

Calcul matriciel

`masedki.github.io`

Université Paris-Sud

18 septembre 2022

Contenu

Qu'est-ce qu'une matrice à coefficients réels ?

Une matrice se présente sous la forme d'un tableau rectangulaire de $n \times p$ nombres (par exemple réels ou complexes), où n et p désignent les nombres de lignes et de colonnes respectivement.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p-1} & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,j} & \dots & a_{n-1,p-1} & a_{n-1,p} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

- ▶ $\mathbf{A}_{n \times p}$ signifie que \mathbf{A} a pour dimension $n \times p$;
- ▶ Les $a_{i,j}$ (notés souvent $[\mathbf{A}]_{ij}$ ou $[a_{ij}]$) sont les coefficients (éléments ou entrées) de la matrice.

Exemples et cas particuliers

- ▶ Tout nombre réel est une matrice de dimensions 1×1 .
- ▶ Tout vecteur ligne de p réels est une matrice $1 \times p$.
- ▶ Tout vecteur colonne de n lignes est une matrice $n \times 1$.
- ▶ Les pressions systolique et diastolique ont été mesurées sur 10 sujets

$$\begin{pmatrix} 180 & 112 \\ 152 & 82 \\ 167 & 80 \\ 154 & 106 \\ 148 & 80 \\ 164 & 98 \\ 156 & 98 \\ 171 & 96 \\ 150 & 106 \\ 160 & 111 \end{pmatrix}$$

Un peu de vocabulaire

Une matrice est dite carrée lorsque le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes

- ▶ Matrices carrées diagonales : $a_{i,j} = 0$ dès que $i \neq j$.
- ▶ Matrice unité d'ordre n : $\mathbf{I}_n = \text{diag}(1, \dots, 1)$.
- ▶ Matrice nulle d'ordre n : $a_{i,j} = 0$.
- ▶ Matrices carrées symétriques : $a_{i,j} = a_{j,i}$.
- ▶ Matrices anti-symétriques : $a_{i,j} = -a_{j,i}$.
- ▶ Matrices triangulaires inférieures : $a_{i,j} = 0$ si $j > i$.
- ▶ Matrices triangulaires supérieures : $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.

- ▶ Les éléments diagonaux d'une matrice anti-symétrique sont tous nuls : $a_{i,i} = 0$

Exemple : matrice de covariance

Soit (X_1, \dots, X_p) p variables aléatoires réelles. Notons

► $\sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$, la covariance du couple aléatoire (X_i, X_j) .

La matrice de covariance du p -uplet (X^1, \dots, X^p) est la matrice carrée symétrique donnée par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

Si les variables sont mutuellement indépendantes, alors $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{ii})$.

☞ La réciproque est fausse

Exemple : matrice de corrélation

Notons

- ▶ $\rho_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{\sigma_{ii}} = 1$.
- ▶ $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}$, est le coefficient de corrélation du couple (X_i, X_j) .

La matrice de corrélation du p -uplet (X^1, \dots, X^p) est la matrice carrée symétrique donnée par

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Si les variables sont mutuellement indépendantes, alors

$$\Omega = \text{diag}(1, \dots, 1) = \mathbf{I}_p.$$

☞ La réciproque est fausse.

Matrices définies par blocs

Toute matrice obtenue d'une matrice \mathbf{A} en ne gardant que certaines lignes et colonnes est une *sous-matrice* de \mathbf{A} .

► Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Donner 4 sous-matrices de \mathbf{A}

de sorte que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{pmatrix}$. On dit alors que \mathbf{A} est définie en blocs.

► Mettre une matrice sous-forme de blocs c'est l'écrire comme une juxtaposition de sous-matrices. Il faut bien entendu que les dimensions des blocs soient compatibles.

Nous allons voir que les blocs \mathbf{A}_{ij} peuvent être utilisés comme les éléments scalaire a_{ij} .

Plan

Addition et soustraction

☞ Si \mathbf{A} et \mathbf{B} sont deux matrices $m \times n$, la *somme* de \mathbf{A} et \mathbf{B} est la matrice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ de dimension $m \times n$ obtenue par l'addition *élément à élément* des entrées des deux matrices

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{B}]_{ij} \quad \text{pour tout couple } i, j$$

Addition et soustraction

☞ Si \mathbf{A} et \mathbf{B} sont deux matrices $m \times n$, la **somme** de \mathbf{A} et \mathbf{B} est la matrice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ de dimension $m \times n$ obtenue par l'addition **élément à élément** des entrées des deux matrices

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{B}]_{ij} \quad \text{pour tout couple } i, j$$

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} -2 & x & 3 \\ z+3 & 4 & -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1-x & -2 \\ -3 & 4+x & 4+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ z & 8+x & 4 \end{pmatrix}$$

Addition et soustraction (suite)

- ▶ La matrice $(-\mathbf{A})$ dite *inverse additive* est donnée par $-\mathbf{A} = [-a]_{ij}$
- ▶ La différence $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ est $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ et donc

$$[\mathbf{A} - \mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} - [\mathbf{B}]_{ij} \quad \text{pour tout couple } i, j$$

Addition et soustraction (suite)

- ▶ La matrice $(-\mathbf{A})$ dite *inverse additive* est donnée par $-\mathbf{A} = [-a]_{ij}$
- ▶ La différence $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ est $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ et donc

$$[\mathbf{A} - \mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} - [\mathbf{B}]_{ij} \quad \text{pour tout couple } i, j$$

☞ Soient \mathbf{A}, \mathbf{B} et \mathbf{C} des matrices $m \times n$

Stabilité pour l'addition	$\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est aussi une matrice $m \times n$
Associativité	$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
Commutativité	$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
Élément neutre	$\mathbf{A} + \mathbf{0}_{m \times n} = \mathbf{A}$
L'inverse pour l'addition	$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}_{m \times n}$

Multiplication par un scalaire

☞ Le produit d'un scalaire α par une matrice \mathbf{A} , noté $\alpha\mathbf{A}$ est donné par la multiplication des éléments de \mathbf{A} par α . Ainsi $[\alpha\mathbf{A}]_{ij} = \alpha[\mathbf{A}]_{ij}$ pour tout couple i, j .

Multiplication par un scalaire

☞ Le produit d'un scalaire α par une matrice \mathbf{A} , noté $\alpha\mathbf{A}$ est donné par la multiplication des éléments de \mathbf{A} par α . Ainsi $[\alpha\mathbf{A}]_{ij} = \alpha[\mathbf{A}]_{ij}$ pour tout couple i, j .

Exemples :

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire (suite)

☞ Soient \mathbf{A} et \mathbf{B} deux matrices $m \times n$ et α et β deux scalaires

Stabilité	$\alpha \mathbf{A}$ est aussi une matrice $m \times n$
Associativité	$(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta\mathbf{A})$
Distributivité	$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$
Distributivité	$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

Multiplication par un scalaire (suite)

☞ Soient \mathbf{A} et \mathbf{B} deux matrices $m \times n$ et α et β deux scalaires

Stabilité	$\alpha\mathbf{A}$ est aussi une matrice $m \times n$
Associativité	$(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta\mathbf{A})$
Distributivité	$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$
Distributivité	$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

On dit que les opérations $+$, $-$ et la multiplication par un scalaire dérivent de l'arithmétique scalaire

Transposition

La **transposée** d'une matrice $\mathbf{A}_{m \times n}$ est une matrice $n \times m$ notée \mathbf{A}^\top obtenue en interchangeant les lignes et les colonnes. Plus précisément, si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, alors $[\mathbf{A}^\top]_{ij} = a_{ji}$. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Il paraît évident que pour toute matrice, on a

$$(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}.$$

Deux propriétés : soient \mathbf{A} et \mathbf{B} deux matrices de tailles égales

- ▶ $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$
- ▶ $(\alpha \mathbf{A})^\top = \alpha \mathbf{A}^\top$

Symétrie

Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ une matrice carrée



- ▶ \mathbf{A} est dite *symétrique* si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$, i.e., si $a_{ij} = a_{ji}$.
- ▶ \mathbf{A} est dite *antisymétrique* lorsque $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$, i.e., si $a_{ij} = -a_{ji}$.

