Introduction à bootstrap

M2R santé publique

02 octobre 2020

Principe

- On s'intéresse au paramètre d'une loi de probabilité F_θ, f_θ, $f(x;\theta)$ ou $\mathbb{P}_\theta$
- On ne possède qu'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ issu de F_θ
- $\widehat{\theta} = t(X_1, \ldots, X_n)$ est un estimateur de θ

Principe

- On s'intéresse au paramètre d'une loi de probabilité F_θ, f_θ, $f(x;\theta)$ ou $\mathbb{P}_\theta$
- On ne possède qu'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ issu de F_θ
- $\widehat{\theta} = t(X_1, \ldots, X_n)$ est un estimateur de θ

Plusieurs questions liées à la distribution de $\widehat{\theta}$

- Biais de l'estimateur $\widehat{\theta}$
- Variance de $\widehat{\theta}$ (sa précision)
- Intervalle de confiance pour θ

Simuler suivant F_θ ou f_θ

Exemple : supposons que $X \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ où $\theta = 2$

```
set.seed(123)
# simuler un jeu de données de 100 individus
n <- 100
x <- rnorm(n, mean=2, sd=1)

# simuler N jeux de données
N <- 10000
X <- matrix(rnorm(N*n,2,1), N,n)
t <- rowMeans(X)
summary(t)
```

Le résultat

```r
set.seed(123)
# simuler un jeu de données de 100 individus
n <- 100
x <- rnorm(n, mean=2, sd=1)

# simuler N jeux de données
N <- 10000
X <- matrix(rnorm(N*n,2,1), N,n)
t <- rowMeans(X)
summary(t)
```

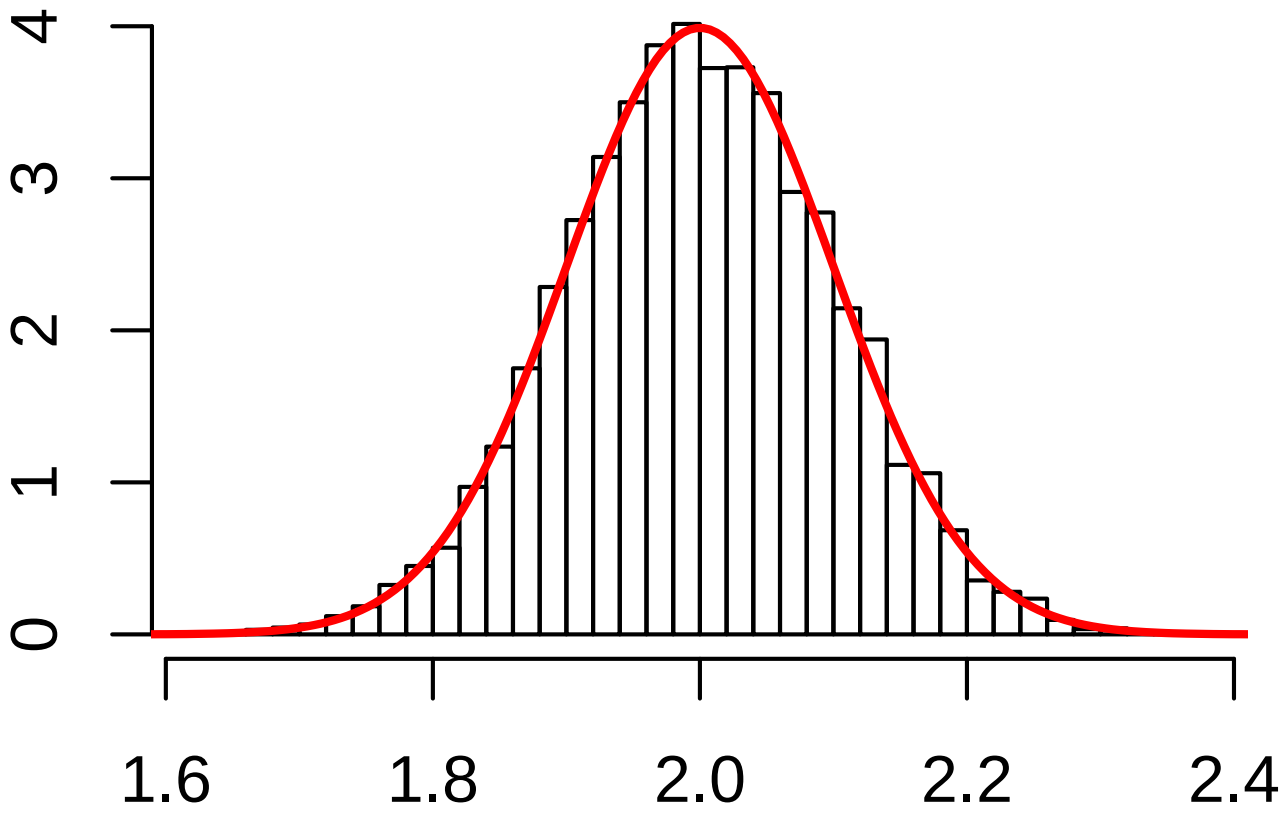
```
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  1.623   1.932   1.999   1.999   2.068   2.376
```

