

Parentèse théorique: (loi Gamma et fonction génératrice)

$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ si sa densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \text{ où } \begin{cases} x > 0 \\ \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{cases}$$

donc pour $\alpha = 1$ $\Gamma(\alpha, \beta)$ est la loi $\mathcal{E}(\beta)$

En plus de la fonction de densité et la fonction de répartition, nous pouvons caractériser la loi d'une v.a. à l'aide de la fonction génératrice donnée par:

$$G_X(t) = \mathbb{E}[e^{tx}] = \int_0^{+\infty} \frac{e^{tx}}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\beta-t)x} dx$$

il faut que $\beta - t > 0$ pour que

cette intégrale puisse exister

on pose:

$$y = (\beta - t)x$$

$$x = \frac{y}{\beta - t}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\beta - t}$$

Appliquons le changement de variable $y = (\beta - t)x$

lorsque : $x \rightarrow 0$ $y \rightarrow 0$
 $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow +\infty$ car $\beta > t$

$$\begin{aligned} \text{donc : } G_X(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{y}{(\beta - t)} \right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{dy}{(\beta - t)} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-y} dy \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha \end{aligned}$$

on sait que $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$

on conclut que la fonction génératrice d'une $\Gamma(\alpha, \beta)$ est donnée par :

$$G_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha$$

En particulier, :
si $X \sim \mathcal{E}(\beta)$ alors $G_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t}$.

À qui sert une fonction génératrice?

$T_2 = X_1 + X_2$ où X_1 et X_2 sont des variables aléatoires
exponentielles $\mathcal{E}(\lambda)$ indépendantes.

La loi de T_2 ?

nous allons calculer la fonction génératrice de T_2
pour identifier sa loi.

$$\begin{aligned} G_{T_2}(t) &= \mathbb{E}(e^{tT_2}) = \mathbb{E}\left[e^{t(X_1 + X_2)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{tX_1} \times e^{tX_2}\right] \underset{\text{grâce à l'indépendance}}{=} \mathbb{E}\left[e^{tX_1}\right] \times \mathbb{E}\left[e^{tX_2}\right] \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{t - \lambda}\right) \times \left(\frac{\lambda}{t - \lambda}\right) = \left(\frac{\lambda}{t - \lambda}\right)^2$$

donc, on peut conclure que $T_2 \sim \Gamma(2, \lambda)$.

Le calcul précédent montre la difficulté de "calculer" la loi de statistique simple comme la somme de deux v.v. exponentielles.

De la même façon, soient $X_1, \dots, X_n \underset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$

La loi de T est donnée par sa fonction génératrice:

$$\begin{aligned} G_T(t) &= \mathbb{E} \left[e^{t(X_1 + \dots + X_n)} \right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \left[e^{tX_i} \right] \\ &= \left(\frac{\lambda}{t - \lambda} \right)^n \quad \underline{\text{donc}} \quad T \sim \Gamma(n, \lambda). \end{aligned}$$

Loi du minimum de deux exponentielles :

$X_1 \perp X_2 \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Loi de $M = \min(X_1, X_2)$

Fonction de répartition de M :

$$F_M(x) = P(M \leq x) = P(\min(X_1, X_2) \leq x)$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } P(\min(X_1, X_2) \leq x) &= 1 - P(\min(X_1, X_2) > x) \\
 &= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x) \\
 &= 1 - P(X_1 > x) P(X_2 > x) = 1 - \left(e^{-\lambda x} \times e^{-\lambda x} \right) \\
 &= 1 - e^{-2\lambda x} \quad \text{donc } Y \sim \mathcal{E}(2\lambda).
 \end{aligned}$$

Exemple d'estimation du paramètre d'un loi exponentielle par la méthode des moments:

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$$

On sait que: $E[X] = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{E[X]}$

On sait que $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ est une approximation de $E(X)$

donc l'estimateur par la méthode des moments de λ :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n}.$$

Soi donné (estimation par la méthode des moments) :

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \Gamma(\alpha, \beta)$$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

On sait que :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \alpha \beta \\ \text{Var}(X) = \alpha \beta^2 \end{cases}$$

On sait que \bar{X}_n approche et $\overline{X_n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ approche

$\mathbb{E}[X^2]$ donc :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \alpha \beta \dots \dots \textcircled{1} \\ \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \alpha \beta^2 \dots \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \Leftrightarrow \frac{\mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}(X)]^2}{\mathbb{E}(X)} = \beta$$

on conclut :

$$\hat{\beta} = \frac{\overline{X_n^2} - (\bar{X}_n)^2}{\bar{X}_n}$$

et $\textcircled{1} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \frac{\hat{\beta}}{\bar{X}_n} = \frac{(\bar{X}_n)^2}{\overline{X_n^2} - (\bar{X}_n)^2}$

loi uniforme:

Soient X_1, \dots, X_n iid, $\text{Unif}[0, \theta]$ $\theta > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$$

Estimateur de θ par la méthode des moments:

on sait que: $E(X) = \frac{\theta}{2}$ et $\text{Var}(X) = \frac{\theta^2}{12}$
 $\theta = 2E(X)$ donc $\hat{\theta}_n = 2\bar{X}_n$

$$E(\hat{\theta}_n) = E(2\bar{X}_n) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{2 \times n}{n} \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X}_n) &= \text{Var}(2\bar{X}_n) = 4 \text{Var}(\bar{X}_n) \\ &= 4 \times \frac{\text{Var}(X_1)}{n} \end{aligned}$$

$$= 4 \times \frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

Un second estimateur :

Intuitivement $\hat{\theta}_2 = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

- Calculer la loi de $\hat{\theta}_2$, son espérance et sa variance ?
- Proposer un estimateur $\hat{\theta}_3$ sans biais, basé sur $\hat{\theta}_2$.

Biais d'une variance empirique :

Soient X_1, \dots, X_n iid telles que

$$\mathbb{E}(X_1) = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(X_1) = \sigma^2$$

- l'estimateur de σ^2 par la méthode des moments est donnée par

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

- Calculer le biais de σ^2 .

Loi uniforme avec deux bornes inconnues :

Soient $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Unif}[\theta_1, \theta_2] \quad -\infty < \theta_1 < \theta_2 < +\infty$

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_1^2) = \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_1 \theta_2}{3}$$

Proposer deux estimateurs $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ de θ_1 et θ_2
par la méthode des moments.

Loi de Pareto on dit que $X \sim \text{Pa}(a, \theta)$

$$f(x) = \theta \frac{a^\theta}{x^{\theta+1}} \quad \text{si } x > a, \quad \begin{matrix} a > 0 \\ \theta > 2 \end{matrix}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\theta a}{\theta - 1} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2) = \frac{\theta^2 a^2}{(\theta - 2)}$$

$$\text{Notons que : } \frac{(\theta - 1)^2}{\theta(\theta - 2)} - 1 = \frac{1}{\theta(1 - \theta)}$$

Proposer deux estimateurs \hat{a} et $\hat{\theta}$ par la méthode des moments de a et θ .