Черновик о винтовом движении прямой

Подмогильный Иван, Дидусь Кирилл, Геворкян М. Н.

15 марта 2025 г.

Аннотация

В данном исследовании приводится сравнительный анализ двух подходов к моделированию движения твёрдых тел. Особое внимание уделяется винтовому движению, которое является наиболее обобщённой моделью пространственного перемещения твёрдого тела. Анализ литературных источников показал, что представлено недостаточное число общедоступных примеров применения винтов в контексте геометрической визуализации, а также наглядных вычислительных примеров использования бикватернионов для моделирования трёхмерного движения. Таким образом, проведённое исследование направлено на восполнение пробела в прикладных дидактических материалах и методологическую оценку существующих подходов. В работе представлено детальное описание математических формул с пояснениями. Приводятся вычислительные примеры, включая реализацию винтового движения с использованием матричного метода и формулы Родрига.

1. Плюккеровы координаты

С помощью Плюккеровых координат (также называемых Грассмановыми координатами) [1, Гл. 7] можно задать прямую в трёхмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ с помощью шести параметров $\mathbf{L} = (\mathbf{v} : \mathbf{m}) = (v_1 : v_2 : v_3 : m_1 : m_2 : m_3)$. Где $\mathbf{v}$ называют направляющим вектором прямой, а $\mathbf{m}$ называют моментом прямой. Координаты направляющего вектора и момента можно представить в виде Плюккеровой матрицы:

$$[\mathbf{L}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -v_1 & -v_2 & -v_3 \\ v_1 & 0 & -m_1 & -m_2 \\ v_2 & m_1 & 0 & m_3 \\ v_3 & m_2 & m_3 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1. Движение прямой представленной в Плюккеровых координатах

Чтобы подействовать полной линейной группой GL(3,$\mathbb{R}$) на прямую, можно использовать матрицу преобразования [2, Гл. 3.2, секция II. Plücker matrices, пункт 5]:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix}$$

Реализацией такого действия будет операция: $[\mathbf{L}']_\times = \mathbf{HLH}^T$.

2. Моторы

Ещё одним подходом к представлению прямой являются моторы и винты [3]. Чтобы определить мотор, нужно задать дуальный вектор - $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$, в котором как и в Плюккеровых координатах $\mathbf{v}$ - направляющий вектор прямой, $\mathbf{m}$ - момент прямой. Мотором называется следующая запись:

$$R = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\} = \mathbf{v} + \varepsilon \mathbf{m}$$

Где ε является дуальным числом $\varepsilon^2 = 0$. Напомним, что для дуальных чисел выполняется свойство

$$e^{\varepsilon x} = 1 + \varepsilon x$$

Изначально дуальные числа были предложены Клиффордом [4], и в дальнейшем исследованы Штуди [5].

2.1. Винты

Для любого мотора можно подобрать такую систему координат, что в ней векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{m}$ будут коллинеарны. Винтом называется мотор, у которого направляющий вектор и момент коллинеарны $\mathbf{m} \| \mathbf{v}$. Винт имеет запись

$$R = \{\mathbf{v} \mid p\mathbf{v}\} = \mathbf{v} + \varepsilon p\mathbf{v} = (1 + \varepsilon p)\mathbf{v}$$

$$p = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{m})}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

В новой системе координат p называется параметром винта.

Винт, у которого норма направляющего вектора равна единице $\|v\| = 1$ называется единичным винтом. Винт можно записать через единичный винт:

$$R = r(1 + \varepsilon p)\mathbf{E} = re^{\varepsilon p}\mathbf{E}$$

2.2. Движение прямой через винты

Теорема 2.1 (Принцип перенесения Котельникова–Штуди). *Решение любой геометрической или кинематической задачи твёрдого тела с одной неподвижной точкой может использоваться для задачи пространственного движения свободного твёрдого тела.*

Для этого необходимо заменить векторы, вещественные числа, обычные углы и кватернионы на винты, дуальные числа, дуальные углы и бикватернионы соотвественно. $\Diamond$

Согласно принципу перенесения Котельникова-Штуди на прямую в виде винта можно подействовать матрицей поворота в дуальных углах

$$R' = \mathcal{R}(A)R, \mathcal{R} \in \mathbb{M}^{3\times 3}$$

Где A - дуальный угол.

2.2.1. Пример

Возьмём прямую, лежащую в плоскости Oxy и проходящую через точку O под углом 45° к осям Ox и Oy. Запишем винт, соответствующий этой прямой. Направляющий вектор прямой $\mathbf{v} = (1, 1, 0)^T$. Произвольная точка прямой - точка $O = (0, 0, 0)^T$. Если считать, что $\mathbf{v}$ отложен от O, то вычислим момент по формуле $\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{v}$ так как

$\mathbf{p} = (0,0,0)^T$. Поэтому соответствующий прямой l винт $\mathbf{l}$ можно записать как $\mathbf{l} = (1,1,0)^T + \varepsilon(0,0,0)^T = 1i + 1j = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$.

