4. Superconformal index (SCI) ①

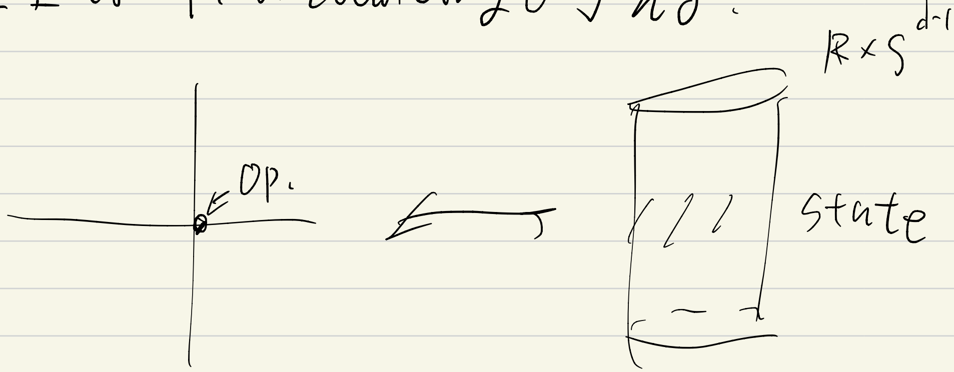
$S^1\times S^{d-1}$上の理論を考えて、$Q_i = \text{"}\underset{\text{角運動量}}{J} + R\text{"}$

"superconformal index"

$=$ $\underbrace{\text{radial quantization}}_{\mathbb{R}\times S^{d-1}}$ の Witten index

特にCFTの場合、state/op.対応により、

SCIはop.のcountingも与える:



※ CFTでなくても、SCI自体は定義可。

ただし、state/op.対応による直の解釈はなし。

RG inv.なのでIR CFTのop. countingの情報は持っている

$4d\ \mathcal{N}=1$ on $S^1\times S^3$

曲がった空間 → εが定数でなくなる

Killing spinor eq. on $S^1\times S^3$:

$$
\begin{cases}
D_\mu \underset{\uparrow}{\varepsilon_L} = -\dfrac{1}{2r_{S^3}}\gamma_\mu\gamma_4\varepsilon_L , & D_\mu \underset{\uparrow}{\bar{\varepsilon}_L} = +\dfrac{1}{2r_{S^3}}\gamma_\mu\gamma_4\bar{\varepsilon}_L \\
(j_L=-\tfrac{1}{2},\ j_R=0) & (j_L=\tfrac{1}{2},\ j_R=0) \\
D_\mu \underset{\uparrow}{\varepsilon_R} = +\dfrac{1}{2r_{S^3}}\gamma_\mu\gamma_4\varepsilon_R & D_\mu \underset{\uparrow}{\bar{\varepsilon}_R} = -\dfrac{1}{2r_{S^3}}\gamma_\mu\gamma_4\bar{\varepsilon}_R \\
(j_L=0,\ j_R=\tfrac{1}{2}) & (j_L=0,\ j_R=-\tfrac{1}{2})
\end{cases}
$$

vector multiplet :

$$
\begin{cases}
\delta A_\mu = i(\varepsilon\gamma_\mu\bar{\lambda}) - i(\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda) \\
\delta\lambda = \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu} + D\varepsilon \\
\delta\bar{\lambda} = -\frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\bar{\varepsilon}F_{\mu\nu} + D\bar{\varepsilon} \\
\delta D = -(\varepsilon\gamma^\mu D_\mu\lambda) - (\bar{\varepsilon}\gamma^\mu D_\mu\lambda)
\end{cases}
$$

chiral multiplet :

