7. 4d SUSY Cardy formula (独立) ①

[Di Pietro-Komargodski '14, Ardehali '15, Di Pietro-MH '16]

2d CFTのCardy公式:

central charge

$$\log Z_{S^1_\beta \times S^1} \underset{\beta\to 0}{\sim} \frac{\pi^2 c}{3\beta}$$

高次元versionはあるか?

セットアップのチョイス:

- 次元
  - odd か even で違い?
- 空間
  - 2dより沢山のチョイス
  - 一般にmodular不変性がない
- 理論のクラス

②

ここでは,

$4d\ \mathcal{N}\geq 1$ SUSY理論

w/ R-sym. on $S^1_\beta \times \underbrace{M_3}$ にfocus

$M_3 \sim S^3$ のとき, SCI

※ SUSYは残るようにする

— fermionのb.c.: p.b.c. or twisted

(≠有限温度)

— M_3も制限

(M_3 = $\underbrace{\text{Seifert mfd.}}$ ならOK)

$\sim S^1$ bundle over Σ_2

— Z はSUSY indexを与える:

$$Z_{S^1_\beta \times M_3} \propto \mathrm{Tr}\left[(-1)^F e^{\mu_i Q_i}\right]$$

結論：

"ほとんどの場合",

$$\log Z_{S^1_\beta \times M_3} \underset{\beta \to 0}{\sim} \frac{\pi^2 \overset{\text{定数}}{L_{M_3}}}{12\beta} \, \mathrm{Tr}\, R$$

$$\mathrm{Tr}\, R = \sum_{\text{fermion}} q_R$$

$U(1)_R$-(gravity)^2 't Hooft anomaly の係数

$$= \frac{4\pi^2 L_{M_3}}{3\beta}(c-a) \quad \left(\text{for SCFT} \;\; \mathrm{Tr}\, R = 16(c-a) \right)$$

$$\left(\begin{aligned} &\langle T \rangle = \frac{c}{16\pi^2} W^2 - \frac{a}{16\pi^2} E_{4d} \\ &\text{For 4d } \mathcal{N}=1, \\ &\qquad a = \frac{3}{32}\left(3\,\mathrm{tr} R^3 - \mathrm{tr} R\right) \\ &\qquad c = \frac{1}{32}\left(9\,\mathrm{tr} R^3 - 5\,\mathrm{tr} R\right) \end{aligned} \right)$$

導出方法：

① Localization公式がある場合に

$\beta \to 0$ 極限を取る (SCIの場合のみ)

— 何も仮定なしで導出可

— 既にLocalizationされてるM_3のみ

— M_3ごとにちがう解析必要

— 物理の見通し ×

② $\beta \to 0$での有効理論

— 物理の見通し ◎

— M_3をgenericにしたまま解析

— いくつかが入る

有効理論アプローチ

Set up: 4d $\mathcal{N}=1$ Lagrangian theory

w/ Gauge group G

$$Z_{S^1_\beta \times M_3} \equiv \int DV D\Phi \, e^{-S_{vec}[V] - S_{mat}[\Phi] - S_{int}[\Phi, V]}$$

Step 1: Vを固定した場合を考える

(Gを一時的にglobal sym.とみなす)

$$Z^{\text{frozen}}_{S^1_\beta \times M_3}[V] \equiv \int D\Phi \, e^{-S_{mat}[\Phi] - S_{int}[\Phi, V]}$$

Step 2: $\beta \to 0$ でのVの有効理論を書き下す!

$$\lim_{\beta \to 0} Z^{\text{frozen}}_{S^1_\beta \times M_3}[V]$$

Step 3: Gを"ゲージ化"!

$$\lim_{\beta \to 0} Z_{S^1_\beta \times M_3} = \lim_{\beta \to 0} \int DV \, e^{-S_{vec}[V]} \, Z^{\text{frozen}}_{S^1_\beta \times M_3}[V]$$

有効理論の書き下し ($G=U(1)$の場合)

Idea: free fermion + SUSY化 + "非くりこみ定理"

まず、free fermion を考える:

$U(1)$ b.g.

