

Posluchači: **Daniel KARLÍK, Michaela MAŠKOVÁ**Zadání: **OVМ model**

Odevzdáno:

Získané body:

Finální: ANO/NE

1 Teoretický úvod

1.1 Optimal Velocity Model

Optimal Velocity model je zobecněním car-following modelu FLM – *Follow the Leader Model*. Cílem každého vozidla je dosáhnout a udržovat si svoji optimální rychlost v_{opt} . Optimální rychlost se bude měnit tak, že pokud

- $v_\alpha > v_{opt} \implies$ vozidlo zpomalí, tedy $\dot{v}_\alpha < 0$
- $v_\alpha < v_{opt} \implies$ vozidlo zrychlí, tedy $\dot{v}_\alpha > 0$.

Zrychlení definujeme jako

$$\dot{v}_\alpha = S_\alpha(v_{opt}(\mathbb{X}, \mathbb{V}) - v_\alpha), \quad (1)$$

kde parametr S_α je konstanta, která kontroluje rychlost reakce (změny rychlosti). Samotná optimální rychlost pak bude funkcí vzdálenosti d_α (vzdálenost od předchozího vozidla), tedy $v_{opt}(\mathbb{X}, \mathbb{V}) = v_{opt}(d_\alpha)$, a bude splňovat následující podmínky:

- $v_{opt}(d) \xrightarrow{d \rightarrow 0^+} 0$
- $v_{opt}(d) \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} v_{max}$
- $v_{opt}(d)$ je neklesající (resp. rostoucí) funkcí.

Z výše uvedeného je tak jasné, že kvalita a vlastnosti modelu budou záviset na volbě funkce $v_{opt}(d)$. Pro ilustraci těchto vlastností tak byly zvoleny různé funkce.

1.2 Vybrané funkce v_{opt}

Už jsme naznačili, jaký má být trend funkce v_{opt} . Musí se jednat o funkci rostoucí (neklesající), která je omezená zdola 0 a shora maximální možnou rychlostí.

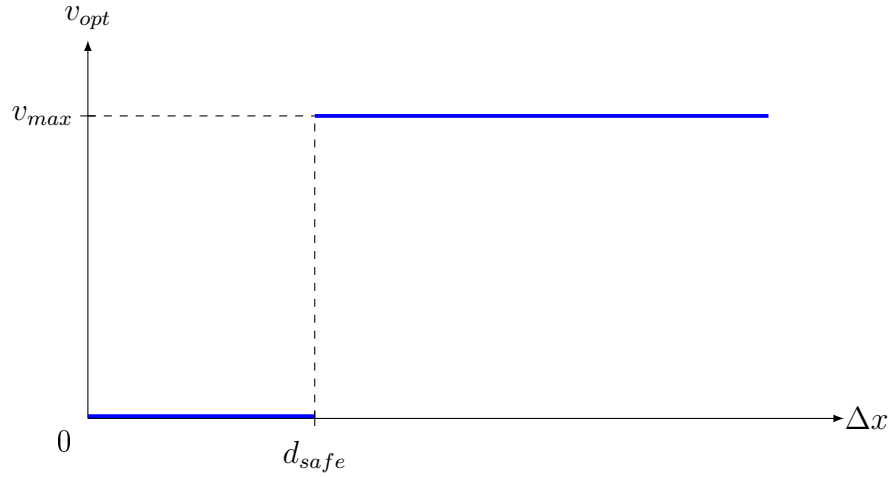
Nejjednodušší volbou je funkce

$$v_{opt}^1(x) = v_{max} \Theta(\Delta x - d_{safe}), \quad (2)$$

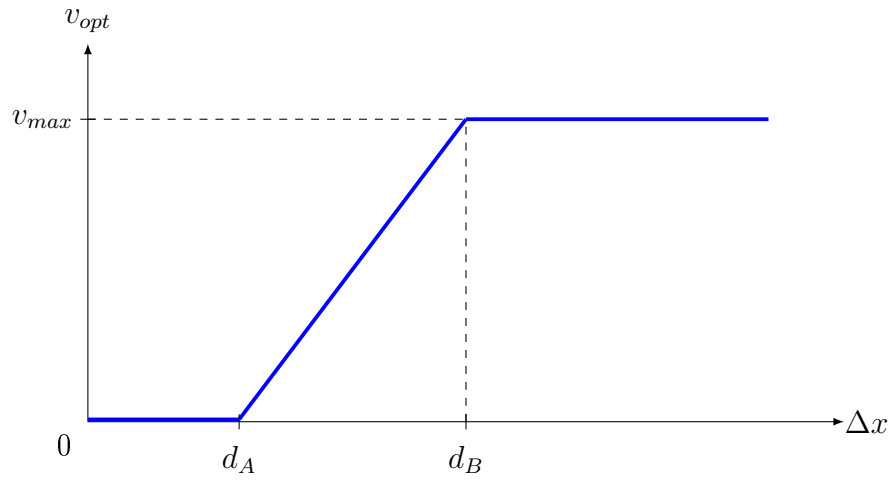
kde $\Delta x = x_\alpha - x_{\alpha-1}$. Její graf je na Obr. 1.

Další možností je funkce tvaru

$$v_{opt}^2(x) = \begin{cases} 0 & \Delta x < d_A \\ g(x) & d_A \leq \Delta x \leq d_B \\ v_{max} & d_B < \Delta x, \end{cases} \quad (3)$$



Obrázek 1: Vizualizace funkce (2).



Obrázek 2: Vizualizace funkce (3) pro $g(x) = ax + b$.

kde volba funkce $g(x)$ může být například lineární, tedy $g(x) = x$ nebo jiná. Její graf je vidět na Obr. 2. V našem případě použijeme funkce

$$\begin{aligned} v_{opt}^{(2)} &\rightarrow g^{(2)}(x) = ax + b \\ v_{opt}^{(3)} &\rightarrow g^{(3)}(x) = a(x + b)^4 + c, \end{aligned}$$

kde jednotlivé konstanty jsou dopočítány podle zvolených hodnot v_{max} , d_A a d_B .

