

Черновик тезиса о винтовом движении прямой

Подмогильный Иван, Дидусь Кирилл, Нельсонович Мигран

1 марта 2025

1. Плюккерovy координаты

С помощью Плюккеровых координат (также называемых Грассмановыми координатами) [1, Гл. 7] можно задать прямую в трёхмерном проективном пространстве \mathbb{P}^3 с помощью шести параметров $\mathbf{L} = (\mathbf{d} : \mathbf{m}) = (d_1 : d_2 : d_3 : m_1 : m_2 : m_3)$. Где \mathbf{d} называют направлением прямой, а \mathbf{m} называют моментом прямой. Координаты направления и момента можно представить в виде Плюккеровой матрицы:

$$[\mathbf{L}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -d_1 & -d_2 & -d_3 \\ d_1 & 0 & -m_1 & -m_2 \\ d_2 & m_1 & 0 & m_3 \\ d_3 & m_2 & m_3 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1. Движение прямой представленной в Плюккеровых координатах

Чтобы подействовать полной линейной группой $GL(3, \mathbb{R})$ на прямую, можно использовать матрицу преобразования [2, Гл. 3.2, секция II. Plücker matrices, пункт 5]:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix}$$

Реализацией такого действия будет операция: $[\mathbf{L}']_{\times} = \mathbf{H} \mathbf{L} \mathbf{H}^T$.

2. Моторы

2.1. Винты

2.2. Движение прямой через моторы

3. Бикватернионы

Кватернионы могут использоваться для выражения поворотов [3, Гл. N] так как множество единичных кватернионов

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$$

по произведению Гамильтона даёт группу Ли, которая дважды покрывает специальную ортогональную группу $SO(3)$ [4, Гл. 12]:

$$\phi : S^3 \rightarrow SO(3), \phi(q) = \phi(-q)$$

3.1. Процедура Кейли-Диксона на кватернионах

3.2. Движение прямой через бикватернионы

$$\mathbb{R} \quad R \quad \mathbb{R} \quad \mathcal{R} \quad \mathfrak{R} \quad \mathfrak{S} \quad \mathfrak{L} \quad \mathfrak{K}$$

4. Геометрическая алгебра

4.1. Элементы теории групп

4.2. Движение прямой через геометрическую алгебру

Список литературы

1. *Hodge W. V. D., Pedoe D. Methods of Algebraic Geometry.* — 1-е изд. — Cambridge University Press, 10.03.1994. — ISBN 978-0-521-46900-5 978-0-511-62387-5. — DOI: 10.1017/CB09780511623875. — URL: <https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511623875/type/book> (дата обр. 04.03.2025).

2. *Hartley R., Zisserman A.* Multiple View Geometry in Computer Vision. — Cambridge University Press, 2003. — (Cambridge Books Online). — ISBN 978-0-521-54051-3. — URL: <https://books.google.ru/books?id=si3R3Pfa98QC>.
3. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные и Бикватернионные Модели и Методы Механики Твердого Тела и Их Приложения: Геометрия и Кинематика Движения. — Физматлит, 2006. — ISBN 978-5-9221-0680-1. — URL: <https://books.google.ru/books?id=8in3rQEACAAJ>.
4. *Altmann S.* Rotations, Quaternions, and Double Groups. — Clarendon Press, 1986. — (Oxford Science Publications). — ISBN 978-0-19-855372-4. — URL: <https://books.google.ru/books?id=K3CAQgAACAAJ>.