

# Черновик о винтовом движении прямой

Подмогильный Иван, Дидусь Кирилл, Геворкян М. Н.

15 марта 2025 г.

## Аннотация

В данном исследовании приводится сравнительный анализ двух подходов к моделированию движения твёрдых тел. Особое внимание уделяется винтовому движению, которое является наиболее обобщённой моделью пространственного перемещения твёрдого тела. Анализ литературных источников показал, что представлено недостаточное число общедоступных примеров применения винтов в контексте геометрической визуализации, а также наглядных вычислительных примеров использования бикватернионов для моделирования трёхмерного движения. Таким образом, проведённое исследование направлено на восполнение пробела в прикладных дидактических материалах и методологическую оценку существующих подходов. В работе представлено детальное описание математических формул с пояснениями. Приводятся вычислительные примеры, включая реализацию винтового движения с использованием матричного метода и формулы Родрига.

## 1. Плюккеровы координаты

С помощью Плюккеровых координат (также называемых Грассмановыми координатами) [1, Гл. 7] можно задать прямую в трёхмерном проективном пространстве  $\mathbb{P}^3$  с помощью шести параметров  $\mathbf{L} = (\mathbf{v} : \mathbf{m}) = (v_1 : v_2 : v_3 : m_1 : m_2 : m_3)$ . Где  $\mathbf{v}$  называют направляющим вектором прямой, а  $\mathbf{m}$  называют моментом прямой. Координаты направляющего вектора и момента можно представить в виде Плюккеровой

матрицы:

$$[\mathbf{L}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -v_1 & -v_2 & -v_3 \\ v_1 & 0 & -m_1 & -m_2 \\ v_2 & m_1 & 0 & m_3 \\ v_3 & m_2 & m_3 & 0 \end{pmatrix}$$

### 1.1. Движение прямой представленной в Плюккер- ровых координатах

Чтобы подействовать полной линейной группой  $GL(3, \mathbb{R})$  на прямую, можно использовать матрицу преобразования [2, Гл. 3.2, секция II. Plücker matrices, пункт 5]:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix}$$

Реализацией такого действия будет операция:  $[\mathbf{L}']_{\times} = \mathbf{H} \mathbf{L} \mathbf{H}^T$ .

## 2. Моторы

Ещё одним подходом к представлению прямой являются моторы и винты [3]. Чтобы определить мотор, нужно задать дуальный вектор -  $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$ , в котором как и в Плюккер-овых координатах  $\mathbf{v}$  - направляющий вектор прямой,  $\mathbf{m}$  - момент прямой. Мотором называется следующая запись:

$$R = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\} = \mathbf{v} + \varepsilon \mathbf{m}$$

Где  $\varepsilon$  является дуальным числом  $\varepsilon^2 = 0$ . Напомним, что для дуальных чисел выполняется свойство

$$e^{\varepsilon x} = 1 + \varepsilon x$$

Изначально дуальные числа были предложены Клиффордом [4], и в дальнейшем исследованы Штуди [5].

## 2.1. Винты

Для любого мотора можно подобрать такую систему координат, что в ней векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{m}$  будут коллинеарны. Винтом называется мотор, у которого направляющий вектор и момент коллинеарны  $\mathbf{m} \parallel \mathbf{v}$ . Винт имеет запись

$$R = \{\mathbf{v} \mid p\mathbf{v}\} = \mathbf{v} + \varepsilon p\mathbf{v} = (1 + \varepsilon p)\mathbf{v}$$

$$p = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{m})}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

В новой системе координат  $p$  называется параметром винта.

