MMD – Seminární práce 2020/2021

Posluchači: **Michaela MAŠKOVÁ**

Zadání: **Simulace jednoduché křižovatky**

Odevzdáno: Získané body: Finální: ANO/NE

Zadání

Modelujte průjezdnost jednoduchou křižovatkou (jednosměrná hlavní komunikace a jedna přípojná vedlejší komunikace). Předpokládejte GIG rozdělení odstupů jak na hlavní tak na vedlejší komunikaci. Analyzujte statistické rozdělení mezer na hlavní komunikaci, které využilo právě k vozidel vedlejšího proudu.

1 Teorie

1.1 GIG rozdělení

Bylo zjištěno, že rozdělení odstupů sleduje tzv. GIG rozdělení, jehož hustota pravděpodobnosti je definována jako

$$g(x) = A \cdot \Theta(x) \cdot x^{\alpha} \cdot e^{-\beta/x} \cdot e^{-\lambda x}, \tag{1}$$

kde A představuje normalizační konstantu.

1.2 Rozbor úlohy

Úkolem je zjistit, jak se změní rozdělení odstupů, pokud se do provozu na hlavní komunikaci zapojí k vozidel z komunikace vedlejší. Je třeba tedy definovat jednotlivé pojmy a zavést jisté předpoklady.

Předpokládejme tedy, že po hlavní komunikaci se pohybuje n vozidel, odstupy mezi těmito vozidly jsou náhodně generovány z GIG rozdělení, tedy $x_i \sim g(x)$. Na vedlejší komunikaci je připravena nekonečná řada vozidel, které mají za cíl zařadit se do provozu na hlavní komunikaci. Každé z těchto nových vozidel má taktéž vlastní rozestup, označme jej jako y, který si chce udržet od předchozího vozidla. Pro odstup y platí, že je generován ze stejného rozdělení, tj. $y \sim g(x)$.

Předpokládejme, že odstupy na hlavní komunikaci jsou konstantní po celou dobu pohybu po komunikaci. Dále předpokládejme, že mezi vozidly neexistuje potenciál, že jedno vozidlo neovlivňuje jiná vozidla. V takovém případě, pokud se vozidlo z vedlejší komunikace zařadí mezi vozidla na hlavní komunikaci, nedojde ke změně jiných odstupů mezi vozidly než u těch, mezi které se vozidlo z vedlejší komunikace zapojilo. Tuto situaci můžeme ilustrovat na Obr. 1.

(a) Situace před zařazením.

(b) Situace po zařazení.

Obrázek 1: Porovnání rozestupů před a po zařazení nového vozidla do provozu.

Podobné zjednodušení nám může dále přinášet problémy, které jsou diskutovány v následující sekci.

Po celou dobu budeme pracovat s normovaným a škálovaným GIG rozdělením, tedy střední hodnota je rovna jedné, stejně jako integrál dané pravděpodobnostní hustoty. Hodnoty použitých parametrů jsou $\alpha = 0, \beta = 1.65$.

Cílem je zjistit, jak se změní rozdělení při zařazení nových vozidel do provozu.

1.3 Nastavení simulace a možné problémy

V simulaci můžeme použít mnoho různých nastavení, pracovat s různými parametry a porovnávat výsledky. Zkoumaná nastavení:

1) Předpokládáme, že x i y pochází ze stejného rozdělení. Jediná podmínka pro zařazení j-tého vozidla do i-tého odstupu na hlavní komunikaci je $P_1 : x_i > y_j$.

2) Podmínka pro zařazení je modifikovaná. Neřešíme pouze odstup nového vozidla od vozidla před ním, ale i za ním. Za vozidlem musí zůstat mezera, která je pevně stanovená jako konstanta r. Volíme $r = 0.5$, což zhruba odpovídá 10% kvantilu GIG rozdělení s parametry $\alpha = 0, \beta = 1.65$. Podmínka dostává formu $P_2 : x_i > y_j + r$.

3) Opět požadujeme, aby nově připojení vozidlo mělo i jistou mezeru za sebou, minimální velikost této mezery však není konstantní, ale relativní vůči požadovanému odstupu od vozidla předchozího, konkrétně se musí jednat alespoň o 10 % z požadovaného odstupu. Podmínka zařazení je modifikována na $P_3 : x_i > 1.1 \cdot y_j$.