Symétrie

Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ une matrice carrée



- ▶ \mathbf{A} est dite *symétrique* si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$, i.e., si $a_{ij} = a_{ji}$.
- ▶ \mathbf{A} est dite *antisymétrique* lorsque $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$, i.e., si $a_{ij} = -a_{ji}$.

Exercice : Soit \mathbf{A} une matrice carrée, montrer que

- ▶ $\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top$ est symétrique et $\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top$ est antisymétrique.
- ▶ Il existe une unique façon d'écrire \mathbf{A} comme la somme d'une matrice symétrique et une matrice antisymétrique.

Plan

Application linéaire

Une *application linéaire* est un type particulier d'applications (fonctions) caractérisé par les deux propriétés suivantes

☞ Soient \mathcal{D} et \mathcal{R} deux ensembles. Une application de \mathcal{D} dans \mathcal{R} est dite *linéaire* si

► $f(x + y) = f(x) + f(y)$

► $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

pour tout x et y dans \mathcal{D} et α scalaire.

Application linéaire

Une **application linéaire** est un type particulier d'applications (fonctions) caractérisé par les deux propriétés suivantes

☞ Soient \mathcal{D} et \mathcal{R} deux ensembles. Une application de \mathcal{D} dans \mathcal{R} est dite **linéaire** si

- ▶ $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- ▶ $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

pour tout x et y dans \mathcal{D} et α scalaire.

- ▶ Une application linéaire simple est $f(x) = \alpha x$, dont la graphe dans \mathbb{R}^2 est une droite qui passe par l'origine.
- ▶ Toutes les transformations dites **affines** de la forme $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \beta$ sont linéaires.
- ▶ On en trouve partout des applications linéaires, *i.e.*, les applications

$$D_x(f) = \frac{df}{dx} \quad \text{et} \quad I(f) = \int f(x) dx$$

sont linéaires.

Un exemple : un système linéaire

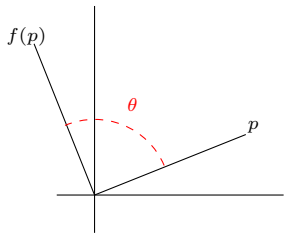
Soit le système linéaire

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & u_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & u_2, \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & u_m, \end{array}$$

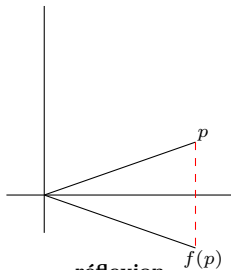
L'application $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$ qui envoie $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ à

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ est linéaire.

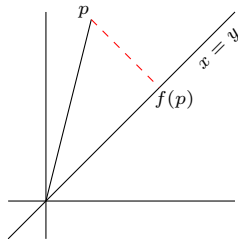
Un peu de visualisation



rotation

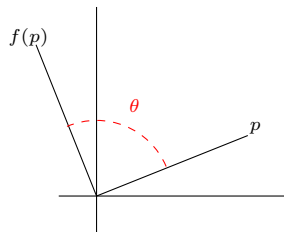


réflexion

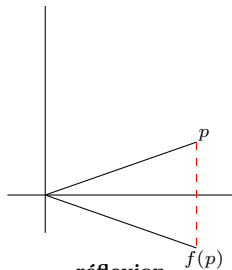


projection

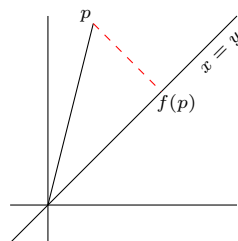
Un peu de visualisation



rotation



réflexion



projection

Quelles sont les matrices associées à ces trois applications linéaires ?

Réponse

On pose $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, et $f(\mathbf{x}) = \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ Nous avons les trois situations suivantes

- ▶ La rotation

$$\begin{aligned} u_1 &= (\cos \theta)x_1 - (\sin \theta)x_2 \\ u_2 &= (\sin \theta)x_1 + (\cos \theta)x_2. \end{aligned}$$

- ▶ La réflexion $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$.
- ▶ La projection $f(\mathbf{x}) = \frac{x_1+x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Composer des applications linéaires

Soient

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Cx_1 + Dx_2 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse (comme Cayley 1855) à la composition des deux applications linéaires f et g pour obtenir l'application

$$h(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})) = f \begin{pmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Cx_1 + Dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (aA + bC)x_1 + (aB + bD)x_2 \\ (cA + dC)x_1 + (cB + dD)x_2 \end{pmatrix}$$

☞ On obtient la matrice associée à h en faisant le produit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}$$

Produit matriciel

- ▶ Les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont dites *compatibles* pour la multiplication dans l'ordre \mathbf{AB} lorsque le nombre de colonnes de \mathbf{A} est égal au nombre de lignes de \mathbf{B} i.e., \mathbf{A} est $m \times p$ et \mathbf{B} est $p \times n$.
- ▶ Soient $\mathbf{A}_{m \times p} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B}_{p \times n} = [b_{ij}]$ deux matrices compatibles, le *produit matriciel* \mathbf{AB} est donné par une matrice $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ dont l'entrée (i, j) est le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de \mathbf{A} et la $j^{\text{ème}}$ colonne de \mathbf{B} . Ainsi

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = \mathbf{A}_{i*} \mathbf{B}_{*j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}.$$

Produit matriciel

- ▶ Les matrices **A** et **B** sont dites *compatibles* pour la multiplication dans l'ordre **AB** lorsque le nombre de colonnes de **A** est égal au nombre de lignes de **B** i.e., **A** est $m \times p$ et **B** est $p \times n$.
- ▶ Soient $\mathbf{A}_{m \times p} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B}_{p \times n} = [b_{ij}]$ deux matrices compatibles, le *produit matriciel* **AB** est donné par une matrice $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ dont l'entrée (i, j) est le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de **A** et la $j^{\text{ème}}$ colonne de **B**. Ainsi

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = \mathbf{A}_{i*} \mathbf{B}_{*j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

Produit matriciel

- ▶ Les matrices **A** et **B** sont dites *compatibles* pour la multiplication dans l'ordre **AB** lorsque le nombre de colonnes de **A** est égal au nombre de lignes de **B** i.e., **A** est $m \times p$ et **B** est $p \times n$.
- ▶ Soient $\mathbf{A}_{m \times p} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B}_{p \times n} = [b_{ij}]$ deux matrices compatibles, le *produit matriciel* **AB** est donné par une matrice $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ dont l'entrée (i, j) est le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de **A** et la $j^{\text{ème}}$ colonne de **B**. Ainsi

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = \mathbf{A}_{i*} \mathbf{B}_{*j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{AB}]_{23} = \mathbf{A}_{2*} \mathbf{B}_{*3} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = \sum_{k=1}^3 a_{2k}b_{k3}.$$

Un exemple + non-commutativité

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Un exemple + non-commutativité

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -7 & 4 \\ -8 & 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Un exemple + non-commutativité

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -7 & 4 \\ -8 & 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soient $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

Un exemple + non-commutativité

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -7 & 4 \\ -8 & 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soient $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

nous avons

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Un exemple + non-commutativité

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -7 & 4 \\ -8 & 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soient $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

nous avons

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$



Le produit matriciel est une opération **non-commutative**

Quelques différences avec le monde scalaire !

