SKE - RBD

Michaela Mašková

15. července 2021

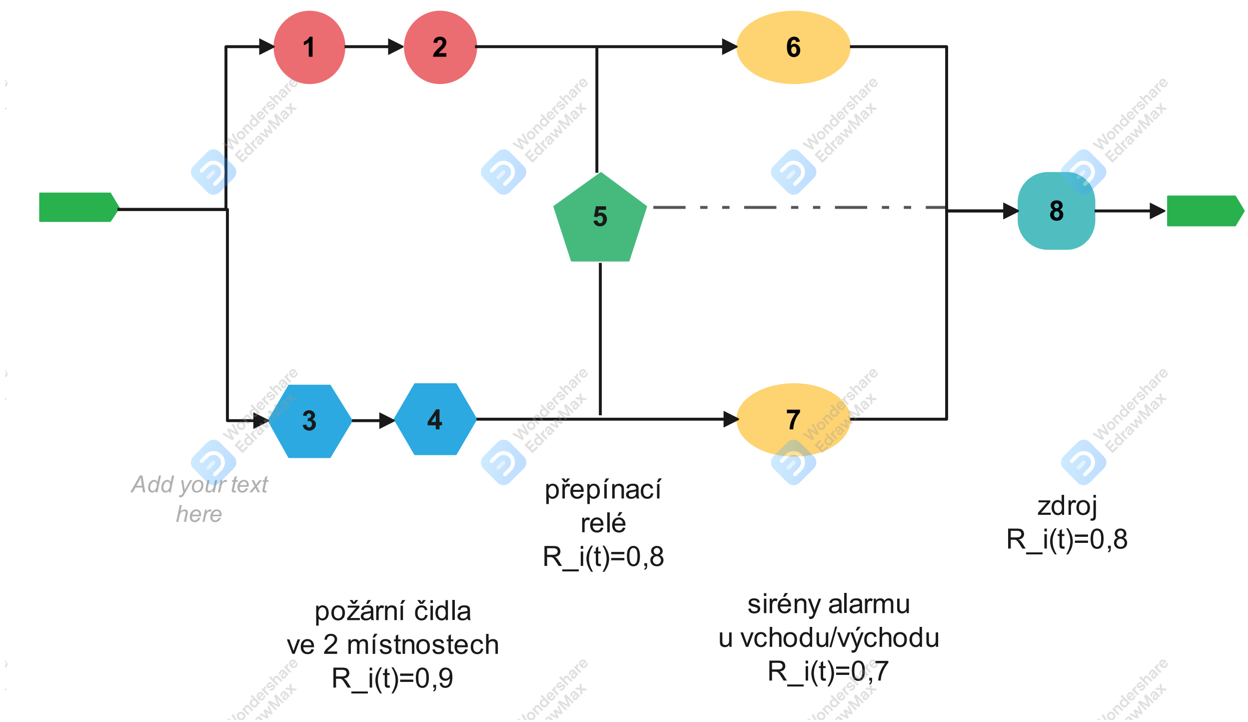
Tento protokol má za úkol zpracovat Reliability Block Diagram. Vypracován byl v akademickém roce 2020/2021.

1 Zadání

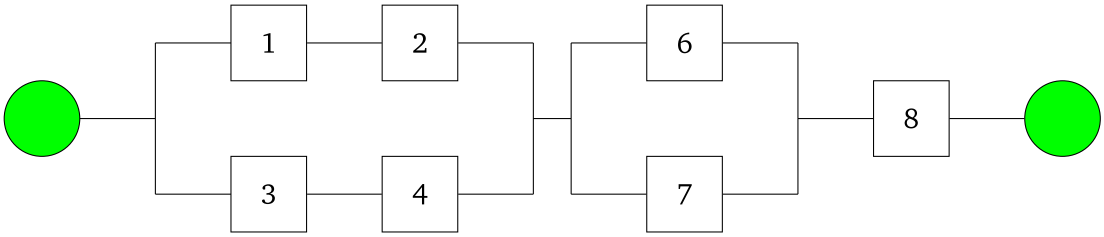
Úkoly:

1. Vyjádřete spolehlivost systému $R(t)$ s i.d. komponentami $R_i(t)$.
2. Dobrovolně: Najděte MTTF systému pro i.i.d komponenty s $r_i(t) = \lambda = \text{const.}$.