2 Implementace

Veškerá implementace byla provedena v programovacím prostřední Julia. Kódy jsou dostupné na adrese https://github.com/masenka31/fjfi_projects/tree/main/2020-2021/MMD. Kód by měl být čitelný i pro uživatele MATLABu, případně Pythonu.

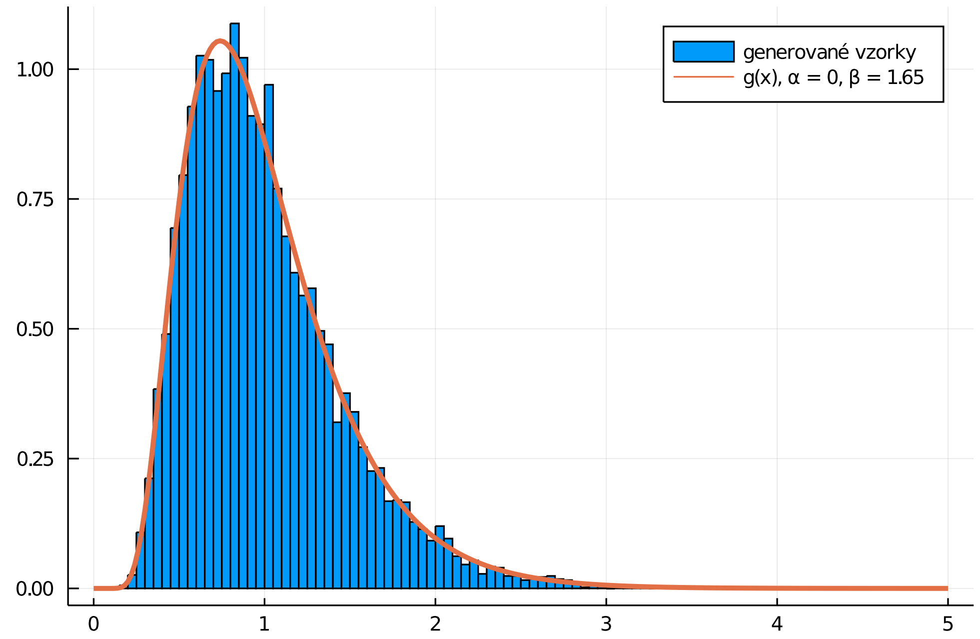
2.1 GIG

Prvně je třeba implementovat samotné GIG rozdělení a vytvořit funkci, která bude z tohoto rozdělení náhodně generovat body. GIG rozdělelí má 3 parametry, my však budeme zadávat pouze parametry α, β, parametr λ lze spočítat pomocí funkce `la(a, b)`. Všechny funkce jsou v kódu 1.

Kód 1: Funkce GIG rozdělení

```
g(a, b) = 4 .* b ./ (4 .+ a)
la(a, b) = @. a + b + (3 - exp(-sqrt(g(a, b))))/2
Heaviside(x) = x > 0 ? x : 0

function gig(x, a, b)
    lambda = la(a, b)
    x = Heaviside.(x)
    K = @. besselk(a+1, 2*sqrt(lambda*b))
    A = @. 1/(2*(sqrt(b/lambda))^(a+1)*K)
    @. A * x^a * exp(-b/x) * exp(-lambda*x)
end
```



Obrázek 2: Histogram pro 10k nagenerovaných vzorků a porovnání s teoretickou GIG křivkou.

Pro vytvoření náhodného generátoru z takto definovaného GIG rozdělení byla použita funkce `sample(x, w, n)` se třemi parametry:

- x – vektor všech možných hodnot, ze kterých lze generovat,
- w – vektor vah, které přidávají pravděpodobnost každému bodu z x, je typu `ProbabilityWeights` a je spočítán jako `w = GIG(x)`,
- n – počet bodů, které chceme vygenerovat.

Jelikož $x \sim g(x)$ má nulovou pravděpodobnost pro $x < 0$ a zároveň se hustota pravděpodobnosti pro $x > 4$ blíží 0, byly pro generaci zvoleny pouze body z intervalu $(0, 5)$, vzorkováno bylo s přesností 10e-4. Na Obr. 2 můžeme vidět porovnání histogramu 10k nagenerovaných bodů s teoretickou hustotou pravděpodobnosti. Generátor se tedy pro naše potřeby zdá dostatečně přesný.

