

# 6. Old story on SCI in $N=4$ SYM

①

[Kinney-Maldacena-Minwalla-Raju'05]

AdS/CFT:

$$\begin{array}{ccc} \text{Type IIB} & & 4\text{d } \text{SU}(N) \\ \text{on } \text{AdS}_5 \times S^5 & \longleftrightarrow & N=4 \text{ SYM} \end{array}$$

$$G_N \sim \frac{1}{N}, \quad d^1 \sim \frac{1}{\sqrt{g^2 m N}}$$

SUSY BH entropy:

$$S_{BH} = \sqrt{Q_1 Q_2 + Q_1 Q_3 + Q_2 Q_3} - \frac{N^2}{2} (J_1 + J_2)$$

これが“Iから出なかった”という主張

(2)

特に  $N \gg 1$  を考へる  $\rightarrow SU(N) \supset U(N)$

また、簡単のため、 $Q_1 = Q_2 = Q_3$  の場合を考へる

(  $U(1)_R \subset SO(6)_R$  のように着目 )

SUSY of  $U(N)$   $N=4$  SYM :

$$I = \frac{(p;p)^N (q;q)^N}{N!} \int d^N a \prod_{j \neq k} \frac{\Gamma^3((pq)^{\frac{1}{3}} e^{2\pi i(a_j - a_k)}; p, q)}{\Gamma(e^{2\pi i(a_j - a_k)}; p, q)}$$

$N=1$  vector

$$= \frac{(p;p)^N (q;q)^N}{N!} \int \frac{d^N z}{2\pi i z} \prod_{j \neq k} \frac{\Gamma^3((pq)^{\frac{1}{3}} \frac{z_j}{z_k}; p, q)}{\Gamma(\frac{z_j}{z_k}; p, q)}$$

$$\left( z_j = e^{2\pi i a_j} \right)$$

“Matrix model” の書き換え！ (3)

$$N_e(z, p, q) = \prod_{j,k=0}^{\infty} \frac{1 - z^{-1} p^{j+1} q^{k+1}}{1 - z p^j q^k}$$

$$= \exp \left[ \sum_{j,k=0}^{\infty} \left[ \ln(1 - z^{-1} p^{j+1} q^{k+1}) - \ln(1 - z p^j q^k) \right] \right]$$

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=0}^{\infty} \ln(1 - z p^j q^k) &= - \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (z p^j q^k)^n \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{z^n}{(1-p^n)(1-q^n)} \end{aligned}$$

$$= \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\frac{z^n - (z^{-1} p q)^n}{(1-p^n)(1-q^n)}} \right]$$

(4)

$$I \propto \int d^n a \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n(p, q) \text{Tr} U^n \text{Tr} U^{-n} \right\}$$

$$U = \text{diag} (e^{2\pi i a_1}, \dots, e^{2\pi i a_N})$$

$$a_n(p, q) = f(p^n, q^n)$$

$$\begin{aligned} f(p, q) &\equiv \frac{pq - 1 + 3(pq)^{\frac{1}{3}} - 3(pq)^{\frac{2}{3}}}{(1-p)(1-q)} \\ &= \frac{((pq)^{\frac{1}{3}} - 1)^3}{(1-p)(1-q)} \end{aligned}$$

(5)

$N \rightarrow \infty$  のとき、鞍点法が使える

$P, Q \in \mathbb{R}, \quad 0 < P, Q < 1$  の場合

$$f(P, Q) < 0$$

→  $\text{Tr } U^n = 0$  が“支配的”

→ saddle action は 0

→ 寄与は 1-loop det. のみ

$$\rightarrow I = e^{O(1)}$$

$e^{S_{\text{BH}}}$  と異なる

bosonic & fermionic states の間で

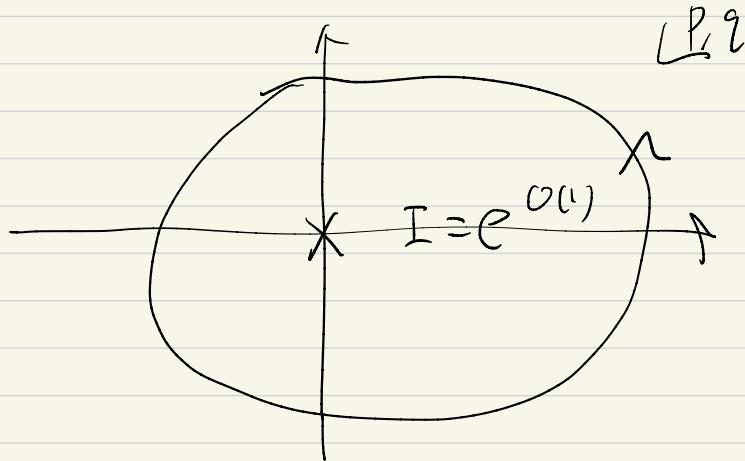
キャンセルが“起きた？”

(6)

Loop hole:

$$I = \text{Tr}_{\text{PPS}} \left[ (-1)^F p^{\sum_1 + \frac{r}{2}} q^{\sum_2 + \frac{r}{2}} \dots \right]$$

$$(\# \text{ of states}) = \int \frac{dp}{p^{N_p+1}} \frac{dq}{q^{N_q+1}} I(p, q, \dots)$$



$p, q \in \mathbb{C}$  の時の情報も必要だったが、

計算してないのに  $p, q \in \mathbb{R}$  の時の結果を

そのまま接続してしまっていた

(7)

Genericな場合に SCI ちゃんと

計算するのはムズ“かしい”…

→ 色々計算(やすい領域で)解いてみるべき

→ ここで “Cardy limit” を考こう  
 $r_{S1} \rightarrow 0$