1

Exercice (4)

Question (1) : la vraisemblance $\mathcal{L}(t_1, t_2, \dots, t_n) \equiv \mathcal{L}$ ← notation à adopter par la suite.

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{n} f_T(t_i ; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \left[\theta e^{-\theta t_i} \right] = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} t_i} .$$

Donc,

$$\ln \mathcal{L} = n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} t_i , \quad \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} t_i$$

et,

$$\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} .$$

La variance asymptotique (quand n est grand) de $\hat{\theta}_n$ est donnée par

$$Var(\hat{\theta}_n) = \left[-\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2} \right) \right]^{-1} = \frac{\theta^2}{n} .$$

Question (2) : Nous avons,

$$\underbrace{\mathbb{P}(T > t^*)}_{\text{la fonction de survie en } t} = \int_{t^*}^{+\infty} \theta e^{-\theta t} dt = \left[-\theta e^{-\theta t} \right]_{t^*}^{+\infty} = e^{-\theta t^*} .$$

Ainsi, la vraisemblance $\mathcal{L}^*(y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv \mathcal{L}^*$ est donnée par

$$\mathcal{L}^* = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \left(e^{-\theta t^*} \right)^{y_i} \left(1 - e^{-\theta t^*} \right)^{1-y_i} \right\}$$

car Y_i est Bernoulli de proba de succès $e^{-\theta t^*}$.

$$\mathcal{L}^* = e^{-\theta t^* \sum_{i=1}^{n} y_i} \left(1 - e^{-\theta t^*} \right)^{n - \sum_{i=1}^{n} y_i}$$

donc,

$$\ln \mathcal{L}^* = -\theta t^* n \bar{y}_n + n(1 - \bar{y}_n) \ln\left(1 - e^{-\theta t^*}\right) \quad \text{où } \bar{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i} y_i$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}^*}{\partial \theta} = -t^* n \bar{y}_n + n(1 - \bar{y}_n) \times \frac{t^* e^{-\theta t^*}}{(1 - e^{-\theta t^*})}$$

2

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}^*}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow n(1-\bar{y}_n)\, t^* e^{-\theta t^*} = n t^* \bar{y}_n \left(1 - e^{-\theta t^*}\right)$$

$$\Rightarrow (1-\bar{y}_n)\, e^{-\theta t^*} = \bar{y}_n \left(1 - e^{-\theta t^*}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-\theta t^*} = \bar{y}_n \Rightarrow \hat{\theta}^*_n = \frac{-\ln \bar{Y}_n}{t^*}$$

$$= \frac{1}{t^*} \ln\left(\frac{1}{\bar{Y}_n}\right).$$

Question (3) :

$$\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}^*}{\partial \theta^2} = n t^* (1-\bar{y}_n) \left[\frac{-t^* e^{-\theta t^*}\left(1 - e^{-\theta t^*}\right) - e^{-\theta t^*}\left(t^* e^{-\theta t^*}\right)}{\left(1 - e^{-\theta t^*}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{-n t^* (1-\bar{y}_n)}{\left(1 - e^{-\theta t^*}\right)^2}\, t^* e^{-\theta t^*}.$$

On déduit :

$$-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}^*}{\partial \theta^2}\right] = \frac{n (t^*)^2 e^{-\theta t^*}\, \mathbb{E}\left[1 - \bar{Y}_n\right]}{\left(1 - e^{-\theta t^*}\right)^2}$$

$$= \frac{n (t^*)^2 e^{-\theta t^*}}{\left(1 - e^{-\theta t^*}\right)^2} \left(1 - e^{-\theta t^*}\right)$$

$$= \frac{n (t^*)^2}{\left(e^{\theta t^*} - 1\right)}.$$

$\hat{\theta}_n$ est préférable car les $Y_1, \ldots, Y_n$ perdent de l'information par rapport aux $T_1, \ldots, T_n$ si les temps $T_1, \ldots, T_n$ sont mesurés sans erreur.

La variance asymptotique de $\hat{\theta}^*_n$ est égale à $\dfrac{\left(e^{\theta t^*} - 1\right)}{n (t^*)^2}$.