- Rappelons que dans le cas **scalaire**, nous avons

$$\alpha\beta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 0, \quad \text{ou} \quad \beta = 0.$$

Alors que dans l'exemple précédent,

$$\mathbf{AB} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{B} \neq 0.$$

Quelques différences avec le monde scalaire !

- Rappelons que dans le cas **scalaire**, nous avons

$$\alpha\beta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 0, \quad \text{ou} \quad \beta = 0.$$

Alors que dans l'exemple précédent,

$$\mathbf{AB} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{B} \neq 0.$$

- Nous avons aussi dans le cas **scalaire**

$$\alpha\beta = \alpha\gamma \quad \text{et} \quad \alpha \neq 0 \implies \beta = \gamma.$$

Alors que si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{AC} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} \neq 0, \quad \text{mais} \quad \mathbf{B} \neq \mathbf{C}$$

Lignes et colonnes d'un produit

Soient $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ est $m \times p$ et $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ est $p \times n$

► $[\mathbf{AB}]_{i*} = \mathbf{A}_{i*} \mathbf{B} \quad [(i^{\text{ème}} \text{ ligne de } \mathbf{AB}) = (i^{\text{ème}} \text{ ligne de } \mathbf{A}) \times \mathbf{B}]$

► $[\mathbf{AB}]_{*j} = \mathbf{AB}_{*j} \quad [(j^{\text{ème}} \text{ col. de } \mathbf{AB}) = \mathbf{A} \times (j^{\text{ème}} \text{ col. de } \mathbf{B})]$

► $[\mathbf{AB}]_{i*} = a_{i1} \mathbf{B}_{1*} + a_{i2} \mathbf{B}_{2*} + \cdots + a_{ip} \mathbf{B}_{p*} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \mathbf{B}_{k*}$

► $[\mathbf{AB}]_{*j} = \mathbf{A}_{*1} b_{1j} + \mathbf{A}_{*2} b_{2j} + \cdots + \mathbf{A}_{*p} b_{pj} = \sum_{k=1}^p \mathbf{A}_{*k} b_{kj}$

Lignes et colonnes d'un produit

Soient $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ est $m \times p$ et $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ est $p \times n$

► $[\mathbf{AB}]_{i*} = \mathbf{A}_{i*} \mathbf{B} \quad [(i^{\text{ème}} \text{ ligne de } \mathbf{AB}) = (i^{\text{ème}} \text{ ligne de } \mathbf{A}) \times \mathbf{B}]$

► $[\mathbf{AB}]_{*j} = \mathbf{AB}_{*j} \quad [(j^{\text{ème}} \text{ col. de } \mathbf{AB}) = \mathbf{A} \times (j^{\text{ème}} \text{ col. de } \mathbf{B})]$

► $[\mathbf{AB}]_{i*} = a_{i1} \mathbf{B}_{1*} + a_{i2} \mathbf{B}_{2*} + \cdots + a_{ip} \mathbf{B}_{p*} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \mathbf{B}_{k*}$

► $[\mathbf{AB}]_{*j} = \mathbf{A}_{*1} b_{1j} + \mathbf{A}_{*2} b_{2j} + \cdots + \mathbf{A}_{*p} b_{pj} = \sum_{k=1}^p \mathbf{A}_{*k} b_{kj}$

👉 Les deux dernières équations sont des combinaisons linéaires

Propriétés élémentaires

☞ Supposons la compatibilité des matrices, nous avons

▶ $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (distributivité à gauche)

▶ $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (distributivité à droite)

▶ $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ (associativité)

Écriture matricielle d'un système linéaire

👉 Le système linéaire

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

peut être décrit par une équation matricielle $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ où,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matrice identité

☞ La matrice $n \times n$ avec des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice identité* d'ordre n . Pour toute matrice \mathbf{A} de taille $m \times n$

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Transposée d'un produit

☞ Soit \mathbf{A} et \mathbf{B} deux matrices compatibles pour la multiplication

$$(\mathbf{AB})^{\top} = \mathbf{B}^{\top} \mathbf{A}^{\top}$$

Transposée d'un produit

☞ Soit \mathbf{A} et \mathbf{B} deux matrices compatibles pour la multiplication

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$$

Preuve. Par définition,

$$(\mathbf{AB})_{ij}^\top = [\mathbf{AB}]_{ji} = \mathbf{A}_{j*} \mathbf{B}_{*i}.$$

Considérons l'élément (i, j) de la matrice $\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$,

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top]_{ij} &= (\mathbf{B}^\top)_{i*} (\mathbf{A}^\top)_{*j} = \sum_k [\mathbf{B}^\top]_{ik} [\mathbf{A}^\top]_{kj} \\ &= \sum_k [\mathbf{B}]_{ki} [\mathbf{A}]_{jk} = \sum_k [\mathbf{A}]_{jk} [\mathbf{B}]_{ki} \\ &= \mathbf{A}_{j*} \mathbf{B}_{*i}. \end{aligned}$$

Un exemple

Supposons qu'une population migre entre deux régions géographiques comme suit : chaque année, 50% de la population du nord migre vers le sud alors que seulement 25% de la population du sud migre vers le nord. Cette situation peut être décrite par un diagramme.

Problème : Supposons que le processus de migration décrit précédemment perdure. On cherche à prédire la répartition (en temps long) de la population entre le nord et le sud.

Solution (matricielle !!)

Notons n_k et s_k les proportions de la population vivantes dans le nord et le sud respectivement à la fin de la $k^{\text{ème}}$ année. Les proportions de la population dans chaque région à la fin de l'année $k + 1$ sont données par

$$n_{k+1} = n_k(.5) + s_k(.25),$$

$$s_{k+1} = n_k(.5) + s_k(.75).$$

Si on note $p_k^\top = (n_k, s_k)$ et $p_{k+1}^\top = (n_{k+1}, s_{k+1})$ les répartitions de la population aux temps k et $k + 1$ respectivement et $T = \begin{pmatrix} .5 & .5 \\ .25 & .75 \end{pmatrix}$ la matrice dite **de transition**, i.e, $p_1^\top = p_0^\top T$ et $p_{k+1}^\top = p_k^\top T$. On en déduit que

$$p_{k+1}^\top = p_0^\top T^k$$

Multiplication de matrices par blocs

Soit \mathbf{A} et \mathbf{B} deux matrices dont les partitions en blocs sont

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{B}_{1t} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{B}_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{r1} & \mathbf{B}_{r2} & \cdots & \mathbf{B}_{rt} \end{pmatrix}.$$

Si toutes les paires $(\mathbf{A}_{ik}, \mathbf{B}_{kj})$ sont compatibles, on dit alors que les partitions des matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont *compatibles*. Le bloc (i, j) du produit \mathbf{AB} est donné par

$$\mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j} + \mathbf{A}_{i2}\mathbf{B}_{2j} + \cdots + \mathbf{A}_{ir}\mathbf{B}_{rj}.$$

Multiplication de matrices par blocs

Soit \mathbf{A} et \mathbf{B} deux matrices dont les partitions en blocs sont

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{B}_{1t} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{B}_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{r1} & \mathbf{B}_{r2} & \cdots & \mathbf{B}_{rt} \end{pmatrix}.$$

Si toutes les paires $(\mathbf{A}_{ik}, \mathbf{B}_{kj})$ sont compatibles, on dit alors que les partitions des matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont *compatibles*. Le bloc (i, j) du produit \mathbf{AB} est donné par

$$\mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j} + \mathbf{A}_{i2}\mathbf{B}_{2j} + \cdots + \mathbf{A}_{ir}\mathbf{B}_{rj}.$$

☞ La multiplication se fait comme si les blocs étaient des scalaires (attention à la compatibilité).

