に比例する複雑さしかない。このことは、平面上のボロノイ図の顕著な性質である。この性質ゆえにボロノイ図は種々の幾何計算を効率よく行うために利用できる。

## 2 Voronoi 図の基本計算法

### 2.1 Voronoi 点の計算法

ボロノイ図を、ボロノイ点、ボロノイ辺、ボロノイ領域の接続構造の形で計算する方法を考える。そのための準備として、まず、3 個の母点の作るボロノイ図の計算法を考える。 $i = 1, 2, \dots, n$  に対して母点  $p_i$  の座標を  $(x_i, y_i)$  とする。3 個の母点  $p_i, p_j, p_k$  と 1 個の点  $p = (x, y)$  に対して関数  $G(p_i, p_j, p_k, p)$  を

$$G(p_i, p_j, p_k, p) = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 + y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 + y_j^2 \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2 + y_k^2 \\ 1 & x & y & x^2 + y^2 \end{vmatrix} \quad (2.1.1)$$

で定義する。

このとき、

$$G(p_i, p_j, p_k, p) = 0 \quad (2.1.2)$$

は、 $p_i, p_j, p_k$  を通る円を表す。このことは次のようにして理解できる。式 (2.1.2) の  $p$  に  $p_i, p_j, p_k$  をそれぞれ代入すると行列式が 0 になるので式 (2.1.2) は  $p_i, p_j, p_k$  を通る曲線であるといえる。一方、 $G(p_i, p_j, p_k, p)$  は  $x, y$  の二次関数とみなすことができ  $x^2$  と  $y^2$  の係数が等しく  $xy$  の項が存在しないので円の方程式を満たす。従って式 (2.1.2) は  $p_i, p_j, p_k$  を通る円の方程式である。

ボロノイ図の性質 3 よりこの式 (2.1.2) の中心座標が母点  $p_i, p_j, p_k$  からなるボロノイ領域のボロノイ点となるのでその座標を求めていく。

$$\begin{aligned} G(p_i, p_j, p_k, p) &= \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 + y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 + y_j^2 \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2 + y_k^2 \\ 1 & x & y & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 + y^2 \\ 1 & x_i & y_i & x_i^2 + y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 + y_j^2 \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2 + y_k^2 \end{vmatrix} \\ &= A(x^2 + y^2) + Bx - Cy - D \\ &= A \left\{ \left( x + \frac{B}{2A} \right)^2 + \left( y - \frac{C}{2A} \right)^2 - \left( D + \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

これより、 $G(p_i, p_j, p_k, p) = 0$  が表す円の中心は

$$\left( -\frac{B}{2A}, \frac{C}{2A} \right) \quad (2.1.4)$$

であることがわかる。これが母点  $p_i, p_j, p_k$  のボロノイ領域が作るボロノイ点の座標である。

なお、

$$A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 1 & y_i & x_i^2 + y_i^2 \\ 1 & y_j & x_j^2 + y_j^2 \\ 1 & y_k & x_k^2 + y_k^2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} 1 & x_i & x_i^2 + y_i^2 \\ 1 & x_j & x_j^2 + y_j^2 \\ 1 & x_k & x_k^2 + y_k^2 \end{vmatrix}, D = \begin{vmatrix} x_i & y_i & x_i^2 + y_i^2 \\ x_j & y_j & x_j^2 + y_j^2 \\ x_k & y_k & x_k^2 + y_k^2 \end{vmatrix}$$

である。

しかし、3点  $p_i, p_j, p_k$  が互いに接近しており、原点から遠く離れている場合、式 (2.1.4) では桁落ちの心配がある。そこで  $(x_i, y_i)$  が原点となるように平行移動させてから円の中心を計算し、最後に元の座標系に戻す方法を考えてみる。

式 (2.1.1) を次ように変形する。

$$\begin{aligned} G(p_i, p_j, p_k, p) &= \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 + y_i^2 \\ 0 & x_j - x_i & y_j - y_i & x_j^2 - x_i^2 + y_j^2 - y_i^2 \\ 0 & x_k - x_i & y_k - y_i & x_k^2 - x_i^2 + y_k^2 - y_i^2 \\ 0 & x - x_i & y - y_i & x^2 - x_i^2 + y^2 - y_i^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_i & y_i & x_i^2 + y_i^2 \\ x_j - x_i & y_j - y_i & (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \\ x_k - x_i & y_k - y_i & (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \\ x - x_i & y - y_i & (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

