2. Conformal Field Theory in $d \geq 3$ (CFT)

2.1. 共形 trans.

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu \text{ に対して}$$

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \Omega^2(x)\, g_{\mu\nu}$$

作用がワイル変換の下で不変なとき

〜次元のあるパラメータがないとき

理論は古典的に共形 sym. をもつ

無限小変換：$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ に対して，

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu) \equiv e^{-f(x)} g_{\mu\nu}(x)$$

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = f(x)\, g_{\mu\nu},$$

$$f(x) = \frac{2}{d} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varepsilon_\nu$$

特に平坦な時空上の共形trans.を考えると、

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = f(x)\eta_{\mu\nu}$$

これを解くと、　$(\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu})$

$$\varepsilon_\mu(x) = \underbrace{a_\mu}_{\text{並進}} + \underbrace{\omega_{\mu\nu}x^\nu}_{\text{ローレンツ}} + \underbrace{\lambda x_\mu + (x^2\eta_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu)b^\nu}_{\text{new!}}$$

- Dilatation:

$$x'^\mu = \lambda x^\mu$$

- 特殊共形trans.:

$$x'^\mu = \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b^\nu x_\nu + b^2 x^2}$$

共形代数

各 generator を微分op. で表すと,

- 並進 $P_\mu = -i\partial_\mu$
- ローレンツ回転 $M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$
- Dilatation $D = i x^\mu\partial_\mu$
- 特殊共形 trans. $K_\mu = -i(x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\nu\partial_\nu)$

よって,

$$[M_{\mu\nu}, K_\rho] = -i(\eta_{\mu\rho}K_\nu - \eta_{\nu\rho}K_\mu)$$
$$[M_{\mu\nu}, D] = 0$$
$$[D, K_\mu] = iK_\mu$$
$$[D, P_\mu] = -iP_\mu$$
$$[P_\mu, K_\nu] = 2iM_{\mu\nu} - 2i\eta_{\mu\nu}D$$

※ Poincare + D は閉じる

→ スケール不変だが CFT でない理論が存在可

Poincare + K_μ は閉じない

→ D も必要で CFT

④

$J_{\mu\nu} \equiv M_{\mu\nu}$, $J_{\mu d} \equiv \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu)$,

$J_{\mu(-1)} \equiv \frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu)$, $J_{(-1)d} \equiv D$ とおくと,

代数が $SO(d,2)$ と同じことが確かめられる

(Euclidean の場合, $SO(d+1,1)$)

実はこれは $\underline{AdS_{d+1}}$ の isometry と同じ

$\mathbb{R}^{d,2}$ 中の超曲面:

$$x_{-1}^2 + x_0^2 - \underset{\substack{\parallel \\ 1,2,\cdots,d}}{x_i^2} = \text{const}$$

※ AdS/CFT の根拠の1つ

Primary op.

ポアンカレ不変なQFTのop. ～ ポアンカレ群の変換性で分類

$$[M_{\mu\nu}, \mathcal{O}^a(0)] = (S_{\mu\nu})^a{}_b\, \mathcal{O}^b(0)$$

CFTのop. ～ 共形群 …
(ポアンカレ＋D＋K_μ)

Dの固有関数:

$$[D, \mathcal{O}(0)] = -i\underbrace{\Delta}_{\text{"dimension"}}\mathcal{O}(0)$$

"dimension" (massを1とする)

K_μの作用:

$$\begin{aligned}
[D, [K_\mu, \mathcal{O}(0)]] &= -[K_\mu, [\mathcal{O}, D]] - [\mathcal{O}, [K_\mu, D]] \\
&= -i\Delta [K_\mu, \mathcal{O}] + [\mathcal{O}, iK_\mu] \\
&= -i(\Delta - 1)[K_\mu, \mathcal{O}(0)]
\end{aligned}$$

