# Элементы моделирования винтового движения

Elements of screw motion modeling

Иван А. Подмогильный[1,*], Кирилл В. Дидусь[1] and Мигран Н. Геворкян[1]

[1]Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Российская Федерация

**Аннотация**

В данной работе приводится сравнительный анализ двух подходов к моделированию движения твёрдых тел. Особое внимание уделяется винтовому движению, которое является наиболее обобщённой моделью пространственного перемещения твёрдого тела. Анализ литературных источников показал, что представлено недостаточное число общедоступных примеров применения винтов в контексте геометрической визуализации, а также наглядных вычислительных примеров. Проведённое исследование направлено на восполнение пробела в прикладных методологических материалах. В работе представлено детальное описание математических формул с пояснениями. Приводятся вычислительные примеры, включая реализацию винтового движения с использованием матричного метода и формулы Родрига.

**Ключевые слова**

винты, моторы, вращения, трансляции, компьютерная геометрия

## 1. Введение

При изучении литературы о математических основах компьютерной графики, а более конкретно математического аппарата применяемого для позиционирования трехмерных объектов в пространстве, авторы столкнулись с упоминанием таких математических объектов как моторы, винты и бикватернионы, но без описания самого математического аппарата. Суть всех упоминаний сводилось к тому, что этот математический аппарат позволяет вычислять вращения с одновременной трансляцией вдоль некоторой произвольной оси, активно используется на практике, но является не интуитивным и сложным для понимания [1] и потенциально может быть заменен геометрической алгеброй.

Поиск материалов, в которых математический аппарат моторов, винтов и бикватернионов был бы изложен во всей полноте и последовательности, привел авторов в область физики абсолютно твердого тела [2]. Оказалось, что искомая теория была разработана еще на рубеже 19 и 20 веков в основном в трудах Э. Штуди, Р. С. Болла [3, с. 73] и А. П. Котельникова [4]. Полноценное изложение алгебры винтов можно найти в монографии [5]. Более поздние работы, в том числе и на английском языке, никакого существенно нового материала не дают.

Найденные источники были ориентированны на теоретическую механику, поэтому все имеющиеся практические примеры применения винтовой и бикватернионной алгебры сводились к физике абсолютно твердого тела и к механике различных механизмов. Лишь один найденный источник [6] был посвящен применению бикватернионов к вопросам компьютерной геометрии и моделированию проективного пространства, однако полностью обходил тему винтов и никак не упоминал крайне важный принцип перенесения Котельникова–Штуди.

Данный доклад носит методологический характер. В теоретической части авторы подробно излагают алгебраическую часть теории, вводят основные понятия и формулы. Во второй

*Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems 2025 (ITTMM 2025), Moscow, April 07–11, 2025*

*Автор, отвечающий за публикацию.

1142240397@pfur.ru (И. А. Подмогильный); 114224340434@pfur.ru (К. В. Дидусь); gevorkyan-mn@rudn.ru (М. Н. Геворкян)

части приводится два расчетных примера. Первый пример показывает винтовое движение прямой вокруг оси матричным способом (матрицы с дуальными коэффициентами), а второй аналогичное движение с помощью формулы Родрига.

## 2. Алгебра винтов

### 2.1. Дуальные числа

Подробно про эллиптические, параболические и гиперболические числа написано в препринте [7]. Дуальное число $z$ определяется как:

$$z = a + \varepsilon b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \;\; \varepsilon^2 = 0, \;\; \varepsilon \neq 0.$$

Также далее будет использоваться следующее свойство для дуальных чисел:

$$e^{\varepsilon x} = 1 + \varepsilon x$$

Считается что изначально дуальные числа были предложены Клиффордом [8], и в дальнейшем исследованы Штуди [9].

### 2.2. Моторы и винты

Мотором называется пара векторов

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\},$$

где $\mathbf{v}$ - направляющий вектор прямой, $\mathbf{m}$ - момент прямой.

