CORRIGÉ

1. Le résultat de cette expérience aléatoire est la somme des 3 nombres obtenus. Ω est l'ensemble des résultats possibles :

$$\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

2. $A = \big\{\text{tirer un carreau}\big\}$, $B = \big\{\text{tirer une dame}\big\}$. On suppose l'équiprobabilité des figures : $\mathbb{P}\big(A\big) = \frac{8}{32}$ et $\mathbb{P}\big(B\big) = \frac{4}{32}$.

Nous avons l'égalité de Poincaré

$$\mathbb{P}\big(A \cup B\big) = \mathbb{P}\big(A\big) + \mathbb{P}\big(B\big) - \mathbb{P}\big(A \cap B\big)$$

A et B sont compatibles car : $A \cap B = \big\{\text{tirer la dame de carreau}\big\}$ et $\mathbb{P}\big(A \cap B\big) = \frac{1}{32} \neq 0$. On déduit de la formule de Poicaré :

$$\mathbb{P}\big(A \cup B\big) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}.$$

3. On note $A = \big\{X\text{accepte le projet}\big\}$ et $B = \big\{Y\text{accepte le projet}\big\}$. Nous avons $\mathbb{P}\big(A\big) = 0.5$, $\mathbb{P}\big(\bar{B}\big) = 0.6$ et $\mathbb{P}\big(\bar{A} \cup \bar{B}\big) = 0.7$.

a. $\mathbb{P}\big(A \cap B\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\bar{A} \cup \bar{B}\big) = 0.3$

b. $\mathbb{P}\big(A \cap \bar{B}\big) = \mathbb{P}\big(A\big) - \mathbb{P}\big(A \cap B\big) = 0.5 - 0.3 = 0.2$

c. $\mathbb{P}\big(A \cup B\big) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.3 = 0.6$

4.

	Gain		Perte	
2 coups	PP	p^2	FF	q^2
3 coups	FPP	qp^2	PFF	q^2
...				
$2n$ coups	$\underbrace{PFPF\ldots PF}_{2(n-1)}PP$	$(pq)^{n-1}p^2$	$\underbrace{FPFP\ldots FP}_{2(n-1)}FF$	$(pq)^{n-1}q^2$
$2n+1$ coups	$F\underbrace{PFPF\ldots PF}_{2(n-1)}PP$	$q(pq)^{n-1}p^2$	$P\underbrace{FPFP\ldots FP}_{2(n-1)}FF$	$p(pq)^{n-1}q^2$

Probabilité de gagner en $2n$ ou $2n+1$ coups :

$$\mathbb{P}\big(A_n \cup B_n\big) = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) = (1+q)(pq)^{n-1}p^2$$

Probabilité de gagner : $\big\{\text{gagner}\big\} = \cup_{n=1}^{\infty}\big\{A_n \cup B_n\big\}$, des événements incompatibles. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\text{gagner}\big) &= \sum_{n=1}^{\infty}(1+q)(pq)^{n-1}p^2 \\
&= (1+q)p^2\sum_{n=1}^{\infty}(pq)^{n-1} \\
&= \frac{(1+q)p^2}{1-pq} \quad \text{car} \quad 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\text{perdre}\big) &= \sum_{n=1}^{\infty}(1+p)q^2(pq)^{n-1} \\
&= \frac{(1+p)q^2}{1-pq},
\end{aligned}$$

On vérifie que $\mathbb{P}\big(\text{gagner}\big) + \mathbb{P}\big(\text{perdre}\big) = 1$

5. Nous avons $\mathbb{P}(d \mid H) = \frac{5}{100}$ et $\mathbb{P}(d \mid F) = \frac{25}{10000}$

$$\mathbb{P}(H \mid d) = \frac{\mathbb{P}(d \mid H)\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(d \mid H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(d \mid F)\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{5}{100}0.5}{\frac{5}{100}0.5 + \frac{25}{10000}0.5} = \frac{500}{525} = \frac{20}{21}$$

6.

