

Элементы моделирования винтового движения

Elements of screw motion modeling

Иван А. Подмогильный^{1,*}, Кирилл В. Дидусь¹ and Мигран Н. Геворкян¹

¹Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Российская Федерация

Аннотация

В данной работе приводится сравнительный анализ двух подходов к моделированию движения твёрдых тел. Особое внимание уделяется винтовому движению, которое является наиболее обобщённой моделью пространственного перемещения твёрдого тела. Анализ литературных источников показал, что представлено недостаточное число общедоступных примеров применения винтов в контексте геометрической визуализации, а также наглядных вычислительных примеров. Проведённое исследование направлено на восполнение пробела в прикладных методологических материалах. В работе представлено детальное описание математических формул с пояснениями. Приводятся вычислительные примеры, включая реализацию винтового движения с использованием матричного метода и формулы Родрига.

Ключевые слова

винты, моторы, вращения, трансляции, компьютерная геометрия

1. Введение

При изучении литературы о математических основах компьютерной графики, а более конкретно математического аппарата применяемого для позиционирования трехмерных объектов в пространстве, авторы столкнулись с упоминанием таких математических объектов как моторы, винты и бикватернионы, но без описания самого математического аппарата. Суть всех упоминаний сводилось к тому, что этот математический аппарат позволяет вычислять вращения с одновременной трансляцией вдоль некоторой произвольной оси, активно используется на практике, но является не интуитивным и сложным для понимания [1] и потенциально может быть заменен геометрической алгеброй.

Поиск материалов, в которых математический аппарат моторов, винтов и бикватернионов был бы изложен во всей полноте и последовательности, привел авторов в область физики абсолютно твердого тела [2]. Оказалось, что искомая теория была разработана еще на рубеже 19 и 20 веков в основном в трудах Э. Штуди, Р. С. Болла [3, с. 73] и А. П. Котельникова [4]. Полноценное изложение алгебры винтов можно найти в монографии [5]. Более поздние работы, в том числе и на английском языке, никакого существенно нового материала не дают.

Найденные источники были ориентированны на теоретическую механику, поэтому все имеющиеся практические примеры применения винтовой и бикватернионной алгебры сводились к физике абсолютно твердого тела и к механике различных механизмов. Лишь один найденный источник [6] был посвящен применению бикватернионов к вопросам компьютерной геометрии и моделированию проективного пространства, однако полностью обходил тему винтов и никак не упоминал крайне важный принцип перенесения Котельникова–Штуди.

Данный доклад носит методологический характер. В теоретической части авторы подробно излагают алгебраическую часть теории, вводят основные понятия и формулы. Во второй части приводятся два расчетных примера. Первый пример показывает винтовое движение

Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems 2025 (ITTMM 2025), Moscow, April 07–11, 2025

*Автор, отвечающий за публикацию.

✉ email@rudn.ru (И. А. Подмогильный); email@rudn.ru (К. В. Дидусь); gevorgyan-mn@rudn.ru (М. Н. Геворкян)



© 2025 Copyright for this paper by its authors. Use permitted under Creative Commons License Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

прямой вокруг оси матричным способом (матрицы с дуальными коэффициентами), а второй аналогичное движение с помощью формулы Родрига.

2. Алгебра винтов

2.1. Дуальные числа

2.2. Моторы и винты

2.3. Принцип Штуди–Котельникова и основные формулы

Принцип перенесения Штуди–Котельникова можно сформулировать следующим образом. Все формулы теории конечных поворотов и кинематики движения твердого тела с одной неподвижной точкой при замене в них вещественных величин на дуальные переходят, векторных величин на винтовые и кватернионов на бикватернионы, переходят в соответствующие формулы кинематики движения свободного тела (без закрепленных точек).

Матрицы элементарных поворотов Эйлера при применении принципа перенесения превращаются в матрицы винтовых движений вдоль осей Ox , Oy , Oz декартовой системы координат на дуальный угол $\Theta = \theta + \theta^o \varepsilon$, где действительная часть θ задает угол поворота вокруг оси, а дуальная часть θ^o — расстояние трансляции вдоль той же оси.

$$R_x(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & -\sin \Theta \\ 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \quad R_y(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \quad R_z(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Функции синус и косинус от дуального угла вычисляются по следующим формулам:

$$\sin \Theta = \sin(\theta + \theta^o \varepsilon) = \sin \theta + \theta^o \cos \theta \varepsilon, \quad \cos \Theta = \cos(\theta + \theta^o \varepsilon) = \cos \theta - \theta^o \sin \theta \varepsilon.$$

Для получения винтового аналога формулы Родрига, запишем вначале оригинальную формулу Родрига для вращения радиус вектора \mathbf{L} на угол θ вокруг оси, задаваемой прямой с направляющим вектором \mathbf{a} , проходящей через начало координат O :

$$\mathbf{p}' = \cos \theta \mathbf{p} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{a}, \mathbf{p})\mathbf{a} + \sin \theta \mathbf{a} \times \mathbf{p}.$$

