

IMPLEMENTAÇÃO DE ESTIMADORES ÓTIMOS EM UM SISTEMA DE LEVITAÇÃO MAGNÉTICA

A. N. L. Medina¹, C. L. C. Sampaio¹, L. M. Almeida¹, K. A. V. P. Santos¹

¹ Universidade Federal da Bahia, Colegiado de Engenharia de Controle e Automação

E-mail para contato: alicenerym@gmail.com, cintia.lealc@gmail.com,

lucasmascalmeida@gmail.com, kelvinangelus@gmail.com

RESUMO – O filtro de Kalman e o filtro de Kalman estendido são métodos estocásticos e se baseiam na confiança da medição e da modelagem do processo para minimizar a curva do erro entre o estado desejado e o estimado, usando informações medidas para estimar variáveis não medidas. Este artigo traz a implementação destes como ferramentas para estimação de estados não medidos e filtragem de estados medidos em um levitador magnético Maglev 730 ECP Model. Os resultados obtidos para cada filtro foram comparados, mostrando que o filtro de Kalman estendido possui melhor desempenho. Por fim, foi feita uma análise de sensibilidade nas matrizes de covariância a fim de avaliar o impacto destas na aplicação do filtro.

Palavras-chave: Filtro de Kalman; Filtro de Kalman estendido; Levitador magnético; Maglev.

1. INTRODUÇÃO

No contexto da engenharia, o filtro de Kalman tem se mostrado uma alternativa eficaz no tratamento sinais ruidosos discretos, sendo a sua principal aplicação a produção de estimativas de saídas do processo em casos onde não se faz presente a medição de alguma variável.

No presente trabalho pretende-se apresentar uma aplicação de filtro de Kalman e filtro de Kalman estendido, implementando-os num sistema de levitação magnética. O trabalho tem como objetivo geral obter a estimação de variáveis de estado do sistema citado com o método tradicional do filtro de Kalman e sua abordagem estendida. Quanto aos objetivos específicos, serão discutidos os resultados desses diferentes métodos de estimação de estados, aplicados ao sistema, em diferentes cenários e a realização da análise de sensibilidade dos parâmetros de sintonia, de forma a observar como estes impactam no desempenho dos filtros.

2. METODOLOGIA

Para este trabalho, foi utilizado o sistema de um levitador magnético mostrado na Figura 1, composto por duas bobinas dispostas no topo e base do equipamento, que podem ser energizadas para movimentar um ou dois discos magnéticos ao longo de uma guia de vidro.

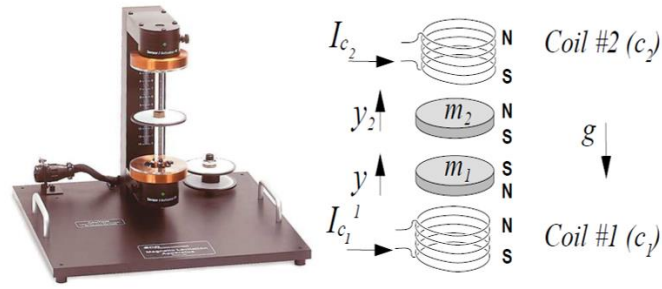


Figura 1 - Levitador magnético ECP Model (Fonte: *Fact Sheet* do fabricante)

2.1 Modelagem Fenomenológica

O sistema foi modelado considerando uma abordagem MIMO, onde o diagrama de corpo livre pode ser visto na Figura 2.

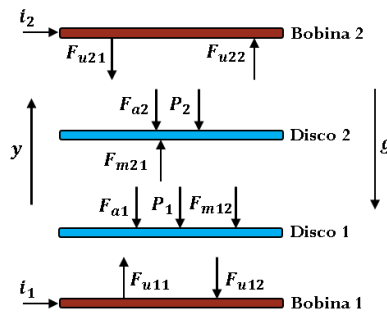


Figura 2 - Diagrama de corpo livre do sistema (Fonte: Autoria própria)

As entradas do sistema são:

i_1 = corrente na bobina 1;

i_2 = corrente na bobina 2.

As saídas do sistema são:

y_1 = posição do disco magnético 1;

y_2 = posição do disco magnético 2.