Exemple de multiplication de matrices par blocs

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

où

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exemple de multiplication de matrices par blocs

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

où

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

En faisant appel à une multiplication par blocs, le produit \mathbf{AB} s'obtient facilement comme suit

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{C} & \mathbf{C} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Espace vectoriel

La notion d'espace vectoriel fait appel à quatre éléments, deux ensembles \mathcal{V} et \mathcal{F} , et deux opérations algébriques appelées **addition** et **multiplication par un scalaire**.

- ▶ \mathcal{V} est un ensemble non vide d'objets appelés *vecteurs*. \mathcal{V} peut être très général, ici on va se restreindre à des n -uplet et à des ensembles de matrices.
- ▶ \mathcal{F} est un corps de scalaire. Dans notre cas, \mathcal{F} n'est rien d'autre que le corps des réels \mathbb{R} .
- ▶ L'addition vectorielle (notée $\mathbf{x} + \mathbf{y}$) est une opération entre éléments de \mathcal{V} .
- ▶ La multiplication scalaire (notée $\alpha \mathbf{x}$) est une opération entre éléments de \mathcal{F} et \mathcal{V} .

Sous-espace vectoriel

Soit un sous-ensemble \mathcal{S} (non vide) d'un espace vectoriel \mathcal{V} sur \mathcal{F} ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$). On dit que \mathcal{S} est un *sous-espace vectoriel* de \mathcal{V} si et seulement si

$$\text{▶ } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{S} \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{S}$$

$$\text{▶ } \mathbf{x} \in \mathcal{S} \implies \alpha \mathbf{x} \in \mathcal{S} \text{ pour tout } \alpha \in \mathcal{F}.$$

Sous-espace vectoriel

Soit un sous-ensemble \mathcal{S} (non vide) d'un espace vectoriel \mathcal{V} sur \mathcal{F} ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$). On dit que \mathcal{S} est un *sous-espace vectoriel* de \mathcal{V} si et seulement si

$$\text{▶ } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{S} \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{S}$$

$$\text{▶ } \mathbf{x} \in \mathcal{S} \implies \alpha \mathbf{x} \in \mathcal{S} \text{ pour tout } \alpha \in \mathcal{F}.$$

Un sous-espace vectoriel contient-t-il l'origine ?

Sous-espace vectoriel

Soit un sous-ensemble \mathcal{S} (non vide) d'un espace vectoriel \mathcal{V} sur \mathcal{F} ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$). On dit que \mathcal{S} est un *sous-espace vectoriel* de \mathcal{V} si et seulement si

$$\blacktriangleright \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{S} \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{S}$$

$$\blacktriangleright \mathbf{x} \in \mathcal{S} \implies \alpha \mathbf{x} \in \mathcal{S} \text{ pour tout } \alpha \in \mathcal{F}.$$

Un sous-espace vectoriel contient-t-il l'origine ?

- ▶ Dans \mathbb{R}^2 , toutes les droites qui passent par l'origine sont des sous-espaces
- ▶ Dans \mathbb{R}^2 , les droites et les plans contenant l'origine sont des sous-espaces.

Flatness en dimension > 3

Bien que nous ne pouvons pas visualiser "*la planéité*" (*the flatness*) dans les dimensions supérieures, notre esprit ne peut la concevoir qu'à travers la notion d'un sous-espace. À partir de maintenant, pensons à des ***surfaces planes*** qui passent par l'origine à chaque fois que nous rencontrons le terme ***sous-espace***.

Un ensemble engendrant (*spanning set*)

Pour un ensemble de vecteurs $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ d'un espace vectoriel \mathcal{V} , l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des \mathbf{v}_i est noté

$$\text{span}(\mathcal{S}) = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{v}_r \mid \alpha_i \in \mathcal{F}\}$$

Nous nous intéressons uniquement à $\mathcal{V} = \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F} = \mathbb{R}$.

Un ensemble engendrant (*spanning set*)

Pour un ensemble de vecteurs $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ d'un espace vectoriel \mathcal{V} , l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des \mathbf{v}_i est noté

$$\text{span}(\mathcal{S}) = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{v}_r \mid \alpha_i \in \mathcal{F}\}$$

Nous nous intéressons uniquement à $\mathcal{V} = \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F} = \mathbb{R}$.

L'ensemble $\text{span}(\mathcal{S})$ forme-t-il un sous-espace vectoriel ?

Espace engendré *spanned space*

- Pour un ensemble de vecteurs $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$, le sous-espace

$$\text{span}(\mathcal{S}) = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{v}_r\}$$

généralisé en formant toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de \mathcal{S} est appelé ***espace engendré*** par \mathcal{S} .

- Si \mathcal{V} un espace vectoriel tel que $\mathcal{V} = \text{span}(\mathcal{S})$, on dit que \mathcal{S} est l'ensemble qui engendre \mathcal{V} . En d'autres termes, tout vecteur de \mathcal{V} est une combinaison linéaire des éléments (vecteurs) de \mathcal{S} .

Exemples

- ▶ L'ensemble $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ engendre la ligne $y = x$ dans \mathbb{R}^2 .
- ▶ Les vecteurs unité $\left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ engendre \mathbb{R}^3 .
- ▶ De manière générale, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ engendrent \mathbb{R}^n .
- ▶ L'ensemble $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ engendre l'espace de tous les polynômes de degré $\leq n$.

Sous-espaces et applications linéaires

Les deux conditions qui caractérisent la notion de sous-espace ressemblent sensiblement aux deux propriétés qui caractérisent une application linéaire. Nous verrons que la notion de sous-espace est intimement liée au monde des applications linéaires.

Sous-espaces et applications linéaires

Les deux conditions qui caractérisent la notion de sous-espace ressemblent sensiblement aux deux propriétés qui caractérisent une application linéaire. Nous verrons que la notion de sous-espace est intimement liée au monde des applications linéaires.

Pour une application linéaire f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m , on note $\mathcal{R}(f)$, l'image (*range*) de f . Plus précisément $\mathcal{R}(f) = \{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ est l'ensemble de toutes les images de \mathbf{x} lorsque celui-ci varie librement dans \mathbb{R}^n .

- L'image d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ est un sous-espace de \mathbb{R}^m , et tout sous-espace de \mathbb{R}^m est l'image d'une certaine application linéaire.

Pour ces raisons, les sous-espaces de \mathbb{R}^m sont parfois appelés *espaces linéaires*.