Согласно принципу перенесения, следует заменить векторы на винты, вещественные углы на дуальные. Поэтому вектор \mathbf{p} должен быть заменен на винт $\mathbf{L} = \mathbf{v} + \mathbf{m}\varepsilon$, где \mathbf{v} — направляющий вектор оси винта, а \mathbf{m} — момент оси винта, а вектор \mathbf{a} на винт $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a}^o \varepsilon$, где \mathbf{a} — направляющий вектор оси винта, который представляет собой ось винтового движения, а \mathbf{a}^o — момент этого винта. В результате получаем формулу, которая позволяет подвергать винтовому движению винты, а не векторы:

$$\mathbf{L}' = \cos \Theta \mathbf{L} + (1 - \cos \Theta)(\mathbf{A}, \mathbf{L})\mathbf{A} + \sin \Theta \mathbf{A} \times \mathbf{L}.$$

Так как геометрическим образом винта является прямая в пространстве, то данная формула позволяет применять винтовое движение, заданное осью \mathbf{A} и дуальным углом Θ , к произвольной прямой \mathbf{L} . Отметим, что ось \mathbf{A} не привязана к началу координат и может проходить через любую точку пространства.

3. Применение винтов для винтового движения прямой в трехмерном пространстве

3.1. Использование матрицы с дуальными коэффициентами

Возьмём прямую, лежащую в плоскости Oxy и проходящую через точку O под углом 45° к осям Ox и Oy . Запишем винт, соответствующий этой прямой. Направляющий вектор

прямой $\mathbf{v} = (1, 1, 0)^T$. Произвольная точка прямой - точка $O = (0, 0, 0)^T$. Если считать, что \mathbf{v} отложен от O , то вычислим момент по формуле $\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{v}$ так как $\mathbf{p} = (0, 0, 0)^T$. Поэтому соответствующий прямой l винт \mathbf{l} можно записать как $\mathbf{l} = (1, 1, 0)^T + \varepsilon(0, 0, 0)^T = 1i + 1j = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$.

Рассмотрим теперь дуальный угол $A = \alpha + \varepsilon\alpha^\circ$ взяв конкретные значения $\alpha = \pi/4$ и $\alpha^\circ = 1$. С помощью этого угла повернём прямую l на угол α против часовой стрелки вокруг оси Oz и поднимем на 1 вдоль той же оси Oz .

Чтобы это сделать запишем матрицу для вращения вокруг оси Oz но заменим в ней угол на дуальный.

$$R_z(A) = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Применим её к винту \mathbf{l} .

$$\mathbf{l}' = R_z(A)\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A - \sin A \\ \sin A + \cos A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\cos A - \sin A = \cos \alpha - \varepsilon\alpha^\circ \sin \alpha - \sin \alpha - \varepsilon\alpha^\circ \cos \alpha = \cos \alpha - \sin \alpha - (\cos \alpha + \sin \alpha)\varepsilon\alpha^\circ$$

$$\cos A + \sin A = \cos \alpha - \varepsilon\alpha^\circ \sin \alpha + \varepsilon\alpha^\circ \cos \alpha = \cos \alpha + \sin \alpha + (\cos \alpha - \sin \alpha)\varepsilon\alpha^\circ$$

Подставим $A = \pi/4 + \varepsilon$ и получим

$$\cos A - \sin A = \cos \pi/4 - \sin \pi/4 + (\cos \pi/4 + \sin \pi/4)\varepsilon = \sqrt{2}\varepsilon$$

$$\cos A + \sin A = \cos \pi/4 + \sin \pi/4 + (\cos \pi/4 - \sin \pi/4)\varepsilon = \sqrt{2}$$

Из чего следует

$$\mathbf{l}' = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\varepsilon \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Если направляющий вектор нормировать то получим:

$$\mathbf{l}' = (0, 1, 0)^T + \varepsilon(1, 0, 0)^T$$

3.2. Использование винтового аналога формулы Родрига

4. Заключение

Финансирование: Данное исследование не получало внешнего финансирования.

Заявление о доступности данных: В ходе исследования не было создано и проанализировано никаких новых данных. Совместное использование данных неприменимо.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности: Мы благодарим организаторов конференции за предоставленную возможность создать этот тезис.

Список литературы

1. Lengyel, E. *Foundations of Game Engine Development. 1: Mathematics* англ. 4 т. 195 с. (Terathon Software LLC, Lincoln, California, 2016).
2. Челноков, Ю. Н. *Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения* (ред. Легостаева, И. Л.) 512 с. (ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2006).
3. Клейн, Ф. *Высшая геометрия* -й изд. (ред. Бляшке, В.) пер. с нем. Брушлинский, Н. К. 400 с. (Книжный дом «ЛИБРОКОМ», Москва, 2009).
4. Котельников, А. П. *Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике* 222 с. (КомКнига, Москва, 2019).
5. Диментберг, Ф. М. *Винтовое исчисление и его приложение в механике* (ред. Антонов, И. Л.) 200 с. (Издательство «Наука» главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1965).
6. Goldman, R. *Dual Quaternions and Their Associated Clifford Algebras* англ. 279 с. (CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, 2024).