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\sigma^M(\nabla_M - iq A_M)\Psi$$

$$ds^2_{S^1_\beta \times M_3} = (dx^4 + c_\mu dx^\mu)^2 + ds^2_{M_3}$$

KK photon

S^1方向に mode 展開

$\rightarrow$ (mass) $= M_n = \frac{2\pi n}{\beta} + qA_4 \quad (n \in \mathbb{Z})$

の $\underbrace{\text{KK fermion on } M_3}_{\text{3d massive fermion}}$ が現れる

$\rightarrow$ 結合しているゲージ場の Chern-Simons term を indule

(CSレベル $= \frac{\text{"charge}^2\text{"}}{2}\,\mathrm{sign}(M_n)$)

	$U(1)$	$U(1)_{KK}$	mass
n-th KK fermion	$+q$	$-n$	$\frac{2\pi n}{\beta}+qA_4$

$$S_{eff} \supset \sum_n \frac{i\,\mathrm{sgn}(M_n)}{8\pi}\int \Big[\underbrace{q^2 A\wedge dA}_{U(1)\times U(1)} - \underbrace{\frac{4\pi q n}{\beta} A\wedge dc}_{U(1)\times U(1)_{KK}} + \underbrace{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 c\wedge dc}_{U(1)_{KK}\times U(1)_{KK}}\Big]$$

freeでなかったら?

- S_{eff}のこの部分はユニバーサル
- 他にnontrivialなくりこみを受ける項がある
  (ex. 3d Einstein Hilbert action)
- しかしSUSYがあると、可能な項が全てSUSY CS termの一部になってしまう
  → 非くりこみ

SUSY CS terms (bosonic part) :

$$\mathcal{A}_\mu \equiv A_\mu - \sigma C_\mu \,, \quad \mathcal{A}^{(R)}_\mu = A^{(R)}_\mu + \frac{1}{2} V_\mu \,, \quad V_\mu = -i\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\nu C^\rho$$

- $U(1) - U(1)$

$$i\varepsilon_{\mu\nu\rho}\mathcal{A}^\mu\partial^\nu\mathcal{A}^\rho - 2D\underbrace{\sigma}_{\text{"}A_4\text{"}}$$

- $U(1) - U(1)_R$

$$i\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu(\mathcal{A}^{(R)\rho} - \frac{1}{2}\underbrace{V^\rho}_{-i\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\nu C^\rho}) - D\underbrace{H}_{\text{"}A_R^4\text{"}} - \frac{\sigma}{4}(R + 2V_\mu V^\mu + 2H^2)$$

- $U(1) - U(1)_{KK}$

$$i\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu C^\rho + D - \sigma H$$

- $U(1)_R - U(1)_{KK}$

$$\overset{R}{\mathcal{A}} = A_R + V_\mu$$

$$-\mathcal{A}^{(R)\mu}V_\mu + V^\mu V_\mu - \frac{1}{2}H^2 + \underbrace{\frac{1}{4}R}_{\text{3d Einstein-Hilbert}}$$

- $U(1)_{KK} - U(1)_{KK}$

$$-C^\mu V_\mu + 2H$$

※ゲージ化について

$$\lim_{\beta\to 0} Z_{S^1_\beta\times M_3} = \lim_{\beta\to 0}\int DV\, e^{-S_{\mathrm{vec}}[V]}\, Z^{\mathrm{frozen}}_{S^1_\beta\times M_3}[V]$$

- gauginoの影響を有効CS termに反映
- $\int DV$の実行は難しい

→ 仮定！ $\int DV = \sum_{\{\text{SUSY config. of } V\}}$

Localizationがやられた例では正しい

[証明？ Dedushenko '18]