Preuve

- ▶ Si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ une application linéaire, alors l'image de f est un sous-espace de \mathbb{R}^m (facile à vérifier).
- ▶ Montrons que tout sous-espace \mathcal{V} de \mathbb{R}^m est l'image d'une certaine application linéaire $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Supposons que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ engendre \mathcal{V} . Soient la matrice $A_{m \times n} = (\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n)$ et le vecteur $n \times 1$ donné par $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^\top$. Ainsi chaque élément de \mathcal{V} peut s'écrire sous la forme

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

L'application $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ est linéaire, et

$$\mathcal{R}(f) = \{\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n | \alpha_i \in \mathbb{R}\} = \mathcal{V}.$$

Espaces images (*range spaces*)

Toute matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ génère un sous-espace de \mathbb{R}^m par l'intermédiaire de l'image de $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. De la même manière, sa transposée de $\mathbf{A}^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$ engendre un sous-espace de \mathbb{R}^n par l'intermédiaire de $f(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^\top \mathbf{y}$.

L'espace image générée par matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ noté $R(\mathbf{A})$ correspond à l'image de l'application $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, *i.e.*

$$R(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

De manière similaire, l'espace image associé à \mathbf{A}^\top est un sous-espace de \mathbb{R}^n donné par

$$R(\mathbf{A}^\top) = \{\mathbf{A}^\top \mathbf{y} | \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Espaces lignes et colonnes

Pour $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, nous avons les affirmations suivantes

- ▶ $R(\mathbf{A})$ = l'espace engendré par les colonnes de \mathbf{A} (*column space*)
- ▶ $R(\mathbf{A}^\top)$ = l'espace engendré par les lignes de \mathbf{A} (*row space*)
- ▶ $\mathbf{b} \in R(\mathbf{A}) \iff \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ pour un certain \mathbf{x}
- ▶ $\mathbf{a} \in R(\mathbf{A}^\top) \iff \mathbf{a}^\top = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}$ pour un certain \mathbf{y}^\top

Noyau (*Kernel* ou *Nullspace*)

- Pour une matrice $\mathbf{A}_{m \times n}$, l'ensemble $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x}_{n \times 1} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelé **noyau** de \mathbf{A} . En d'autres termes, $N(\mathbf{A})$ est simplement l'ensemble des solutions du système $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- L'ensemble $N(\mathbf{A}^\top) = \{\mathbf{y}_{m \times 1} | \mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^m$ est appelé **noyau à gauche** de \mathbf{A} car $N(\mathbf{A}^\top)$ est l'ensemble de toutes les solutions du système $\mathbf{y}^\top \mathbf{A} = \mathbf{0}^\top$.

Indépendance linéaire

Un ensemble de vecteurs $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ est dit *linéairement indépendant* si l'unique solution en α_i dans l'équation

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

est la solution triviale $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Si il existe une solution non triviale de ce système (*i.e.*, au moins un $\alpha_i \neq 0$) , l'ensemble \mathcal{S} est dit *linéairement dépendant*. Autrement dit, dans le cas de dépendance linéaire, il existe au moins un vecteur de \mathcal{S} qui est combinaison linéaire des autres.

Exemples



$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$



$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

Indépendance linéaire et matrices

Soit \mathbf{A} une matrice $m \times n$

- ▶ Les affirmations suivantes sont équivalentes pour caractériser l'indépendance linéaire des colonnes de \mathbf{A}
 - ▶ $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$
 - ▶ $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$
- ▶ Les affirmations suivantes sont équivalentes pour caractériser l'indépendance linéaire des lignes de \mathbf{A}
 - ▶ $N(\mathbf{A}^\top) = \{\mathbf{0}\}$
 - ▶ $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$
- ▶ Si la matrice \mathbf{A} est carrée, chacune des affirmations suivantes caractérise la ***non singularité***^a de la matrice \mathbf{A}
 - ▶ Les colonnes de \mathbf{A} forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants
 - ▶ Les lignes de \mathbf{A} forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants

a. Petit rappel : une matrice carrée est dite non-singulière s'il existe \mathbf{B} telle que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$.

Sous-ensemble indépendant maximal

Si $\text{rang}(\mathbf{A}_{m \times n}) = r$, alors nous avons

- ▶ Tout sous-ensemble maximal de colonnes indépendantes de \mathbf{A} contient exactement r colonnes.
- ▶ Tout sous-ensemble maximal de lignes indépendantes de \mathbf{A} contient exactement r lignes.

Sous-ensemble indépendant maximal

Si $\text{rang}(\mathbf{A}_{m \times n}) = r$, alors nous avons

- ▶ Tout sous-ensemble maximal de colonnes indépendantes de \mathbf{A} contient exactement r colonnes.
- ▶ Tout sous-ensemble maximal de lignes indépendantes de \mathbf{A} contient exactement r lignes.

Le rang d'une matrice est le nombre maximal de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes

Quelques propriétés basique liées à notion d'indépendance linéaire

Soit un ensemble de vecteurs $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ dans un espace \mathcal{V} , nous avons

- ▶ Si \mathcal{S} contient un sous-ensemble linéairement dépendant, alors \mathcal{S} est linéairement dépendant.
- ▶ Si \mathcal{S} est linéairement indépendant, alors tout sous-ensemble est linéairement indépendant.
- ▶ Si \mathcal{S} est linéairement indépendant et si $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, alors l'extension $\mathcal{S} \cup \{\mathbf{v}\}$ est linéairement indépendant si et seulement si $\mathbf{v} \notin \text{span}(\mathcal{S})$.
- ▶ Si $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^m$ et si $n > m$, alors \mathcal{S} ne peut être que linéairement dépendant.

Base et dimension

Un ensemble linéairement indépendant et engendrant d'un espace vectoriel \mathcal{V} forme une ***base*** de \mathcal{V} .

Base et dimension

Un ensemble linéairement indépendant et engendrant d'un espace vectoriel \mathcal{V} forme une **base** de \mathcal{V} .

La **dimension** d'un espace vectoriel \mathcal{V} est donnée par

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{V} &= \text{nombre de vecteurs de base de } \mathcal{V} \\ &= \text{nombre de vecteurs d'un sous ensemble maximal indépendant}\end{aligned}$$

Base et dimension

Un ensemble linéairement indépendant et engendrant d'un espace vectoriel \mathcal{V} forme une **base** de \mathcal{V} .

La **dimension** d'un espace vectoriel \mathcal{V} est donnée par

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{V} &= \text{nombre de vecteurs de base de } \mathcal{V} \\ &= \text{nombre de vecteurs d'un sous ensemble maximal indépendant}\end{aligned}$$

Soit deux espaces vectoriels \mathcal{M} et \mathcal{N} tels que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, nous avons les deux situations suivantes

- ▶ $\dim \mathcal{M} \leq \dim \mathcal{N}$.
- ▶ Si $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{N}$, alors $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

Sous-espaces fondamentaux, dimensions et bases

Pour une matrice réelle \mathbf{A} de taille $m \times n$ telle que $\text{rang}(\mathbf{A}) = r$,

- ▶ $\dim R(\mathbf{A}) = r$,
- ▶ $\dim N(\mathbf{A}) = n - r$,
- ▶ $\dim R(\mathbf{A}^\top) = r$,
- ▶ $\dim N(\mathbf{A}^\top) = m - r$.