この等号は、第2列の  $2x_i$  倍と第3列の  $2y_i$  倍を第4列から引くことで成り立つ。

ここで、

$$\begin{aligned} A' &= \begin{vmatrix} x_j - x_i & y_j - y_i \\ x_k - x_i & y_k - y_i \end{vmatrix}, B' = \begin{vmatrix} y_j - y_i & (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \\ y_k - y_i & (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \end{vmatrix}, \\ C' &= \begin{vmatrix} x_j - x_i & (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \\ x_k - x_i & (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \end{vmatrix}, X = x - x_i, Y = y - y_i \end{aligned}$$

とおくと式 (2.1.5) はさらに

$$\begin{aligned} G(p_i, p_j, p_k, p) &= A'(X^2 + Y^2) + B'X - C'Y + [\text{定数項}] \\ &= A' \left\{ \left( X + \frac{B'}{2A'} \right)^2 + \left( Y - \frac{C'}{2A'} \right)^2 + [\text{定数項}] \right\} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

と変形できる。従って円の中心の座標は XY 座標系で

$$\left( -\frac{B'}{2A'}, \frac{C'}{2A'} \right) \quad (2.1.7)$$

となり、元の  $xy$  座標系に戻すと

$$\left( -\frac{B'}{2A'} + x_i, \frac{C'}{2A'} + y_i \right) \quad (2.1.8)$$

となり、こちらの方が式 (2.1.4) に従うよりも数値誤差の影響を受けにくいと期待できる。

## 2.2 Voronoi 図の逐次添加構成法

ボロノイ図を構成するためのアルゴリズムにはいくつかあるがここでは逐次添加構成法を扱う。この方法は最悪の場合の計算量は  $O(n^2)$  であり、他の方法に劣るが、一般の母点分布に対する平均の計算量を  $O(n)$  に抑えることができ、実装に容易なので実用的と言われている。

逐次添加構成法とは少数の  $m$  個の母点  $P_i (i = 1, \dots, m)$  からなる Voronoi 図  $V_m$  に新しい母点  $P_{m+1}$  を添加して  $V_{m+1}$  を作る操作を繰り返すものである。

母点  $P_{m+1}$  を添加するには以下の操作が必要である。

(I)  $P_i (i = 1, \dots, m)$  の中から新たな母点  $P_{m+1}$  に最も近い母点  $P_n$  を求める。

(II)  $P_{m+1}$  の Voronoi 多角形を求め  $V_m$  のうち  $P_{m+1}$  の Voronoi 多角形の内部を消去する。

母点を新たに一つ添加する様子を以下の図に示した。

この図の (a) に黒点で示した母点に対するボロノイ図が実線のように得られているときに赤丸で示した新たな母点を添加したとしよう。まず、ボロノイ点の中でこれまでの母点よりも新しい母点に近いものをすべて見つける。この例では青色の線に囲まれた3つの交点がボロノイ点である。次に、これらの交点のボロノイ点を境界上にもつ母点と新しい母点との間の垂直二等分線によって、古いボロノイ領域を2つに分ける。このとき、垂直二等分線は、交点のボロノイ点とそれ以外のボロノイ点をつなぐボロノイ辺の途中を通過する。したがって2つに分けた領域のうち新しい母点に近い方を集めると、一つの凸多角形となり、これが新しい母点のボロノイ領域となる。そこで最後にこの内部のボロノイ点とボロノイ辺を除くと図3 (b) に示すように、ボロノイ図の更新作業が完成する。

そして取り除かれるボロノイ点には次のような性質がある。

性質4 母点集合  $S$  に対する閉じたボロノイ図 (無限にのびるボロノイ辺を、十分大きな閉曲線につないだもの) を  $D$  とする。新しい母点  $p$  を添加した時、取り除かれるべきボロノイ点とそのボロノイ辺からなるグラフは、木 (サイクルを持たない連結なグラフ) となる。

このことは次のように確認できる。第一に、このグラフはサイクルを持たない。もしサイクルを持ったとするとこのグラフが取り除かれるときにサイクルで囲まれたボロノイ領域が除かれるから、更新後のボロノイ図