2.2 Zařazení vozidel

Algoritmus pro provedení simulace je jednoduchý. Nejdříve vygenerujeme n vzorků prostorových rozestupů z GIG rozdělení $\rightarrow$ vektor x. Dále vygenerujeme rozestup pro první vozidlo čekající na vedlejší komunikaci y_1. Pro první odstup x_1 zkontrolujeme podmínku $x_1 > y_1$. Pokud je podmínka splněna, vozidlo se řadí mezi vozidla 1 a 2, z odstupu x_1 se tak stanou odstupy 2: y a $x_1 - y$. Navíc se připraví nové vozidlo y_2 a $i \leftarrow i + 1$. Pokud podmínka splněna není, index $i \leftarrow i + 1$ a postup opakujeme. Ve chvíli, kdy $i = n$, simulace je dokončena.

Nové rozestupy jsou ukládány do nového vektoru `xx`. Je pak možné z rozdílu délek vektoru `x` a `xx` zjistit, kolik vozidel se zařadilo.

Samotná simulace je provedena jako `for` cyklus pro všechny rozestupy ve vektoru x. Implementace je jednoduchá, v `if` podmínce je pak jen třeba zaměnit za příslušné podmínky P_1, P_2, P_3. Výsledek můžeme vidět v kódu 2. Funkce `push_in(x,y,i)` pouze přidá prvek `y` do vektoru `x` na pozici `i+1`.

Kód 2: Simulační smyčka

```
n = Int(1e5)
x = gig_rand(n)
xx = deepcopy(x)
y = gig_rand(1)
j = 0
@showprogress "Simulate..." for i in 1:n
    if x[i] > y
        xx[i+j] = y
        xx = push_in(xx, x[i]-y, i+j)
        j += 1
        y = gig_rand(1)
    end
end
```

Pro získání robustnějších výsledků byla vytvořena speciální simulační funkce, kterou můžeme vidět v kódu . Tato funkce má dva argumenty, `iter` je počet provedených simulací a `p` představuje podmínku, vybírat můžeme z `p1, p2, p3`.

Kód 3: Simulační funkce

```
function simulate(iter, p::Function=p1)
    procento = []
    X = []
    XX = []
    for k in 1:iter
        n = Int(1e5)
        x = gig_rand(n)
        xx = deepcopy(x)
        y = gig_rand(1)
        j = 0
        @showprogress "Simulation $k/$iter:  " for i in 1:n
            if x[i] > p(o)
                xx[i+j] = o
                xx = push_in(xx, x[i]-y, i+j)
                j += 1
                y = gig_rand(1)
            end
        end

        pripojeno = length(xx) - length(x)
        pripojeno_procent = pripojeno/length(xx)*100
        push!(procento, pripojeno_procent)
        push!(X, x)
        push!(XX, xx)
    end
    return procento, X, XX
end
```

3 Výsledky

Simulace byla provedena vždy pro $n = 100000$. Každá taková simulace byla provedena 20x. Následně bylo spočítáno, kolik % z aut na hlavní komunikaci pocházelo na konci simulace z komunikace vedlejší. Díky tomu získáme zhruba představu o tom, kolik aut by se při dané podmínce průměrně zařadilo do provozu. Dále byly také pro každý případ vytvořeny histogramy původních rozestupů x i nových rozestupů x' (kde už jsou započítaná nová vozidla) pro minimální a maximální procento. Pro každou podmínku pak byla pomocí Kolmogorov-Smirnov testu testována hypotéza, zda vektory x a x' pocházejí ze stejného rozdělení.

Výsledné hodnoty procentuálního poměru „nových“ vozidel vůči celkovému počtu jsou pak pro všechny podmínky přehledně uvedeny v tabulce 1.

3.1 Podmínka P_1

Podmínka P_1 je pro zapojení vozidel nejpříznivější. Počítá s tím, že vozidlo nezajímá, jaký bude mít rozestup od vozidla za sebou. Pravděpodobnost zařazení je tak větší než u podmínek P_2 a P_3.

Celkem se průměrně zvětšil počet vozidel na hlavní komunikaci o $m = 8.51 \pm 2.545$ procent. Na obrázku 3 můžeme vidět histogramy pro dvě ze simulací, jedna pro minimální procento, druhá pro maximální procento připojených vozidel. U obou obrázků je vidět, že se koncentruje více vozidel s rozestupy blízkými nule. Výsledné rozdělení již nevypadá jako GIG, chybí mu totiž plató v nule. KS test pro oba případy silně zamítá hypotézu, že by vektory x a x' pocházely ze stejného rozdělení.