	AA u		Aa $2v$		aa w	
AA u	AA	1	AA	1/2	AA	0
	Aa	0	Aa	1/2	Aa	1
	aa	0	aa	0	aa	0
Aa $2v$	AA	1/2	AA	1/4	AA	0
	Aa	1/2	Aa	1/2	Aa	1/2
	aa	0	aa	1/4	aa	1/2
aa w	AA	0	AA	0	AA	0
	Aa	1	Aa	1/2	Aa	0
	aa	0	aa	1/2	aa	1

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(AA) &= \mathbb{P}\big(AA \text{ et parents}(AA, AA)\big) + \mathbb{P}\big(AA \text{ et parents}(AA, Aa)\big) \dots \\ &= \mathbb{P}\big(AA \mid \text{parents}(AA, AA)\big)\mathbb{P}\big(\text{parents}(AA, AA)\big) + \mathbb{P}\big(AA \mid \text{parents}(AA, Aa)\big)\mathbb{P}\big(\text{parents}(AA, AA)\big) + \dots\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(AA) = u^2 + 2uv + v^2 = (u+v)^2$
$\mathbb{P}(aa) = v^2 + 2vw + w^2 = (v+w)^2$
$\mathbb{P}(Aa) = 2uv + 2uw + 2v^2 = 2(u+v)(v+w)$

7. a. À partir des probabalités conditionnelles de type $\mathbb{P}(E_1E_2|D)$ données dans le tableau de l'énoncé, on déduit les probabilités conditionnelles de type $\mathbb{P}(E|D)$. Nous avons par exemple pour $\mathbb{P}(E_1^-|D_1)$

$$\mathbb{P}(E_1^- \mid D_1) = \mathbb{P}\big(E_1^- \cap (E_2^- \cup E_2^+) \mid D_1\big) = \mathbb{P}(E_1^- \cap E_2^- \mid D_1) + \mathbb{P}(E_1^- \cap E_2^+ \mid D_1).$$

De la même manière, on calcul toutes les autres probabilités conditionnelles du même type et on obtient les deux tableaux suivants

	$E1^-$	$E1^+$
D1	0.4	0.6
D2	0.6	0.4

	$E2^-$	$E2^+$
D1	0.46	0.54
D2	0.39	0.61

Pour calculer les probabiltés conditionnelles $\mathbb{P}(D \mid E)$, nous avons la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(D1 \mid E1^-) = \frac{\mathbb{P}(E1^- \mid D1)\mathbb{P}(D1)}{\mathbb{P}(E1^- \mid D1)\mathbb{P}(D1) + \mathbb{P}(E1^- \mid D2)\mathbb{P}(D2)}$$

Il suffit d'appliquer cette formule, des deux tableaux précédents et de l'équiprobabilité de D_1 et D_2 ($\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_2) = 0.5$). Ainsi nous avons

$$\mathbb{P}(D1 \mid E1^-) = 0.4$$
$$\mathbb{P}(D1 \mid E2^-) = \frac{0.46}{0.85}$$
$$\mathbb{P}(D1 \mid E2^+) = \frac{0.54}{1.15}$$

b. Calculons les probabilités du type $\mathbb{P}(D \mid E_1E_2)$, nous disposons des probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(E_1E_2 \mid D)$. Il suffit d'appliquer, par exemple, pour $\mathbb{P}(D_1 \mid E_1^-E_2^-)$, la formule

$$\mathbb{P}(D_1 \mid E_1^-E_2^-) = \frac{\mathbb{P}(E_1^-E_2^- \mid D_1)\mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(E_1^-E_2^- \mid D_1)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(E_1^-E_2^- \mid D_2)\mathbb{P}(D_2)}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(D_1 \mid E_1^- E_2^-\big) &= 0.4\\ \mathbb{P}\big(D_1 \mid E_1^- E_2^+\big) &= 0.4\\ \mathbb{P}\big(D_1 \mid E_1^+ E_2^-\big) &= 0.6\\ \mathbb{P}\big(D_1 \mid E_1^+ E_2^+\big) &= 0.6\end{aligned}$$

On remarque que les probablités conditionnelles $\mathbb{P}\big(D \mid E_1\big)$ et $\mathbb{P}\big(D \mid E_1E_2\big)$ sont les mêmes, on déduit que E_2 n'apporte rien une fois connus les résultats de $E1$. On déduit aussi que D et E_2 sont indépendants si E_1 connu.

8. On s'intéresse à la stratégie **b.**. Dans une série de k sujets, le nombre de tests nécessaire est une v.a. S_k qui prend les valeurs 1 et $k+1$ dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(S_k = 1) = q^k$ (tous les sujets négatifs) et $\mathbb{P}(S_k = k+1) = 1 - q^k$ (au moins un sujet positif).

