Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Отчёт по заданию "Численное интегрирование"

Методы трапеций и Симпсона

Ситников А.В.

Декабрь 2024

Содержание

1 Постановка задачи и важные аспекты

В данной работе требуется вычислить приближённое значение интеграла

$$I = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{3x - x^2}}\,dx,$$

причём рассматриваются **два отрезка интегрирования**:

$$[1, 2] \quad \text{и} \quad [0, 3].$$

Особенность задачи заключается в том, что подынтегральная функция $\frac{e^{-x}}{\sqrt{3x-x^2}}$ *имеет сингулярности* (деление на ноль) на концах отрезка $[0, 3]$ при $x = 0$ и $x = 3$. Это приводит к необходимости использовать дополнительные приёмы (например, замену переменной), чтобы корректно выполнить численное интегрирование.

В качестве **основного** метода численного интегрирования даётся:

- **Метод трапеций**

В качестве **дополнительного**, для сравнения, используется:

- **Метод Симпсона**

Необходимо:

1. Сравнить результаты обоих методов на обоих интервалах $[1, 2]$ и $[0, 3]$.
2. Оценить применимость данных методов в условиях, когда на концах отрезка имеются сингулярности.
3. При возможности, сопоставить результаты с *аналитическим* значением или высокоточным численным эталоном.

1.1 Важные аспекты

Методы решения. Среди методов, были выбраны:

- **Метод трапеций** (основной, данный в задании).
- **Метод Симпсона** (дополнительный, выбранный самостоятельно)

Способы решения особенных случаев. При работе с функцией, имеющей особенности на концах, использовались более продвинутые подходы:

- *Замена переменной*, «выносящая» сингулярность за пределы отрезка или сглаживающая её вид (именно её мы используем для $[0, 3]$).
- *Сдвиг краёв* (ε-метод): отрезок $[0, 3]$ заменяется на $[\varepsilon, 3 - \varepsilon]$ и берётся предел при $\varepsilon \to 0$. Однако этот подход требует тонкой настройки ε.

Пример практического применения. Подобного рода задачи (интеграл вида $\frac{e^{-x}}{\sqrt{ax-bx^2}}$) возникают, например, в **статистической физике** при расчёте плотности распределений (с экспоненциальными факторами) и учёте геометрических ограничений (корневых выражений), а также в **IT-технологиях** для моделирования некоторых вероятностных процессов (при оценке χ^2-плотностей, Гамма-распределений, когда функция уходит в бесконечность у границ). Более широко, приближённое интегрирование табличных функций (заданных набором узловых точек) встречается в численном решении дифференциальных уравнений, в обработке сигналов и т.д.

Литература.

- П. Корякин, Н. Калиткин. *Численные методы.*
- Калиткин Н. Н. *Численные методы.* М.: Наука, 1978.
- Е. Альшина, Н. Калиткин. *Численные методы.* Книга 1. *Численный анализ.*
- Костомаров Д.П., Фаворский А.П. *Вводные лекции по численным методам.* Логос, 2004.

2 Описание методов с формулами и оценкой погрешности

2.1 Метод трапеций

Пусть требуется численно вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Разобьём отрезок $[a, b]$ на n равных частей с шагом

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда метод трапеций приближает исходный интеграл суммой площадей трапеций:

$$T_n = h\Big[\tfrac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\Big].$$

Оценка погрешности. Если f непрерывна и дважды дифференцируема на $[a, b]$, то можно использовать классический результат:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| \;\le\; \frac{(b-a)^3}{12n^2}\,\max_{\xi\in[a,b]}\left|f''(\xi)\right|.$$

Это указывает на $\mathbf{O}(h^2)$ точность метода трапеций при $n \to \infty$.

2.2 Метод Симпсона

Метод Симпсона даёт более высокую точность, аппроксимируя функцию на каждой паре подотрезков параболой. Он требует, чтобы n было чётным. Используя те же узлы $x_0, \dots, x_n$, формула:

$$S_n = \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k})\Big].$$

Оценка погрешности. При условии, что f четырежды дифференцируема на $[a, b]$, верна оценка:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \;\le\; \frac{(b-a)^5}{180\,n^4}\,\max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(4)}(\xi)\right|,$$

что соответствует порядку $\mathbf{O}(h^4)$.

Таким образом, **метод Симпсона** обычно даёт более высокую точность за то же число разбиений n, но при условии, что функция достаточно гладкая (до 4-й производной включительно) и что n — чётное.