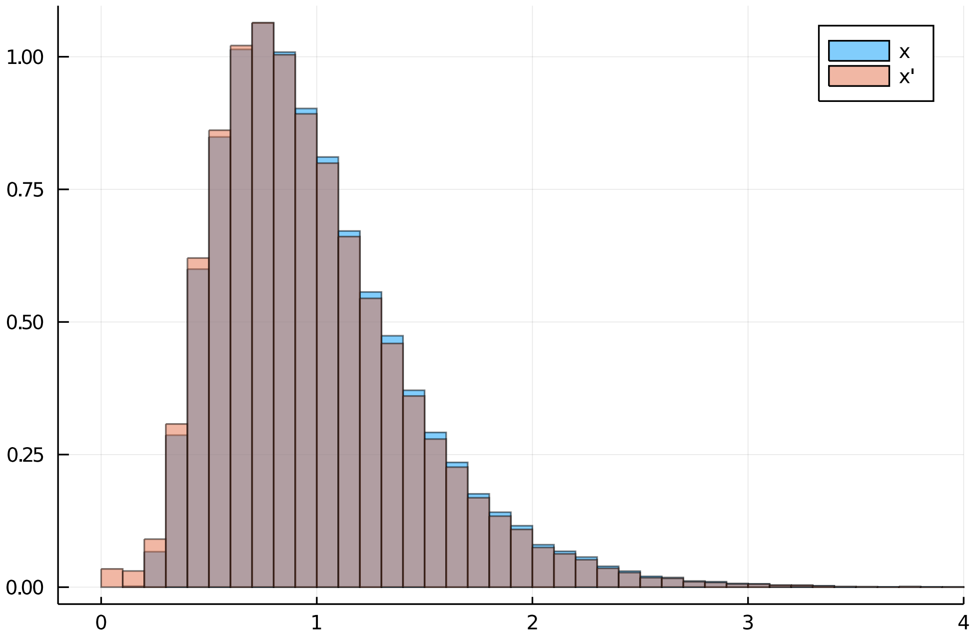
3.2 Podmínka P_2

Pro podmínku P_2 se v průměru počet vozidel navýšil o 2.55 ± 0.78 procenta, což více než 3x méně než při podmínce P_1. Na Obr. 4 můžeme vidět výsledné histogramy. Je zde patrné posunutí nového vektoru rozestupů x' více k 0 a lehké navýšení histogramu jako takového oproti původnímu x. Pro minimální připojené procento z histogramu 4a už KS test nezamítá hypotézu stejného rozdělení tak silně, nicméně stále zamítá.

