В матане как на войне

Учебное пособие о том как затащить у Кохася К. П.
Том II

@irdkwmnsb - Альжанов Максим
@dalvikk - Владислав Ковальчук
@gleb_shnshn - Шаньшин Глеб
@RahimHakimov - Хакимов Рахим
@JelluSandro - Шемякин Никита
@erove - Еров Егор
@NULL3301 - Нагибин Вадим
@GrigorenkoPV - Григоренко Павел
@maksim shekhunov - Шехунов Максим
@artyom448 - Фитисов Артём

May 2021

Содержание

Как это редактировать?

Распределение вариантов
TODO

Картинки можно вставлять так:

Если что то похерилось — писать Максиму (@irdkwmnsb)

$a\,b$ — маленький пробел в режиме набора мат формул
$a\quad b$ — средний
$a\qquad b$ — большой

Лайфхак: дважды нажмите на текст в пдфке и ваш курсор переместится на ее латех код

Комент
Как написать комент: В правом верхнем углу есть кнопка Review, после ее нажатия откроется поле где видны комментарии + выделив текст можно можно добавить новый тыкнув на Add comment

1 Формулировки и определения

1.3 Первообразная, неопределенный интеграл

$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ является первообразной $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \langle a, b\rangle\ \ F'(x) = f(x)$

Оперделение подразумевает, что F дифференциируема на $\langle a, b\rangle$.

Неопределённый интеграл — множество всех первообразных.

$$\int f = \int f(x)dx = \{F + C, C \in \mathbb{R}\}$$

1.4 Теорема о существовании первообразной

$$f \text{ непрерывна на } \langle a, b\rangle \Rightarrow \exists F$$

1.5 Таблица первообразных

$f(x)$	$F(x)$
k	kx
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}(n \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\log a}(a > 0, a \neq 1)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm1}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right\rvert$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$

1.6 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

$\mathcal{E}$ — множество всех ограниченных фигур (фигура — подмножетсво $\mathbb{R}^2$).

Площадь — $\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$, которое удовлетворяет:

1. *Аддитивность*: $\sigma(A_1 \sqcup A_2) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$ ($\sqcup$ — дизъюнктное объединение)

2. *Нормировка*: $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$

Ослабленная площадь — $\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$, которое удовлетворяет:

1. *Монотонность*: $E \subset D \Rightarrow \sigma(E) \leq \sigma(D)$

2. *Нормировка*: $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$

3. *Ослабленная аддитивность*: $E_1 \cup E_2 = E \in \mathcal{E}$, $E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 лежат по разные стороны от него. Тогда $\sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)/$

1.7 Определённый интеграл

Имеем $[c, d] \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Введём понятие «под графиком» для $g : [a, b] \to [0, +\infty)$:

$$\Pi\Gamma(g, [c, d]) = \{(x, y) : \ (x \in [c, d]) \wedge (0 \le y \le g(x))\}$$

Тогда **определённый интеграл** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ на $[c, d]$:

$$\int_c^d f = \int_c^d f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\Pi\Gamma(f_+, [c, d]) - \sigma\Pi\Gamma(f_-, [c, d])$$

где f_+ и f_- — положительная и отрицательная срезки (см. 1.8).

1.8 Положительная и отрицательная срезки

f - функция.
$f+ = max(f, 0)$ - положительная срезка.
$f- = max(-f, 0)$ - отрицательная срезка.

1.9 Среднее значение функции на промежутке

$f \in C[a, b]$, тогда $\frac{1}{b-a} \int_a^b f\,dx$ - среднее значение f по $[a, b]$.

1.10 Кусочно-непрерывная функция

f - кусочно-непрерывная функция на $[a, b]$ - ограниченная функция, непрерывная кроме конечного числа точек, в которых у неё разрывы I рода.
$f(x) = [x]$, $f(x) = sign(x)$.

1.11 Почти первообразная

f - некоторая функция на $[a, b]$, $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ - почти первообразная f, если:
1) $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$ кроме конечного числа точек.
2) F - непрерывна.

1.12 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

$Segm < a, b >=$ множество всевозможных отрезков лежащих в $< a, b >$.
Функция промежутка $\Phi : Segm < a, b > \longrightarrow \mathbb{R}$.
Аддитивная функция промежутка Φ:
$\forall [p, q] \in Segm < a, b >\ \forall c \in (p, q)$: $\Phi([p, q]) = \Phi([p, c]) + \Phi([c, q])$.