Винт, у которого норма направляющего вектора равна единице  $\|\mathbf{v}\| = 1$  называется единичным винтом. Винт можно записать через единичный винт:

$$R = r(1 + \varepsilon p)\mathbf{E} = re^{\varepsilon p}\mathbf{E}$$

## 2.2. Движение прямой через винты

**Теорема 2.1 (Принцип перенесения Котельникова–Штуди).** *Решение любой геометрической или кинематической задачи твёрдого тела с одной неподвижной точкой может использоваться для задачи пространственного движения свободного твёрдого тела.*

Для этого необходимо заменить векторы, вещественные числа, обычные углы и кватернионы на винты, дуальные числа, дуальные углы и бикватернионы соответственно.  $\diamond$

Согласно принципу перенесения Котельникова–Штуди на прямую в виде винта можно подействовать матрицей поворота в дуальных углах

$$R' = \mathcal{R}(A)R, \mathcal{R} \in \mathbb{M}^{3 \times 3}$$

Где  $A$  - дуальный угол.

## 3. Бикватернионы

Кватернионы могут использоваться для выражения поворотов [6, Гл. N] так как множество единичных кватернионов

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$$

по произведению Гамильтона даёт группу Ли, которая дважды покрывает специальную ортогональную группу  $SO(3)$  [7, Гл. 12]:

$$\phi : S^3 \rightarrow SO(3), \phi(q) = \phi(-q)$$

Бикватернионы получаются из кватернионов процедурой Кейли–Диксона (удвоением) и имеют запись:

$$Q = q + \varepsilon q^o, \quad q, q^o \in \mathbb{H}, \quad \varepsilon^2 = 0$$

Бикватернионы были предложены Клиффордом [4]. Более подробно бикватернионы описываются в заметке [8], а приложение для свободного движения твёрдого тела (вращение и трансляция) приведено в [6, Гл. N]

### 3.1. Движение прямой через бикватернионы

В алгебре бикватернионов прямая, которую вращают представима в виде чистого бикватерниона

$$\mathbf{L} = L_x i + L_y j + L_z k = \mathbf{v}_L + \varepsilon \mathbf{m}_L$$

Где  $\mathbf{v} = v_x i + v_y j + v_z k$  - направляющий вектор прямой в записи чистого кватерниона и  $\mathbf{m} = m_x i + m_y j + m_z k$  - момент прямой в записи чистого кватерниона.

Прямая, которая представляет ось вращения также представима в виде чистого бикватерниона

$$\mathbf{A} = A_x i + A_y j + A_z k = \mathbf{v}_A + \varepsilon \mathbf{m}_A$$

Движение и поворот прямой задается в виде  $\mathbf{L}' = \mathbf{Q} \mathbf{L} \mathbf{Q}^*$ . Где бикватернион вращатель записывается в форме

$$\mathbf{Q} = \Lambda_0 + \Lambda_1 i + \Lambda_2 j + \Lambda_3 k$$

Его сопряжение

$$\mathbf{Q}^* = \Lambda_0 - \Lambda_1 i - \Lambda_2 j - \Lambda_3 k$$

Лямбда параметры представляют собой

$$\Lambda_0 = \cos \frac{\Theta}{2}, \Lambda_1 = \sin \frac{\Theta}{2} A_x, \Lambda_2 = \sin \frac{\Theta}{2} A_y, \Lambda_3 = \sin \frac{\Theta}{2} A_z$$

$\Theta$  называется дуальным углом

$$\Theta = \theta + \varepsilon \theta^0$$

## 4. Геометрическая алгебра

Подробное введение в геометрическую алгебру приводится в книгах [Hitzer, Hestenes D.]. Геометрическая алгебра  $\mathbb{G}_{301}$  моделирует трёхмерное проективное пространство. Векторами этой алгебры являются элементы  $\mathbf{u} = ae_1 + be_2 + ce_3 + \delta e_0 \in \mathbb{G}_{301}$ . Можно задать биективное отображение этих векторов на перпендикуляры к плоскостям  $ax + by + cz + \delta$ . Произведение между двумя векторами  $\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2$  называется произведением Клиффорда (или геометрическим произведением). Множество элементов  $\mathbb{G}_{301}$  по произведению "сендвича"  $\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1^{-1}$  образует непрерывную группу которую обозначим  $G_{Cl}$ , эта группа изоморфна группе пинов  $G_{Cl} \cong \mathbf{Pin}(p, q, r)$ . Произведение сендвича имеет геометрический смысл отражения, то есть  $\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1^{-1}$  интерпретируется как отражение плоскости  $\mathbf{u}_2$  относительно плоскости  $\mathbf{u}_1$  [9].