Para realizar a modelagem fenomenológica, foram consideradas as seguintes hipóteses:

Hipótese 1: Os discos se movimentam apenas na direção do eixo y;

Hipótese 2: O sistema não sofre interferência de campos magnéticos externos;

Hipótese 3: Há um atrito viscoso considerável entre o disco e a guia de vidro;

Hipótese 4: Toda energia aplicada às bobinas é convertida em campo magnético.

A partir da 2ª Lei de Newton, foram obtidas as equações representativas do sistema, mostradas nas Equações 1 e 2 abaixo:

$$F_{RD1} = F_{u11} - F_{u21} - F_{m12} - P_1 - F_{a1} \quad (1)$$

$$F_{RD2} = F_{u22} - F_{u12} + F_{m21} - P_2 - F_{a2} \quad (2)$$

O manual do fabricante do Maglev propõe que a corrente aplicada em cada bobina é uma relação entre a força magnética, F_u , e a posição do disco, $y(t)$. De forma genérica, a Equação 3 mostra essa relação. A Equação 4 representa a força de interação entre os discos:

$$i(t) = f_u \cdot a \cdot (y(t) + b)^N \quad (3)$$

$$f_{mm} = \frac{c}{a \cdot (y_2(t) - y_1(t) + d)^N} \quad (4)$$

Os coeficientes a , b e N são parâmetros relacionados às bobinas e possuem valores obtidos experimentalmente por Júnior (2010). Visto isso, as Equações 5 a 8 são representativas da modelagem fenomenológica:

$$\dot{y}_1 = v_1 \quad (5)$$

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{m_1} \cdot \left(\frac{i_1}{a(y_1+b)^N} - \frac{i_2}{a(y_c-y_1+b)^N} - \frac{c}{a(y_2-y_1+d)^N} - c_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot g \right) \quad (6)$$

$$\dot{y}_2 = v_2 \quad (7)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{1}{m_2} \cdot \left(\frac{i_2}{a(y_2+b)^N} - \frac{i_1}{a(y_2-y_1+d)^N} + \frac{c}{a(y_2-y_1+d)^N} - c_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot g \right) \quad (8)$$

Os parâmetros do modelo são mostrados na Tabela 1:

Tabela 1 - Parâmetros do levitador (Fonte: Júnior (2010))

Parâmetros	Valores
Constante a (adimensional)	0.95
Constante b (adimensional)	6.28
Constante c (adimensional)	2.69
Constante d (adimensional)	4.2
Constante N (adimensional)	4
Altura da guia y_c (m)	0.40
Massas $m_1 = m_2$ (kg)	0.12
Atrito viscoso $c_1 = c_2$ (Ns/m)	1.25
Aceleração da gravidade g (m/s ²)	9.81

2.2 Modelo em espaço de estados

A fim de representar o sistema em espaços de estados, foram definidas as seguintes variáveis de estado:

- y_1 = posição do disco magnético 1;
- v_1 = velocidade do disco magnético 1;
- y_2 = posição do disco magnético 2;
- v_2 = velocidade do disco magnético 2.

Para representar o sistema em espaço de estados, o sistema foi linearizado através da obtenção da matriz Jacobiana. Com isto, temos a representação em espaço de estados no tempo contínuo do sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_4 & 0 & k_5 & k_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ v_1 \\ y_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_1 & w_2 \\ 0 & 0 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ v_1 \\ y_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

As equações representadas nas matrizes acima são dadas abaixo pelas Equações 9 a 18:

$$k_1 = -\frac{N.c}{a.(d-y_1+y_2)^{N+1}} + \frac{N.i_2}{a.(b-y_1+y_c)^{N+1}} + \frac{N.i_1}{m_1 a.(b+y_1)^{N+1}} \quad (9)$$

$$k_2 = -\frac{c_1}{m_1} \quad (10)$$

$$k_3 = \frac{N.c}{m_1.a.(d-y_1+y_2)^{N+1}} \quad (11)$$

$$k_4 = \frac{N.c}{m_2.a.(d-y_1+y_2)^{N+1}} \quad (12)$$

$$k_5 = -\frac{N.c}{a.(d-y_1+y_2)^{N+1}} + \frac{N.i_1}{a.(b+y_2)^{N+1}} + \frac{N.i_2}{m_2 a.(b+y_2)^{N+1}} \quad (13)$$