$$
\begin{cases}
\delta\phi = \sqrt{2}(\varepsilon\psi) \\
\delta\bar{\phi} = \sqrt{2}(\bar{\varepsilon}\bar{\psi}) \\
\delta\psi = -\sqrt{2}\gamma^\mu\bar{\varepsilon}D_\mu\phi + \sqrt{2}\varepsilon F - \frac{\Delta_\phi}{\sqrt{2}}\gamma^\mu D_\mu\bar{\varepsilon}\phi \\
\delta\bar{\psi} = -\sqrt{2}\gamma^\mu\varepsilon D_\mu\bar{\phi} + \sqrt{2}\bar{\varepsilon}\bar{F} - \frac{\Delta_\phi}{\sqrt{2}}\gamma^\mu D_\mu\varepsilon\bar{\phi} \\
\delta F = -\sqrt{2}(\bar{\varepsilon}\gamma^\mu D_\mu\psi) - 2(\bar{\varepsilon}\bar{\lambda})\phi - \frac{\Delta_\phi - 1}{\sqrt{2}}D_\mu\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\psi \\
\delta\bar{F} = -\sqrt{2}(\varepsilon\gamma^\mu D_\mu\bar{\psi}) - 2\bar{\phi}(\varepsilon\lambda) - \frac{\Delta_\phi - 1}{\sqrt{2}}D_\mu\varepsilon\gamma^\mu\bar{\psi}
\end{cases}
$$

SUSY algebra:

$\delta(\varphi) = \varepsilon Q$, $\delta(\bar{\varphi}) = \bar{\varepsilon}\bar{Q}$ として,

・$\varepsilon = \varepsilon_L$ の場合,

$$\{Q, \bar{Q}\} = \frac{2}{r_{S^3}}\left(\Delta - 2\underset{(J_L^3)}{J_L} - \frac{3}{2}R\right)$$

特に, $(R, J_L, J_R)[\varepsilon_L] = (+1, -\frac{1}{2}, 0)$ より,

$R + 2J_L$, J_R と可換

・$\varepsilon = \varepsilon_R$ の場合,

$$\{Q, \bar{Q}\} = \frac{2}{r_{S^3}}\left(\Delta - 2J_R + \frac{3}{2}R\right)$$

特に, $(R, J_L, J_R)[\varepsilon_R] = (+1, 0, +\frac{1}{2})$ より,

J_L, $R - 2J_R$ と可換

4d $\mathcal{N}=1$ SCI

・$\varepsilon = \varepsilon_L$ の場合

nonzero は ペアリング

flavor charge

$$I = \mathrm{tr}\left[(-1)^F e^{-\beta\left(D \underbrace{-\frac{3}{2}R - 2J_L}_{\text{twisted b.c.}}\right)} t^{R+2J_L} x^{2J_R} \prod_i e^{\mu_i F_i}\right]$$

$$= \mathrm{tr}\left[(-1)^F t^{R+2J_L} x^{2J_R} \prod_i e^{\mu_i F_i}\right]$$

※ しばしば

$$I = \mathrm{tr}\left[(-1)^F p^{j_L + j_R + \frac{R}{2}} q^{j_L - j_R + \frac{R}{2}} \prod_i e^{\mu_i F_i}\right]$$

とも書かれる

・$\varepsilon = \varepsilon_R$ の場合

$$I = \mathrm{tr}\left[(-1)^F e^{-\beta\left(\Delta - 2J_R + \frac{3}{2}R\right)} t^{2J_L} x^{R-2J_R} \prod_i e^{\mu_i F_i}\right]$$

$$= \mathrm{tr}\left[(-1)^F t^{2J_L} x^{R-2J_R} \prod_i e^{\mu_i F_i}\right]$$

※ しばしば

$$I = \mathrm{tr}\left[(-1)^F p^{j_L + j_R - \frac{R}{2}} q^{-j_L + j_R - \frac{R}{2}} \prod_i e^{\mu_i F_i}\right]$$

とも書かれる

※ $\mathcal{N} \geq 2$ では R-sym. が大きい

→ 対応する fugacity を入れられる

→ $\mathcal{N}=1$ で特定の flavor charge を入れた場合と等価