

Introduction à bootstrap

M2R santé publique

Novembre 2025

Principe

- ▶ On s'intéresse au paramètre d'une loi de probabilité F_θ , f_θ , $f(x; \theta)$ ou \mathbb{P}_θ
- ▶ On ne possède qu'un **échantillon** X_1, \dots, X_n issu de F_θ
- ▶ $\hat{\theta} = t(X_1, \dots, X_n)$ est un estimateur de θ

Principe

- ▶ On s'intéresse au paramètre d'une loi de probabilité F_θ , f_θ , $f(x; \theta)$ ou \mathbb{P}_θ
- ▶ On ne possède qu'un **échantillon** X_1, \dots, X_n issu de F_θ
- ▶ $\hat{\theta} = t(X_1, \dots, X_n)$ est un estimateur de θ

Plusieurs **questions** liées à la distribution de $\hat{\theta}$

- ▶ **Biais** de l'estimateur $\hat{\theta}$
- ▶ **Variance** de $\hat{\theta}$ (sa précision)
- ▶ **Intervalle de confiance** pour θ

Simuler suivant F_θ ou f_θ

Exemple : supposons que $X \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ où $\theta = 2$

```
set.seed(123)
# simuler un jeu de données de 100 individus
n <- 100
x <- rnorm(n, mean=2, sd=1)

# simuler N jeux de données
N <- 10000
X <- matrix(rnorm(N*n, 2, 1), N, n)
t <- rowMeans(X)
summary(t)
```

Le résultat

```
set.seed(123)
# simuler un jeu de données de 100 individus
n <- 100
x <- rnorm(n, mean=2, sd=1)

# simuler N jeux de données
N <- 10000
X <- matrix(rnorm(N*n,2,1), N,n)
t <- rowMeans(X)
summary(t)
```

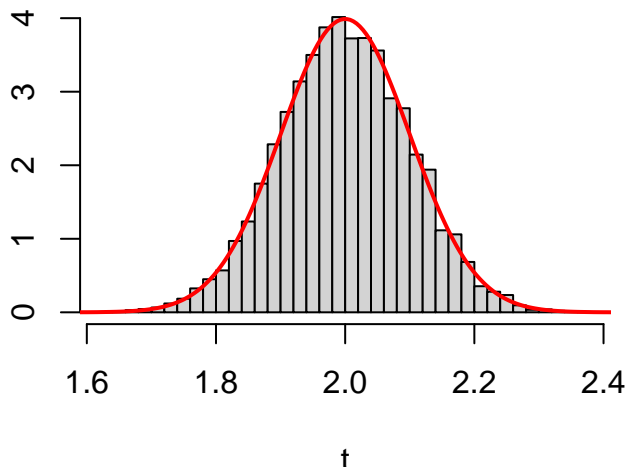
Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
1.623	1.932	1.999	1.999	2.068	2.376

Le code pour tracer les sorties

```
hist(t, nclass=40, freq=F, ylab="", main="")
xx <- seq(1.5, 2.5, le=200)
et <- 1/sqrt(n)
points(xx, dnorm(xx, 2, et),
       type="l", lwd = 2, col="red")
```

La figure

```
hist(t, nclass=40, freq=F, ylab="",main="")  
xx <- seq(1.5, 2.5, le=200)  
et <- 1/sqrt(n)  
points(xx, dnorm(xx, 2, et), type="l", lwd = 2,  
       col="red")
```



Une petite parenthèse : générateur de nombres aléatoires

La loi de base que l'on simule est la loi uniforme sur $[0, 1]$, un tel générateur est inclus dans tous les langages de programmation et dans tous les logiciels.

Une petite parenthèse : générateur de nombres aléatoires

La loi de base que l'on simule est la loi uniforme sur $[0, 1]$, un tel générateur est inclus dans tous les langages de programmation et dans tous les logiciels.

- ▶ La méthode de congruence linéaire (D.H Lehmer-Lucas 1948),

$$g_{n+1} = ag_n + b \mod m$$

où a, b, m et g_0 sont à choisir initialement.

- ▶ Ce générateur fabrique une suite d'entiers aléatoires allant de 0 à $m - 1$.
- ▶ La suite $g_n/m - 1$ fournit des nombres sur l'intervalle $[0, 1]$.
- ▶ La suite ainsi produite possède une période inférieure ou égale à m .

Générateur RANDU des années 80 et 90

- ▶ Un générateur de ce type, nommé RANDU, fut exploité pendant des années dans toutes sortes de logiciels.
- ▶ Les paramètres de RANDU sont $m = 2^{35}$, $a = 3125$, $b = 1$ et $g_0 = 71$ et sa période est de 2^{35}

Inversion de la fonction de répartition

On veut générer des nombres aléatoires suivant une loi donnée par sa fonction de répartition F . Comment procéder ?

Inversion de la fonction de répartition

On veut générer des nombres aléatoires suivant une loi donnée par sa fonction de répartition F . Comment procéder ?