$$k_6 = -\frac{c_2}{m_2} \quad (14)$$

$$w_1 = \frac{1}{m_1.a.(b+y_1)^N} \quad (15)$$

$$w_2 = -\frac{1}{m_1.a.(b-y_1+y_c)^N} \quad (16)$$

$$w_3 = -\frac{1}{m_2.a.(b+y_2)^N} \quad (17)$$

$$w_4 = -\frac{1}{m_2.a.(b+y_2)^N} \quad (18)$$

2.3 Adequação do modelo e validação

Discretização do sistema: O algoritmo do filtro de Kalman faz uso de um conjunto de equações lineares discretas e estocásticas, como pode-se observar nas Equações 19 e 20, onde w_k e v_k são, respectivamente, ruídos brancos do processo e da medição:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (19)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (20)$$

Para discretização do sistema, foi utilizado o comando `c2d` do *software* MATLAB, utilizando um tempo de amostragem de 0.15 s. O método escolhido para aplicação do comando foi o ‘`zoh`’ (*zero-order hold*).

Análise da observabilidade: Analisar a observabilidade do sistema é necessária para verificar se os estados podem ser estimados, e assim, aplicar o filtro de Kalman. Ela é caracterizada como a condição em que todo estado pode ser determinado pela observação das saídas durante um intervalo de tempo infinito. A matriz de observabilidade \mathbf{O} é dada pela Equação 21 abaixo:

$$\mathbf{O} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T] \quad (21)$$

A observabilidade foi analisada por meio do posto da matriz \mathbf{O} , obtido por meio do comando `rank(observ(A,C))` do *software* MATLAB. Seu valor, 4, indica que o posto é pleno. Logo, o sistema é observável, sendo assim possível a aplicação do filtro de Kalman.

2.4 Projeto do filtro de Kalman

Após a adequação e validação do modelo, exposta em 2.3, foi realizado o projeto do filtro de Kalman. Foram simulados valores de medições ruidosas para as posições do disco, y_1 e y_2 , a fim de estimar as velocidades dos discos, v_1 e v_2 . Os ruídos do processo e de medição, w_k e v_k , respectivamente, seguem uma distribuição normal, mostradas nas Equações 22 e 23:

$$p(w) \sim N(0, \mathbf{Q}) \quad (22)$$

$$p(v) \sim N(0, \mathbf{R}) \quad (23)$$

As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} são, respectivamente, as matrizes de covariância do processo e medições. Os erros a priori e a posteriori são definidos nas Equações 24 e 25. As matrizes de covariância do erro a priori, $\mathbf{P}_{k|k-1}$, e a posteriori, \mathbf{P}_k , são mostradas nas Equações 26 e 27. A matriz \mathbf{P}_k indica a incerteza dos estados estimados.

$$e_{k|k-1} = x_k - \hat{x}_{k|k-1} \quad (24)$$

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{E}[e_{k|k-1} e_{k|k-1}^T] \quad (26)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{E}[e_k e_k^T] \quad (27)$$

Em posse disto, é possível implementar o algoritmo do filtro de Kalman, que pode ser visto na Tabela 2. A estimação é dividida em etapas, sendo a primeira a predição e, em seguida, a correção.

Tabela 2 - Equações utilizadas no algoritmo de Kalman

Etapas	Informação	Equações
Predição	Equação de estados a priori	$\hat{x}_{k k-1} = \mathbf{A}_k \hat{x}_{k-1 k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_{k-1}$
	Covariância do erro a priori	$\mathbf{P}_{k k-1} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1 k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k$
Correção	Ganho de Kalman	$\mathbf{K}_e = \mathbf{P}_{k k-1} \mathbf{C}_e^k (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k k-1} + \mathbf{R}_k)^{-1}$
	Equação de estados a posteriori	$\hat{x}_{k k} = \hat{x}_{k k-1} + \mathbf{K}_e^k (y_k - \mathbf{C} \hat{x}_{k k-1})$
	Covariância do erro a posteriori	$\mathbf{P}_{k k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_e^k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k k-1}$