### 4.1. Движение прямой через геометрическую алгебру

Если произвести четыре отражения, то такая операция является винтовым движением. Ниже приводится таблица из статьи [9].

Таблица 1: Обзор элементов группы  $\mathbf{Pin}(3, 0, 1)$

Кол-во отражений	Элемент группы	Инв-е пр-во	Элемент алгебры
0	Единичный эл-т	Объём	Скаляр
1	Отражение	Плоскость	Вектор
2	Поворот/сдвиг	Прямая	Бивектор
3	Рото/трансфлексия	Точка	Тривектор
4	Винтовое дв-е	Центр	Четыревектор

## Список литературы

1. *Hodge W. V. D., Pedoe D. Methods of Algebraic Geometry.* — 1-е изд. — Cambridge University Press, 10.03.1994. — ISBN 978-0-521-46900-5 978-0-511-62387-5. — DOI: 10.1017/CB09780511623875. — URL: <https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511623875/type/book> (дата обр. 04.03.2025).

2. *Hartley R., Zisserman A.* Multiple View Geometry in Computer Vision. — Cambridge University Press, 2003. — (Cambridge Books Online). — ISBN 978-0-521-54051-3. — URL: <https://books.google.ru/books?id=si3R3Pfa98QC>.
3. *Диментберг Ф.* Винтовое Исчисление и Его Приложения в Механике. — Наука, 1965. — (Физико-Математическая Библиотека Инженера). — URL: <https://books.google.ru/books?id=to5GAAAAAYAAJ>.
4. *Clifford.* Preliminary Sketch of Biquaternions // Proceedings of the London Mathematical Society. — 1871. — Нояб. — Т. s1—4, № 1. — С. 381—395. — ISSN 00246115. — DOI: 10.1112/plms/s1-4.1.381. — URL: <http://doi.wiley.com/10.1112/plms/s1-4.1.381> (дата обр. 09.03.2025).
5. *Zindler K.* Geometrie der Dynamen: Von E. Study. Leipzig, bei B. G. Teubner, 1903. XIII und 603 S. Preis 21 M. (geb. 23 M.) // Monatshefte für Mathematik und Physik. — 1903. — Дек. — Т. 14, № 1. — A70—A75. — ISSN 0026-9255, 1436-5081. — DOI: 10.1007/BF01707030. — URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF01707030> (дата обр. 09.03.2025).
6. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные и Бикватернионные Модели и Методы Механики Твёрдого Тела и Их Приложения: Геометрия и Кинематика Движения. — Физматлит, 2006. — ISBN 978-5-9221-0680-1. — URL: <https://books.google.ru/books?id=8in3rQEACAAJ>.
7. *Altmann S.* Rotations, Quaternions, and Double Groups. — Clarendon Press, 1986. — (Oxford Science Publications). — ISBN 978-0-19-855372-4. — URL: <https://books.google.ru/books?id=K3CAQgAACAAJ>.
8. *Jia Y.-B.* Dual Quaternions //. — 2018. — URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/Dual-Quaternions-Jia/d11ee4eeb7e870faf8fe12136c12dfbf2026e030%7D> (дата обр. 09.03.2025).
9. *Ruhe D., Gupta J. K., Keninck S. de, Welling M., Brandstetter J.* Geometric Clifford Algebra Networks. — 29.05.2023. — DOI: 10.48550/arXiv.2302.06594. — arXiv: 2302.06594 [cs]. — URL: <http://arxiv.org/abs/2302.06594> (дата обр. 09.03.2025). — Пред. пуб.