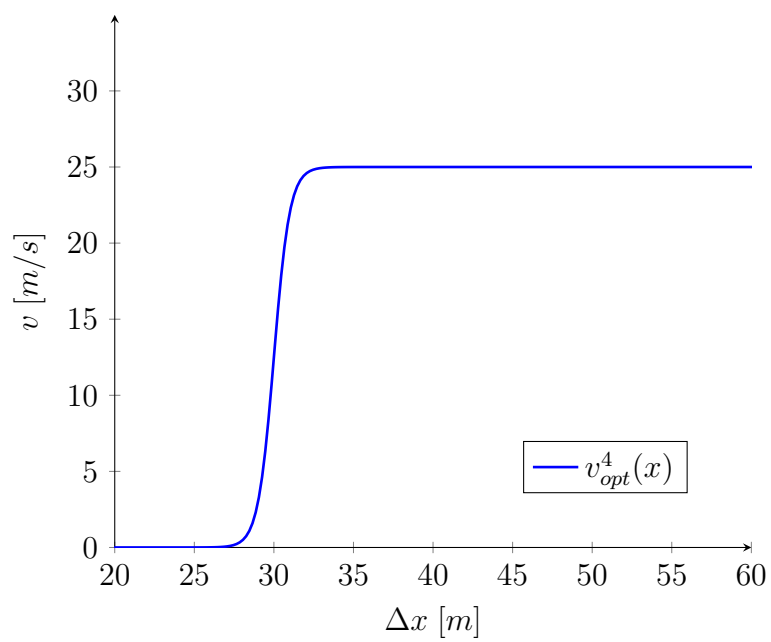
Další možnou funkcí je

$$v_{opt}^4(x) = \frac{v_{max}}{2} [\tanh(x - d_{safe}) + \tanh(d_{safe})]. \quad (4)$$

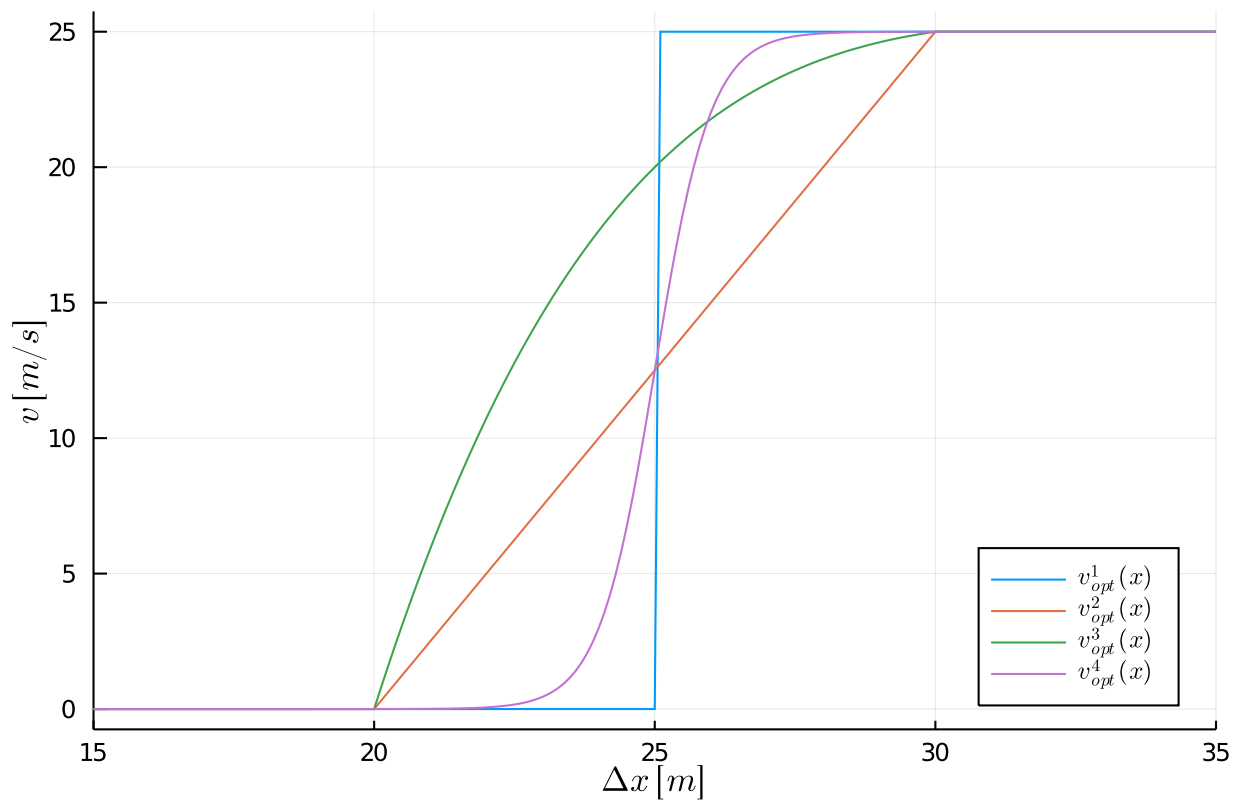
Její výhodou je, že se jedná o hladkou funkci a tedy lépe odpovídá realitě, kdy vozidlo zrychluje postupně a spojitě. Průběh funkce je vidět na Obr. 3.

Porovnání všech funkcí si můžeme prohlédnout na Obr. 4.

Zároveň si můžeme povšimnout, že chování celého modelu se bude odvíjet i od nastavení jednotlivých konstant. V případě špatně zvolených parametrů se může stát, že simulace nebude funkční.



Obrázek 3: Vizualizace funkce (4).



Obrázek 4: Porovnání zvolených funkcí optimální rychlosti.

1.3 Postup

Nejdříve je nutné definovat první vozidlo – leadera. Zvolíme pro něj funkci rychlosti, kterou se bude pohybovat, například ve tvaru

$$v_1(t) = v_0 + A \sin(Bt), \quad (5)$$

kde A, B představují konstanty. V takovém případě dostaneme pro polohu x rovnici

$$x(t) = v_0 t - \frac{A}{B} \cos(Bt) + \frac{A}{B} + x_0. \quad (6)$$

Vozidla $\alpha \in \{2, \dots, n\}$ pak následují tohoto leadera. Každé vozidlo α se pohybuje podle toho, jak jede vozidlo $\alpha - 1$ před ním, snaží se udržovat si určitou vzdálenost d_{safe} a zároveň dosáhnout maximální rychlosti.

Abychom získali polohy a rychlosti těchto vozidel, použijeme **Eulerovu metodu**. Obecně máme funkce zrychlení a rychlosti, pro které platí

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv(t)}{dt} \\ v(t) &= \frac{dx(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Eulerova metoda spočívá v rozdělení časového intervalu s krokem h . Pokud pak známe počáteční hodnoty $x(t_0), v(t_0)$ a $a(t_0)$, v následujícím kroku dostaneme hodnoty

$$\begin{aligned} v(t_0 + h) &= v(t_0) + ha(t_0) \\ x(t_0 + h) &= x(t_0) + hv(t_0). \end{aligned}$$

Takto můžeme spočítat hodnoty $x(t), v(t)$ pro celý diskretizovaný interval (t_0, t_{max}) . Pro výpočet zrychlení použijeme rovnici (1).

1.4 Fundamentální diagram

Fundamentální diagram dává do souvislosti tři fundamentální veličiny: tok, hustotu a rychlost. Definujeme jednotlivé veličiny a přepíšeme je do řeči mikroskopických veličin:

$$\begin{aligned} J &= \frac{\text{\#individuů}}{\text{délka časového intervalu}} = \frac{N}{T} = \dots = \frac{1}{\langle \Delta t \rangle} \\ \rho &= \frac{\text{\#individuů}}{\text{velikost úseku}} = \frac{N}{|A|} = \dots = \frac{1}{\langle \Delta x \rangle} \\ v &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha \in \tilde{N}} v_\alpha, \quad v_\alpha = \frac{\text{délka úseku}}{\text{délka časového intervalu}} = \frac{s_\alpha}{T} \\ J &= \rho \cdot v. \end{aligned} \quad (7)$$

Veličiny J, ρ a v budeme počítat pro různé počty částic v systému, od 2 do 100. Všechny částice budou startovat ze stejného bodu $x_{start} = 0$. Časový detektor bude umístěn ve vzdálenosti $x_D = 250$ m, v ten samý čas zaznamenáme i aktuální rychlosti vozidla. Veličinu ρ spočítáme pomocí vzorce (7).