2.5 Projeto do filtro de Kalman estendido

A adaptação estendida do filtro de Kalman é bastante semelhante ao método originário, uma vez que também é um método estocástico e realiza a estimação de um estado com base nas saídas medidas do processo. Entretanto, a versão estendida difere da anterior em sua aplicação, sendo utilizado em sistemas não lineares. Para esta adequação, uma nova etapa deve ser adicionada. A cada iteração, deve-se linearizar o sistema de equações em torno do ponto da estimação anterior, representá-lo em espaço de estados e obter a representação no domínio discreto. O modelo não linear no domínio discreto pode ser visto nas Equações 28 e 29. A linearização iterativa é mostrada nas Equações 30 e 31.

$$x(k) = f[x(k-1), u(k-1)] + w(k) \quad (28)$$

$$y(k) = h(x(k)) + v(k) \quad (29)$$

$$x(k) \approx f[\hat{x}_{k-1|k-1}, u(k-1)] + A_k [x(k-1) - \hat{x}_{k-1|k-1}] + \omega(k) \quad (30)$$

$$y(k) \approx h[\hat{x}_{k|k-1}] + C_k [x_k - \hat{x}_{k|k-1}] + v(k) \quad (31)$$

Os termos A_k e C_k são dados pelas Equações 32 e 33:

$$A_k = \left. \frac{\partial f[x(k-1), u(k-1)]}{\partial x(k-1)} \right|_{x(k-1)=\hat{x}_{k-1|k-1}} \quad (32)$$

$$C_k = \left. \frac{\partial h[x(k), u(k)]}{\partial x(k)} \right|_{x(k)=\hat{x}_{k|k-1}} \quad (33)$$

A partir deste ponto, o projeto de implementação do filtro de Kalman estendido possui grande semelhança com o modelo tradicional. As condições iniciais da matriz de covariância do erro, do processo e da medição, assim como das entradas, estados iniciais e parâmetros foram os mesmos aplicados ao projeto anterior. O filtro de Kalman estendido é descrito, assim como o método tradicional, por equações de predição e de correção, sendo elas:

Tabela 3 - Equações utilizadas no algoritmo de Kalman estendido

Etapas	Informação	Equações
Predição	Equação de estados a priori	$\hat{x}_{k k-1} = f[\hat{x}_{k-1 k-1}, u_{k-1}]$
	Covariância do erro a priori	$\hat{P}_{k k-1} = A_k P_{k-1 k-1} A_k^T + Q_k$
	Ganho de Kalman	$K_e^k = P_{k k-1} C_k^T (C_k P_{k k-1} C_k^T + R_k)^{-1}$
Correção	Equação de estados a posteriori	$\hat{x}_{k k-1} = \hat{x}_{k k-1} K_e^k (y_k - h[\hat{x}_{k k-1}])$
	Covariância do erro a posteriori	$P_{k k} = (I - K_e^k C_k) P_{k k-1}$

2.6 Metodologia aplicada para simulação

Para geração das respostas os filtros de Kalman tradicional e estendido, foram consideradas duas sintonias distintas. O objetivo é analisar qual filtro consegue obter melhor desempenho tanto na estimação dos estados desconhecidos quanto na minimização do erro da medição dos estados conhecidos. Os valores utilizados constam na Tabela 4. A simulações foram realizadas no *software* MATLAB, utilizando as entradas $i = [i_1 \ i_2]^T = [5000, 11000]^T$, simulando como medição da planta o modelo não linear adicionado de ruído, que é um parâmetro estimado da planta. Para as simulações realizadas, foi escolhido um desvio padrão $\sigma = 0.2$.

Tabela 4 - Parâmetros utilizados para avaliação do desempenho dos filtros

Sintonia	Cenário 1	Cenário 2
Q	$1 \cdot 10^{-5}$	0,1
R	0,01	3,0625
P	1	0,005
i_1	5000	5000
i_2	11000	11000

Foram realizadas análises de sensibilidade variando os parâmetros de sintonia Q , R e $P(0)$. Para o parâmetro Q foram utilizados os valores 10^{-5} , 10^{-3} e 10^{-1} . Para R foram utilizados 0.01, 1, e 3.06. Para $P(0)$ foram 1, 0.005 e 0.00005.