Мотор можно также записать в виде дуального вектора (диады):

$$\mathbf{R} = \mathbf{v} + \varepsilon \mathbf{m}.$$

Для любого мотора можно подобрать такую систему координат, что в ней векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{m}$ будут коллинеарны. Винтом называется мотор, у которого направляющий вектор и момент коллинеарны $\mathbf{m} \mid \mathbf{v}$. Винт имеет запись

$$R = \{\mathbf{v} \mid p\mathbf{v}\} = \mathbf{v} + \varepsilon p \mathbf{v} = (1 + \varepsilon p)\mathbf{v}$$

$$p = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{m})}{\|\mathbf{v}\|^2},$$

где $p$ — параметр винта.

Винт, у которого норма направляющего вектора равна единице $\|\mathbf{v}\| = 1$ называется единичным винтом. Любой винт можно записать через единичный:

$$R = r(1 + \varepsilon p)\mathbf{E} = r e^{\varepsilon p}\mathbf{E}$$

Более подробно теория по винтам и моторам излагается в книге [5].

### 2.3. Принцип Штуди–Котельникова и основные формулы

Принцип перенесения Штуди–Котельникова можно сформулировать следующим образом. Все формулы теории конечных поворотов и кинематики движения твердого тела с одной неподвижной точкой при замене в них вещественных величин на дуальные переходят, векторных величин на винтовые и кватернионов на бикватернионы, переходят в соответствующие формулы кинематики движения свободного тела (без закрепленных точек).

Матрицы элементарных поворотов Эйлера при применении принципа перенесения превращаются в матрицы винтовых движений вдоль осей $Ox$, $Oy$, $Oz$ декартовой системы координат на дуальный угол $\Theta = \theta + \theta^o\varepsilon$, где действительная часть $\theta$ задает угол поворота вокруг оси, а дуальная часть $\theta^o$ — расстояние трансляции вдоль той же оси.

$$R_x(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \quad R_y(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & \sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} \quad R_z(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Функции синус и косинус от дуального угла вычисляются по следующим формулам:

$$\sin\Theta = \sin(\theta + \theta^o\varepsilon) = \sin\theta + \theta^o\cos\theta\varepsilon, \quad \cos\Theta = \cos(\theta + \theta^o\varepsilon) = \cos\theta - \theta^o\sin\theta\varepsilon.$$

Для получения винтового аналога формулы Родрига, запишем вначале оригинальную формулу Родрига для вращения радиус вектора $\mathbf{L}$ на угол $\theta$ вокруг оси, задаваемой прямой с направляющим вектором $\mathbf{a}$, проходящей через начало координат $O$:

$$\mathbf{p}' = \cos\theta\mathbf{p} + (1 - \cos\theta)(\mathbf{a}, \mathbf{p})\mathbf{a} + \sin\theta\mathbf{a} \times \mathbf{p}.$$

Согласно принципу перенесения, следует заменить векторы на винты, вещественные углы на дуальные. Поэтому вектор $\mathbf{p}$ должен быть заменен на винт $\mathbf{L} = \mathbf{v} + \mathbf{m}\varepsilon$, где $\mathbf{v}$ — направляющий вектор оси винта, а $\mathbf{m}$ — момент оси винта, а вектор $\mathbf{a}$ на винт $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a}^o\varepsilon$, где $\mathbf{a}$ — направляющий вектор оси винта, который представляет собой ось винтового движения, а $\mathbf{a}^o$ — момент этого винта. В результате получаем формулу, которая позволяет подвергать винтовому движению винты, а не векторы:

$$\mathbf{L}' = \cos\Theta\mathbf{L} + (1 - \cos\Theta)(\mathbf{A}, \mathbf{L})\mathbf{A} + \sin\Theta\mathbf{A} \times \mathbf{L}.$$

Так как геометрическим образом винта является прямая в пространстве, то данная формула позволяет применять винтовое движение, заданное осью $\mathbf{A}$ и дуальным углом $\Theta$, к произвольной прямой $\mathbf{L}$. Отметим, что ось $\mathbf{A}$ не привязана к началу координат и может проходить через любую точку пространства.

