Элементы моделирования винтового движения

Elements of screw motion modeling

Иван А. Подмогильный[1,*], Кирилл В. Дидусь[1] and Мигран Н. Геворкян[1]

[1] Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Российская Федерация

Аннотация

В данной работе приводится сравнительный анализ двух подходов к моделированию движения твёрдых тел. Особое внимание уделяется винтовому движению, которое является наиболее обобщённой моделью пространственного перемещения твёрдого тела. Анализ литературных источников показал, что представлено недостаточное число общедоступных примеров применения винтов в контексте геометрической визуализации, а также наглядных вычислительных примеров. Проведённое исследование направлено на восполнение пробела в прикладных методологических материалах. В работе представлено детальное описание математических формул с пояснениями. Приводятся вычислительные примеры, включая реализацию винтового движения с использованием матричного метода и формулы Родрига.

Ключевые слова

винты, моторы, вращения, трансляции, компьютерная геометрия

1. Введение

При изучении литературы о математических основах компьютерной графики, а более конкретно математического аппарата применяемого для позиционирования трехмерных объектов в пространстве, авторы столкнулись с упоминанием таких математических объектов как моторы, винты и бикватернионы, но без описания самого математического аппарата. Суть всех упоминаний сводилось к тому, что этот математический аппарат позволяет вычислять вращения с одновременной трансляцией вдоль некоторой произвольной оси, активно используется на практике, но является не интуитивным и сложным для понимания [1] и потенциально может быть заменен геометрической алгеброй.

Поиск материалов, в которых математический аппарат моторов, винтов и бикватернионов был бы изложен во всей полноте и последовательности, привел авторов в область физики абсолютно твердого тела [2]. Оказалось, что искомая теория была разработана еще на рубеже 19 и 20 веков в основном в трудах Э. Штуди, Р. С. Болла [3, с. 73] и А. П. Котельникова [4]. Полноценное изложение алгебры винтов можно найти в монографии [5]. Более поздние работы, в том числе и на английском языке, никакого существенно нового материала не дают.

Найденные источники были ориентированны на теоретическую механику, поэтому все имеющиеся практические примеры применения винтовой и бикватернионной алгебры сводились к физике абсолютно твердого тела и к механике различных механизмов. Лишь один найденный источник [6] был посвящен применению бикватернионов к вопросам компьютерной геометрии и моделированию проективного пространства, однако полностью обходил тему винтов и никак не упоминал крайне важный принцип перенесения Котельникова–Штуди.

Данный доклад носит методологический характер. В теоретической части авторы подробно излагают алгебраическую часть теории, вводят основные понятия и формулы. Во второй

Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems 2025 (ITTMM 2025), Moscow, April 07–11, 2025

[*] Автор, отвечающий за публикацию.

1142240397@pfur.ru (И. А. Подмогильный); 114224340434@pfur.ru (К. В. Дидусь); gevorkyan-mn@rudn.ru (М. Н. Геворкян)

© 2025 Copyright for this paper by its authors. Use permitted under Creative Commons License Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

части приводится два расчетных примера. Первый пример показывает винтовое движение прямой вокруг оси матричным способом (матрицы с дуальными коэффициентами), а второй аналогичное движение с помощью формулы Родрига.

2. Алгебра винтов

2.1. Дуальные числа

Подробно про эллиптические, параболические и гиперболические числа написано в препринте [7]. Дуальное число z определяется как:

$$z = a + \varepsilon b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \ \ \varepsilon^2 = 0, \ \ \varepsilon \neq 0.$$

Также далее будет использоваться следующее свойство для дуальных чисел:

$$e^{\varepsilon x} = 1 + \varepsilon x$$

Считается что изначально дуальные числа были предложены Клиффордом [8], и в дальнейшем исследованы Штуди [9].

2.2. Моторы и винты

Мотором называется пара векторов

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\},$$

где $\mathbf{v}$ - направляющий вектор прямой, $\mathbf{m}$ - момент прямой.