Si $t^* \geq \mathbb{E}[T] = \dfrac{1}{\theta}$, nous avons :

$$\frac{\operatorname{Var}(\hat{\theta}_n)}{\operatorname{Var}(\hat{\theta}^*_n)} = \frac{\theta^2 / n}{\left(e^{\theta t^*} - 1\right) / n (t^*)^2} = \frac{\theta^2 (t^*)^2}{\left(e^{\theta t^*} - 1\right)} < 1,$$

③

Exercice ⑤ :

Question (1) : On note que :

$$\mu_r = \mathbb{E}[Y^r] = \int_\gamma^{+\infty} y^r \theta \gamma^\theta y^{-(\theta+1)} dy$$

$$= \theta\gamma^\theta \left[\frac{y^{r-\theta}}{(r-\theta)} \right]_\gamma^{+\infty} = \frac{\theta\gamma^r}{(\theta-r)}, \text{ pour } \theta > r.$$

La méthode des moments repose sur les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\mu}_1 = \bar{y}_n = \dfrac{\theta\gamma}{\theta-1} = \mathbb{E}[Y] \quad \text{------} \; ① \\ \hat{\mu}_2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n y_i^2 = \mathbb{E}[Y^2] = \dfrac{\theta\gamma^2}{(\theta-2)} \quad \text{------} \; ② \end{cases}$$

Les deux équations précédentes donnent :

$$\frac{\hat{\mu}_2}{\bar{y}_n^2} = \frac{\theta\gamma^2/(\theta-2)}{\theta^2\gamma^2/(\theta-1)^2} = \frac{(\theta-1)^2}{\theta(\theta-2)}$$

Ainsi :

$$\frac{(\theta-1)^2}{\theta(\theta-2)} - 1 = \frac{1}{\theta(\theta-2)} = \frac{\hat{\mu}_2}{\bar{y}_n^2} - 1 = \frac{(\hat{\mu}_2 - \bar{y}_n^2)}{\bar{y}_n^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2}{\bar{y}_n^2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{s^2}{\bar{y}_n^2}.$$

donc :

$$\theta(\theta-2) = \left(\frac{n}{n-1}\right)\frac{\bar{y}_n^2}{s^2} = \left(\frac{50}{49}\right)\left(\frac{900}{10}\right) = 91.8367$$

Les solutions de l'équation du second degré : $\theta^2 - 2\theta - 91.8367 = 0$

④ sont données par :

$$\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4(91.8367)}}{2}, \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -8.6352 \\ 10.6352 \end{cases}$$

Comme $\theta > 2$, on garde la solution positive $\hat{\theta}_{mm} = 10.6352$.

Finalement

$$\hat{\gamma}_{mm} = \frac{(\hat{\theta}_{mm} - 1)}{\hat{\theta}_{mm}} \bar{y}_n = \left(\frac{9.6352}{10.6352}\right)(30) = 27.1793.$$

donc : $\hat{\gamma}_{mm} = 27.1793$.

$$f_{Y_{(n)}}(y ; \gamma, \theta) = n \left[1 - F_Y(y ; \gamma, \theta)\right]^{n-1} f_Y(y ; \gamma, \theta)$$

$$= n \left[\left(\frac{\gamma}{y}\right)^{\theta}\right]^{n-1} \theta \gamma^{\theta} y^{-(\theta+1)}$$

$$= n\theta \gamma^{n\theta} y^{-(n\theta+1)}, \quad 0 < \gamma < y < +\infty.$$

À l'aide de cette densité on peut calculer :

$$\mathbb{E}\left[Y_{(n)}^r\right] = \int_{\gamma}^{+\infty} y^r n\theta \gamma^{n\theta} y^{-(n\theta+1)} dy = \frac{n\theta \gamma^r}{(n\theta - r)}, \quad n\theta > r.$$

donc : $$\mathbb{E}\left[Y_{(n)}\right] = \frac{n\theta\gamma}{(n\theta - 1)}.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[Y_{(n)}\right] = \lim_{n \to +\infty} \frac{\theta\gamma}{\left(\theta - \frac{1}{n}\right)} = \frac{\theta}{\theta}\gamma = \gamma.$$

$$\mathrm{Var}(Y_{(n)}) = \frac{n\theta\gamma^2}{(n\theta - 2)} - \left[\frac{n\theta\gamma}{(n\theta - 1)}\right]^2 = n\theta\gamma^2 \left[\frac{1}{(n\theta - 2)} - \frac{n\theta}{(n\theta - 1)^2}\right]$$

$$= \frac{n\theta\gamma^2}{(n\theta - 1)^2 (n\theta - 2)}.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{Var}(Y_{(1)}) = 0$$

donc $Y_{(1)}$ converge en proba vers γ.

Question (3) : Soit $c = (1-\alpha)^{\frac{1}{n\theta}}$; nous avons $U = c\, Y_{(1)}$

$$= (1-\alpha)^{\frac{1}{3n}}\, Y_{(1)} .$$

Lorsque $n=5$, $\alpha = 0.1$ et $y_{(1)} = 20$, la valeur calculée de U, $u = (1-0.1)^{1/15}(20) = 19.860$..

Le IC à 90% pour γ est donné par $[0, 19.860]$.