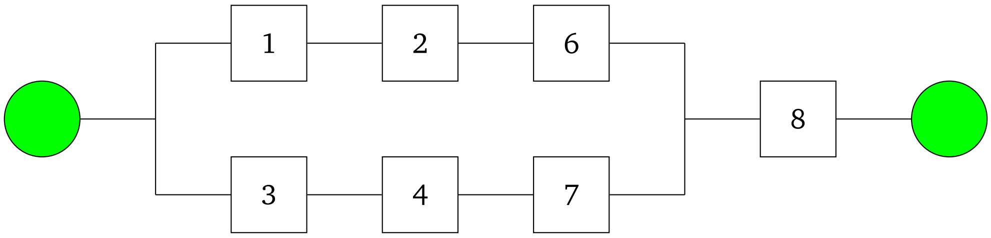
Zadání RBD je na Obr. 1.



Obrázek 1: Zadání RBD pro SKE protokol.



Obrázek 2: RBD pro $x_5 = 1$.



Obrázek 3: RBD pro $x_5 = 0$.

Spolehlivosti jednotlivých komponent nejsou stejné:

$$\begin{aligned} R_{\{1,2,3,4\}}(t) &= 0.9 \\ R_5(t) &= 0.8 \\ R_{\{6,7\}}(t) &= 0.7 \\ R_8(t) &= 0.8 \end{aligned}$$

2 Vypracování

2.1 Celková spolehlivost systému

Jak můžeme vidět ze zadání, v systému se nachází celkem 8 komponent, nejedná se o klasické sériové nebo paralelní zapojení, ani jejich čistou kombinaci. Proto použijeme rozvoj

$$\phi(\mathbf{x}) = x_i \phi(1_i, \mathbf{x}_{-i}) + (1 - x_i)\phi(0_i, \mathbf{x}_{-i}) \tag{1}$$

pro 5. komponentu.

Zvolíme-li $x_i = x_5$, dostaneme dva separátní systémy. Systém pro $x_5 = 1$ je na Obr. 2, systém pro $x_5 = 0$ pak na Obr. 3. Jak můžeme vidět, systémy se poměrně zjednodušily a už můžeme postupně používat známé poučky pro sériová a paralelní zapojení.

Pro sériově zapojených n id komponent platí

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t), \tag{2}$$

pro paralelně zapojených n id komponent je pak spolehlivost systému

$$R_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t)). \tag{3}$$

Nejdříve spočítáme spolehlivost pro systém se zapojenou 5. komponentou. Použijeme postupně vzorce (2) a (3) a získáme tak

$$\begin{aligned} R_{x_5=1} &= [1-(1-R_1R_2R_6)(1-R_3R_4R_7)]\cdot R_8 = \\ &= \left[1-(1-0.9^2\cdot 0.7)(1-0.9^2\cdot 0.7)\right]\cdot 0.8 = \\ &= \left[1-(1-0.9^2\cdot 0.7)^2\right]\cdot 0.8 = 0.650008 \end{aligned}$$

Pokud pátá komponenta zapojená nebude, dostáváme

$$\begin{aligned} R_{x_5=0} &= [1-(1-R_1R_2)(1-R_3R_4)]\,[1-(1-R_6)(1-R_7)]\cdot R_8 = \\ &= \left[1-(1-0.9^2)(1-0.9^2)\right]\,[1-(1-0.7)(1-0.7)]\cdot 0.8 = \\ &= \left[1-(1-0.9^2)^2\right]\left[1-(1-0.7)^2\right]\cdot 0.8 = 0.7017192 \end{aligned}$$

Zbývá oba výpočty spojit dohromady. Využijeme tedy vzorce (1) a také vztahů

$$R_S(t) = \mathbb{E}[\phi(\mathbf{x})] \tag{4}$$

$$R_i(t) = \mathbb{E}x_i. \tag{5}$$

Dosazením získáváme

$$\begin{aligned} R_S(t) &= \mathbb{E}\left[x_5\phi(1_5,\mathbf{x}_{-5}) + (1-x_5)\phi(0_5,\mathbf{x}_{-5})\right] = \\ &= \mathbb{E}[x_5]\cdot\mathbb{E}[\phi(1_5,\mathbf{x}_{-5})] + (1-\mathbb{E}[x_5])\cdot\mathbb{E}[\phi(0_5,\mathbf{x}_{-5})] = \\ &= R_5\cdot R_{x_5=1} + (1-R_5)\cdot R_{x_5=0} = \\ &= 0.8\cdot 0.650008 + (1-0.8)\cdot 0.7017192 = 0.72535104 \end{aligned}$$

Celková spolehlivost systému je tedy $R_S(t) = 0.725$.