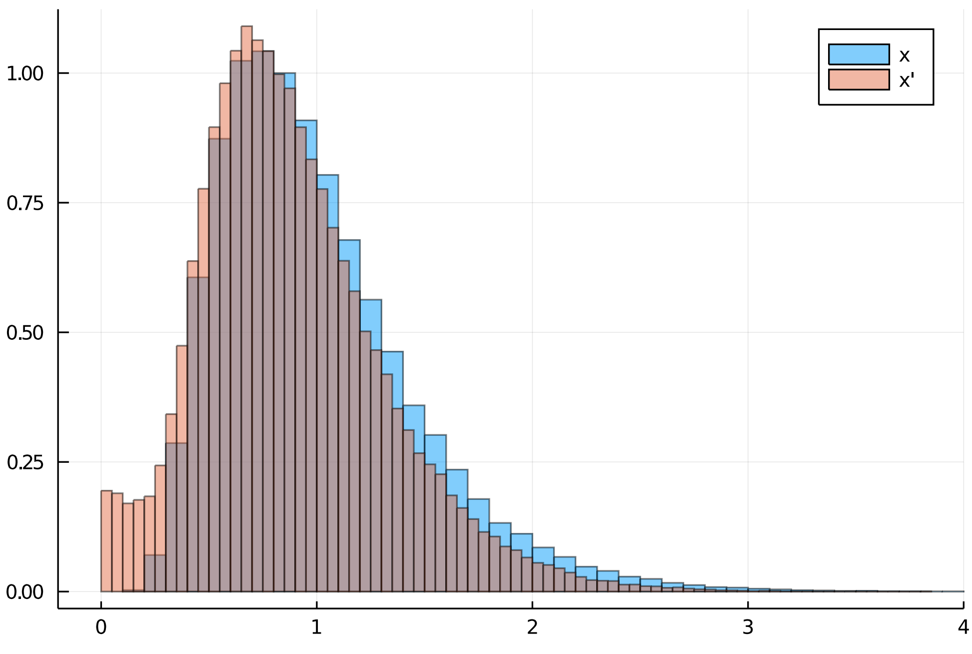
3.3 Podmínka P_3

Poslední podmínka má největší rozdíl mezi minimální a maximální procentuální hodnotou připojených vozidel. Obecně v průměru představují vozidla z vedlejší komunikace 4.43 ± 2.21 % ze všech vozidel na konci simulace. Na Obr. 5 můžeme znovu vidět příslušné histogramy. Jak vidíme na histogramu 5a, pro který se zapojilo na hlavní komunikaci pouze 276 vozidel k původním 100k, se rozdělení téměř nezměnilo a KS test nezamítá hypotézu, že by vektory x a x' patřily do stejného rozdělení. Opačná situace nastává pro maximální procento, kdy se připojilo 8439 vozidel a rozdělení více připomíná rozdělení pro podmínku P_1.

V tabulce 1 jsou vidět hodnoty pro procento připojených vozidel přehledně pro všechny tři podmínky.

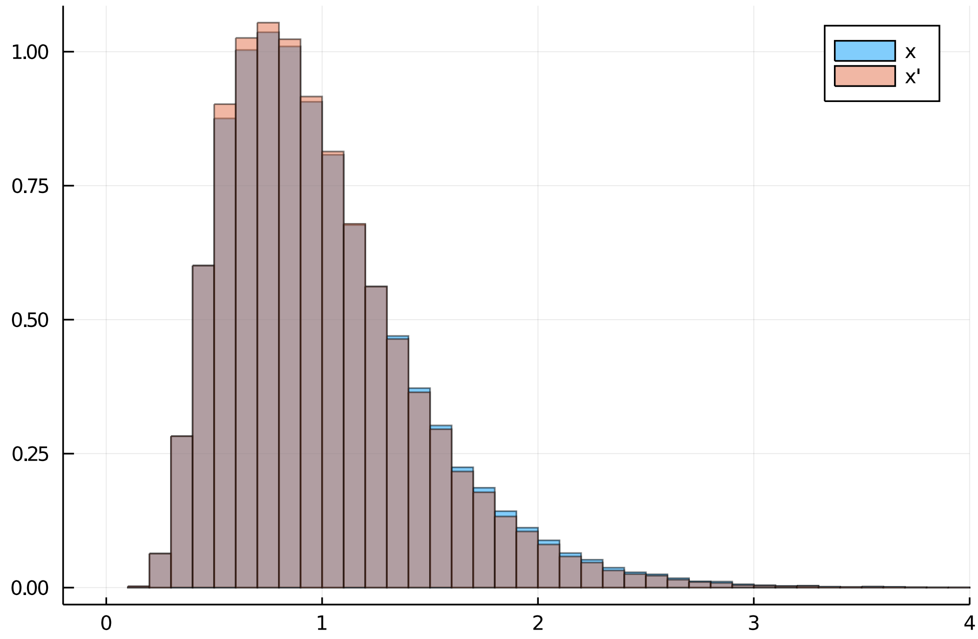


(a) Histogram pro minimální procento připojených vozidel.