S_α	v_{max}	d_{safe}	d_a	d_b	v_0	A	B	h
4	25	25	20	30	$v(0)$	10	0.5	0.05

Tabulka 1: Tabulka použitých konstant.

2 Simulace

2.1 Skript

Samotná simulace byla provedena pro nastavení konstant, které jsou vypsány v tabulce 1.

Následně byl spuštěn `for` cyklus, kdy byly v každé iteraci spočítány příslušné veličiny a částice se posunuly.

Kód 1: Funkce pro provedení simulace a výpočet trajektorií.

```

1 function [Xn, Vn] = OVM(XX,VV,Sa,v_max,d_safe,da,db,v0,A,B,n,delta,opt,volba,h)
2 % počáteční nastavení
3 t0 = 0;
4 x0 = delta * (n - 1);
5 if delta == 0
6     X = zeros(1,n);           % vektor počátečních poloh
7 else
8     X = x0:-delta:0;
9 end
10 V = zeros(1,n);             % vektor počátečních rychlostí – zvoleno 0
11 V(1) = v1(0, A, B, v0);     % přepočítání pro v1 (závisí na funkci v1)
12
13 % LOOP
14 for i = 1:1000
15     t1 = t0 + h;
16
17     % v t0 to bude vypadat takto
18     delta_x = (X(1:end - 1)-X(2:end));
19
20     if opt == 1
21         vopt = v_opt1(delta_x, v_max, d_safe);
22     elseif opt == 2
23         vopt = v_opt2(delta_x,v_max,da,db);
24     elseif opt == 3
25         vopt = v_opt3(delta_x,v_max,d_safe);
26     else
27         vopt = v_opt4(delta_x,v_max,da,db);
28     end
29
30     a_alpha = zrychleni(vopt, V(2:end), Sa);
31
32     % přechod k t1
33     [Xn, Vn] = euler1(X(2:end), V(2:end), a_alpha, h);
34     X(2:end) = Xn;
35     V(2:end) = Vn;

```

```

36
37     % výpočet pro leadera
38     X(1) = x1(t1,x0, A, B, v0);
39     V(1) = v1(t1, A, B, v0);
40
41     % posunutí času a uložení výsledků
42     t0 = t1;
43     XX = cat(1,XX,X);
44     VV = cat(1,VV,V);
45 end
46
47 % output
48 Xn = XX;
49 Vn = VV;
50
51 end

```

2.2 GUI

V této sekci si popíšeme GUI, které bylo vytvořeno pro jednoduchou vizualizaci modelů při předem zvolených parametrech a konkrétní volbě optimální rychlosti.

Jak je vidět na Obr. 5, do GUI můžeme zadávat všechny parametry užité v průběhu celé práce, tedy parametry A, B, v_0 popisující rychlost prvního vozidla vztahem (5); parametr S_α vystupuje v GUI jako S_a ; v_{max} jako v_max ; d_{safe}, d_a, d_b jako d_safe, da, db .

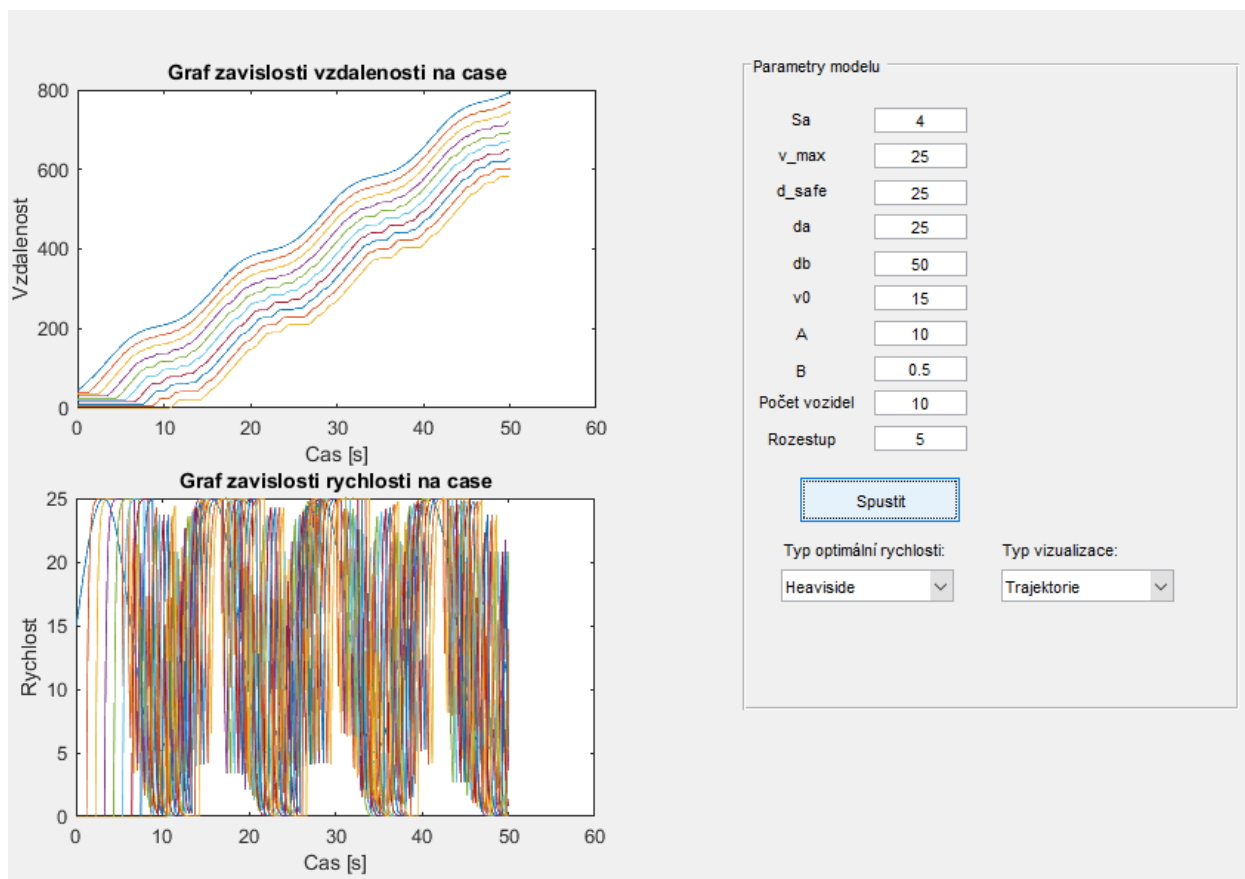
Okno označeno „Počet vozidel“ mění celkový počet vozidel v modelu. Okno „Rozestup“ ovlivňuje rozestupy mezi sousedními vozidly na počátku simulace.