Le code pour tracer les sorties

```
hist(t, nclass=40, freq=F, ylab="",xlab="",main="")
xx <- seq(1.5, 2.5, le=200)
et <- 1/sqrt(n)
points(xx, dnorm(xx, 2, et),
       type="l", lwd = 2, col="red")
```

La figure

```
hist(t, nclass=40, freq=F, ylab="",xlab="",main="")
xx <- seq(1.5, 2.5, le=200)
et <- 1/sqrt(n)
points(xx, dnorm(xx, 2, et), type="l", lwd = 2, col="red")
```



Une petite parenthèse : générateur de nombres aléatoires

La loi de base que l'on simule est la loi uniforme sur $[0, 1]$, un tel générateur est inclus dans tous les langages de programmation et dans tous les logiciels.

Une petite parenthèse : générateur de nombres aléatoires

La loi de base que l'on simule est la loi uniforme sur $[0, 1]$, un tel générateur est inclus dans tous les langages de programmation et dans tous les logiciels.

- La méthode de congruence linéaire (D.H Lehmer-Lucas 1948),

$$g_{n+1} = ag_n + b \mod m$$

où a, b, m et g_0 sont à choisir intialement.

- Ce générateur fabrique une suite d'entiers aléatoires allant de 0 à $m - 1$.
- La suite $g_n/m - 1$ fournit des nombres sur l'intervalle $[0, 1]$.
- La suite ainsi produite possède une période inférieure ou égale à m.
- Un générateur de ce type, nommé RANDU, fut exploité pendant des années dans toutes sortes de logiciels.
- Les paramètres de RANDU sont $m = 2^{35}$, $a = 3125$, $b = 1$ et $g_0 = 71$ et sa période est de 2^{35}.

Inversion de la fonction de répartition

On veut générer des nombres aléatoires suivant une loi données par sa fonction de répartition F. Comment procéder ?

Inversion de la fonction de répartition

On veut générer des nombres aléatoires suivant une loi données par sa fonction de répartition F. Comment procéder ?

- Générer $U_1, U_2, \ldots, U_n$ suivant une loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$.
- On forme

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (F^{-1}(U_1), F^{-1}(U_2), \ldots, F^{-1}(U_n))$$

Inversion de la fonction de répartition

On va s'intéresser à la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda = 2$

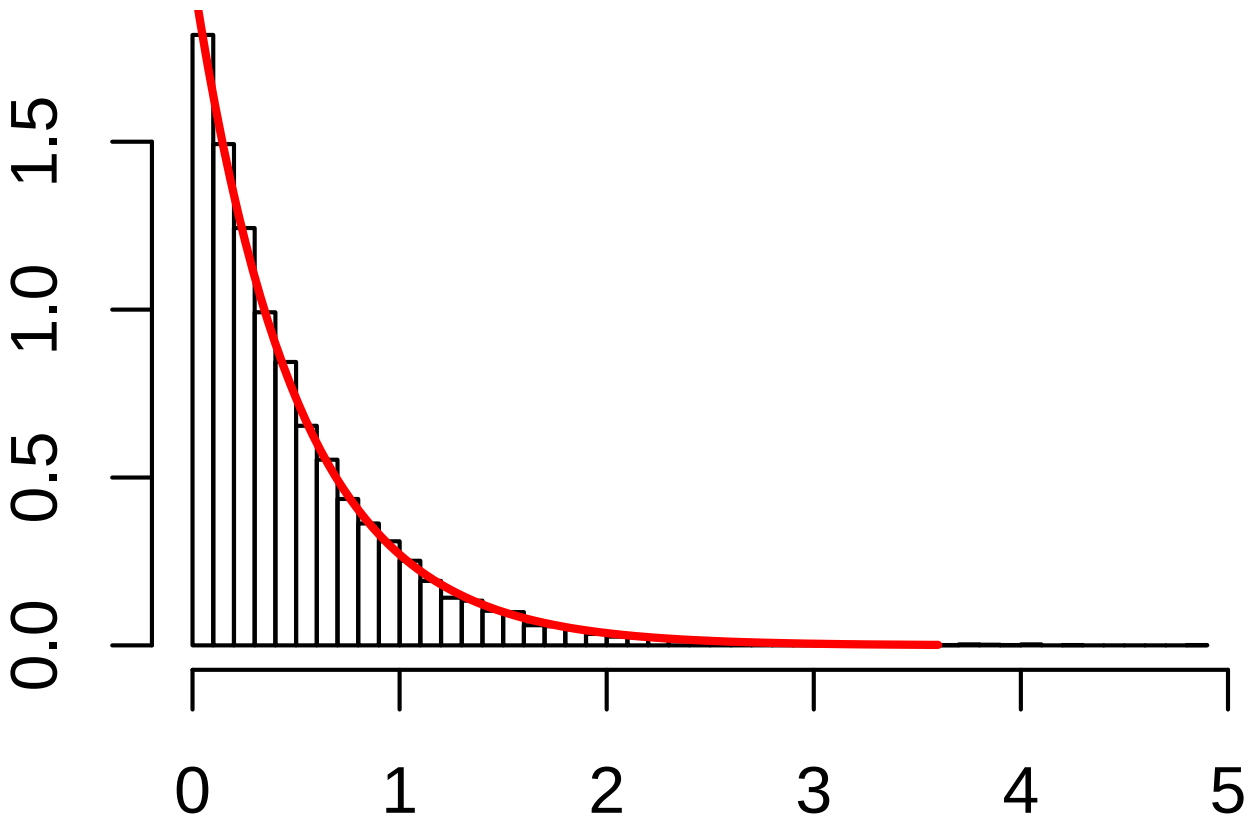
- Rappelons que $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- Simuler 100 réalisations de la loi $\mathcal{E}(2)$
- Tracer sur la même figure l'histogramme des réalisations ainsi que la vraie densité de probabilité de la loi $\mathcal{E}(2)$