Sous-espaces fondamentaux, dimensions et bases

Pour une matrice réelle \mathbf{A} de taille $m \times n$ telle que $\text{rang}(\mathbf{A}) = r$,

- ▶ $\dim R(\mathbf{A}) = r$,
- ▶ $\dim N(\mathbf{A}) = n - r$,
- ▶ $\dim R(\mathbf{A}^\top) = r$,
- ▶ $\dim N(\mathbf{A}^\top) = m - r$.

Enfin le fameux théorème

$$\dim R(\mathbf{A}) + \dim N(\mathbf{A}) = n \quad \text{pour toute matrice de taille } m \times n$$

Plan

Permutations d'un ensemble

Une permutation $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ d'un ensemble de nombres $(1, 2, \dots, n)$ est un *réarrangement* de cet ensemble.

Permutations d'un ensemble

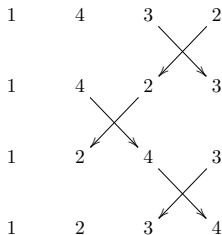
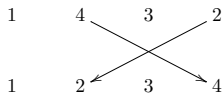
Une permutation $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ d'un ensemble de nombres $(1, 2, \dots, n)$ est un *réarrangement* de cet ensemble.

Par exemple, l'ensemble

$$\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$$

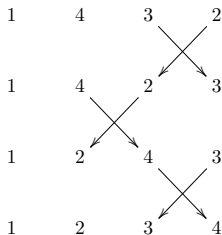
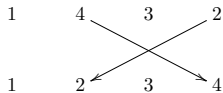
contient les six différentes permutations de l'ensemble $(1, 2, 3)$. En général, l'ensemble $(1, 2, \dots, n)$ peut subir $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 1$ permutations différentes.

Permutations d'un ensemble



Question : Peut-on retrouver l'ordre naturel (*i.e.* $(1, 2, 3, 4)$) avec un nombre pair de permutations ?

Permutations d'un ensemble



Question : Peut-on retrouver l'ordre naturel (*i.e.* $(1, 2, 3, 4)$) avec un nombre pair de permutations ?

réponse : impossible !!

Parité d'une permutation

*La parité d'une permutation est **unique**—i.e., si une permutation peut être amenée à l'ordre naturel au bout d'un nombre pair (impair) d'échanges, alors toute autre suite d'échanges qui reconstruit l'ordre naturel est pair (impair).*

La signature d'une permutation p est donnée par

$$\sigma(p) = \begin{cases} +1 & \text{un nombre pair d'échanges} \\ -1 & \text{un nombre impair d'échanges} \end{cases}$$

Par exemple, si $p = (1, 4, 3, 2)$, alors $\sigma(p) = -1$, et si $p = (4, 3, 2, 1)$, alors $\sigma(p) = +1$. La signature de l'ordre naturel $p = (1, 2, 3, 4)$ est naturellement $\sigma(p) = +1$.

Une définition générale du déterminant

Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ une matrice $n \times n$, le **déterminant** de \mathbf{A} est un scalaire donné par

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_p \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

où la somme est prise sur l'ensemble des $n!$ permutations $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ de $(1, 2, \dots, n)$.

- ▶ On remarque que chaque terme $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ contient exactement un élément par ligne et par colonne de \mathbf{A} .
- ▶ Le déterminant de \mathbf{A} peut être noté $\det(\mathbf{A})$ ou $|\mathbf{A}|$.
- ▶ Le déterminant d'une matrice rectangulaire n'est pas défini.

Une définition générale du déterminant

Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ une matrice $n \times n$, le **déterminant** de \mathbf{A} est un scalaire donné par

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_p \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

où la somme est prise sur l'ensemble des $n!$ permutations $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ de $(1, 2, \dots, n)$.

- ▶ On remarque que chaque terme $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ contient exactement un élément par ligne et par colonne de \mathbf{A} .
- ▶ Le déterminant de \mathbf{A} peut être noté $\det(\mathbf{A})$ ou $|\mathbf{A}|$.
- ▶ Le déterminant d'une matrice rectangulaire n'est pas défini.

Par exemple, lorsque \mathbf{A} est 2×2 , il existe $2! = 2$ permutations de $(1, 2)$. Le déterminant de \mathbf{A} contient deux termes,

$$\sigma(1, 2) a_{11} a_{22} \text{ et } \sigma(2, 1) a_{12} a_{21}$$

Or $\sigma(1, 2) = +1$ et $\sigma(2, 1) = -1$, on déduit la formule classique

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Exercice

Utiliser la définition précédente pour calculer le déterminant de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice

Utiliser la définition précédente pour calculer le déterminant de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

énumérons les $3! = 6$ permutations de $(1, 2, 3)$ au même temps que les termes utiliser dans développement du déterminant,

$p = (p_1, p_2, p_3)$	$\sigma(p)$	$a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$
$(1, 2, 3)$	$+$	$1 \times 5 \times 9 = 45$
$(1, 3, 2)$	$-$	$1 \times 6 \times 8 = 48$
$(2, 1, 3)$	$-$	$2 \times 4 \times 9 = 72$
$(2, 3, 1)$	$+$	$2 \times 6 \times 7 = 84$
$(3, 1, 2)$	$+$	$3 \times 4 \times 8 = 96$
$(3, 2, 1)$	$-$	$3 \times 5 \times 7 = 105$

On peut maintenant calculer le déterminant

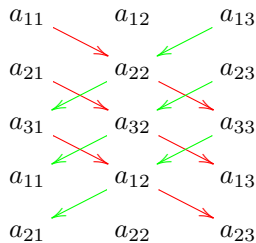
$$\det(\mathbf{A}) = \sum_p \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} = 45 - 48 - 72 + 84 + 96 + 105 = 0$$

Règle de Sarrus pour les matrices 3×3

► Nous venons de voir que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

► Règle de Sarrus



Bilan

- ▶ La formule générale basée sur les permutations est laborieuse
- ▶ On ne peut pas généraliser la règle de Sarrus à des dimensions > 3
- ▶ Quelques bonnes nouvelles
 - ▶ La formule en dimension deux nous suffit
 - ▶ La formule de calcul de déterminant d'une matrice triangulaire est très simple

Déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de sa diagonale. Autrement dit,

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11}t_{22} \cdots t_{nn}.$$

Déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de sa diagonale. Autrement dit,

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11}t_{22} \cdots t_{nn}.$$

Preuve. Rappelons que d'après la formule générale du déterminant, chaque terme $t_{1p_1}t_{2p_2} \cdots t_{np_n}$ contient exactement un seul élément par ligne et par colonne. Cela montre qu'il n'existe qu'un seul terme du développement qui ne contient pas d'éléments en dessous de la diagonale et ce terme correspond à $t_{11}t_{22} \cdots t_{nn}$.

Le déterminant est invariant par transposition

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top) \text{ pour toute matrice } n \times n.$$

Preuve. Comparer les produits $\{\sigma(p)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\}$ avec $\{\sigma(p)a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}\}$ pour $n = 3$ par exemple.

Le déterminant est invariant par transposition

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top) \text{ pour toute matrice } n \times n.$$

Preuve. Comparer les produits $\{\sigma(p)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\}$ avec $\{\sigma(p)a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}\}$ pour $n = 3$ par exemple.

L'égalité précédente montre qu'il n'est pas nécessaire de distinguer entre les lignes et les colonnes pour énoncer et étudier les propriétés du déterminant.