Následně se zde vyskytují dva Pop-upy. První označen popisem „Typ optimální rychlosti:“ nabízí výběr mezi všemi čtyřmi tvary optimální rychlosti, jež jsme zavedli dříve. Druhý označený jako „Typ vizualizace:“ nabízí na výběr dvě možnosti, kde lze vybrat, zda chceme ukázat simulaci modelu nebo jeho trajektorii, obojí podle navolených parametrů.

Tlačítko s nápisem „Spustit“ buďto vykreslí trajektorie nebo spustí simulaci, podle toho která možnost byla vybrána.

Stojí za zmínku, že po spuštění simulace se nejdříve spustí vykreslování rychlostí jednotlivých vozidel v dané vzdálenosti a až po skončení této simulace se začne přehrát druhá ukazující jednotlivá vozidla a jejich vzájemné polohy. Tento proces nelze zastavit dokud nedojde do konce.

Změna parametru h figurujícího uvnitř Eulerovy metody je vnitřní proměnnou a není možné ji z GUI změnit.



Obrázek 5: Ukázka GUI.

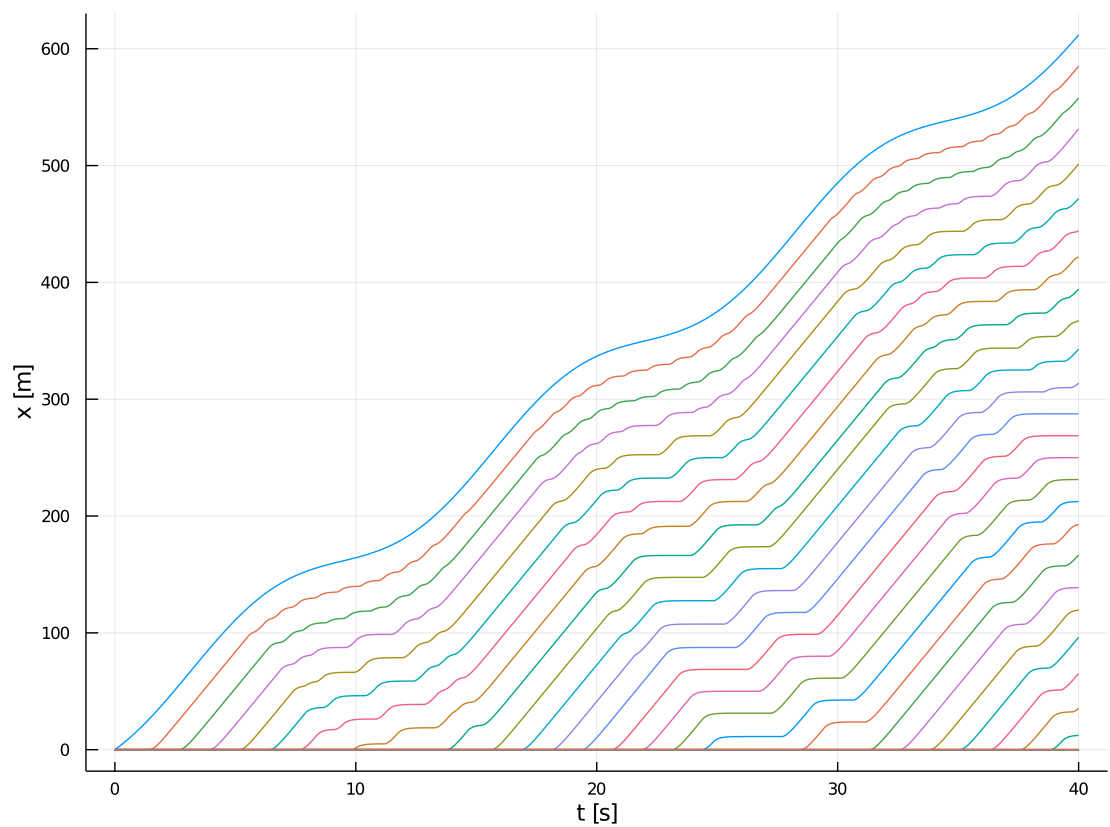
3 Výsledky a diskuze

3.1 Trajektorie

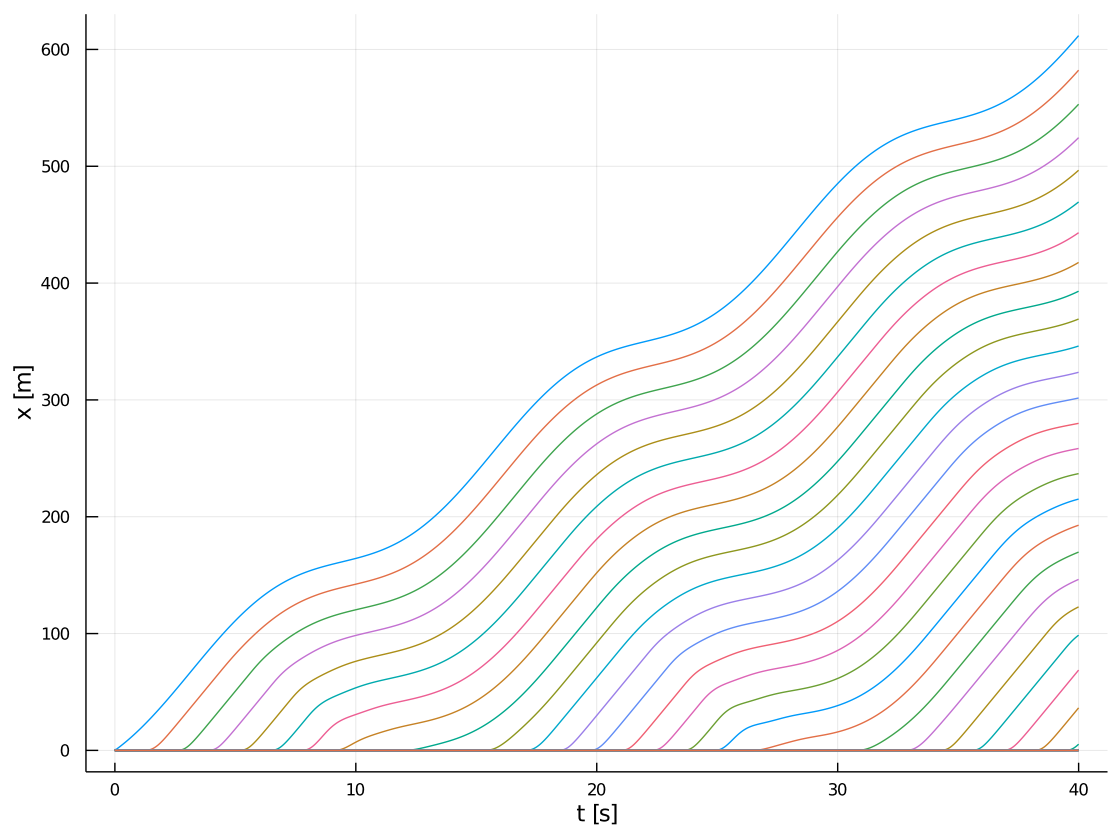
Nejprve se podíváme na porovnání trajektorií vozidel. V obrázku 6 si můžeme všimnout, že změny rychlosti jsou výrazné, proto v trajektoriích jednotlivých vozidel vidíme spoustu ostrých zubů, které vyznačují skokové zpomalování i zrychlování. To bychom od funkce $v_{opt}^{(1)}$ přesně očekávali. Navíc si můžeme všimnout, že v určitých chvílích dochází k úplnému zastavení vozidel, kdy se jejich poloha nemění.