Para todas as simulações feitas no presente trabalho, foram consideradas as seguintes condições iniciais: $y_1(0)=0$, $v_1=0$, $y_2(0)=3$ e $v_2=0$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 Comparativo: filtro de Kalman tradicional x estendido

A partir da Figura 3, simulando o cenário 1 exposto na Tabela 4, observa-se que para o comportamento da posição medida, ambos alcançam o valor final desejado, porém a abordagem do Kalman estendido apresenta desempenho significativamente melhor no acompanhamento da dinâmica inicial do sistema. Já em relação a estimação da velocidade, enquanto o filtro estendido apresenta uma resposta bem próxima da ideal, o caso tradicional, além de não acompanhar a dinâmica inicial, leva bastante tempo para alcançar o valor desejado.

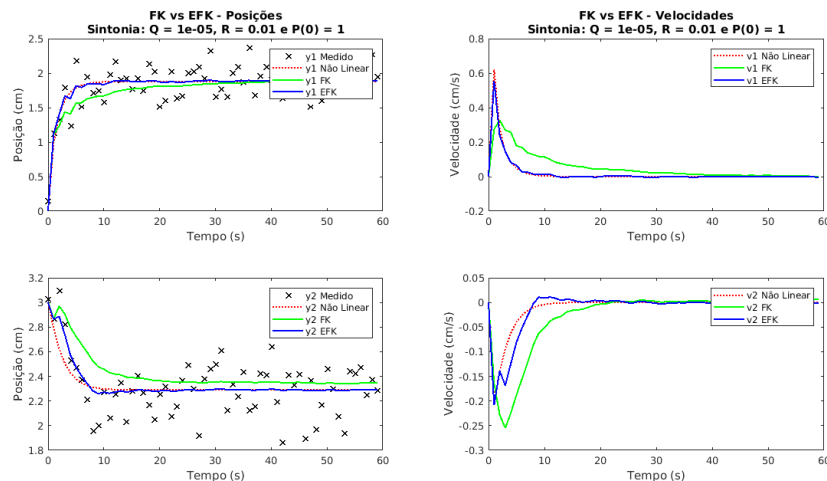


Figura 3 - Simulação do filtro de Kalman tradicional e estendido para o cenário 1

Para o cenário 2, exposto na Tabela 4, analisando as posições, o desempenho do filtro estendido é similar ao tradicional após um tempo de dinâmica inicial, no qual o estendido possui uma resposta melhor. Ambos variam em torno da curva do modelo da planta, acompanhando os pontos ruidosos de forma instável. Em relação à estimação das velocidades, o método tradicional retorna um comportamento muito distante do desejado, o método estendido apresenta dinâmica mais próxima do modelo. Desta forma, para as duas sintonias apresentadas, o filtro de Kalman estendido obteve o melhor desempenho, o que o torna o mais adequado para o estudo de caso em questão. O resultado pode ser visto na Figura 4.

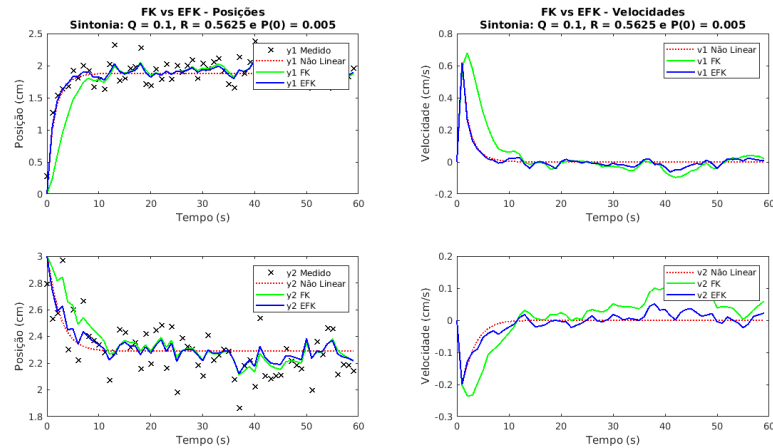


Figura 4 - Simulação do filtro de Kalman tradicional e estendido para o cenário 2

3.2 Análise de Sensibilidade dos Parâmetros de Sintonia

Os parâmetros de sintonia são definidos como valores que influenciam na dinâmica do sistema. Na aplicação de filtro de Kalman, temos como parâmetros de sintonia os fatores das matrizes de covariância do processo, da medição e do erro. Quanto maior for o parâmetro, menor a confiança nele. Para a análise de sensibilidade foram elaborados três cenários, em que os parâmetros foram variados individualmente a fim de avaliar como essa alteração afeta o comportamento dos estados.