## 3. Применение винтов для винтового движения прямой в трехмерном пространстве

### 3.1. Использование матрицы с дуальными коэффициентами

Возьмём прямую, лежащую в плоскости $Oxy$ и проходящую через точку $O$ под углом $45°$ к осям $Ox$ и $Oy$. Запишем винт, соответствующий этой прямой. Направляющий вектор прямой $\mathbf{v} = (1, 1, 0)^T$. Произвольная точка прямой - точка $O = (0, 0, 0)^T$. Если считать, что $\mathbf{v}$ отложен от $O$, то вычислим момент по формуле $\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{v}$ так как $\mathbf{p} = (0, 0, 0)^T$. Поэтому соответствующий прямой $l$ винт $\mathbf{l}$ можно записать как $\mathbf{l} = (1, 1, 0)^T + \varepsilon(0, 0, 0)^T = 1i + 1j = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$.

Рассмотрим теперь дуальный угол $A = \alpha + \varepsilon\alpha^\circ$ взяв конкретные значения $\alpha = \pi/4$ и $\alpha^\circ = 1$. С помощью этого угла повернём прямую $l$ на угол $\alpha$ против часовой стрелки вокруг оси $Oz$ и поднимем на 1 вдоль той же оси $Oz$ (См. Рисунок 1).

Чтобы это сделать запишем матрицу для вращения вокруг оси $Oz$ но заменим в ней угол на дуальный.

$$R_z(A) = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Применим её к винту $\mathbf{l}$.