Jiná situace nastává na obrázcích 7 a 8. U funkce $v_{opt}^{(2)}$ s lineární složkou vidíme, že každé vozidlo přímo reaguje na vozidlo přes sebou. Vidíme tak plynulý provoz, který naznačuje ideální chování řidičů. Samozřejmě tato situace neodpovídá realitě, kdy jednotliví řidiči ne reagují okamžitě (jak můžeme vidět zde), ale jejich reakce je zpomalená o reakční dobu. Funkce $v_{opt}^{(2)}$ obsahuje čtvrtou mocninu rozdílu vzdálenosti Δx . Jejich zrychlování je pomalejší než u předchozí funkce, což má za následek postupné zpomalování vozidel. V obrázku 8 si můžeme všimnout, že 2. a 3. vozidlo reagují téměř bez problému, ale už 10. vozidlo musí při počátku zpomalování leadera úplně zastavit. Stejně tak pak zastavují všechna vozidla za ním a v případě vyššího počtu vozidel by se v tomto případě již tvořila kolona.

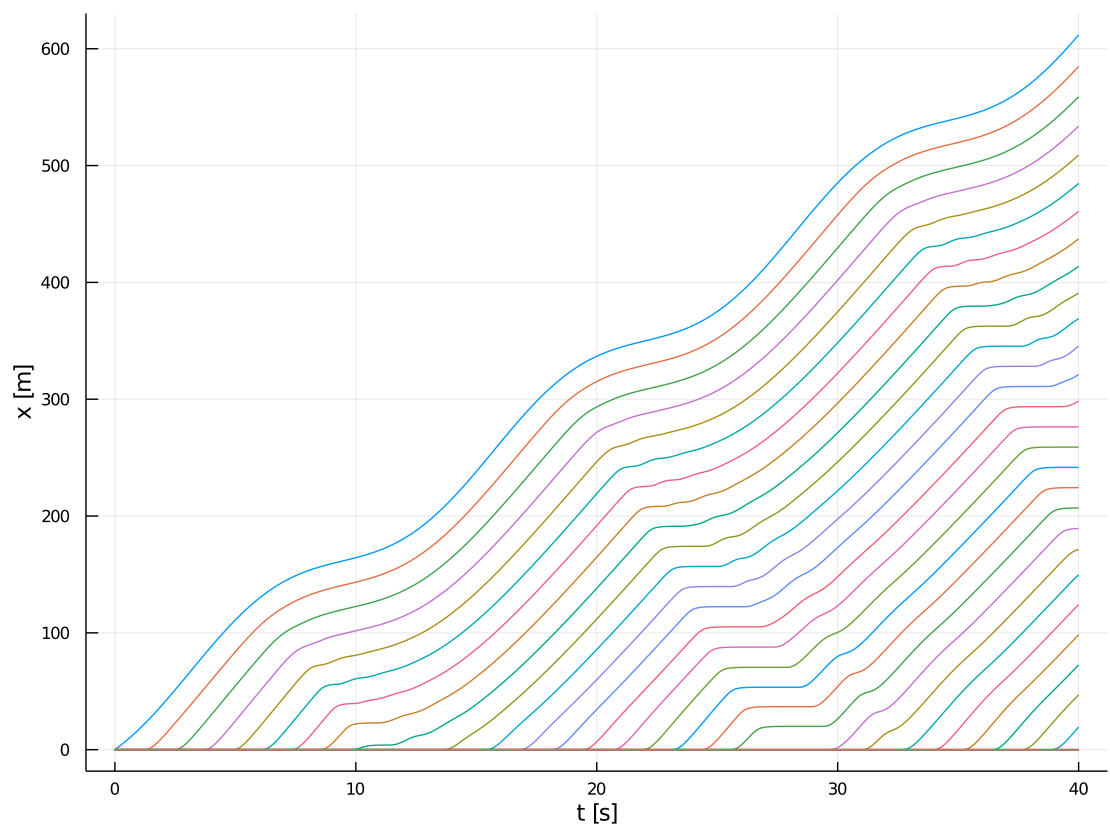
Nakonec se dostáváme k $v_{opt}^{(4)}$, trajektorie lze vidět na Obr. 9. Změny rychlostí vozidel jsou v tomto případě velmi rychlé, tedy můžeme znovu vidět „zubaté“ chování trajektorií a velmi brzy i úplné zastavení některých vozidel.



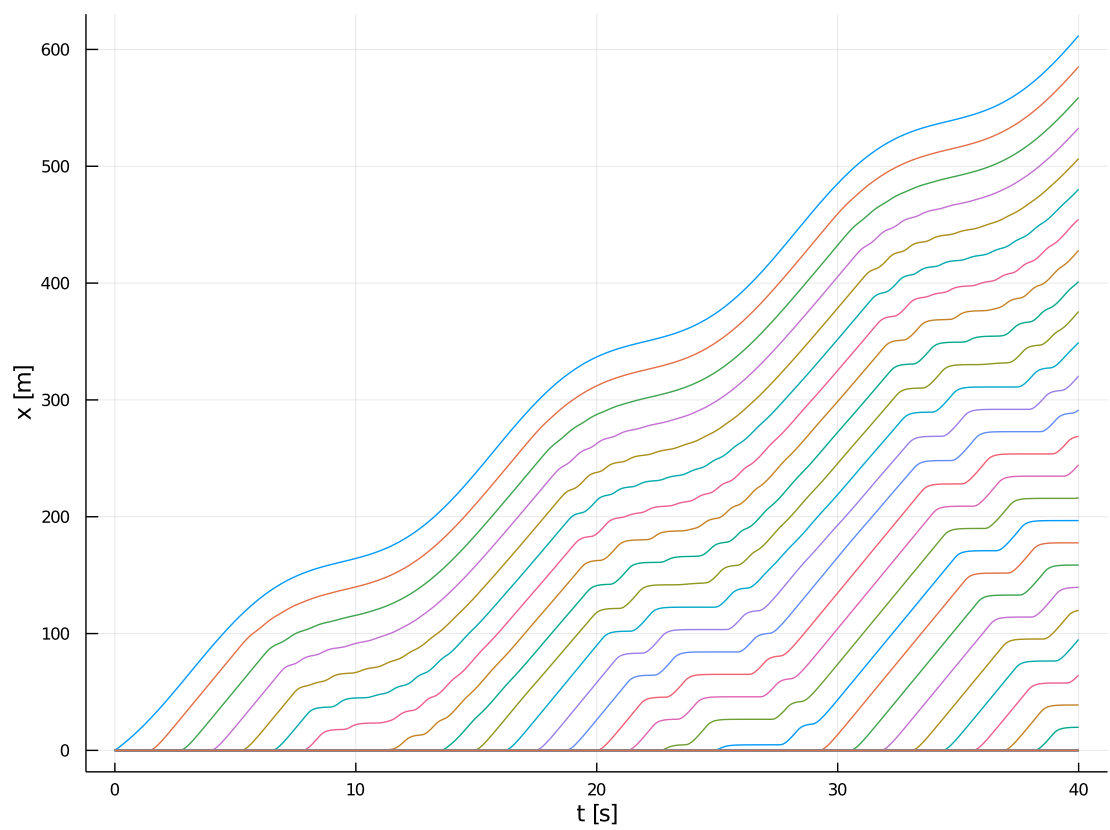
Obrázek 6: Trajektorie částic pro $v_{opt}^{(1)}$.