2.2 MTTF

Předpokládejme teď, že systém komponent je iid, tedy $r_i(t) = \lambda = \text{conts}$. To také implikuje, že $R_i(t) = R(t)\ \forall i \in \hat{n}$. Platí dále $R_i(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Naše celková spolehlivost systému se dá vyjádřit jako

$$\begin{aligned} R(t) &= R\cdot\left[1-(1-R^3)(1-R^3)\right]\cdot R + (1-R)\left[1-(1-R^2)(1-R^2)\right][1-(1-R)(1-R)]\cdot R \\ &= R^2\cdot[1-(1-R^3)^2] + (1-R)\cdot R\cdot[1-(1-R^2)^2][1-(1-R)^2] = \\ &= 4R^4 - 4R^5 + 3R^7 - 2R^8 = \\ &= 4\mathrm{e}^{-4\lambda t} - 4\mathrm{e}^{-5\lambda t} + 3\mathrm{e}^{-7\lambda t} - 2\mathrm{e}^{-8\lambda t}. \end{aligned}$$

Získali jsme tak rovnici

$$R(t) = 4\mathrm{e}^{-4\lambda t} - 4\mathrm{e}^{-5\lambda t} + 3\mathrm{e}^{-7\lambda t} - 2\mathrm{e}^{-8\lambda t}. \tag{6}$$

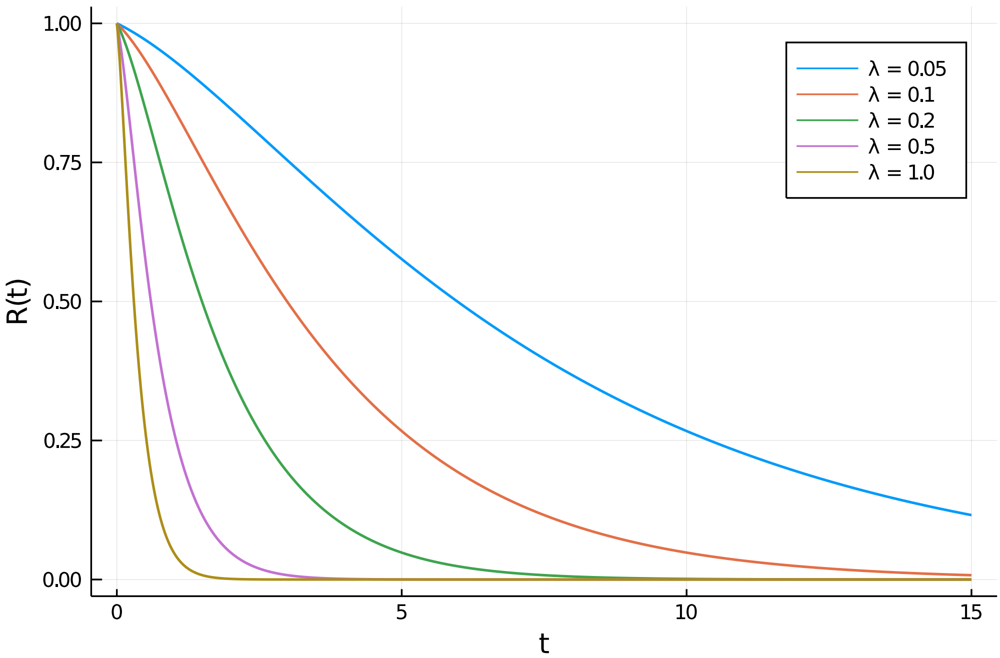
Ná závislost se můžeme podívat graficky. Na Obr. 4 můžeme vidět průběh funkce $R(t)$ pro celý systém pro různé hodnoty λ v čase t.

Nakonec zbývá spočítat MTTF (mean time to failure), pro kterou platí

$$\text{MTTF} = \int_0^\infty R(t)dt. \tag{7}$$

Dosadíme-li (6) do (7), zintegrujeme a upravíme, dostaneme

$$\text{MTTF} = \frac{53}{140\lambda}.$$



Obrázek 4: Průběh výsledné spolehlivostní funkce pro různé hodnoty λ.