1.13 Плотность аддитивной функции промежутка

$f :< a, b >\to \mathbf{R}$, $\phi : Segm < a, b >\to \mathbf{R}$
ϕ - аддитивная функция промежутка.
f - плотность ϕ, если:

$$\forall\Delta \in Segm < a, b >: \inf_{x\in\Delta} f(x)\cdot l(\Delta) \le \phi(\Delta) \le \sup_{x\in\Delta} f(x)\cdot l(\Delta)$$

1.14 Выпуклая функция

$f :< a, b > - > R$ выпуклая, если

$\forall x, y \in< a, b > \alpha \in [0, 1] f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \le \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$

График f ниже любой хорды.

1.15 Выпуклое множество в R^m

$A \subset R^n$ – выпуклое, если $\forall x, y \in A :\ [x, y] \in A$

$[x, y] = \{x + t(y - x)|t \in [0, 1]\}$

1.16 Надграфик

$\{(x, y)\ x \in< a, b >\ \ y \ge f(x)\}$

1.17 Опорная прямая

Прямая в $\mathbb{R}^2$, проходящая через $(x, f(x))$, такая что график $f(x)$ лежит в одной полуплоскости относительно этой прямой.
Не путать с касательной. Например для $f(x) = x$ прямая $y = x$ – опорная, а для $f(x) = |x|$ прямые $y = kx\ \forall k \in [-1; 1]$ – опорные.
Аналогичное определение и для фигур в $\mathbb{R}^2$.

1.18 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

Путь — непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$.
$\gamma(a)$ — начало, $\gamma(b)$ — конец.
Можем представить путь в виде его координатных функций $\gamma(t) \mapsto (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$.
Гладкий путь:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \gamma_i \in C^1[a, b]$$

Вектор скорости:

$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

Носитель пути — множество всех значений γ на $[a, b]$, обозначется C_γ.

1.19 Длина гладкого пути

Длина пути — фнукция l : множество всех гладких путей $\mathbb{R}^m \mapsto [0, \infty)$, такая что:

1. *Аддитивность*: $\forall \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m \quad \forall c \in (a, b) \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$
2. $\forall \gamma_1, \gamma_2$ — гладкие, если существует сжатие $T : C_{\gamma_1} \to C_{\gamma_2}$, то $l(\gamma_2) \le l(\gamma_1)$.

   Сжатие — это такое $T : A \to B$, что $\forall a_1, a_2 \in A \quad \rho(T(a_1), T(a_2)) \le \rho(a_1, a_2)$
3. Линейный путь $\gamma : t \mapsto (tv + u) \Rightarrow l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$, где $u, v \in \mathbb{R}^m$

1.20 Вариация функции на промежутке

https://youtu.be/TWcK0dCUw98?t=53m25s

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$\operatorname*{Var}_a^b(f) = \sup_n \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$f \in C^1[a, b] \Rightarrow \operatorname*{Var}_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)| dx$$

1.21 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение

https://youtu.be/TWcK0dCUw98?t=1h10m43s

Дробление отрезка $[a, b]$ — набор точек $\{x_i\}_{i=0}^n : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.
Ранг дробления — $\max_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$.
Оснащение дробления — множество точек $\{\xi_i\}_{i=0}^n : \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

1.22 Риманова сумма

Интегральная *(риманова)* сумма для разбиения $\{x_i\}$, произвольной функции f и оснащения $\{\xi_i\}$ это следующая сумма:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

1.23 Постоянная Эйлера

https://youtu.be/SmopNVfVQss?t=1524

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} .... + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$

где $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{5}{8}$ - постоянная Эйлера

1.24 Допустимая функция

https://youtu.be/OKlsGDA9VYA?t=5014

$f : [a, b) \to \mathbb{R} \quad -\infty < a < b \leq +\infty$ (Можно $(a, b] - \infty \leq a < b < +\infty$)

f **допустима**, если f — кусочно-непрерывна на $[a, A] \ \ \forall A \in (a, b)$

1.25 Несобственный интеграл, сходимость, расходимость

https://youtu.be/OKlsGDA9VYA?t=5260

$$\Phi(A) := \int_a^A f dx$$

Если $\exists \lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A) \in \mathbb{R}$ с чертой, то это **несобственный интеграл** который обозначается $\int\limits_a^{\to b} f dx$.

