Preuve 1.

$$R(g) - R(g^*) = \mathbb{E}_{X,Y}\left[\mathbb{1}\{g(X) \neq Y\} - \mathbb{1}\{g^*(X) \neq Y\}\right]$$

$$= \mathbb{E}_{X,Y}\left[\mathbb{1}\{g(X) \neq g^*(X)\}\left[\mathbb{1}\{g(X) \neq Y\} - \mathbb{1}\{g^*(X) \neq Y\}\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}_{X,Y}\left[\mathbb{1}\{g(X) \neq g^*(X)\}\left(\mathbb{1}\{g^*(X) = Y\} - \mathbb{1}\{g^*(X) \neq Y\}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}_{X,Y}\left[\mathbb{1}\{g(X) \neq g^*(X)\}\left(2\mathbb{1}\{g^*(X) = Y\} - 1\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}_{X}\left[\mathbb{1}\{g(X) \neq g^*(X)\}\left(2\,\mathbb{E}_{Y|X}\left[\mathbb{1}\{g^*(X) \neq Y\}\right] - 1\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}_{X}\left[\mathbb{1}\{g(X) \neq g^*(X)\}\,|2\eta(X) - 1|\right]$$

$\square$

Preuve 2.

$$\mathbb{P}(Y \neq g^*(X) \mid X = x) = 1 - \mathbb{P}(Y = g^*(X) \mid X = x) = \begin{cases} 1-\eta(x) & \text{si } \eta(x) \geq \frac{1}{2} \\ \eta(x) & \text{si } \eta(x) < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \min\{\eta(x), 1-\eta(x)\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(g^*(X) \neq Y) = \mathbb{E}\left[\min(\eta(X), 1-\eta(X))\right]$$

$\square$