Obrázek 7: Trajektorie částic pro $v_{opt}^{(2)}$.



Obrázek 8: Trajektorie částic pro $v_{opt}^{(3)}$.



Obrázek 9: Trajektorie částic pro $v_{opt}^{(4)}$.

3.2 Fundamentální diagram

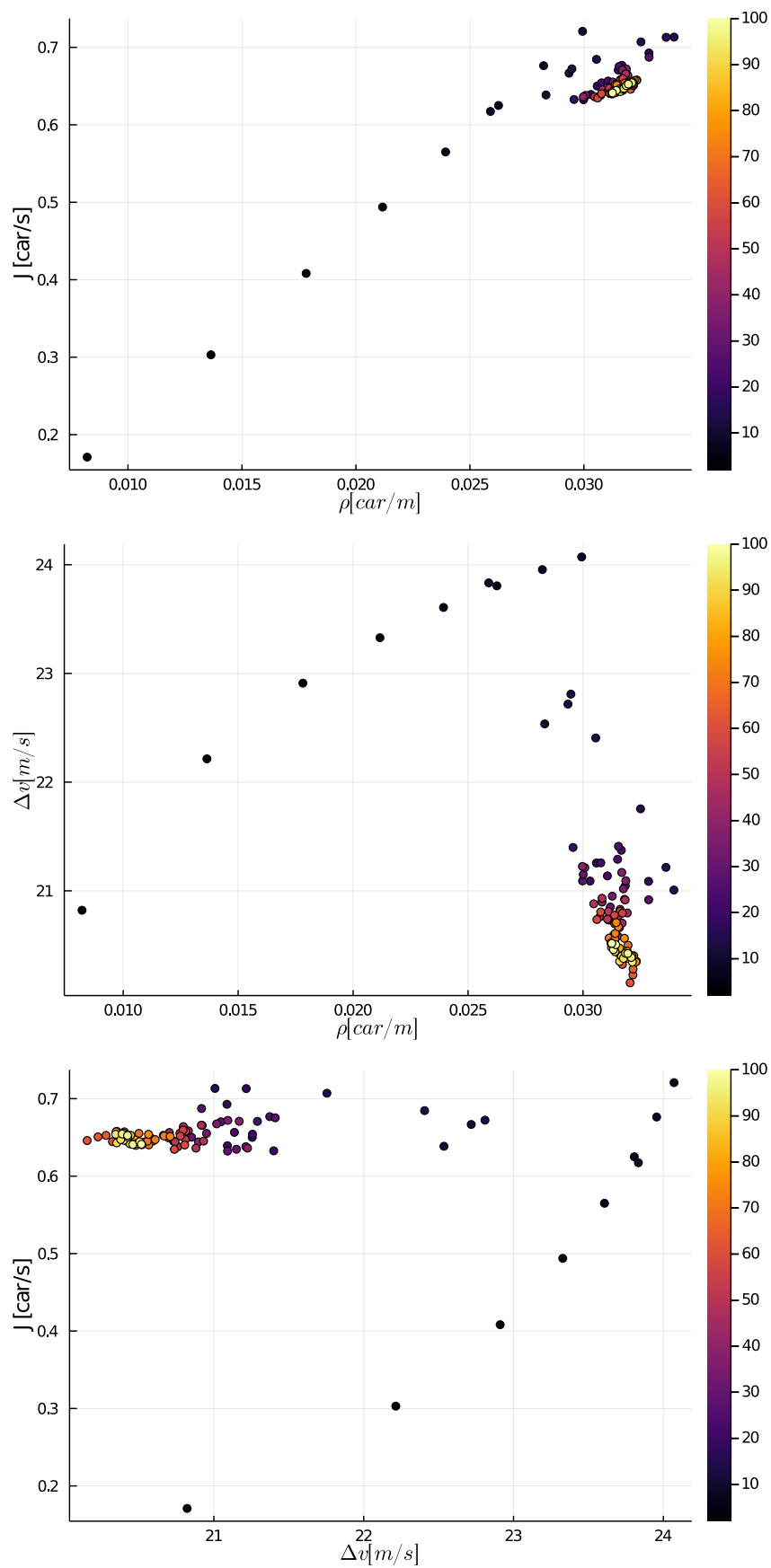
Dále nás zajímají fundamentální diagramy. Ty byly tvořeny pro různý počet částic od 2 do 100. Hodnota pro daný počet částic je tak vyznačena barevným gradientem. U všech diagramů si můžeme všimnout určité konvergence ke kombinaci fundamentálních veličin při zvyšujícím se počtu částic v systému. U všech diagramů platí, že pro velmi nízký počet částic (cca 5-10) se hodnoty pohybují určitým směrem, než začnou sledovat daný trend. Pro více než 10 částic pak tok zůstává víceméně konstantní.

Pro $v_{opt}^{(1)}$ je fundamentální diagram na Obr. 10. Tok nejdříve lineárně roste a následně zůstává převážně konstantní. To stejné platí pro průměrnou rychlost i hustotu. Velmi zajímavá situace nastává pro $v_{opt}^{(2)}$. Na Obr. 11 vidíme, že závislost veličin sleduje tvar sinusoidy leada. Naopak u $v_{opt}^{(3)}$ můžeme na Obr. 12 sledovat jistou skokovou změnu hodnot jednotlivých veličin.