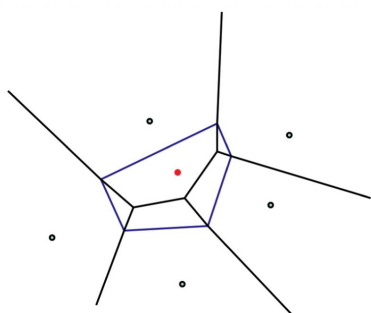


図2 (a)

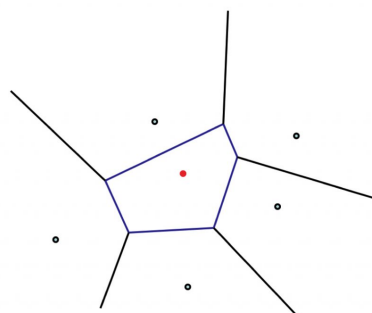


図3 (b)

図4 母点を添加した時のボロノイ図の更新

においては領域を持たない母点が存在してしまうからである。つぎにこのグラフが非連結であるとする更新後にボロノイ図が二つ以上の連結成分に分かれてしまうからである。

この性質より更新作業において取り除かれるボロノイ点はボロノイ辺でつながっている。従って取り除かれるボロノイ点の一つでも見つけられればそこから芋ずる式に見つけることができる。通常、ボロノイ点からのびる辺は3本でありそのようなボロノイ点が $k$ 個集まってできる木から外へのびるボロノイ辺の数は $k+2$ 本となるから平均的に定数時間で除くべきボロノイ点の集合を見つけることができる。

## 2.3 バケット法と四分木

では、除くべきボロノイ点の最初はどのようにして見つけたらよいだろうか。 $D$ のボロノイ点を端から順に調べるのでは、母点数に比例する時間がかかってしまう。

まず、母点 $P_{m+1}$ を添加するときには、 $V_m$ のボロノイ領域の中で $P_{m+1}$ を含むものを見つけないければならない。なぜなら、 $P_{m+1}$ を含む領域ということはその領域をもつ母点が $P_{m+1}$ に最も近いということだからである。この母点の探索には既にあるボロノイ図が利用できる。なぜなら、任意のひとつの母点を $P$ とした時に、 $P_{m+1}$ に最も近い母点の調べるには $P$ から出発して以下のことを行えばよいからである。

### アルゴリズム (出発点の探索)

- (I) 任意の母点 $P$ に隣接する母点の中で $P_{m+1}$ に最も近い母点 $Q$ を見つける。
- (II)  $(P_{m+1}, P) \leq l(P_{m+1}, Q)$  なら $P$ が $P_{m+1}$ に最も近い母点 (出発点) となる。そうでないなら $Q$ を新しい $P$ とみなして (I) を行う。

では、この出発点となる $P$ をうまく見つける方法はないだろうか。

そこで母点すべてを含む正方形を考える。この正方形を縦横の直線で四等分しそれぞれの正方形を同じように四等分するというのを $k$ 回繰り返す。こうして生まれた最小の正方形をバケットとよぶ。そしてこの四分割に対応してグラフを考える。まず、すべての母点含む正方形をこのグラフの根に対応させる。次にこの正方形を四分割してできる四つの小正方形をそれぞれ正方形の節点の子供の節点とみなして、枝の先にぶら下げる。さらにそれぞれの小正方形の四分割に対応してそれぞれ4個の子供の節点を作ることを繰り返す。これにより、根から $k$ 本の辺を下へたどると、バケットへたどり着く。

この四分木の各節点にひとつずつ母点番号を格納する場所を用意する。この格納場所は最初は空である。最初の一個を格納した時にその母点が属すバケットから根へ向かって辺をたどり、その時に通過するすべての節点にこの母点番号を格納していく。そのあとは、新しい母点が添加されるたびに、それぞれが属すバケットから辺をたどり格納場所が空である限り、その母点番号を格納していく。