Мотор можно также записать в виде дуального вектора (диады):

$$\mathbf{R} = \mathbf{v} + \varepsilon \mathbf{m}.$$

Для любого мотора можно подобрать такую систему координат, что в ней векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{m}$ будут коллинеарны. Винтом называется мотор, у которого направляющий вектор и момент коллинеарны $\mathbf{m} \mid \mathbf{v}$. Винт имеет запись

$$R = \{\mathbf{v} \mid p\mathbf{v}\} = \mathbf{v} + \varepsilon p \mathbf{v} = (1 + \varepsilon p)\mathbf{v}$$

$$p = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{m})}{\|\mathbf{v}\|^2},$$

где p — параметр винта.

Винт, у которого норма направляющего вектора равна единице $\|\mathbf{v}\| = 1$ называется единичным винтом. Любой винт можно записать через единичный:

$$R = r(1 + \varepsilon p)\mathbf{E} = r e^{\varepsilon p}\mathbf{E}$$

Более подробно теория по винтам и моторам излагается в книге [5].

2.3. Принцип Штуди–Котельникова и основные формулы

Принцип перенесения Штуди–Котельникова можно сформулировать следующим образом. Все формулы теории конечных поворотов и кинематики движения твердого тела с одной неподвижной точкой при замене в них вещественных величин на дуальные переходят, векторных величин на винтовые и кватернионов на бикватернионы, переходят в соответствующие формулы кинематики движения свободного тела (без закрепленных точек).

Матрицы элементарных поворотов Эйлера при применении принципа перенесения превращаются в матрицы винтовых движений вдоль осей Ox, Oy, Oz декартовой системы координат на дуальный угол $\Theta = \theta + \theta^o\varepsilon$, где действительная часть θ задает угол поворота вокруг оси, а дуальная часть θ^o — расстояние трансляции вдоль той же оси.

$$R_x(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \quad R_y(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & \sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} \quad R_z(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Функции синус и косинус от дуального угла вычисляются по следующим формулам:

$$\sin\Theta = \sin(\theta + \theta^o\varepsilon) = \sin\theta + \theta^o\cos\theta\varepsilon, \quad \cos\Theta = \cos(\theta + \theta^o\varepsilon) = \cos\theta - \theta^o\sin\theta\varepsilon.$$

Для получения винтового аналога формулы Родрига, запишем вначале оригинальную формулу Родрига для вращения радиус вектора $\mathbf{L}$ на угол θ вокруг оси, задаваемой прямой с направляющим вектором $\mathbf{a}$, проходящей через начало координат O:

$$\mathbf{p}' = \cos\theta\mathbf{p} + (1 - \cos\theta)(\mathbf{a}, \mathbf{p})\mathbf{a} + \sin\theta\mathbf{a} \times \mathbf{p}.$$

Согласно принципу перенесения, следует заменить векторы на винты, вещественные углы на дуальные. Поэтому вектор $\mathbf{p}$ должен быть заменен на винт $\mathbf{L} = \mathbf{v} + \mathbf{m}\varepsilon$, где $\mathbf{v}$ — направляющий вектор оси винта, а $\mathbf{m}$ — момент оси винта, а вектор $\mathbf{a}$ на винт $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a}^o\varepsilon$, где $\mathbf{a}$ — направляющий вектор оси винта, который представляет собой ось винтового движения, а $\mathbf{a}^o$ — момент этого винта. В результате получаем формулу, которая позволяет подвергать винтовому движению винты, а не векторы:

$$\mathbf{L}' = \cos\Theta\mathbf{L} + (1 - \cos\Theta)(\mathbf{A}, \mathbf{L})\mathbf{A} + \sin\Theta\mathbf{A} \times \mathbf{L}.$$

Так как геометрическим образом винта является прямая в пространстве, то данная формула позволяет применять винтовое движение, заданное осью $\mathbf{A}$ и дуальным углом Θ, к произвольной прямой $\mathbf{L}$. Отметим, что ось $\mathbf{A}$ не привязана к началу координат и может проходить через любую точку пространства.