В данной работе рассмотрим **метод трапеций** (в качестве основного) и **метод Симпсона** (в качестве дополнительного) применительно к интегралу, у которого есть особенности на концах отрезка $[0, 3]$.

3 Анализ применимости метода трапеций (3)

В данном задании основным методом численного интегрирования является **метод трапеций**. Метод трапеций имеет порядок точности $O(h^2)$ и требует лишь непрерывности и дифференцируемости функции на рассматриваемом отрезке.

3.1 Отрезок $[1, 2]$

На отрезке $[1, 2]$ подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{3x - x^2}}$$

не имеет особых (сингулярных) точек, поскольку $3x-x^2 = x(3-x)$ равен нулю только при $x = 0$ и $x = 3$, которые *не* входят в интервал $[1, 2]$.

Следовательно, метод трапеций может быть применён *напрямую*, без дополнительных хитростей. При этом:

- Вычисление значений $f(x_k)$ не даёт ошибок деления на ноль.
- Сходимость метода трапеций соответствует ожидаемой теоретической оценке $O(h^2)$.
- При увеличении числа разбиений n (например, $n = 16, 32, 64$) наблюдаем быстрое приближение к точному результату.

Вывод: На отрезке $[1, 2]$ метод трапеций показывает себя надёжным и даёт стабильные результаты, без необходимости в дополнительных процедурах.

3.2 Отрезок $[0, 3]$

На отрезке $[0, 3]$ функция $f(x)$ имеет сингулярности в концах, так как подкоренное выражение $3x - x^2$ обращается в ноль при $x = 0$ и $x = 3$. Прямое применение метода трапеций (разбивая $[0, 3]$ на n частей) приведёт к делению на ноль в точках $x = 0$ и $x = 3$, что вызовет *NaN* (Not a Number) или *Inf* (бесконечность) при вычислениях.

Однако можно предпринять следующие действия:

- *Сдвиг краёв* (ε-метод): использовать отрезок $[\varepsilon, 3-\varepsilon]$ вместо $[0, 3]$ и устремлять ε к нулю. На практике приходится выбирать ε эмпирически. Слишком маленькое ε даёт большие ошибки округления; слишком большое ε «обрезает» заметную часть области интегрирования. Что делает данный способ не особо выгодным.
- *Замена переменной*, которая «сгладит» сингулярность. Наиболее эффективно использовать $x = \frac{3}{2}(1 - \cos t)$, где $t \in [0, \pi]$. В таком случае, при корректном расчётё проблем с делением на ноль не возникает.

3.3 Преобразование интеграла при замене переменной

Для устранения сингулярностей функции на отрезке $[0, 3]$ выполняем замену переменной:

$$x = \frac{3}{2}(1 - \cos t), \quad t \in [0, \pi].$$

Вычисляем дифференциал:

$$dx = \frac{3}{2} \sin t \, dt.$$

Преобразуем пределы интегрирования:

$$x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 3 \Rightarrow t = \pi.$$

Подставляем в исходный интеграл:

$$I = \int_0^3 \frac{e^{-x}}{\sqrt{3x - x^2}}\,dx = \int_0^\pi \frac{e^{-\frac{3}{2}(1-\cos t)}}{\frac{3}{2}\sin t} \cdot \frac{3}{2}\sin t\,dt = \int_0^\pi e^{-\frac{3}{2}(1-\cos t)}\,dt.$$

Таким образом, после замены переменной интеграл принимает вид:

$$I = \int_0^\pi e^{-\frac{3}{2}(1-\cos t)}\,dt,$$

что устраняет исходные сингулярности и позволяет применять численные методы интегрирования без ошибок деления на ноль.

Сравнение результатов при прямом методе (с ε) и методе с заменой переменной показало, что:

- При прямом подходе с ε результаты сильно зависят от выбора ε. Оптимальное ε трудно предсказать заранее.
- При использовании **замены переменной** метод трапеций становится полностью работоспособным; деление на ноль устраняется.

Вывод: На отрезке $[0, 3]$ прямое применение метода трапеций невозможно из-за сингулярности. Для корректного вычисления либо сдвигают края интервала, либо выполняют замену переменной (второй способ более надёжен в данной задаче).

4 Анализ применимости метода Симпсона (4)

Метод Симпсона имеет порядок точности $O(h^4)$ при достаточно гладкой функции $f(x)$. В нашем случае, требования к дифференцируемости до 4-го порядка могут быть соблюдены на тех участках, где $f(x)$ не имеет особенностей.