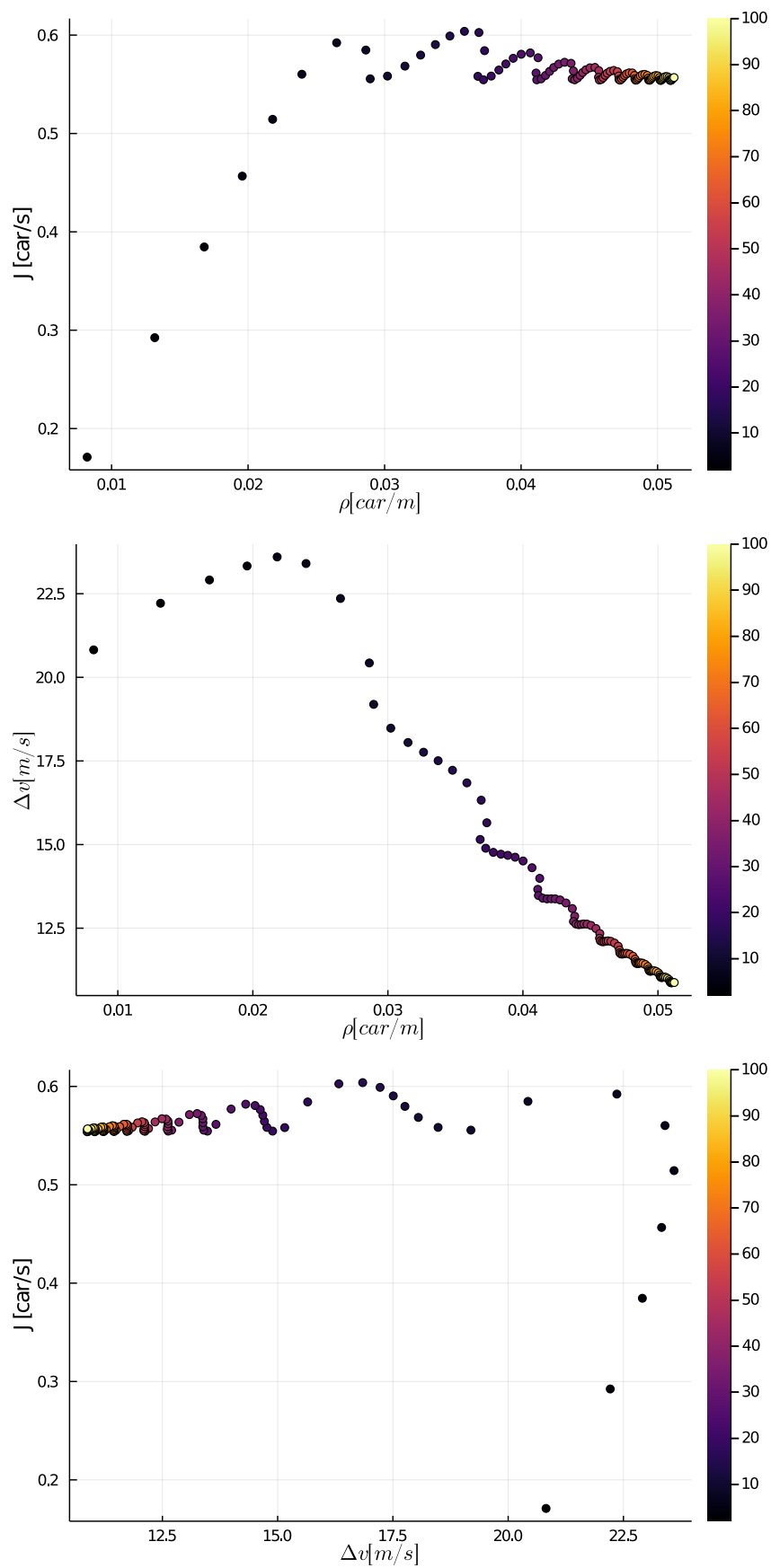
Nakonec si můžeme prohlédnout fundamentální diagramy pro $v_{opt}^{(4)}$ na Obr. 13. I zde si můžeme pro vyšší počet částic všimnout skokových změn.

Nakonec porovnáme jednotlivé fundamentální veličiny v tabulce pro počet částic $N = 100$. Maximální hodnota pro každou veličinu je vyznačena tučně. Nejvyšší průměrné rychlosti dosahuje model s $v_{opt}^{(1)}$. To je pravděpodobně způsobeno možností skokově měnit rychlost, tedy případné zrychlení na v_{max} je okamžité a je možné tak dosáhnout nejvyšší průměrné rychlosti. Na druhém místě se umístila funkce $v_{opt}^{(4)}$, která více odpovídá reálnému chování v provozu. Naopak nejnižší je průměrná rychlost pro model s $v_{opt}^{(2)}$. Vidíme tedy, že částice se sice pohybují synchronně, ale v průměru při průjezdu detektorem dosahují nízkých rychlostí. Nejvyšší tok vidíme pro $v_{opt}^{(3)}$.

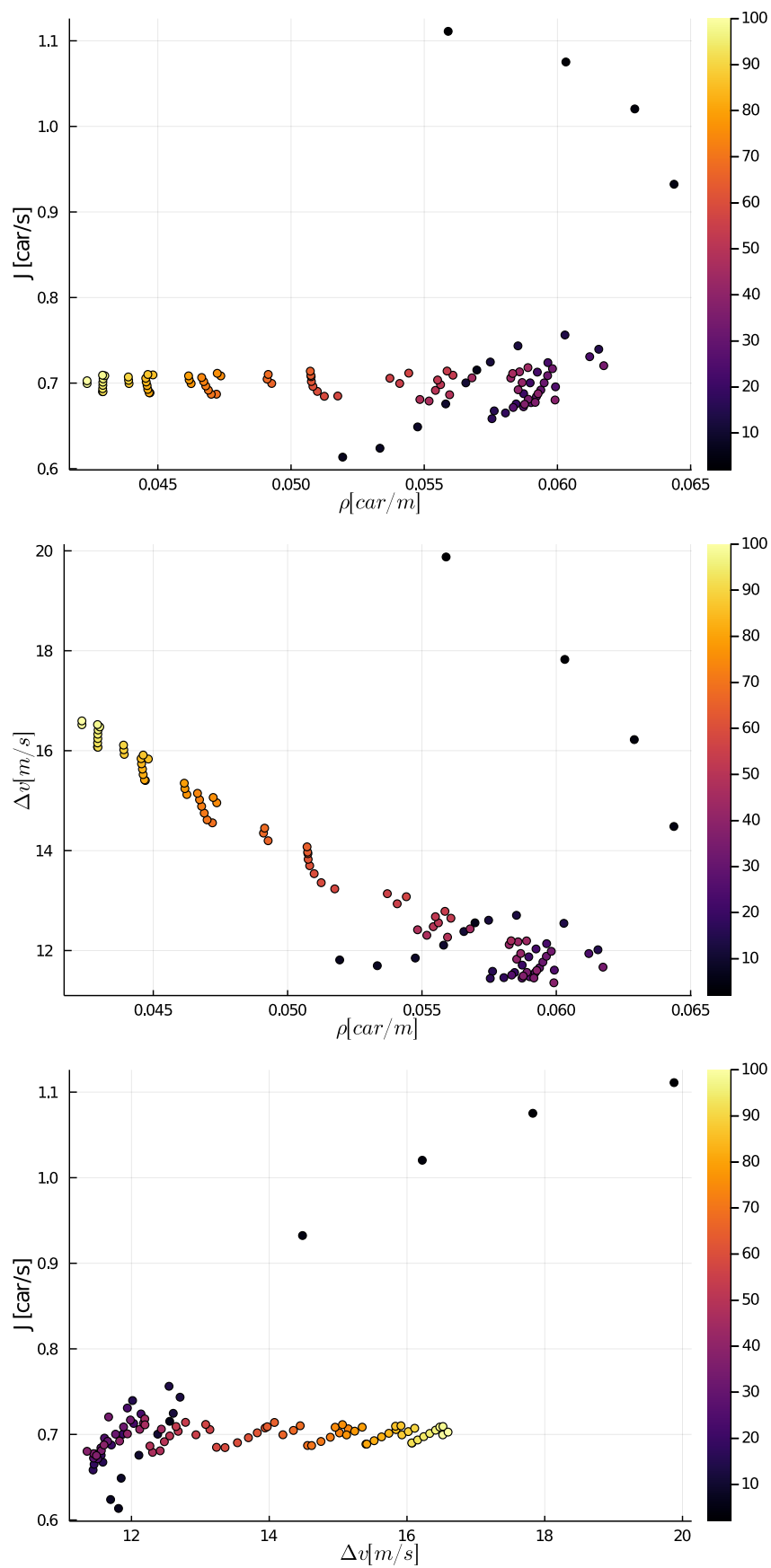
	$J[\text{car}/m]$	$\Delta v[m/s]$	$\rho[\text{car}/m]$
$v_{opt}^{(1)}$	0.64	20.52	0.03
$v_{opt}^{(2)}$	0.56	10.88	0.05
$v_{opt}^{(3)}$	0.70	16.60	0.04
$v_{opt}^{(4)}$	0.64	19.95	0.03