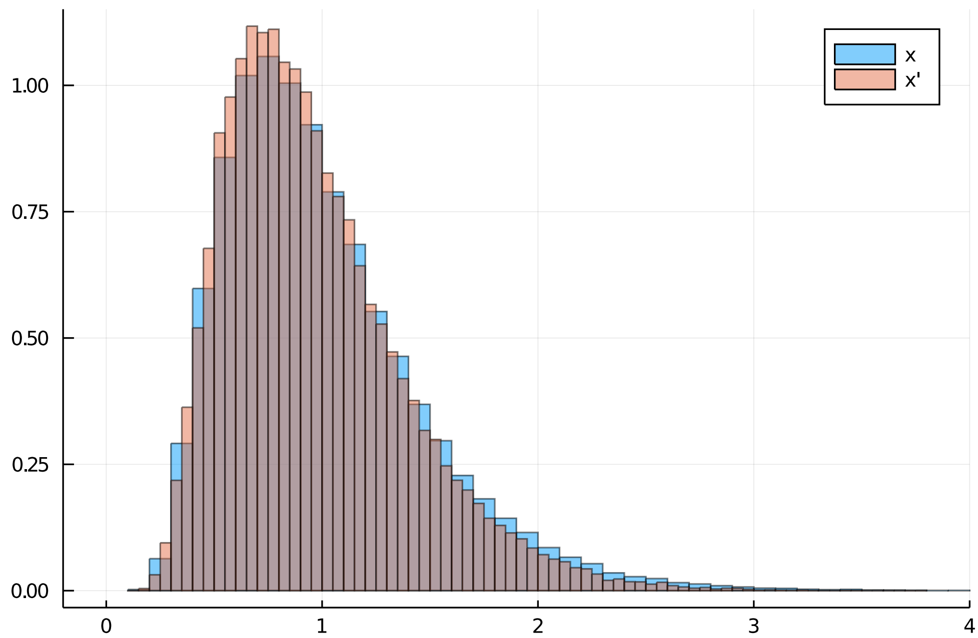


(b) Histogram pro maximální procento připojených vozidel.

Obrázek 3: Histogramy rozestupů mezi vozidly na hlavní komunikaci před (x) a po (x') připojení k vozidel z vedlejší komunikace za podmínky zařazení P_1.

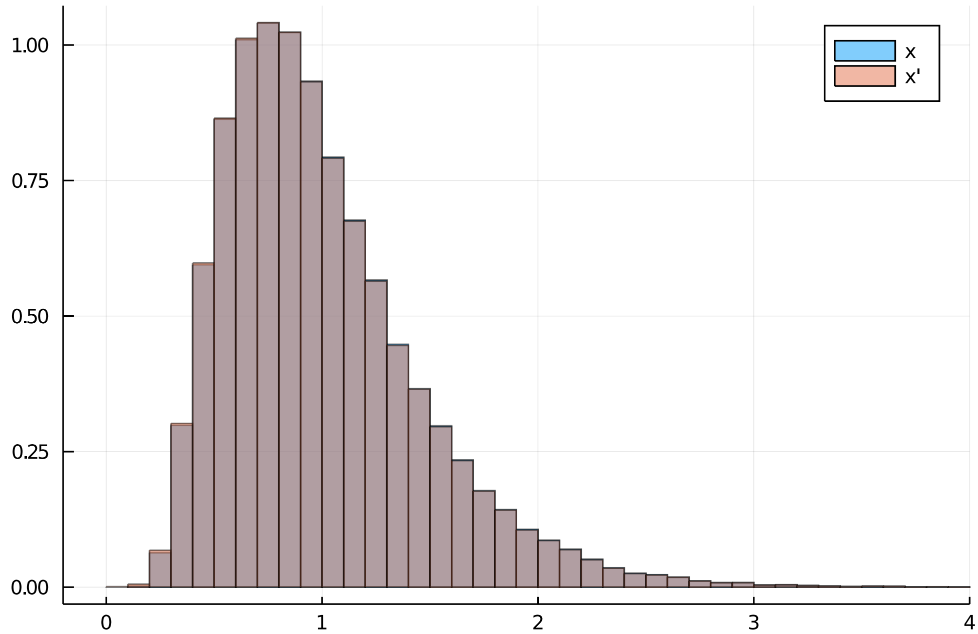


(a) Histogram pro minimální procento připojených vozidel.