4d SUSY Cardy formula

$$Z_{S^1_\beta \times M_3} \sim e^{-\frac{\pi^2 L_{M_3}}{12\beta}\mathrm{Tr}R} \int d^{|G|}a \; e^{-V^{\mathrm{eff}}_{M_3}(a)}$$

holonomy

$$L_{M_3} \equiv \frac{1}{\pi^2}\int_{M_3} d^3x \sqrt{g}\left[-A^{(R)\mu}V_\mu + V^\mu V_\mu - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{4}R\right]$$

weight vector

$$V^{\mathrm{eff}}_{M_3}(a) \equiv -\sum_{f\in\text{fermions}}\sum_{\rho_f\in\mathfrak{R}_f}\left[\frac{\pi^2 i A_{M_3}}{6\beta^2}\kappa(\rho_f\cdot a) + \frac{\pi^2(R_f L_{M_3} - \rho_f\cdot l_{M_3})}{2\beta}\vartheta[\rho_f\cdot a]\right]$$

R-charge

$$A_{M_3} \equiv \frac{i}{\pi^2}\int_{M_3} d^3x\sqrt{g}\left[-C^\mu V_\mu + 2H\right]$$

$$l^i_{M_3} \equiv \frac{1}{\pi^2}\int_{M_3} d^3x\sqrt{g}\left[-(A^\mu)^i V_\mu + D^i\right]$$

$$K(x) \equiv \{x\}(1-\{x\})(1-2\{x\})$$

$$\theta(x) \equiv \{x\}(1-\{x\})$$

$$\{x\} = x - [x]$$

$V = O(\beta^{-2 \text{ or } -1})$ なので

$$Z_{S^1_\beta \times M_3} \sim e^{-\frac{\pi^2 L_{M_3}}{12\beta} \mathrm{Tr} R - V^{\mathrm{eff}}_{M_3}(a)\big|_{\min}}$$

※ $S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_n$, $T^2 \times \Sigma_2$ の場合に、
localization の結果との一致チェック済

特にSCIの場合,

$$\left(p \equiv e^{2\pi i\sigma} = e^{\mathcal{O}(\beta)},\ q \equiv e^{2\pi i\tau} = e^{\mathcal{O}(\beta)} \right)$$

$$I \simeq e^{-\frac{i\pi(\tau+\sigma)}{12\tau\sigma}\mathrm{Tr}R}$$

$$\int d^{|G|}a\, e^{\frac{i\pi}{6\tau\sigma}V_2(a) + \frac{i\pi(\tau+\sigma)}{2\tau\sigma}V_1(a)}$$

$$\begin{cases} V_2(a) = -\sum_{I \in \mathrm{chirals}} \sum_{\rho_I} \kappa(\rho_I \cdot a) \\ V_1(a) = \sum_{\alpha \in \mathrm{root}} \vartheta(\alpha \cdot a) + \sum_I \sum_{\rho_I} (r_I - 1)\vartheta(\rho_I \cdot a) \end{cases}$$

SCIのlocalization公式からの導出

13

$$I = \frac{(p;p)^{|G|}(q;q)^{|G|}}{|W|} \int d^{|G|}a \, Z_{vec}(a) Z_{chi}(a)$$

$$Z_{vec} = \frac{1}{\prod_{\alpha \in root} \Gamma(\alpha \cdot a; \sigma, \tau)}$$

$$Z_{chi} = \prod_{I \in chiral} \prod_{\rho_I} \Gamma\left(\rho_I \cdot a + \frac{\sigma+\tau}{2} r_I, \sigma, \tau\right)$$

Cardy limit : $\tau, \sigma \to 0$

"modular property"

$$\Gamma\left(\frac{z}{\sigma}, -\frac{1}{\sigma}, \frac{\tau}{\sigma}\right) = e^{\pi i Q(z;\sigma,\tau)}$$

$$\times \Gamma\left(\frac{z-\sigma}{\tau}, -\frac{\sigma}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) \Gamma(z, \sigma, \tau)$$

$$Q(z,\sigma,\tau) \equiv \frac{\{z\}^3}{3\tau\sigma} - \frac{\tau+\sigma-1}{2\tau\sigma}\{z\}^2$$