Рассмотрим теперь дуальный угол $A = \alpha + \varepsilon\alpha^\circ$ взяв конкретные значения $\alpha = \pi/4$ и $\alpha^\circ = 1$. С помощью этого угла повернём прямую l на угол α против часовой стрелки вокруг оси Oz и поднимем на 1 вдоль той же оси Oz.

Чтобы это сделать запишем матрицу для вращения вокруг оси Oz но заменим в ней угол на дуальный.

$$R_z(A) = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Применим её к винту $\mathbf{l}$.

$$\mathbf{l}' = R_z(A)\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A - \sin A \\ \sin A + \cos A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\cos A - \sin A = \cos\alpha - \varepsilon\alpha^\circ \sin\alpha - \sin\alpha - \varepsilon\alpha^\circ \cos\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha - (\cos\alpha + \sin\alpha)\varepsilon\alpha^\circ$$
$$\cos A + \sin A = \cos\alpha - \varepsilon\alpha^\circ \sin\alpha + \varepsilon\alpha^\circ \cos\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha + (\cos\alpha - \sin\alpha)\varepsilon\alpha^\circ$$

Подставим $A = \pi/4 + \varepsilon$ и получим

$$\cos A - \sin A = \cos\pi/4 - \sin\pi/4 + (\cos\pi/4 + \sin\pi/4)\varepsilon = \sqrt{2}\varepsilon$$
$$\cos A + \sin A = \cos\pi/4 + \sin\pi/4 + (\cos\pi/4 - \sin\pi/4)\varepsilon = \sqrt{2}$$

Из чего следует

$$\mathbf{l}' = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\varepsilon \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Если направляющий вектор нормировать то получим:

$$\mathbf{l}' = (0,1,0)^T + \varepsilon(1,0,0)^T$$

3. Бикватернионы

Кватернионы могут использоваться для выражения поворотов [6, Гл. N] так как множество единичных кватернионов

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$$

по произведению Гамильтона даёт группу Ли, которая дважды покрывает специальную ортогональную группу $SO(3)$ [7, Гл. 12]:

$$\phi : S^3 \to SO(3), \phi(q) = \phi(-q)$$

Бикватернионы получаются из кватернионов процедурой Кейли–Диксона (удвоением) и имеют запись:

$$Q = q + \varepsilon q^o, \quad q, q^o \in \mathbb{H}, \quad \varepsilon^2 = 0$$

Бикватернионы были предложены Клиффордом [4]. Более подробно бикватернионы описываются в заметке [8], а приложение для свободного движения твёрдого тела (вращение и трансляция) приведено в [6, Гл. N]

3.1. Движение прямой через бикватернионы

В алгебре бикватернионов прямая, которую вращают представима в виде чистого бикватерниона

$$\mathbf{L} = L_x i + L_y j + L_z k = \mathbf{v_L} + \varepsilon \mathbf{m_L}$$

Где $\mathbf{v} = v_x i + v_y j + v_z k$ - направляющий вектор прямой в записи чистого кватерниона и $\mathbf{m} = m_x i + m_y j + m_z k$ - момент прямой в записи чистого кватерниона.

Прямая, которая представляет ось вращения также представима в виде чистого бикватерниона

$$\mathbf{A} = A_x i + A_y j + A_z k = \mathbf{v_A} + \varepsilon \mathbf{m_A}$$

Движение и поворот прямой задается в виде $\mathbf{L}' = \mathbf{QLQ}^*$. Где бикватернион вращатель записывается в форме

$$\mathbf{Q} = \Lambda_0 + \Lambda_1 i + \Lambda_2 j + \Lambda_3 k$$

Его сопряжение

$$\mathbf{Q}^* = \Lambda_0 - \Lambda_1 i - \Lambda_2 j - \Lambda_3 k$$

Лямбда параметры представляют собой

$$\Lambda_0 = \cos\frac{\Theta}{2}, \Lambda_1 = \sin\frac{\Theta}{2}A_x, \Lambda_2 = \sin\frac{\Theta}{2}A_y, \Lambda_3 = \sin\frac{\Theta}{2}A_z$$