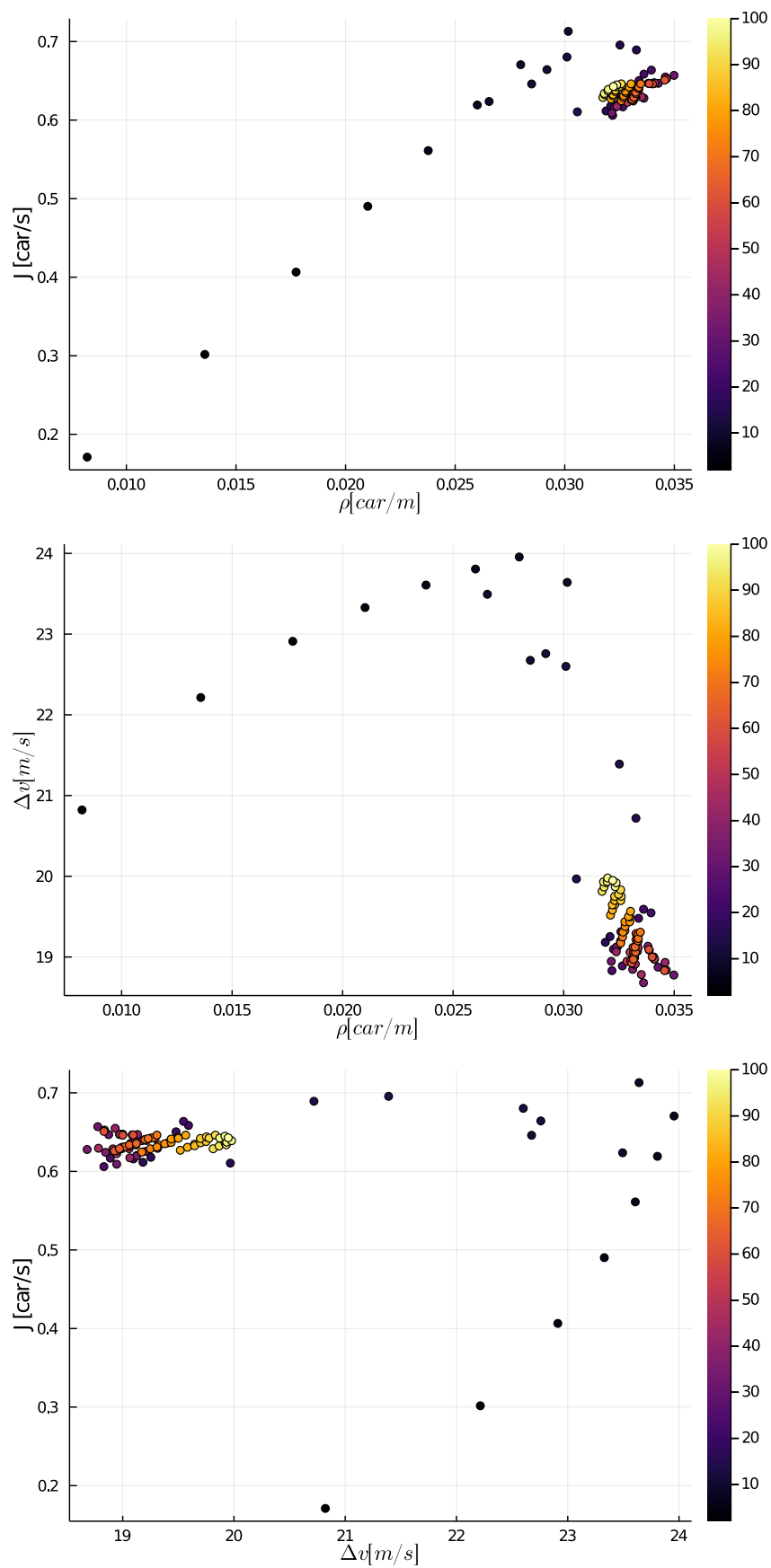
Obrázek 10: Fundamentální diagram pro $v_{opt}^{(1)}$.



Obrázek 11: Fundamentální diagram pro $v_{opt}^{(2)}$.



Obrázek 12: Fundamentální diagram pro $v_{opt}^{(3)}$.



Obrázek 13: Fundamentální diagram pro $v_{opt}^{(4)}$.

4 Závěr

V protokolu se ukázalo, že volba funkcí optimální rychlosti má vliv na chování celého systému. Jako nejideálnější se ukázala funkce $v_{opt}^{(2)}$, která měla lineární složku. Jednalo se o jedinou funkci, kde nedocházelo k úplnému zastavení některých vozidel. Nicméně tato funkce neodpovídá realitě.

Zároveň se projevila důležitost správného nastavení konstanty S_α v modelu. V případě nesprávně zvolených hodnot totiž může dojít k nefunkčnosti celé simulace, protože jednotlivé částice nedokážou dostatečně rychle reagovat (brzdit). Například pro hodnotu $S_\alpha < 1$ pak u některých optimálních funkcí docházelo k nefunkčnosti simulace.

Ve fundamentálních diagramech se projevilo, že pro zvyšující se počet vozidel jednotlivé veličiny konvergují a tok se stane víceméně konstantním. Toto chování však může být dáno i tím, že Optimal velocity model není dostačující pro popis reálného silničního provozu.

Pro 100 částic v systému byly navíc spočteny hodnoty jednotlivých fundamentálních veličin. Ukázalo se, že nejvyšší průměrné rychlosti bylo dosaženo pro $v_{opt}^{(1)}$, nejspíše proto, že pro tuto optimální rychlost se rychlost vozidel mění skokově a dokáže velmi rychle reagovat na změny. Hned na druhém místě pak byla funkce $v_{opt}^{(4)}$, která by měla nejvíce odpovídat reálnému provozu.