$$+ \frac{\tau^2+\sigma^2+1+3\tau\sigma-3\tau-3\sigma}{6\tau\sigma}\{z\}$$

$$- \frac{(\tau+\sigma-1)(\tau\sigma-\tau-\sigma)}{12\tau\sigma}$$

$$\ln Z_{vec} \xrightarrow{\beta \to 0} 2\pi i \frac{\tau + \sigma}{4\tau\sigma} \sum_{\alpha} \left(\theta(\alpha \cdot \sigma) - \frac{1}{6} \right) + O(\beta^0)$$

$$\ln Z_{chi} \longrightarrow 2\pi i \sum_{I} \sum_{\rho_I} \left[-\frac{k(\rho_I \cdot a)}{12\tau\sigma} + (R_I - 1) \frac{\tau + \sigma}{4\tau\sigma} \left(\theta(\rho_I \cdot a) - \frac{1}{6} \right) \right] + O(\beta^0)$$

✓

V_{eff} の性質

- 一見、$\mathcal{O}(\beta^{-2})$: a の3次, $\mathcal{O}(\beta^{-1})$: a の2次

→ gauge anomaly cancel により、

$\mathcal{O}(\beta^{-2})$: 2次, $\mathcal{O}(\beta^{-1})$: 1次に

$$\left(\sum_f \sum_{\rho_f} \rho_f^i \rho_f^j \rho_f^k = 0, \ \sum_f \sum_{\rho_f} \rho_f^i = 0, \ \sum_f \sum_{\rho_f} \rho_f^i \rho_f^j R_f = 0 \right)$$

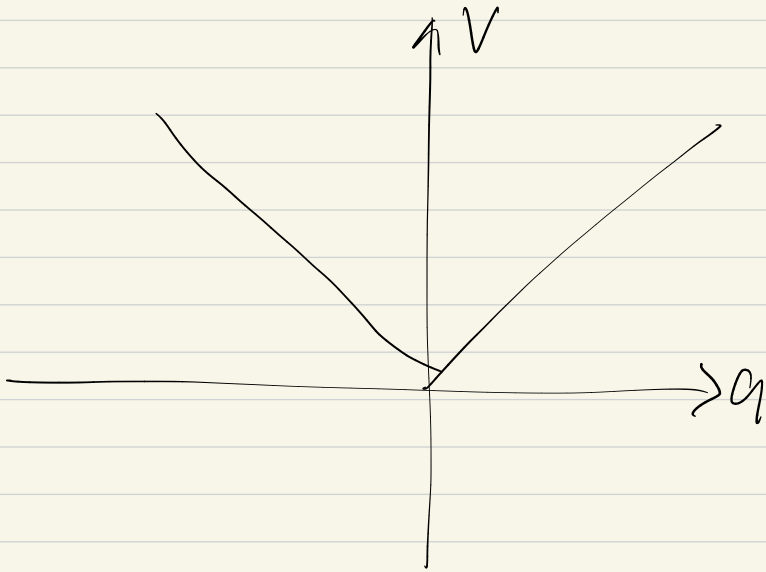
- $V_{M_3}^{eff}(a=0) = 0$

- $\mathrm{Re}[V_{M_3}^{eff}(a)]|_{min.} \leq 0$

- For theory w/ C, $\mathrm{Im}[V_{M_3}^{eff}(a)] = 0$

$\mu_{\text{flavor}} = 0$ のとき,

ほとんどの理論で, $V_{\text{eff}}|_{\text{min}} = 0$



このとき, $Z_{M_3} < \infty$ で,

$$Z_{S^1_\beta \times M_3} \sim e^{-\frac{\pi^2 L_{M_3}}{12\beta} \mathrm{Tr} R} \times Z_{M_3}$$

ごくまれに, $V_{eff}\big|_{min} > 0$

このとき, $Z_{M_3} \sim e^{\infty}$

$$\log Z_{S^1_\beta \times M_3} \sim -\frac{\pi^2 L_{M_3}}{12\beta} \mathrm{Tr}\, R - \underbrace{V^{eff}_{M_3}}_{\text{いつも} < 0}\Big|_{min}$$

ex.) Intriligator - Seiberg - Shenker model

SU(2) w/ $\boxed{||}$