3. Применение винтов для винтового движения прямой в трехмерном пространстве

3.1. Использование матрицы с дуальными коэффициентами

Возьмём прямую, лежащую в плоскости Oxy и проходящую через точку O под углом $45°$ к осям Ox и Oy. Запишем винт, соответствующий этой прямой. Направляющий вектор прямой $\mathbf{v} = (1, 1, 0)^T$. Произвольная точка прямой - точка $O = (0, 0, 0)^T$. Если считать, что $\mathbf{v}$ отложен от O, то вычислим момент по формуле $\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{v}$ так как $\mathbf{p} = (0, 0, 0)^T$. Поэтому соответствующий прямой l винт $\mathbf{l}$ можно записать как $\mathbf{l} = (1, 1, 0)^T + \varepsilon(0, 0, 0)^T = 1i + 1j = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$.

Рассмотрим теперь дуальный угол $A = \alpha + \varepsilon\alpha^\circ$ взяв конкретные значения $\alpha = \pi/4$ и $\alpha^\circ = 1$. С помощью этого угла повернём прямую l на угол α против часовой стрелки вокруг оси Oz и поднимем на 1 вдоль той же оси Oz (См. Рисунок 1).

Чтобы это сделать запишем матрицу для вращения вокруг оси Oz но заменим в ней угол на дуальный.

$$R_z(A) = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Применим её к винту $\mathbf{l}$.

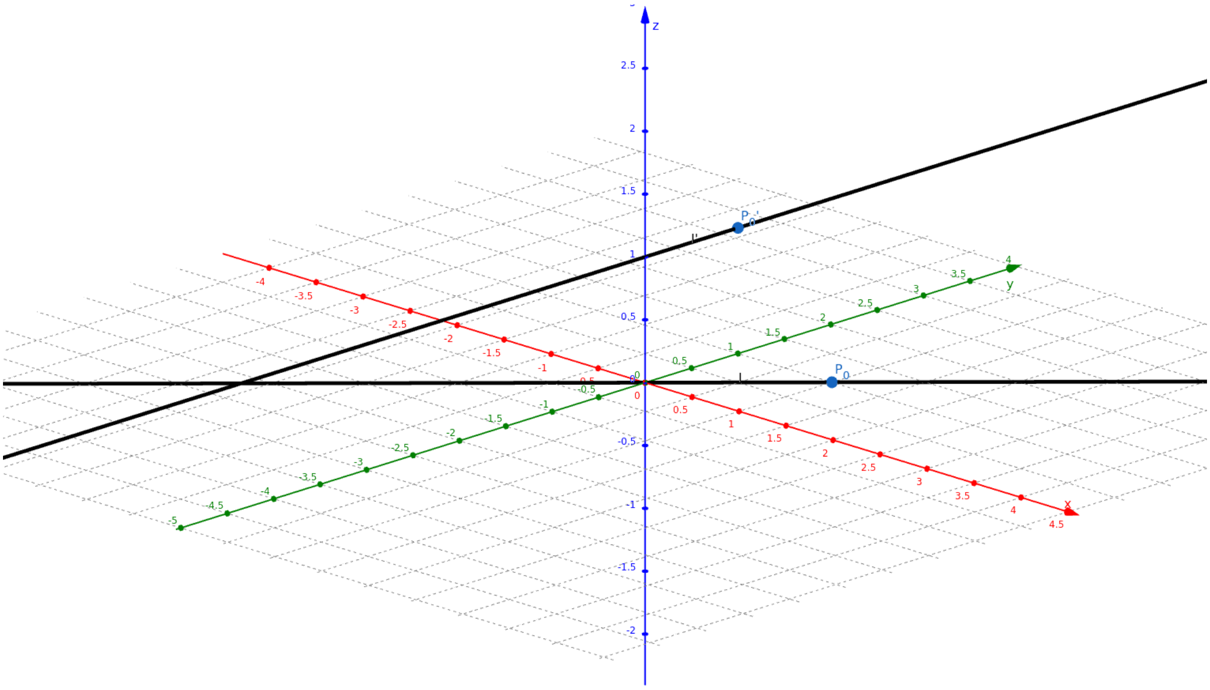

Рис. 1: Прямая $\mathbf{l}$ до винтового движения и прямая $\mathbf{l}'$ после винтового движения.