Если $\nexists \lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A)$ то несобственный интеграл не существует, но если $\lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A) \in \mathbb{R}$, то несобственный интеграл **сходится**. (За сходиться на экзамене -балл) Если этот предел бесконечный или не существует, то несобственный интеграл **расходится**.

Пример не КПК (2019 M3137)

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{A \to \infty} \int_1^A \frac{1}{x^p} dx$$

$$\int_1^A \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{A^{1-p} - 1^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \\ \ln A - \ln 1, & p = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{A \to \infty} \int_1^A \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ +\infty, & p < 1 \\ +\infty, & p = 1 \end{cases}$$

$p > 1$ — интеграл сходится, $p \leq 1$ — интеграл расходится.

1.26 Критерий Больцано–Коши сходимости несобственного интеграла

https://youtu.be/OKlsGDA9VYA?t=5884

Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, f - допустима на $[a, b)$ Тогда сходимость интеграла $\int_a^{\to b}$ равносильна условию:

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta \in (a, b) \quad \forall A, B \in (\delta, b) \quad |\int_A^B f| < \epsilon$

Доказательство. Тривиально из определения предела. ☐

1.27 Гамма функция Эйлера.

https://youtu.be/v-Kjgwc6uSU?t=168
Γ — **гамма-функция Эйлера**

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

Свойства

1. При $t > 0$ интеграл сходится
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \Gamma(1) = 1 \implies \Gamma(n+1) = n!$
3. $\Gamma(t)-$ выпуклая по t.

$$f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha f_x(t_1) + (1-\alpha) f_x(t_2)$$

$$\int_0^{+\infty} x^{(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)-1} e^{-x} dx \leq \alpha \int_0^{+\infty} x^{t_1-1} e^{-x} dx + (1-\alpha) \int_0^{+\infty} x^{t_2-1} e^{-x} dx$$

$\implies \Gamma(t)$ - непрерывна

4. $\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{t} \overset{t \to +0}{=} \frac{1}{t}$

1.28 Верхний и нижний пределы

https://goo.su/62FQ

- Дана последовательность x_n.
- $y_n := \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$
- $z_n := \inf(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$
- **Верхний предел** x_n: $\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n$
- **Нижний предел** x_n: $\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n$

1.29 Частичный предел

Если существует попоследовательность сходящаяся к точке, то эта точка есть частичный предел.

Частичный предел вещественной последовательности x_n — предел вдоль подпоследовательности n_k:

$$n_k \to +\infty, n_1 < n_2 < \dots \quad \lim x_{n_k} \in \overline{\mathbb{R}}$$

1.30 Абсолютно сходящийся интеграл, ряд

f — допустимая функция на $[a, b)$

Интеграл $\int_a^b (f)$ – абсолютно сходится, если:

1. $\int_a^b (f)$ сходится
2. $\int_a^b (|f|)$ сходится

Ряд A абсолютно сходится, если:

1. $\sum a_n$ сходится
2. $\sum |a_n|$ сходится

1.31 Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость

Числовой ряд:

$$a_1 + a_2 + a_3 \dots, \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \text{ – числовой ряд } (a_i \in \mathbb{R})$$

Частичная сумма:

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad S_n := \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ – частичная сумма}$$

Сходимость ряда:

Если $\exists \lim_{N\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, ряд сходится, иначе ряд расходится.

1.32 n-й остаток ряда

Ряд с N-ого члена

$\sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_k$ – N-й остаток ряда

1.33 Критерий Больцано–Коши сходимости числового ряда

$$\sum a_n \text{ сходится } \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \ \forall k > N \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+m}| < \varepsilon$$

1.34 Преобразование Абеля

https://youtu.be/1Y8wiAt9_ik?t=33m18s

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \qquad \left(A_m = \sum_{k=1}^{m} a_k\right)$$

Доказательство тривиально: можно легко убедится, что все слагаемые $a_i b_j$ входят в обе части одинаковое количество раз. [1]

1.35 Произведение рядов

https://youtu.be/1Y8wiAt9_ik?t=2h41m50s
$\sum a_k, \sum b_k, \qquad \gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — биекция, $\gamma(k) = (\varphi(k), \psi(k))$
Произведение рядов A и B — ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$

1.36 Произведение степенных рядов

https://youtu.be/bJiRRCj630Q?t=0s
$x \in \mathbb{R}$, x — фиксированный
Произведением степенных рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ называется ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$,
где $c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

[1] Само преобразование чем-то напоминает $\int f'g = fg - \int fg'$ но только для сумм рядов, а не интегралов функций. То есть тут A_m — что-то в духе первообразной, а $(b_{k+1} - b_k)$ — производной. Только, грубо говоря, дано у нас это в виде $\int fg = Fg + \int f(-g')$.