Opérations sur les lignes (ou colonnes) et déterminant

Soit \mathbf{B} une matrice obtenue en transformant $\mathbf{A}_{n \times n}$ via une des trois opérations suivantes

- I : Interchanger les lignes i et j
- II : Multiplier la ligne i par $\alpha \neq 0$
- III : Ajouter la ligne \mathbf{A}_{i*} la quantité $\alpha \mathbf{A}_{j*}$

Les valeurs de $\det(\mathbf{B})$ sont

- ▶ $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$ pour une opération de type I
- ▶ $\det(\mathbf{B}) = \alpha \det(\mathbf{A})$ pour une opération de type II
- ▶ $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$ pour une opération de type III

Singularité et mineur d'une matrice

- ▶ $A_{n \times n}$ est non singulière si et seulement si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- ▶ $A_{n \times n}$ est sigulière si et seulement si $\det(\mathbf{A}) = 0$

Singularité et mineur d'une matrice

- ▶ $A_{n \times n}$ est non singulière si et seulement si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- ▶ $A_{n \times n}$ est sigulière si et seulement si $\det(\mathbf{A}) = 0$

Le *déterminant mineur (ou mineur)* de $\mathbf{A}_{m \times n}$ est défini comme le déterminant de toute sous-matrice carrée de \mathbf{A} . Par exemple,

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$ et $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6$ sont les mineurs 2×2 de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Un élément a_{ij} est un mineur 1×1 de \mathbf{A} , et $\det(\mathbf{A})$ est son mineur 3×3 .

Rang et déterminant

► $\text{rang}(\mathbf{A}) =$ la taille du plus grand mineur non nul de \mathbf{A}

Rang et déterminant

► $\text{rang}(\mathbf{A}) =$ la taille du plus grand mineur non nul de \mathbf{A}

Exercice : Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Rang et déterminant

► $\text{rang}(\mathbf{A}) =$ la taille du plus grand mineur non nul de \mathbf{A}

Exercice : Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution : Il est clair qu'il existe des mineurs 1×1 et 2×2 non nuls, donc $\text{rang}(\mathbf{A}) \geq 2$. Calculons les mineurs 3×3 de \mathbf{A} .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On conclut que $\text{rang}(\mathbf{A}) = 2$.

Déterminant d'un produit

- ▶ $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$ pour toutes les matrices $n \times n$
- ▶ $\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D})$ si \mathbf{D} et \mathbf{A} sont carrées

Matrice inverse

Soit la matrice $\mathbf{A}_{n \times n}$, la matrice $\mathbf{B}_{n \times n}$ telle que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n \text{ et } \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

est appelée *l'inverse* de \mathbf{A} et notée $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Toutes les matrices carrées ne sont pas inversibles. Toute matrice non singulière est inversible.

Solutions d'équations matricielles

- ▶ Si \mathbf{A} est non singulière, alors il existe une unique solution de l'équation matricielle $\mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{X}_{n \times p} = \mathbf{B}_{n \times p}$. Cette solution est donnée par

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}.$$

- ▶ Un système linéaire de n équations à n inconnues peut être écrit sous forme d'une équation matricielle $\mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{n \times 1}$. On déduit que lorsque \mathbf{A} est non singulière, le système possède une unique solution donnée par $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$.

Déterminant de matrices définies par blocs

Si \mathbf{A} et \mathbf{D} sont deux matrices carrées, alors

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) & \text{lorsque } \mathbf{A}^{-1} \text{ existe,} \\ \det(\mathbf{D})\det(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}) & \text{lorsque } \mathbf{D}^{-1} \text{ existe.} \end{cases}$$

Les matrices $\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ et $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$ sont appelées ***compléments de Schur*** de \mathbf{A} et \mathbf{D} , respectivement.

Cofacteurs

Rappelons que les mineurs de \mathbf{A} sont les déterminants des sous matrices de \mathbf{A} . Voyons maintenant à quoi servent les mineurs $n - 1 \times n - 1$.

Cofacteurs

Rappelons que les mineurs de \mathbf{A} sont les déterminants des sous matrices de \mathbf{A} . Voyons maintenant à quoi servent les mineurs $n - 1 \times n - 1$.

Le **cofacteur** de $\mathbf{A}_{n \times n}$ associée à la position (la case) (i, j) est donné par

$$[\overset{\circ}{\mathbf{A}}]_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

où M_{ij} est le mineur $n - 1 \times n - 1$ obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de \mathbf{A} . La matrice des cofacteurs est notée $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$.

Exemple : Pour $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, calculer la matrice des cofacteurs

$\overset{\circ}{\mathbf{A}}$.

Calcul du déterminant et cofacteurs

- ▶ $\det(\mathbf{A}) = a_{i1}[\overset{\circ}{\mathbf{A}}]_{i1} + a_{i2}[\overset{\circ}{\mathbf{A}}]_{i2} + \cdots a_{in}[\overset{\circ}{\mathbf{A}}]_{in}$ (développement suivant la ligne i)
- ▶ $\det(\mathbf{A}) = a_{1j}[\overset{\circ}{\mathbf{A}}]_{1j} + a_{2j}[\overset{\circ}{\mathbf{A}}]_{2j} + \cdots a_{nj}[\overset{\circ}{\mathbf{A}}]_{nj}$ (développement suivant la colonne j)

Calcul du déterminant et cofacteurs

- ▶ $\det(\mathbf{A}) = a_{i1}[\overset{\circ}{\mathbf{A}}]_{i1} + a_{i2}[\overset{\circ}{\mathbf{A}}]_{i2} + \cdots a_{in}[\overset{\circ}{\mathbf{A}}]_{in}$ (développement suivant la ligne i)
- ▶ $\det(\mathbf{A}) = a_{1j}[\overset{\circ}{\mathbf{A}}]_{1j} + a_{2j}[\overset{\circ}{\mathbf{A}}]_{2j} + \cdots a_{nj}[\overset{\circ}{\mathbf{A}}]_{nj}$ (développement suivant la colonne j)

Exemple : Utiliser le développement suivant une ligne ou une colonne

pour calculer le déterminant de la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminant et Matrice inverse

Pour toute matrice $\mathbf{A}_{n \times n}$, on note $\overset{\circ}{\mathbf{A}}^\top$ la transposée de la matrice des cofacteurs. Si \mathbf{A} est non singulière, alors

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\overset{\circ}{\mathbf{A}}^\top}{\det(\mathbf{A})}.$$

Exemple

Revenons à la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice \mathbf{A}^{-1} et vérifier que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_3$.

Plan

Origine du problème

Un système d'équations différentielles, on cherche deux fonctions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ telles que $du_1/dt = 7u_1 - 4u_2$ et $du_2/dt = 5u_1 - 2u_2$.

Notation matricielle 

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \text{ ou de manière équivalente, } \mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u},$$

Rappelons que la solution d'une équation du type $u' = \lambda u$ est de la forme $u = \alpha e^{\lambda t}$.

On s'intéresse aux solutions de la forme

$$u_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} \text{ et } u_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda t}$$

Revenons au système linéaire $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$

$$\begin{cases} \lambda \alpha_1 e^{\lambda t} &= 7\alpha_1 e^{\lambda t} - 4\alpha_2 e^{\lambda t} \\ \lambda \alpha_2 e^{\lambda t} &= 5\alpha_1 e^{\lambda t} - 2\alpha_2 e^{\lambda t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \lambda &= 7\alpha_1 - 4\alpha_2 \\ \alpha_2 \lambda &= 5\alpha_1 - 2\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Introduction

☞ Autrement dit, la solution du système différentiel peut être obtenue via les solutions de l'équation matricielle $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ (autres que la solution triviale $\mathbf{x} = 0$).

