① Exercice : On suppose que X_n est une v.a de loi binomial de paramètre $n=1,2,\dots$ et ~~toute~~ probabilité de succès $\theta \in]0,1[$.

On définit $Y_n = \log\left(\frac{X_n}{n}\right)$ lorsque $X_n \geq 1$ et $Y_n = 1$ si $X_n = 0$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = \log\theta$ presque sûrement.

b) Montrer que $\sqrt{n}\left(Y_n - \log\theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1-\theta}{\theta}\right)$.

Solution :

a) Soient $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ iid telles que $\mathbb{P}(Z_1=1) = \theta$ et $\mathbb{P}(Z_1=0) = 1-\theta$.

On sait que X_n et $\sum_{j=1}^{n} Z_j$ ont la même loi de probabilité.

Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \theta\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^4}\,\mathbb{E}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \theta\right|^4\right) \quad \text{d'après l'inégalité de Markov}$$

$$= \frac{\theta^4(1-\theta) + (1-\theta)^4\theta}{\varepsilon^4 n^3} + \frac{\theta^2(1-\theta)^2(n-1)}{\varepsilon^4 n^3}$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \theta\right| > \varepsilon\right) < \infty$ (aller jusqu'à l'ordre 4 dans l'inégalité de Markov est nécessaire pour avoir une série finie)

↳ d'après le lemme de Borel-Cantelli, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n} \xrightarrow{P.S} \theta.$$

② On pose $W_n = 1\!\!1\{X_n \neq 0\} \frac{X_n}{n}$ et ainsi $Y_n = \log(W_n + e 1\!\!1\{X_n = 0\})$.

Notons que $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \mathbb{P}(\sqrt{n} 1\!\!1\{X_n=0\} > \varepsilon) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} (1-\theta)^n < \infty$.

$\Rightarrow$ on déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} 1\!\!1\{X_n=0\} = 0$ presque sûrement.

et donc
$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} 1\!\!1\{X_n=0\} = 0 \quad p.s \\ \text{et} \\ \lim_{n\to+\infty} 1\!\!1\{X_n\neq 0\} = 1 \quad p.s \end{cases}$$

Par continuité de la fonction log sur $]0,1[$, on conclut que
$$\lim_{n\to+\infty} Y_n = \log\theta \quad p.s.$$

b) Rappelons que X_n est de même loi que la somme $\sum_{j=1}^{n} Z_j$, par le TCL nous avons $\sqrt{n}\left(\frac{X_n}{n} - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta))$.

Nous venons de montrer que $\underbrace{\sqrt{n} 1\!\!1\{X_n=0\} \to 0 \text{ p.s et } \frac{X_n}{n} \to \theta \text{ p.s}}$

donc $1\!\!1\{X_n=0\} \frac{X_n}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ p.s.

Le théorème de Slutsky nous permet d'écrire :
$$\sqrt{n}(W_n - \theta) = \sqrt{n}\left(\frac{X_n}{n} - \theta\right) - 1\!\!1\{X_n=0\}\frac{X_n}{n}$$
$$\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta)).$$

D'un autre côté, par la δ-méthode avec $g(t) = \log t$ où $\dot{g}(t) = t^{-1}$, nous avons $\sqrt{n}(\log W_n - \log\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1-\theta}{\theta}\right)$.

Puisque $\sqrt{n}(Y_n - \log\theta) = \sqrt{n}(\log W_n - \log\theta) + \sqrt{n} 1\!\!1\{X_n=0\}$, encore Slutsky on obtient $\sqrt{n}(Y_n - \log\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1-\theta}{\theta}\right)$.