- ▶ Générer U_1, U_2, \dots, U_n suivant une loi uniforme $\mathcal{U}(0, 1)$.
- ▶ On forme

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) = (F^{-1}(U_1), F^{-1}(U_2), \dots, F^{-1}(U_n))$$

Inversion de la fonction de répartition

On va s'intéresser à la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda = 2$

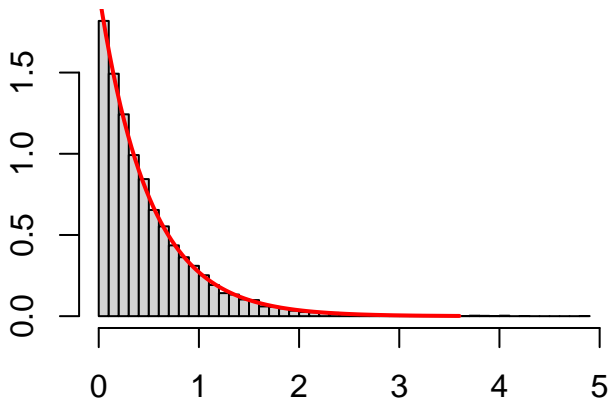
- ▶ Rappelons que $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- ▶ Simuler 100 réalisations de la loi $\mathcal{E}(2)$
- ▶ Tracer sur la même figure l'histogramme des réalisations ainsi que la vraie densité de probabilité de la loi $\mathcal{E}(2)$

Inversion de la fonction de répartition

```
set.seed(123)
x.u <- runif(1000)
x.e <- qexp(x.u, rate = 2)
hist(x.e, nclass=30, freq = F, main="", xlab="")
x<-seq(0,3.6, le=100)
points(x, dexp(x, 2), type="l", lwd = 2, col = "red")
```

Sortie

```
set.seed(123)
x.u <- runif(10000)
x.e <- qexp(x.u, rate = 2)
hist(x.e, nclass=40, freq = F, main="", ylab="")
x<-seq(0,3.6, le=100)
points(x, dexp(x, 2), type="l", lwd = 2, col = "red")
```



Simuler une loi normale : **Box-Muller**

Soit, U et V deux variables aléatoires **uniformes** sur $[0, 1]$ indépendantes, la variable

$$X = \cos(2\pi U) \sqrt{(-2 \log(V))}$$

suit une loi **normale** $\mathcal{N}(0, 1)$.

Alternative : rééchantillonnage

F_θ est en général inconnue !

Alternative : rééchantillonnage

F_θ est en général inconnue !

Le **bootstrap** consiste donc à faire une simulation à partir de la loi empirique F_n observée (i.e. l'échantillon) au lieu de la vraie loi F_θ , qui est inconnue.

Alternative : rééchantillonnage

F_θ est en général inconnue !

Le **bootstrap** consiste donc à faire une simulation à partir de la loi empirique F_n observée (i.e. l'échantillon) au lieu de la vraie loi F_θ , qui est inconnue.

- ▶ On tire B échantillons $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_B^*$ où chaque \mathbf{x}_b^* est constitué en tirant avec remise n valeurs de l'échantillon X_1, \dots, X_n .
- ▶ On appelle chaque tirage d'un \mathbf{x}_b^* un **bootstrap**

La fonction sample de R

- Sous R, taper :

```
?sample
```

- On propose de faire un premier test avec cette fonction

```
set.seed(123)
# 100 réalisations d'une gaussienne N(10,10)
x <- rnorm(100, mean = 10, sd = 10)
# faire un tirage avec remise de taille 100
x.boot <- sample(?, ?, ?) ## attention remplacer les ?
```

Un jeu de données

Exemple : jeu de données de taille $n = 47$ observations de la durée de rémission d'une leucémie en semaines.

```
## lecture du jeu de données leucemie  
setwd("~/Dropbox/enseignements/bootstrap")  
rm(list = ls())  
## je vais lire le fichier leucemie.txt  
load("~/Dropbox/enseignements/bootstrap/leucemie.rda")
```

Exemple : estimation de la médiane

- ▶ On s'intéresse à la médiane dans le jeu de données de leucemie, ici la statistique $t(\mathbf{x})$ est la médiane empirique de l'échantillon $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_n)$.
- ▶ Proposer une procédure qui génère $B = 1000$ échantillons bootstrap à partir du jeu de données leucemie.
- ▶ Calculer l'estimateur bootstrap du biais donné par

$$\widehat{\text{biais}} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \text{median}(\mathbf{x}_b^*) - \text{median}(X_1, \dots, X_n)$$

- ▶ Estimer la variance et l'écart type de l'estimateur de la médiane.

Le package boot de R

On souhaite ici, voir ce que fait le package boot et le comparer à nos résultats sur le jeux de données leucémie.

```
set.seed(123)
boot.median<-function(y,i){z<-median(y[i]); return(z)}
boot.obj1<-boot(data = y,
                statistic = boot.median,
                R = B)
names(boot.obj1)
boot.obj1
```

Bilan

- ▶ La variabilité de l'échantillonnage dans la population se reflète dans la variabilité de l'échantillonnage dans la sous-population y .
- ▶ Nous avons utilisé la variance du vecteur *boot* pour estimer la variance de *median*(y).
- ▶ Il est clair que ce que nous venons de faire pour la médiane, nous pouvons le répéter pour estimer la variance d'autres statistiques.

Intervalles de confiance : jeu de données CommuteAtlanta

- ▶ Charger le package Lock5Data et le jeu de données CommuteAtlanta
- ▶ Se faire une idée du jeu de données : sa taille, les noms des variables etc ...
- ▶ Générer $B = 1000$ échantillons bootstrap sans faire appel au package boot de la variable *trajet* (Distance)
- ▶ Calculer l'écart type du trajet moyen
- ▶ Construire un intervalle de confiance du trajet moyen