On cherche λ et $\mathbf{x} \neq 0$ tels que

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \iff (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} \in N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}).$$

Introduction

☞ Autrement dit, la solution du système différentiel peut être obtenue via les solutions de l'équation matricielle $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ (autres que la solution triviale $\mathbf{x} = 0$).

On cherche λ et $\mathbf{x} \neq 0$ tels que

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \iff (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} \in N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}).$$

Or on sait que

$$N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq \mathbf{0} \iff \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Introduction

☞ Autrement dit, la solution du système différentiel peut être obtenue via les solutions de l'équation matricielle $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ (autres que la solution triviale $\mathbf{x} = 0$).

On cherche λ et $\mathbf{x} \neq 0$ tels que

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \iff (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} \in N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}).$$

Or on sait que

$$N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq \mathbf{0} \iff \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

On va résoudre l'équation

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Valeurs propres et vecteurs propres

Soit une matrice $A_{n \times n}$, les scalaires λ et les vecteurs $\mathbf{x}_{n \times 1} \neq \mathbf{0}$ tels que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ sont appelés *valeurs propres* et *vecteurs propres* respectivement. Tout couple (λ, \mathbf{x}) est appelé *élément propre* de \mathbf{A} . L'ensemble des valeurs propres *distinctes* noté $\sigma(A)$ est appelé *spectre* de \mathbf{A} .

- ▶ $\lambda \in \sigma(\mathbf{A}) \iff \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ est singulière $\iff \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.
- ▶ $\{\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \mid \mathbf{x} \in N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\}$ est l'ensemble de tous les vecteurs propres associés à λ . L'ensemble $N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ sera appelé *espace propre* de \mathbf{A} .
- ▶ Un vecteur ligne \mathbf{y}^* tel que $\mathbf{y}^*(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ est appelé *vecteur propre à gauche* de \mathbf{A} .

Les valeurs propres : exemple

Revenons à la matrice $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, on s'intéresse au *polynôme caractéristique* de \mathbf{A}

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -4 \\ 5 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Les valeurs propres de \mathbf{A} sont les solutions de *l'équation caractéristique* $p(\lambda) = 0$ (les racines du polynôme caractéristique) qui sont ici $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$.

Les vecteurs propres : exemple

Les vecteurs propres associés à $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$ sont simplement les vecteurs non nuls des sous-espaces propres $N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ et $N(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ respectivement. C'est les solutions des équations $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Pour $\lambda = 2$,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - 2\mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 &= \frac{4}{5}x_2 \\ x_2 &\text{est libre} \end{cases} \\ \implies N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) &= \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Pour $\lambda = 3$,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - 3\mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 &= x_2 \\ x_2 &\text{est libre} \end{cases} \\ \implies N(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) &= \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Les vecteurs propres : exemple (suite)

Les vecteurs propres de \mathbf{A} associés à la valeur propre $\lambda = 2$ sont tous les vecteurs non nuls multiples de $\mathbf{x} = (4/5, 1)^\top$ et les vecteurs propres associés à $\lambda = 3$ sont les multiples de $\mathbf{y} = (1, 1)^\top$.

Les éléments propres (λ_1, \mathbf{x}) et (λ_2, \mathbf{y}) de la matrice \mathbf{A} nous donnent les deux solutions du système différentielle introduit précédemment

$$\mathbf{u}_1 = e^{\lambda_1 t} \mathbf{x} = e^{2t} \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_2 = e^{\lambda_2 t} \mathbf{y} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Polynôme caractéristique

- ▶ Le *polynôme caractéristique* de $\mathbf{A}_{n \times n}$ est $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$. Le degré de $p(\lambda)$ est n , et le terme principal est $(-1)\lambda^n$.
- ▶ L'*équation caractéristique* de \mathbf{A} est donnée par $p(\lambda) = 0$.
- ▶ Les valeurs propres de \mathbf{A} sont les racines du polynôme caractéristique et inversement.
- ▶ En tout, \mathbf{A} possède n valeurs propres, mais certaines peuvent être complexes (même si \mathbf{A} est réelle), et certaines valeurs propres peuvent être *multiples*.
- ▶ Si \mathbf{A} est réelle, ses valeurs propres complexes apparaissent en paires conjuguées-*i.e.* si $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, alors $\bar{\lambda} \in \sigma(\mathbf{A})$.

Exemple :

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrice de passage dite *similarity* en anglais

- ▶ Deux matrices $n \times n$ **A** et **B** sont dites ***similaires*** s'il existe une matrice non singulière **P** telle que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$. Le produit $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ est appelé ***transformation similaire*** de **A**.
- ▶ **Un problème fondamental** : La réduction d'une matrice carrée **A** à la forme la plus simple par l'intermédiaire d'une transformation similaire.

Matrice de passage dite *similarity* en anglais

- ▶ Deux matrices $n \times n$ **A** et **B** sont dites ***similaires*** s'il existe une matrice non singulière **P** telle que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$. Le produit $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ est appelé ***transformation similaire*** de **A**.
- ▶ **Un problème fondamental** : La réduction d'une matrice carrée **A** à la forme la plus simple par l'intermédiaire d'une transformation similaire.

☞ La forme diagonale est la forme la plus simple!!

Matrice de passage dite *similarity* en anglais

- ▶ Deux matrices $n \times n$ **A** et **B** sont dites ***similaires*** s'il existe une matrice non singulière **P** telle que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$. Le produit $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ est appelé ***transformation similaire*** de **A**.
- ▶ **Un problème fondamental** : La réduction d'une matrice carrée **A** à la forme la plus simple par l'intermédiaire d'une transformation similaire.

☞ La forme diagonale est la forme la plus simple!!

Question : Est-ce que toute matrice carrée est similaire à une matrice diagonale (un début de réponse est donné dans l'exemple précédent) ?

Réponse : non

Intéressons nous à la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Commençons par le calcul de \mathbf{A}^2

Réponse : non

Intéressons nous à la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Commençons par le calcul de \mathbf{A}^2

$\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$ (on dit que \mathbf{A} est *nilpotente*).

Supposons qu'il existe une matrice de passage non singulière \mathbf{P} telle que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, où \mathbf{D} est une matrice diagonale,

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{P} = \mathbf{0} \implies \mathbf{D} = \mathbf{0} \implies \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Diagonalisation

- ▶ Une matrice \mathbf{A} est dite *diagonalisable* si elle est similaire à une matrice diagonale.
- ▶ Un *ensemble complet de vecteurs propres* de $\mathbf{A}_{n \times n}$ est un ensemble de n vecteurs propres de \mathbf{A} linéairement indépendants. Notons que toutes les matrices ne possèdent un ensemble complet de vecteurs propres (en anglais, on parle de *deficient or defective matrix*).
- ▶ $\mathbf{A}_{n \times n}$ est diagonalisable si et seulement si \mathbf{A} possède un ensemble complet de vecteurs propres. De plus,
 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ si les colonnes de \mathbf{P} constituent un ensemble complet de vecteurs propres et les λ_j sont les valeurs propres associées *i.e.* les couples $(\lambda_j, \mathbf{P}_{*,j})$ est un élément propre de \mathbf{A} .

Exemple

Diagonaliser si possible la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ en utilisant un changement de base (c'est à dire une matrice de passage \mathbf{P}).