Θ называется дуальным углом

$$\Theta = \theta + \varepsilon\theta^0$$

4. Геометрическая алгебра

Подробное введение в геометрическую алгебру приводится в книгах [Hitzer, Hestenes D.]. Геометрическая алгебра $\mathbb{G}_{301}$ моделирует трёхмерное проективное пространство. Векторами этой алгебры являются элементы $\mathbf{u} = ae_1 + be_2 + ce_3 + \delta e_0 \in \mathbb{G}_{301}$. Можно задать биективное отображение этих векторов на перпендикуляры к плоскостям $ax+by+cz+\delta$. Произведение между двумя векторами $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$ назыветcя произведением Клиффорда (или геометрическим произведением). Множество элементов $\mathbb{G}_{301}$ по произведению "сендвича" $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_1^{-1}$ образует непрерывную группу которую обозначим G_{Cl}, эта группа изоморфна группе пинов $G_{Cl} \cong \mathbf{Pin}(p,q,r)$. Произведение сендвича имеет геометрический смысл отражения, то есть $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_1^{-1}$ интерпретируется как отражение плоскости $\mathbf{u}_2$ относительно плоскости $\mathbf{u}_1$ [9].

4.1. Движение прямой через геометрическую алгебру

Если произвести четыре отражения, то такая операция является винтовым движением. Ниже приводится таблица из статьи [9].

Приведенное винтовое движение применимо не только к плоскостям, но и к прямым.

Таблица 1: Обзор элементов группы $\mathbf{Pin}(3,0,1)$

Кол-во отражений	**Элемент группы**	**Инв-е пр-во**	**Элемент алгебры**
0	Единичный эл-т	Объём	Скаляр
1	Отражение	Плоскость	Вектор
2	Поворот/сдвиг	Прямая	Бивектор
3	Рото/трансфлексия	Точка	Тривектор
4	Винтовое дв-е	Центр	Четыревектор

Список литературы

1. *Hodge W. V. D.*, *Pedoe D.* Methods of Algebraic Geometry. — 1-е изд. — Cambridge University Press, 10.03.1994. — ISBN 978-0-521-46900-5 978-0-511-62387-5. — DOI: `10.1017/CBO9780511623875`. — URL: `https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511623875/type/book` (дата обр. 04.03.2025).

2. *Hartley R.*, *Zisserman A.* Multiple View Geometry in Computer Vision. — Cambridge University Press, 2003. — (Cambridge Books Online). — ISBN 978-0-521-54051-3. — URL: `https://books.google.ru/books?id=si3R3Pfa98QC`.

3. *Диментберг Ф.* Винтовое Исчисление и Его Приложения в Механике. — Наука, 1965. — (Физико-Математическая Библиотека Инженера). — URL: `https://books.google.ru/books?id=to5GAAAAYAAJ`.

4. *Clifford*. Preliminary Sketch of Biquaternions // Proceedings of the London Mathematical Society. — 1871. — Нояб. — Т. s1—4, № 1. — С. 381—395. — ISSN 00246115. — DOI: `10.1112/plms/s1-4.1.381`. — URL: `http://doi.wiley.com/10.1112/plms/s1-4.1.381` (дата обр. 09.03.2025).

5. *Zindler K.* Geometrie der Dynamen: Von E. Study. Leipzig, bei B. G. Teubner, 1903. XIII und 603 S. Preis 21 M. (geb. 23 M.) // Monatshefte für Mathematik und Physik. — 1903. — Дек. — Т. 14, № 1. — A70—A75. — ISSN 0026-9255, 1436-5081. — DOI: `10.1007/BF01707030`. — URL: `http://link.springer.com/10.1007/BF01707030` (дата обр. 09.03.2025).

6. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные и Бикватернионные Модели и Методы Механики Твердого Тела и Их Приложения: Геометрия и Кинематика Движения. — Физматлит, 2006. — ISBN 978-5-9221-0680-1. — URL: https://books.google.ru/books?id=8in3rQEACAAJ.
7. *Altmann S.* Rotations, Quaternions, and Double Groups. — Clarendon Press, 1986. — (Oxford Science Publications). — ISBN 978-0-19-855372-4. — URL: https://books.google.ru/books?id=K3CAQgAACAAJ.
8. *Jia Y.-B.* Dual Quaternions //. — 2018. — URL: %5Curl%7Bhttps://www.semanticscholar.org/paper/Dual-Quaternions-Jia/d11ee4eeb7e870faf8fe12136c12dfbf2026e030%7D (дата обр. 09.03.2025).
9. *Ruhe D.*, *Gupta J. K.*, *Keninck S. de*, *Welling M.*, *Brandstetter J.* Geometric Clifford Algebra Networks. — 29.05.2023. — DOI: 10.48550/arXiv.2302.06594. — arXiv: 2302.06594 [cs]. — URL: http://arxiv.org/abs/2302.06594 (дата обр. 09.03.2025). — Пред. пуб.