Inversion de la fonction de répartition

```
set.seed(123)
x.u <- runif(1000)
x.e <- qexp(x.u, rate = 2)
hist(x.e, nclass=30, freq = F, main="", xlab="", xlab="")
x<-seq(0,3.6, le=100)
points(x, dexp(x, 2), type="l", lwd = 2, col ="red")
```

Sortie

```
set.seed(123)
x.u <- runif(10000)
x.e <- qexp(x.u, rate = 2)
hist(x.e, nclass=40, freq = F, main="", ylab="", xlab="")
x<-seq(0,3.6, le=100)
points(x, dexp(x, 2), type="l", lwd = 2, col ="red")
```



Simuler une loi normale : **Box-Muller**

Soit, U et V deux variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes, la variable

$$X = \cos(2\pi U)\sqrt{(-2\log(V))}$$

suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Alternative : rééchantillonnage

F_θ est en général inconnue !

Alternative : rééchantillonnage

F_θ est en général inconnue !

Le ***bootstrap*** consiste donc à faire une simulation à partir de la loi empirique F_n observée (*i.e.* l'échantillon) au lieu de la vraie loi F_θ, qui est inconnue.

Alternative : rééchantillonnage

F_θ est en général inconnue !

Le ***bootstrap*** consiste donc à faire une simulation à partir de la loi empirique F_n observée (*i.e.* l'échantillon) au lieu de la vraie loi F_θ, qui est inconnue.

- On tire B échantillons $\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \ldots, \boldsymbol{x}_B^*$ où chaque $\boldsymbol{x}_b^*$ est constitué en tirant avec remise n valeurs de l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$.
- On appelle chaque tirage d'un $\boldsymbol{x}_b^*$ un ***bootstrap***

La fonction sample de R

- Sous R, taper :

```
?sample
```

- On propose de faire un premier test avec cette fonction

```
set.seed(123)
# 100 réalisations d'une gaussienne N(10,10)
x <- rnorm(100, mean = 10, sd = 10)
# faire un tirage avec remise de taille 100
x.boot <- sample(?, ?, ?)  ## attention remplacer les ?
```

Un jeu de données

Exemple : jeu de données de taille n = 47 observations de la durée de rémission d'une leucémie en semaines.

```
## lecture du jeu de données leucemie
setwd("~/Dropbox/enseignements/bootstrap")
rm(list = ls())
## je vais lire le fichier leucimie.txt
load("~/Dropbox/enseignements/bootstrap/leucemie.rda")
```

Exemple : estimation de la médiane

- On s'intéresse à la médiane dans le jeu de données de leucemie, ici la statistique $t(\boldsymbol{x})$ est la médiane empirique de l'échantillon $\boldsymbol{x} = (X_1, \ldots, X_n)$.
- Proposer une procédure qui génère $B = 1000$ échantillons bootstrap à partir du jeu de données leucemie.
- Calculer l'estimateur bootstrap du biais donné par

$$\widehat{\text{biais}} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^{B} \text{median}(\boldsymbol{x}_b^*) - \text{median}(X_1, \ldots, X_n)$$

- Estimer la variance et l'écart type de l'estimateur de la médiane.

Le package boot de R

On souhaite ici, voir ce que fait le package boot et le comparer à nos résultats sur le jeux de données leucémie.

```
set.seed(123)
boot.median<-function(y,i){z<-median(y[i]); return(z)}
boot.obj1<-boot(data = y,
                statistic = boot.median,
                R = B)
names(boot.obj1)
boot.obj1
```

Bilan

- La variablilité de l'échantillonnage dans la population se reflète dans la variabilité de l'échantillonnage dans la sous-population y.
- Nous avons utiliser la variance du vecteur *boot* pour estimer la variance de $median(y)$.
- Il est clair que ce que nous venons de faire pour la médiane, nous pouvons le répéter pour estimer la variance d'autres statistiques.

Intervalles de confiance : jeu de données CommuteAtlanta

- Charger le package Lock5Data et le jeu de données CommuteAtlanta
- Se faire une idée du jeu de données : sa taille, les noms des variables etc ...
- Générer $B = 1000$ échantillons bootstrap sans faire appel au package boot de la variable *trajet* (Distance)
- Calculer l'écart type du trajet moyen
- Construire un intervalle de confiance du trajet moyen