$V_m$ に $P_{m+1}$ が添加されたとしよう。 $P_{m+1}$ が属すバケットから根へ向かって辺をたどり空の格納場所に母点番号を格納していくがいずれ空でない節点に出会う。そこに格納されている母点番号をもつ母点を $P$ とする。そしてその $P$ に対して出発点の探索を行うことで $P_{m+1}$ に最も近い母点を見つけることができる。いま、 $P$ に対し出発点を探索しを行い $P_j$ が得られたとしよう。この $P_j$ は全ての母点の中で $P_{m+1}$ に最も近い。そこで $P_j$ のボロノイ領域の境界上のボロノイ点の中で最も $P_{m+1}$ に近いものをも見つける。これを $q$ としよう。 $q$ は、すべてのボロノイ点の中で $P_{m+1}$ に最も近く $P_{m+1}$ が作るボロノイ領域に含まれる。すなわち、 $q$ は取り除かれるべきボロノイ点の一つである。この $q$ を出発点として取り除かれるべきボロノイ点を探索すること

ができる。ここで、すべての母点を含む正方形を分割する回数  $k$  はパラメータ  $\alpha$  を用いて  $k = \lfloor \log_4(\alpha n) \rfloor$  ぐらいがよい。すなわち、 $4^k$  が  $n$  に近くなるように選ぶとよい。こうするところで、各バケットに一つぐらいの母点が含まれることになるので常に  $P_{m+1}$  に近い出発点を選ぶことができ、 $n$  が大きくなっても出発点の探索を行う回数が  $n$  に依らない定数程度で済むからである。

#### アルゴリズム (バケット法と四分木を用いた逐次添加構成法)

入力 :  $n$  個の母点  $P_i (i = 1, \dots, n)$  からなる母点集合  $S_n$

出力 :  $P_i (i = 1, \dots, n)$  からなるボロノイ図  $V_n$

(I) 全ての母点を含む正方形を各辺  $2^k$  に分割して  $4^k$  個のバケットを作りそれぞれの母点を格納する。

(II) それぞれのバケットに対応するセル  $(I(r), J(r))$  を以下の手順で定める。

$c := \lfloor 2^k/3 \rfloor$  ;  $I(0) := c$  ;  $J(0) := c$  ;

$u := (-1)^{k+1}$  ;  $m := 1$  ;  $r := 0$  ;  $s := 2c + u$  ;

**for**  $t := 1$  **to**  $k$  **do**

**for**  $p := 1$  **to**  $m$  **do**

$r := r + 1$  ;

$I(r) := s - I(r - k)$  ;

$J(r) := J(r - m)$  ;

$m := 2m$  ;

**for**  $p := 1$  **to**  $m$  **do**

$r := r + 1$  ;

$I(r) := I(r - m)$  ;

$J(r) := s - J(r - m)$  ;

$m := 2m$  ;

$u := -2u$  ;

$s := s + u$  ;

(III) バケットを番号順に調べて母点が含まれていればそのバケットから根へ向かって辺をたどり、その時に通過する節点に母点番号を格納する。

(IV) 根から順に節点を調べて、未添加の母点があればそれを添加する。その際、未添加の節点の親の節点に格納された母点番号を持つ母点から出発点の探索を行い取り除くべきボロノイ図を取り除き新しいボロノイ図を作成する。

この方法で、新しく添加された母点に最も近い母点と最も近いボロノイ点にすばやくたどり着くことができ、さらに取り除くべきボロノイ点はそこから連続して見つかり、その数は数個程度であるので一つの母点を添加したときのボロノイ図の更新作業は平均的に  $O(n)$  に時間で構成できると期待できる。



### 3 Voronoi 図の位相優先構成法

#### 3.1 位相優先構成法

前節で調べたようにボロノイ図は、その位相的構造に着目すると、平面に埋め込まれたグラフとみなすことができる。そして母点を添加した時のボロノイ図の更新作業は、このグラフの更新作業とみなすことができる。このようにすると性質 4 は、このグラフの更新作業の際に満たすべき条件を述べたものとみなすことができる。すなわち、更新作業において取り除くべき部分構造は、木でなければならない。そこで、この性質を満たすことを最優先し、これに反しない場合のみ数値計算結果を採用するという方針をとる。この方針をとることで万一、数値計算結果が正しくなくても少なくともグラフ構造の操作としては矛盾なく実行できるようになるためである。このアイデアでロバスト (頑強性) なソフトウェアを設計する技法は、位相優先法 (*topology-oriented method*) と呼ばれている。