1.37 Бесконечное произведение

https://youtu.be/bJiRRCj630Q?t=9m19s

Бескноечное произведение $\prod\limits_{i=1}^{\infty} p_i$, где $p_i \in \mathbb{R}$. Введём обозначение для частичного произведения $\pi_N := \prod\limits_{i=1}^{N} p_i$. Пусть $\lim\limits_{N\to\infty} \pi_N = P$. Определим $\prod\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ следующим образом:

- $P \in (0, +\infty) \Leftrightarrow \prod\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ сходится к P
- $P = +\infty \Leftrightarrow \prod\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ расходится к $+\infty$
- $P = 0 \Leftrightarrow \prod\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ расходится к 0
- $\nexists \lim\limits_{N\to\infty} \pi_N \Leftrightarrow \prod\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ расходится

1.38 Скалярное произведение, евклидова норма и метрика в R^m

https://youtu.be/bJiRRCj630Q?t=2h08m40s

Скалярное произведение: $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$

Евклидова норма: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Метрика в $\mathbb{R}^m$: $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Вообще норма бывает и не только евклидовой (подробнее о том, что такое норма, смотри линал за второй сем или матан за первый). Кокнретно евклидову норму будем обозначать как $|x|$, но ни в коем случае нельзя называть её модулем.

1.39 Окрестность точки в R^m, открытое множество

https://youtu.be/bJiRRCj630Q?t=2h15m

Окрестность точки x (радиуса r) — открытый шар.

$$U(x) = U_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : |y - x| < r\}$$

Точка $x \in A$ является внутренней $\Leftrightarrow \exists U(x) \subset A$.

Открытое множество — множество, все точки которого, являются внутренними.

1.40 Сходимость последовательности в R^m, покоординатная сходимость

Пара определений того, что значит фраза: «Последовательность x_n в R^m сходится (к a)»

- $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$
- $\forall U(a) \quad \exists N : \ \forall n > N \quad x_n \in U(a)$

Похоже на $\mathbb{R}^1$, не правда ли? Лишь норма вместо модуля (забавный факт: модуль — евклидова норма в $\mathbb{R}^1$) и обобщённое определение окрестности. Если вдруг спросят сходимость функций $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, то там опять всё похоже на $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Покоординатная сходимость: $x_n \to a \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (x_n)_k \to a_k$
Аналогично для функций.

1.41 Предельная точка, замкнутое множество, замыкание

https://youtu.be/bJiRRCj630Q?t=2h16m40s

$\dot{U}(x) = U(x) \setminus \{x\}$

x **предельная точка** $A \Leftrightarrow \forall U(x) \quad \dot{U}(x) \cap A \neq \varnothing$.

Замечание: предельная точка может и не принадлежать множеству (напрмиер, 1 — предельная точка $[0, 1)$)

Замкнутое множество — множество, содержащее все свои предельные точки.

Замыкание множества — объединение множества со всеми его предельными точками.

1.42 Компактность, секвенциальная компактность, принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

https://youtu.be/bJiRRCj630Q?t=2h19m45s

Интересный факт: объединение любого семейства открытых множеств всегда открыто и пересечение конечного семейства открытых множеств тоже всегда открыто.

Покрытие множества K — такое семейство множеств $\{G_a\}_{a\in A}$, что $K \subset \bigcup\limits_{a\in A} G_a$.

Открытое покрытие — покрытие семейством открытых множеств.

В общем случае, **компактное множетсво** — множество, из любого открытого покрытия которого можно извлечь конечное подпокрытие.

Для метрических множеств **компактность** равносильна одновременной замкнутости и ограниченности.

Из компактности следует **секвенциальная компактность** — возможность из любой последовательности в этом множестве выделить сходящуюся подпоследовательность.

Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса: из всякой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^m$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

1.43 Координатная функция

$F : X \to \mathbb{R}^m$ и $x \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$. Тогда $F_1(x), \dots, F_m(x)$ —координатные функции.