1. Nous avons

$$\mathbb{E}\big(S_k\big) = q^k + (k+1)(1-q^k) = k(1-q^k) + 1,$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,\big(S_k\big) &= \mathbb{E}\big(S_k^2\big) - \mathbb{E}^2\big(S_k\big)\\ &= q^k + (k+1)^2(1-q^k) - \big(k(1-q^k)+1\big)^2\\ &= k^2q^k(1-q^k)\end{aligned}$$

Notons qu'on peut déduire $\mathbb{E}\big(S_k\big)$ et $\mathrm{Var}\,\big(S_k\big)$ à partir de la transformation suivante

$$S_k = 1 + kX \quad \text{où} \quad X \sim \text{Bernoulli}(1-q^k).$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(S_k) = 1 + k\mathbb{E}(X) = 1 + k(1-q^k) \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(S_k) = k^2\,\mathrm{Var}(X) = k^2(1-q^k)q^k.$$

S et la somme de $\frac{N}{k}$ variables S_k indépendantes

$$\mathbb{E}(S) = \frac{N}{k}N(1-q^k) \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(S) = k^2\,\mathrm{Var}(X) = Nk(1-q^k)q^k.$$

2. Le k optimal est celui qui minimise $\mathbb{E}(S)$. Si on note $f(k) = E(S)$, nous avons

$$f(k) = \frac{N}{k} + N(1-q^k) = \frac{N}{k} + N(1-\exp(k\ln(q))),$$

et

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} = -\frac{N}{k^2} - N\ln(q)q^k$$

qui s'annule pour k solution de l'équation $q^k\ln(q) + \frac{1}{k^2} = 0$.

2. Il faut comparer $\min\mathbb{E}(S)$ à N numériquement.

9. Si l'on cherche à estimer N, cette expérience est la mise en oeuvre d'une méthode dite de *"capture-recapture"*.

a. $\mathbb{P}\big(X = k\big) = \dfrac{C_{n_1}^k C_{N-n_1}^{n_2-k}}{C_N^{n_2}}$ où $n_1 = 100$ et $n_2 = 200$ avec $\max(0, 300-N) \leq X \leq 100$.

$X \sim \mathcal{H}\big(N, n_1 = 200, p = \dfrac{100}{N}\big)$ loi hypergéométrique.

b. $X = \sum_{i=1}^{n_2} Y_i$ où $Y_i \sim \mathcal{B}(p)$, nous avons $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_i = 0) = 1-p$. Notons ici que la différence avec une loi binomiale, c'est que le tirage se fait *"sans remise"* et que les variables de Bernoulli sont dépendantes. $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n_2}\mathbb{E}(Y_i) = \sum_i^{n_2} p = \dfrac{n_2n_1}{N}$.

La dépendance des Y_i ne nous permet pas d'utiliser la propriété d'une variance d'une somme de v.a. indépendantes.

10. a. $\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ loi géométrique de paramètre p.

b.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k\geq 1} kpq^{k-1} \\
&= p\sum_{k\geq 1} kpq^{k-1} = p\sum_{k\geq 1} \big(q^k\big)' \\
&= p\big(q\sum_{k\geq 1} q^{k-1}\big)' = p\big(q\frac{1}{1-q}\big)' = \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

c. $\mathbb{P}(X > k) = q^k$, l'événement $\{X > k\}$se produit si et seulement si les k premiers essais ont conduit à des échecs. En déduire

$$P(X > b \mid X > a) = \frac{\mathbb{P}(X > b \text{ et } X > a)}{\mathbb{P}(X > a)} = \frac{\mathbb{P}(X > b)}{\mathbb{P}(X > a)} = \frac{q^b}{q^a} = q^{b-a}.$$

11. Soit X une $v.a$ continue sur $[0,1]$ de densité

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0,$$

où

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad \text{où} \quad \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1).$$

a. $\int_0^1 f(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = 1 \Longrightarrow \beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x.$

b. $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\beta(a,b)} \int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x = \dfrac{\beta(a+1,b)}{\beta(a,b)} = \dfrac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+b+1)} = \dfrac{a}{a+b}.$