Para o cenário 1, foi variado o parâmetro Q , associado a incerteza do modelo das saídas, que assumiu valores de $1 \cdot 10^{-5}$, $1 \cdot 10^{-3}$ e $1 \cdot 10^{-1}$, enquanto os demais parâmetros permaneceram constantes ($R = 0,01$ e $P(0) = 1$). A Figura 5 mostra a simulação feita onde é possível observar que, com o aumento de Q , o comportamento das posições estimadas se aproxima do valor medido, se afastando da curva do modelo não linear. Quanto as velocidades, nota-se também que sua estimação oscila em torno do equilíbrio para os dois maiores valores de Q , de forma que o valor maior se aproximou de forma representativa do modelo.

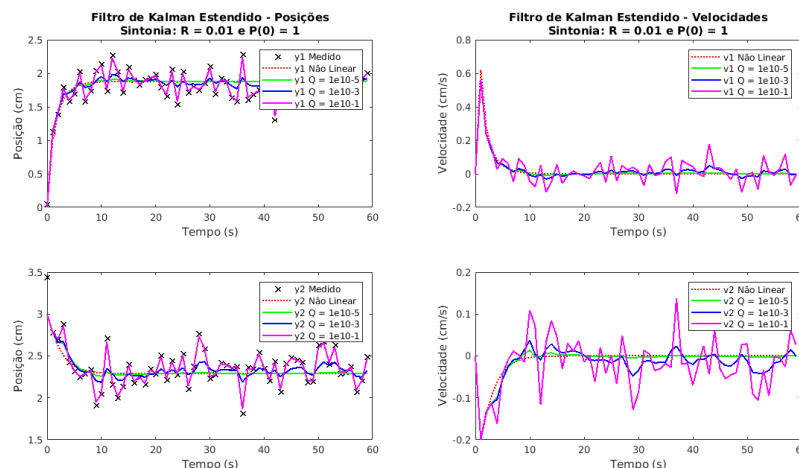


Figura 5 - Resposta do filtro de Kalman estendido para mudança do parâmetro Q

Utilizando o cenário 2, variou-se a covariância do ruído de medição R entre os valores $R_1 = 0.01$, $R_2 = 1$ e $R_3 = 3.06$ e mantendo constantes os parâmetros $Q = 10^{-5}$ e $P(0) = 1$, observa-se que as estimções não sofreram variações relevantes de comportamento, mesmo havendo uma alta dispersão dos valores medidos e que tanto as variáveis medidas filtradas

quanto as estimadas apresentaram desempenho satisfatório comparadas com o modelo. O resultado pode ser visto na Figura 6.