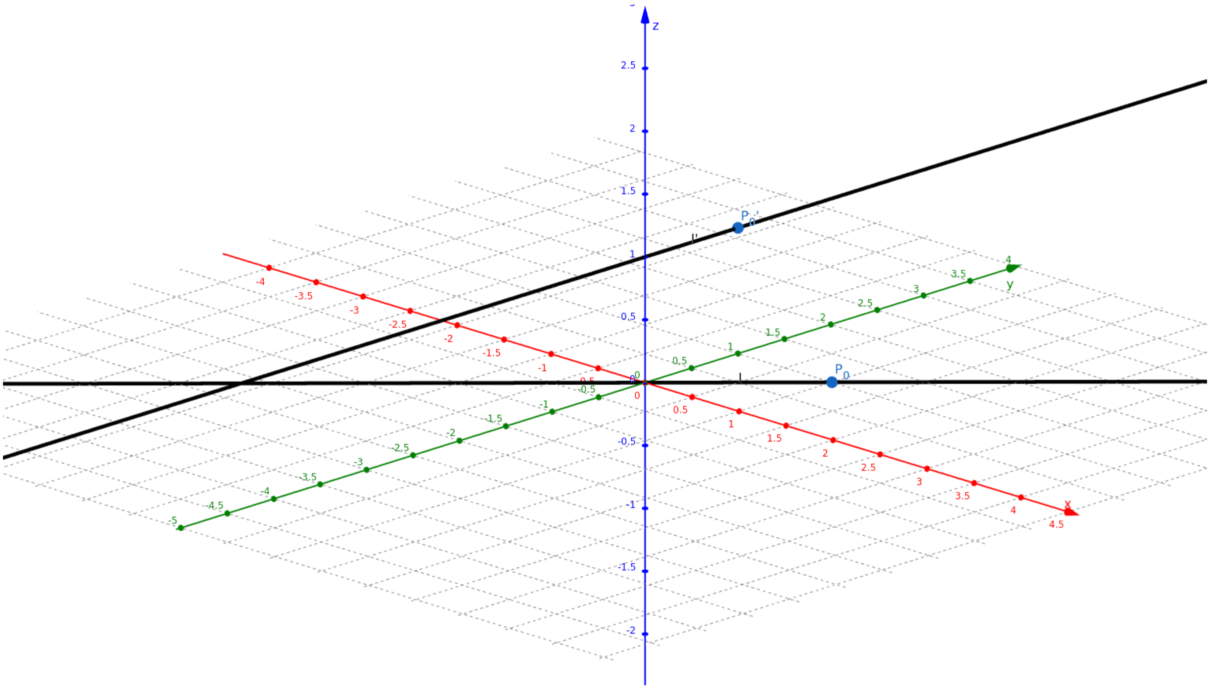


**Рис. 1:** Прямая $\mathbf{l}$ до винтового движения и прямая $\mathbf{l}'$ после винтового движения.

$$\mathbf{l}' = R_z(A)\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A - \sin A \\ \sin A + \cos A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\cos A - \sin A = \cos\alpha - \varepsilon\alpha^\circ \sin\alpha - \sin\alpha - \varepsilon\alpha^\circ \cos\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha - (\cos\alpha + \sin\alpha)\varepsilon\alpha^\circ$$
$$\cos A + \sin A = \cos\alpha - \varepsilon\alpha^\circ \sin\alpha + \varepsilon\alpha^\circ \cos\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha + (\cos\alpha - \sin\alpha)\varepsilon\alpha^\circ$$

Подставим $A = \pi/4 + \varepsilon$ и получим

$$\cos A - \sin A = \cos\pi/4 - \sin\pi/4 + (\cos\pi/4 + \sin\pi/4)\varepsilon = \sqrt{2}\varepsilon$$
$$\cos A + \sin A = \cos\pi/4 + \sin\pi/4 + (\cos\pi/4 - \sin\pi/4)\varepsilon = \sqrt{2}$$

Из чего следует

$$\mathbf{l}' = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\varepsilon \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Если направляющий вектор нормировать то получим:

$$\mathbf{l}' = (0,1,0)^T + \varepsilon(1,0,0)^T$$

## 4. Заключение

В данном тезисе был рассмотрен первый заявленный подход: винтовое движения с использованием матричного метода. Были кратко изложены основные формулы и определения, а также рассмотрен пример винтового движения при помощи матрицы с дуальными коэффициентами. В докладе планируется изложить материал по винтовому аналогу формулы Родрига и провести сравнительный анализ двух подходов. Также провести численное моделирование и опубликовать доступ к исходному коду для примеров моделирования.

**Финансирование:** Данное исследование не получало внешнего финансирования.

**Заявление о доступности данных:** В ходе исследования не было создано и проанализировано никаких новых данных. Совместное использование данных неприменимо.

**Конфликты интересов:** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности:** Мы благодарим организаторов конференции за предоставленную возможность создать этот тезис.

## Список литературы

1. Lengyel, E. *Foundations of Game Engine Development.* 1: *Mathematics* англ. 4 т. 195 с. (Terathon Software LLC, Lincoln, California, 2016).
2. Челноков, Ю. Н. *Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения* (ред. Легостаева, И. Л.) 512 с. (ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2006).
3. Клейн, Ф. *Высшая геометрия* -йизд. (ред. Бляшке, В.) пер. с нем. Брушлинский, Н. К. 400 с. (Книжный дом «ЛИБРОКОМ», Москва, 2009).
4. Котельников, А. П. *Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике* 222 с. (КомКнига, Москва, 2019).
5. Диментберг, Ф. М. *Винтовое исчисление и его приложение в механике* (ред. Антонов, И. Л.) 200 с. (Издательство «Наука» главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1965).
6. Goldman, R. *Dual Quaternions and Their Associated Clifford Algebras* англ. 279 с. (CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, 2024).
7. Gevorkyan, M. N., Korolkova, A. V. & Kulyabov, D. S. *Approaches to the Implementation of Generalized Complex Numbers in the Julia Language* Comment: in English; in Russian. arXiv: 2007.09737 [cs]. http://arxiv.org/abs/2007.09737 (2025). Пред. пуб.
8. Clifford. Preliminary Sketch of Biquaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society* **s1-4,** 381—395. doi:10.1112/plms/s1-4.1.381 (нояб. 1871).
9. Zindler, K. Geometrie der Dynamen: Von E. Study. Leipzig, bei B. G. Teubner, 1903. XIII und 603 S. Preis 21 M. (geb. 23 M.) *Monatshefte für Mathematik und Physik* **14,** A70—A75. doi:10.1007/BF01707030 (дек. 1903).