$$\mathbf{l}' = R_z(A)\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A - \sin A \\ \sin A + \cos A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\cos A - \sin A = \cos\alpha - \varepsilon\alpha^\circ \sin\alpha - \sin\alpha - \varepsilon\alpha^\circ \cos\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha - (\cos\alpha + \sin\alpha)\varepsilon\alpha^\circ$$
$$\cos A + \sin A = \cos\alpha - \varepsilon\alpha^\circ \sin\alpha + \varepsilon\alpha^\circ \cos\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha + (\cos\alpha - \sin\alpha)\varepsilon\alpha^\circ$$

Подставим $A = \pi/4 + \varepsilon$ и получим

$$\cos A - \sin A = \cos\pi/4 - \sin\pi/4 + (\cos\pi/4 + \sin\pi/4)\varepsilon = \sqrt{2}\varepsilon$$
$$\cos A + \sin A = \cos\pi/4 + \sin\pi/4 + (\cos\pi/4 - \sin\pi/4)\varepsilon = \sqrt{2}$$

Из чего следует

$$\mathbf{l}' = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\varepsilon \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Если направляющий вектор нормировать то получим:

$$\mathbf{l}' = (0, 1, 0)^T + \varepsilon(1, 0, 0)^T$$

4. Заключение

В данном тезисе был рассмотрен первый заявленный подход: винтовое движения с использованием матричного метода. Были кратко изложены основные формулы и определения, а также рассмотрен пример винтового движения при помощи матрицы с дуальными коэффициентами. В докладе планируется изложить материал по винтовому аналогу формулы Родрига и провести сравнительный анализ двух подходов. Также провести численное моделирование и опубликовать доступ к исходному коду для примеров моделирования.

Финансирование: Данное исследование не получало внешнего финансирования.

Заявление о доступности данных: В ходе исследования не было создано и проанализировано никаких новых данных. Совместное использование данных неприменимо.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности: Мы благодарим организаторов конференции за предоставленную возможность создать этот тезис.

Список литературы

1. Lengyel, E. *Foundations of Game Engine Development.* 1: *Mathematics* англ. 4 т. 195 с. (Terathon Software LLC, Lincoln, California, 2016).
2. Челноков, Ю. Н. *Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения* (ред. Легостаева, И. Л.) 512 с. (ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2006).
3. Клейн, Ф. *Высшая геометрия* -йизд. (ред. Бляшке, В.) пер. с нем. Брушлинский, Н. К. 400 с. (Книжный дом «ЛИБРОКОМ», Москва, 2009).
4. Котельников, А. П. *Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике* 222 с. (КомКнига, Москва, 2019).
5. Диментберг, Ф. М. *Винтовое исчисление и его приложение в механике* (ред. Антонов, И. Л.) 200 с. (Издательство «Наука» главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1965).
6. Goldman, R. *Dual Quaternions and Their Associated Clifford Algebras* англ. 279 с. (CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, 2024).
7. Gevorkyan, M. N., Korolkova, A. V. & Kulyabov, D. S. *Approaches to the Implementation of Generalized Complex Numbers in the Julia Language* Comment: in English; in Russian. arXiv: 2007.09737 [cs]. http://arxiv.org/abs/2007.09737 (2025). Пред. пуб.
8. Clifford. Preliminary Sketch of Biquaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society* **s1-4,** 381—395. doi:10.1112/plms/s1-4.1.381 (нояб. 1871).
9. Zindler, K. Geometrie der Dynamen: Von E. Study. Leipzig, bei B. G. Teubner, 1903. XIII und 603 S. Preis 21 M. (geb. 23 M.) *Monatshefte für Mathematik und Physik* **14,** A70—A75. doi:10.1007/BF01707030 (дек. 1903).