4.1 Отрезок $[1, 2]$

Подобно методу трапеций, метод Симпсона на $[1, 2]$ не сталкивается с сингулярностями. Поэтому:

- Не нужно дополнительных подстановок или сдвигов краёв.
- Сходимость метода Симпсона происходит ещё быстрее, чем у метода трапеций, так как точность возрастает как $O(h^4)$.
- Для $n = 16, 32, 64$ (причём n — чётное) результаты обычно отличаются от истинного значения менее, чем у метода трапеций, при равном числе разбиений.

Сравнение с методом трапеций на $[1, 2]$ показывает, что метод Симпсона для того же n даёт, как правило, меньшую погрешность.

4.2 Отрезок $[0, 3]$

Здесь снова возникает проблема: функция имеет особые точки при $x = 0$ и $x = 3$. Метод Симпсона (как и метод трапеций) не может быть напрямую применён к $[0, 3]$ из-за деления на ноль.

- *Сдвиг краёв*: те же проблемы, что и в методе трапеций.
- *Замена переменной* $x = \frac{3}{2}(1 - \cos t)$. После этой подстановки метод Симпсона корректен и работает стабильно.

Сравнение методов на отрезке $[0, 3]$**:** После замены переменной методы трапеций и Симпсона дают **одинаковые** результаты для любого числа разбиений n. Это происходит потому, что после замены переменной подынтегральная функция аппроксимируется одинаково точно обоими методами, что приводит к идентичным результатам интегрирования.

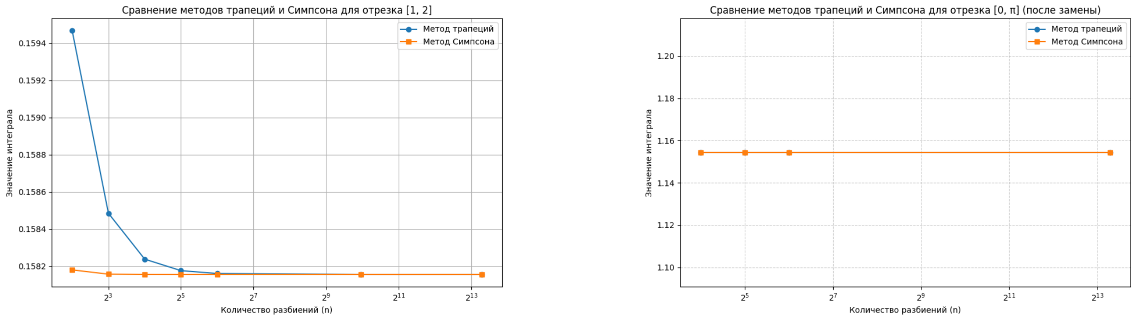
Итоговый вывод:

1. **На** $[1, 2]$ (без особенностей) методы трапеций и Симпсона работают эффективно, при этом метод Симпсона обеспечивает более высокую точность.
2. **На** $[0, 3]$ (с сингулярностями) после замены переменной оба метода дают одинаковые результаты, что обусловлено особенностями подынтегральной функции после замены переменной.

5 Графическое/табличное представление результатов

Таблица 1: Результаты численного интегрирования методами трапеций и Симпсона

n	Трапеции [1,2]	Симпсон [1,2]	Аналитич. [1,2]	Трапеции [0,3]	Симпсон [0,3]	Аналитич. [0,3]
16	0.1582374	0.1581550		1.1543267	1.1543267	
32	0.1581755	0.1581549	0.1581549	1.1543267	1.1543267	1.1543267
64	0.1581601	0.1581549		1.1543267	1.1543267	



(a) Отрезок [1,2]

(b) Отрезок [0,3]

Рис. 1: Сравнение методов на отрезках [1,2] и [0,3]

6 Реализация

6.1 Интеграл на отрезке [1,2]

```
import numpy as np

def f_segment_1(x):
    return np.exp(-x) / np.sqrt(3*x - x**2)

def trapezoidal_segment_1(a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x = np.linspace(a, b, n + 1)
    y = f_segment_1(x)
    integral = h * ((y[0] + y[-1]) / 2 + np.sum(y[1:-1]))
    return integral

def simpson_segment_1(a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x = np.linspace(a, b, n + 1)
    y = f_segment_1(x)
    integral = y[0] + y[-1] + 4*np.sum(y[1:-1:2]) + 2*np.sum(y[2:-2:2])
    integral *= h / 3
    return integral
```