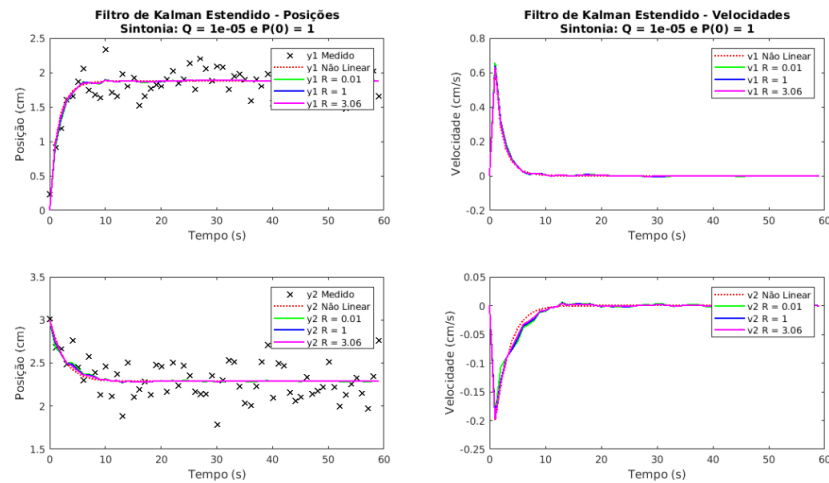


Figura 6 - Resposta do filtro de Kalman estendido para mudança do parâmetro R

No cenário 3, foi testada a sensibilidade do parâmetro $P(0)$, associado a incerteza da estimativa inicial, onde ele assumiu valores de 1, 0,005 e 0,00005, mantendo os valores dos demais parâmetros constantes, como consta no gráfico abaixo. A partir da análise do gráfico, é possível verificar que o filtro é pouco sensível ao parâmetro $P(0)$, uma vez que a resposta tanto das velocidades quanto das posições sofreram pouca alteração com a modificação do parâmetro. Nas três situações onde o $P(0)$ foi alterado, as respostas do filtro foram satisfatórias, e acompanharam bem a curva do modelo, devido a influência de outros parâmetros de maior sensibilidade. Entretanto, $P(0)$ ainda é um pouco mais sensível que o R , avaliado no segundo cenário, uma vez que grandes valores de $P(0)$ afetam, mesmo que de forma mínima, na resposta inicial do filtro. O resultado pode ser visto na Figura 7.

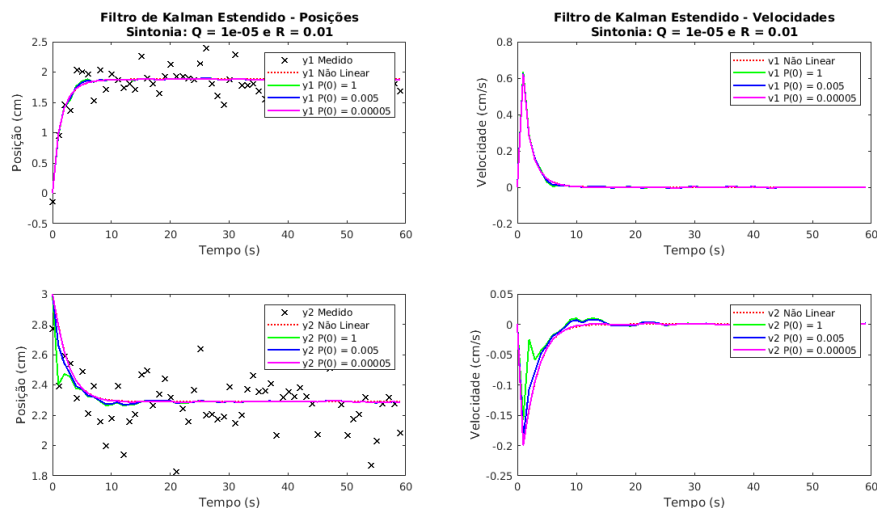


Figura 7 - Resposta do filtro de Kalman estendido para mudança do parâmetro $P(0)$

Desta forma, pode-se observar que o parâmetro de maior sensibilidade, dentre os apresentados foi o Q , uma vez que pequenas variações no seu valor afetam significativamente o desempenho do filtro de Kalman estendido. Em contrapartida, foi analisado que o de menor sensibilidade foi o R , portanto, o parâmetro Q é o que deve ter maior cautela na sintonização.

4. CONCLUSÃO

Ao final do estudo, pôde-se verificar que a melhor abordagem de estimador de estados para o sistema de levitação magnética apresentada, considerando o cenário de simulação apresentado, foi o filtro de Kalman estendido, uma vez que este conseguiu minimizar o impacto das perturbações nas variáveis de estado medidas, além de gerar boas estimações para as variáveis de estado não medidas. Além disso, conclui-se também que, para esta ferramenta, um dos principais parâmetros de sintonia é a covariância do modelo, uma vez que a alteração em seu valor provoca maior impacto na resposta do filtro que os demais.

Como sugestão de testes a serem feitos, a fim de verificar a robustez dos filtros projetados, deve-se verificar a atuação dos filtros para condições iniciais e entradas diferentes das apresentadas neste trabalho.

5. REFERÊNCIAS

OGATA, K. *Engenharia de controle Moderno*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Vasconcelos, C. A. V. J. *Linearização exata por realimentação de estados aplicada ao controle de um sistema de levitação magnético*. Salvador, 2010.

PARKS, T. R. 1999. Manual For Model 730: Magnetic Levitation System. Bell Canyon : ECP, 1999.

Introdução ao filtro de Kalman com exemplo no Matlab. **Blog do controleiro**. Disponível em <<https://tecnoblog.net/247956/referencia-site-abnt-artigos/>>. Acesso em: 29 de jun. de 2019.

Understanding Kalman Filters, 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=mwn8xhgNpFY&list=PLn8PRpmsu08pzi6EMiYnR-076Mh-q3tWr>> Acesso em: 29 jun. 2019.