同様に,

$$[D, [P_\mu, \mathcal{O}(0)]] = -i(\Delta + 1)[P_\mu, \mathcal{O}(0)]$$

K_μはΔを下げる，P_μはΔを上げる

"まともな"理論ではΔに下限がある

$\rightarrow\ \exists\,\mathcal{O}$ s.t. $[K_\mu, \mathcal{O}(0)] = 0$

"primary operator"

primary op.から高次元op.を作れる；

$$\mathcal{O} \longrightarrow P_{\mu_1} \cdots P_{\mu_n} \mathcal{O}$$

$$\Delta \longrightarrow \Delta + n$$

"descendants"

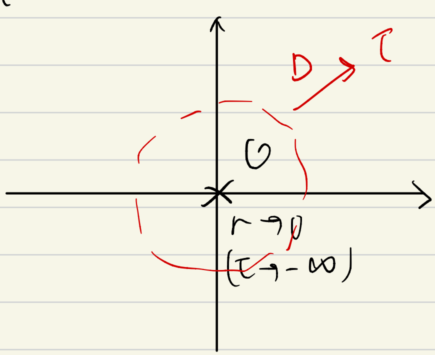
State / Operator 対応

$$\mathbb{R}^d \overset{\text{共形 trans.}}{\longleftrightarrow} \mathbb{R} \times S^{d-1} \quad \text{“cylinder”}$$

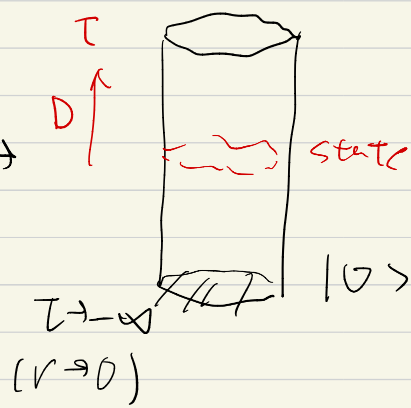
$$\because \; ds^2_{\mathbb{R}^d} = dr^2 + r^2 d\Omega^2_{d-1} \qquad \left(r = R e^{\frac{\tau}{R}} \right)$$

$$= \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(d\tau^2 + R^2 d\Omega^2_{d-1} \right)$$

local op. at O in $\mathbb{R}^d$ $\longleftrightarrow$ State in $\mathbb{R} \times S^{d-1}$



$\longleftrightarrow$



Op. の情報 $\longleftrightarrow$ State の情報

2.2. Superconformal theory

SUSY理論が共形sym.を持つと、
さらに大きなsym.をもつ(superconformal sym.)
特に新しいgenerator $S \sim [K, Q]$ が現れ、
superchargeの数が倍に。

超共形代数：(詳細は次元やsuperchargeの数により異なる)

$$[D, Q] = -\frac{i}{2} Q, \quad [D, S] = \frac{i}{2} S$$

$$[K, Q] \simeq S \qquad [P, S] \simeq Q$$

$$\{Q, Q\} \simeq P, \quad \{S, S\} \simeq K$$

$$\{Q, S\} \simeq M + D + R$$

※ 群論的に超共形sym.はかなり限られる
(4dでは4タイプのみ)

chiral primary op.

$$K_\mu : \Delta \to \Delta - 1$$
$$P_\mu : \Delta \to \Delta + 1$$

と同様に

$$S : \Delta \to \Delta - \frac{1}{2}$$
$$Q : \Delta \to \Delta + \frac{1}{2}$$

"chiral primary op."

$$[K_\mu, O(0)] = 0, \quad [S, O(0)] = 0$$
$$([Q, O(0)] = 0 \text{ for some } Q)$$

$$\{Q, S\} \simeq M + D + R = 0$$

次元が一意に決まる!

特に 4d $N=1$ のとき, scalar op. では

$$\Delta = \frac{3}{2} R \quad \left(\begin{array}{l} \text{free scalar} \\ \Delta = 1, \ R = \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

Q と P_μ を作用させて "descendants" が作れる