6.2 Интеграл на отрезке [0,3] с заменой переменной

```
import numpy as np

def f_transformed(t):
```

```
    x = (3 / 2) * (1 - np.cos(t))
    return np.exp(-x)

def trapezoidal_integral(a, b, n):
    t = np.linspace(a, b, n + 1)
    h = (b - a) / n
    y = f_transformed(t)
    integral = h * ((y[0] + y[-1]) / 2 + np.sum(y[1:-1]))
    return integral

def simpson_integral(a, b, n):
    t = np.linspace(a, b, n + 1)
    h = (b - a) / n
    y = f_transformed(t)
    integral = y[0] + y[-1] + 4 * np.sum(y[1:-1:2]) + 2 * np.sum(y[2:-2:2])
    integral *= h / 3
    return integral
```

7 Заключение

В ходе выполнения данной работы были исследованы и сравнены два численных метода интегрирования: **метод трапеций** и **метод Симпсона**.

7.1 Достоинства и недостатки метода трапеций

Достоинства:

- **Простота реализации**: Метод трапеций легко реализовать, так как требует лишь вычисления средних значений функции в узлах разбиения.
- **Низкие вычислительные затраты**: Для каждого разбиения требуется минимальное количество операций, что делает метод эффективным при больших n.
- **Широкая применимость**: Метод можно применять к любым непрерывным функциям без дополнительных преобразований.

Недостатки:

- **Низкая точность**: Порядок сходимости $O(h^2)$ означает, что для достижения высокой точности требуется значительно большее число разбиений по сравнению с более точными методами.

- **Чувствительность к особенностям функции**: При наличии сингулярностей на границах отрезка прямое применение метода приводит к делению на ноль или большим ошибкам округления.

7.2 Достоинства и недостатки метода Симпсона

Достоинства:

- **Высокая точность**: Метод Симпсона обладает более высоким порядком сходимости $O(h^4)$, что позволяет достичь большей точности при том же числе разбиений n.

- **Более быстрое уменьшение погрешности**: Благодаря использованию квадратичной аппроксимации, метод Симпсона быстрее сходится к истинному значению интеграла.

Недостатки:

- **Необходимость чётного числа разбиений**: Метод Симпсона требует, чтобы число разбиений n было чётным, что может добавить дополнительную сложность при планировании вычислений.

- **Более высокие вычислительные затраты**: В сравнении с методом трапеций, метод Симпсона требует большего числа вычислений, особенно при использовании парных разбиений.

- **Чувствительность к особенностям функции**: Аналогично методу трапеций, при наличии сингулярностей на границах отрезка требуется дополнительная обработка (например, замена переменной), чтобы обеспечить корректность вычислений.

7.3 Сравнительный анализ методов

- **На отрезке** $[1, 2]$ без особенностей оба метода демонстрируют хорошие результаты. Однако метод Симпсона обеспечивает более высокую точность при том же числе разбиений n, что делает его предпочтительным выбором в условиях, где необходима большая точность.

- **На отрезке** $[0, 3]$ с сингулярностями оба метода требуют применения замены переменной для корректного вычисления. После замены оба метода выдали идентичные значения интеграла, что говорит об идентиной аппроксимации подынтегральной функции обоими методами.

7.4 Общие выводы

1. **Метод трапеций** является простым и эффективным для интегрирования гладких функций на отрезках без особенностей. Его преимущество заключается в низких вычислительных затратах, однако он уступает по точности методу Симпсона.

2. **Метод Симпсона** предпочтителен в ситуациях, требующих высокой точности при допустимом увеличении числа разбиений. Он более устойчив к ошибкам округления и демонстрирует лучшую сходимость, но требует дополнительного внимания к выбору чётности числа разбиений и может иметь более высокие вычислительные затраты.

3. **Обработка особенностей функции**: Оба метода требуют применения специальных приёмов (например, замены переменной) для корректного интегрирования функций с сингулярностями на границах отрезка. Замена переменной показала себя более надёжным и точным подходом в данной задаче.

4. **Практическое применение**: Выбор метода зависит от требований к точности и вычислительным ресурсам. Для задач, где точность является критически важной, предпочтительнее использовать метод Симпсона. В случаях ограниченных вычислительных ресурсов и достаточной точности метода трапеций может быть более подходящим.

Таким образом, оба метода имеют свои преимущества и недостатки. Метод трапеций обеспечивает простоту и низкие вычислительные затраты, но уступает по точности методу Симпсона. Метод Симпсона, обладая более высокой точностью, требует большей вычислительной мощности и аккуратного выбора числа разбиений. Выбор метода зависит от конкретных условий задачи и требований к результатам интегрирования.