FICHE D'EXERCICES

1. Donner, pour l'expérience aléatoire suivante, une description précise de Ω ; énumérer les éléments : ≪ Lancer 3 dés et observer la somme des nombres obtenus ≫.

2. Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte. Calculer la probabilité d'obtenir un carreau ou une dame (exprimer les évènements considérés).

3. Un architecte soumet un projet à 2 bureaux X, Y. Supposons que la probabilité que X accepte le projet est de 0.5, celle que Y refuse est de 0.6 et celle que le projet soit rejeté par au moins un bureau est de 0.7. Calculer les probabilités des événements suivants :
a. Que les bureaux X et Y acceptent le projet
b. Que X accepte le projet, mais Y le refuse
c. Qu'au moins un des bureaux accepte le projet

4. Soit une pièce de monnaie qui donne pile avec probabilité p et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On jette la pièce de monnaie jusqu'à la réalisation de 2 piles consécutifs et alors on gagne, ou 2 faces consécutives et alors on perd. Calculer
a. La probabilité de gagner en 2 coups ? de perdre en 2 coups ?
b. La probabilité de gagner en 3 coups ? de perdre en 3 coups ?
c. La probabilité de gagner en $2n$ coups ? perdre en $2n$ coups ?
d. La probabilité de gagner en $2n + 1$ coups ? perdre en $2n + 1$ coups ?
e. La probabilité de gagner en $2n$ ou $2n + 1$?
f. La probabilité de gagner ?

5. On sait que 5 hommes sur 100 sont daltoniens et que 25 femmes sur 10000 sont daltoniennes. Un daltonien est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ? (on admettra que dans la population, il y a autant d'hommes que de femmes).

6. Les 3 génotypes AA, Aa, aa sont, chez les hommes et les femmes, dans les proportions $u, 2v$ et w où $(u+2v+w = 1)$. Quelle est la fréquence des génotypes chez les descendants ?

7. Pour faire le diagnostic différentiel de 2 maladies équiprobables *a priori*, on dispose des résultats (codés + ou −) de 2 examens $E1$ et $E2$. Le tableau ci-dessous donne les probabilités des différents résultats selon que le malade a $D1$ ou $D2$.

	$E1^-E2^-$	$E1^-E2^+$	$E1^+E2^-$	$E1^+E2^+$
$D1$	0.10	0.30	0.36	0.24
$D2$	0.15	0.45	0.24	0.16

a. Calculez $\mathbb{P}(D1 \mid E1^-), \mathbb{P}(D1 \mid E1^+), \mathbb{P}(D1 \mid E2^-), \mathbb{P}(D1 \mid E2^+)$. Les examens $E1$ et $E2$ vous semblent-ils apporter une information sur le diagnostique ?
b. Calculez $\mathbb{P}(D1 \mid E1^-E2^-), \mathbb{P}(D1 \mid E1^-E2^+), \mathbb{P}(D1 \mid E1^+E2^-), \mathbb{P}(D1 \mid E1^+E2^+)$. Conclusions sur l'utilité des 2 examens.

Lois de probabilité

8. N personnes doivent être soumises à un test sanguin dont le résultat peut être soit positif, soit négatif. Deux stratégies sont possibles :
a. chaque sujet est testé séparément, de sorte que N tests sont nécessaires

b. Les sangs de k sujets (k diviseur de N) sont poolés. Si le test est négatif, alors il suffit pour ces k personnes ; s'il est positif, chacune d'entre elles est testée séparément (donc au total $k+1$ tests). Soit $q = 1-q$ la probabilité qu'une personne soit positive (q supposée la même pour tous les sujets). Appelons S le nombre total de tests requis dans la stratégie **b)**.

8.1. Calculez $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{Var}(S)$.

8.2. Trouvez le k optimal dans la stratégie **b)**.

8.3. Comparez les stratégies **a)** et **b)**.

9. Soit N le nombre de truites, inconnu, qui se trouvent dans un certain lac. On réalise l'expérience qui suit : on prélève 100 truites du lac puis, après les avoir marquées, on les remet à l'eau. Plus tard on repêche 200 truites du lac et on observe le nombre X de truites marquées dans ce second prélèvement.

a. Écrire la loi de probabilité de X.

b. Écrire X comme somme de $v.a$ et en déduire $\mathbb{E}(X)$. Peut-on calculer aussi simplement $\mathrm{Var}(X)$.

10. Une compagnie pétrolière effectue des forages. On suppose que chaque puits creusé a une chance sur 5 de donner du pétrole. On désigne par X le nombre de puits qui doivent être creusés pour obtenir enfin un succès.

a. Quelle est la probabilité que $X = k$?

b. Calculez $\mathbb{E}(X)$.

c. Calculez $\mathbb{P}(X > k)$. En déduire $P(X > b \mid X > a)$.

11. Soit X une $v.a$ continue sur $[0, 1]$ de densité

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0,$$

où

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad \text{où} \quad \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1).$$

a. Déduire de la définition d'une densité, l'expression de $\beta(a, b)$.

b. Calculez $\mathbb{E}(X)$.