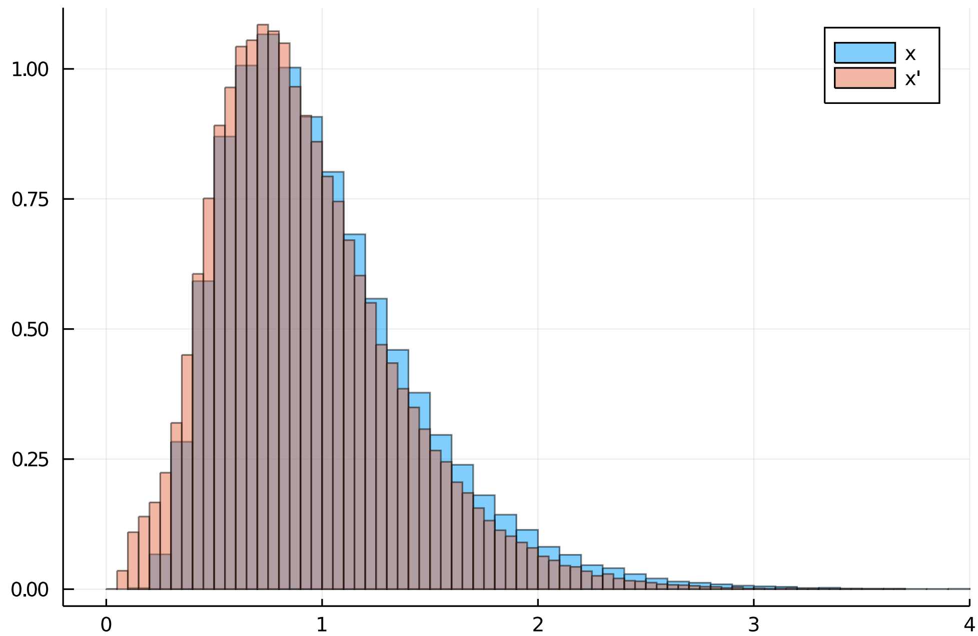


(b) Histogram pro maximální procento připojených vozidel.

Obrázek 4: Histogramy rozestupů mezi vozidly na hlavní komunikaci před (x) a po (x') připojení k vozidel z vedlejší komunikace za podmínky zařazení P_2.



(a) Histogram pro minimální procento připojených vozidel.



(b) Histogram pro maximální procento připojených vozidel.

Obrázek 5: Histogramy rozestupů mezi vozidly na hlavní komunikaci před (x) a po (x') připojení k vozidel z vedlejší komunikace za podmínky zařazení P_3.

	minimum	medián	průměr	maximum	std
P_1	2.01	9.46	8.71	11.39	2.54
P_2	1.27	2.82	2.55	3.66	0.78
P_3	0.28	5.13	4.43	7.78	2.21

Tabulka 1: Tabulka hodnot pro provedení 20 simulací pro každou ze tří podmínek.

4 Diskuze

Je samozřejmě na místě diskutovat, jak reálná je provedená simulace. Představíme-li si podobnou křižovatku v reálné situaci, pravděpodobně nenastane tak extrémní případ jako zde. Připojených vozidel je velmi málo, což by mohlo vést k neúměrně dlouhému čekání na vedlejší komunikaci. Zároveň vůbec neuvažujeme interakci mezi jednotlivými vozidly, což je velké zjednodušení.

Nicméně, ze simulace vychází, že pokud vozidlům nastavíme pouze předepsanou vzdálenost od vozidla před sebou, kterou si chce udržet, nedostáváme již GIG rozdělení, místo toho dostáváme spoustu vozidel, které mají velmi malý odstup od vozidla za sebou. Pokud přidáme i podmínku na vzdálenost mezi vozidlem zařazujícím se a vozidlem na ním, dostáváme již rozdělení více podobné GIGu, ovšem také se nám do hlavní komunikace zařazuje mnohem méně vozidel.

Nabízelo by se vyzkoušet i jiná generující rozdělení. Příkladem by mohlo být rozdělení s větším rozptylem na hlavní komunikaci a menším rozptylem na komunikaci vedlejší. Nicméně najít takové parametry by mohlo být složité.

Simulaci dále ovlivňují také méně pravděpodobné vysoké hodnoty požadovaného odstupu vozidla na vedlejší komunikaci. Pokud takové vozidlo požaduje výrazně větší odstup než je na hlavní komunikaci běžný, bude také déle čekat na ideální mezeru a zahltí tím vedlejší komunikaci. Tuto situaci dobře známe i z reálného provozu, kdy je například řidič začátečník nebo jsou jeho reakce pomalé.

5 Závěr

Ukázalo se, že za daných podmínek při zapojení dostatečného počtu vozidel z komunikace vedlejší na komunikaci hlavní se původní rozdělení rozestupů liší od nového. Navíc při využití podmínky P_1 už úplně ztrácíme GIG rozdělení i původní plató a získáváme velké množství odstupů blízkých nule.