この方針で作られるアルゴリズム骨子は次のとおりである。

#### アルゴリズム (ボロノイ図の更新作業の骨子)

入力: 母点集合  $S_{l-1} = p_1, p_2, \dots, p_{l-1}$  に対するボロノイ図  $V_{l-1}$  と、新しい母点  $p_l$

出力:  $S_l = S_{l-1} \cup \{p_l\}$  に対するボロノイ図  $V_l$

手続き:

(I) 新しい母点  $p_l$  に最も近いボロノイ点を見つけ、その一点からなる点集合を  $T$  とおく。

(II)  $T$  には含まれないが、ボロノイ辺で  $T$  につながっていてかつ次の (a), (b) を満たすボロノイ点  $q_{ijk}$  がある限り、それを  $T$  に加える。

(a)  $T \cup q_{ijk}$  から導出される  $V_{l-1}$  の部分グラフはサイクルを持たない。

(b)  $G(p_i, p_j, p_k, p_l) < 0$  である。

(III)  $T$  に属すボロノイ点と  $T$  に属さないボロノイ点をつなぐボロノイ辺上に一つずつ新しい頂点を生成し、それらの新しい頂点を順につないでサイクルを作る。そして、このサイクルの内部に含まれる部分グラフを削除し、得られる面を  $p_l$  のボロノイ領域とみなす。

この手続きに従えば、ボロノイ図の更新作業は、性質 4 を満たすことが保証されながら実行される。

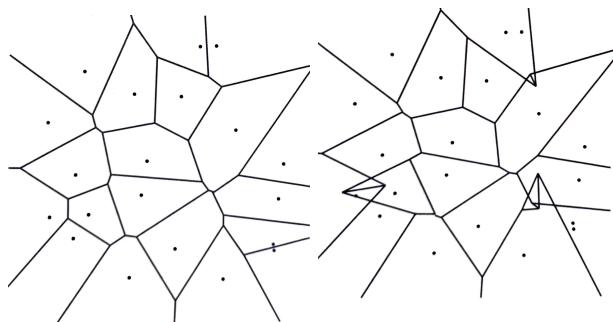


図 5 計算結果

図 6 人工誤差を加えた場合の計算結果

図 7 ボロノイ図の総優先法の振舞い [1]

そこで位相優先法で作ったボロノイ図構成ソフトウェアの振舞いの例を図7に示した。図5はランダムに配置した20個の母点に対する計算結果である。この程度の小規模なボロノイ図に対しては、誤差対策を施さないソフトウェアであっても同様の結果が得られるであろう。しかし、このソフトウェアは途中でどんな大きな数値誤差が発生しても破綻しないことが保証されている。このことを確かめるために浮動小数点計算に乱数を用いて人工的な誤差を入れてみると計算結果は図6のようになった[1]。この図では辺が交差しており正しいボロノイ図にはなっていない。しかし、判定を誤っているにもかかわらず計算結果が得られていることに注目してほしい。通常のソフトウェアでは、判定を誤ると無限ループに陥ったり異常終了したりして処理が破綻することが多い。それに対して、このソフトウェアは内部で矛盾が発生することなく最後まで処理が進んで、計算結果が出力される。そして、その計算結果には「頂点と辺からなる構造は平面グラフであり、辺が交差しないように平面に描くと、領域の数は母点の数と一致する。」という性質を満たすという意味で位相的につじつまが合っている。

## 4 まとめ

計算幾何学の概念の一つであるボロノイ図の基本的な性質とその構成法を紹介してきた。その中でバケット法と四分木を用いた逐次構成法は平均的に計算量を母点の数  $n$  に比例する  $O(n)$  程度に改良されており実践的な計算法として期待できる。そしてその計算法が数値誤差が発生しても破綻しないようにする位相優先法を用いたアルゴリズムの開発も行われていると紹介した。このボロノイ図の実践的な応用として避難場所の区分や校区の設定などに利用できると考えられる。

## 参考文献

- [1] 杉原厚吉 (2013) 「計算幾何学」(数理工学ライブラリー) p53-p72, 朝倉出版.
- [2] 杉原厚吉 (2009) 「なわばりの数理モデル：ボロノイ図からの数理工学入門」 p26-43, 共立出版.
- [3] Ohya, T. , Iri, M. and Murota, K.: Improvements of the Incremental Method for the Voronoi Diagram with Comparison of Various Algorithms. Submitted to Journal of the Operations Research Society of Japan