1.44 Двойной предел, повторный предел

https://youtu.be/bJiRRCj630Q?t=2h32m33s
$D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка D_1, b — предельная точка D_2
$(D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\}) \subset D \quad f : D \to \mathbb{R}$
Повторный предел $\lim\limits_{x\to a} \left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y) \right)$:
$\forall x \in (D_1 \setminus \{b\})$ пусть $\exists \varphi(x) = \lim\limits_{y\to b} f(x,y)$.
Тогда если $\exists \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$, то это и есть наш повторный предел.

Двойной предел:

$$\lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x,y) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall W(A) \quad \exists U(a), V(b) : \ \forall x \in \dot{U}(a), y \in \dot{V}(b) \quad f(x,y) \in W(A)$$

Занятно: для $f(x,y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$ нет повторного предела в $(0,0)$, но есть двойной, и он равен нулю.

1.45 Предел по направлению, предел вдоль пути

https://youtu.be/wWtKfrt_ZQY?t=1h10m40s

Предел $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}^m$ по направлению $v \in \mathbb{R}^m$ $(|v| = 1)$: $\lim\limits_{t\to 0+} f(a+tv)$. В более узком понимании: $\lim\limits_{x\to a} f|_{\{a+tv, t>0\}\cap D}$

Предел вдоль пути (непрерывной кривой). $\gamma : [\alpha, \beta] \to D, \gamma(\alpha) = a \qquad \lim\limits_{t\to\alpha} f(\gamma(t))$

Если предел в точке a существует, то пределы по всем направлениям/кривым тоже существуют и равны пределу в точке.

Если пределы по разным направлениям/кривым пределы различны, то предела в точке a не существует.

1.46 Линейный оператор

Оно же линейное отображение. https://youtu.be/wWtKfrt_ZQY?t=1h21m

Как и в линале,

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \text{ линейно} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

1.47 Отображение бесконечно малое в точке.

https://youtu.be/wWtKfrt_ZQY?t=1h38m40s

$$\varphi : E \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^l \text{ бескноечно мало в точке } x_0 \in \operatorname{Int} E \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \mathbb{0}$$

1.48 $o(h)$ при $h \to 0$

https://youtu.be/wWtKfrt_ZQY?t=1h40m50s

$$\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$$
$$\mathbb{0} \in \operatorname{Int} E$$
$$\varphi(h) = o(h) \text{ при } h \to 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi(h)}{|h|} \text{ б.м. при } h \to 0$$
$$\text{По-другому: } \exists \alpha(h) : E \to \mathbb{R}^l \text{ б.м. при } h \to 0 : \ \varphi(h) = |h|\alpha(h)$$

1.49 Отображение, дифференцируемое в точке

https://youtu.be/wWtKfrt_ZQY?t=1h46m03s

$$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$$
$$a \in \operatorname{Int} E$$

F дифференцируемо в точке $a \Leftrightarrow \exists$ лин.оп.$L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, \exists \alpha(h) : E \to \mathbb{R}^l$ б.м. при $h \to 0 :$

$$F(a+h) = F(a) + Lh + |h|\alpha(h)$$
$$F(a+h) = F(a) + Lh + o(h)$$
$$x \overset{\text{def}}{=} a + h, \quad \varphi(x) : E \to \mathbb{R}^l \text{ б.м. при } x \to a$$
$$F(x) = F(a) + L(x-a) + |x-a|\varphi(x)$$

1.50 Производный оператор, матрица Якоби, дифференциал

https://youtu.be/wWtKfrt_ZQY?t=1h54m42s

Оператор L из 1.49 —**производный оператор** отображения F в точке a. Обозначается $F'(a)$.

Матрица $F'(a)$ — **матрица Якоби** отображения F в точке a.

$F'(a)h$ — **дифференциал** отображения F в точке a. Под ним понимают:

- Производный оператор, т.е. линейное отображение $h \mapsto F'(a)h$
- Отображение $E \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l \quad (x, h) \mapsto F'(x) \cdot h$

1.51 Теорема о двойном и повторном пределах

https://youtu.be/wWtKfrt_ZQY?t=1h02m28s а также см. 1.44

$D_1, D_2, a, b, f, \varphi$ как в 1.44

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = A \in \bar{\mathbb{R}} \\ \forall x \in D_1 \setminus \{a\} \ \exists \varphi(x) = \lim\limits_{y \to b} f(x,y) \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{x \to a} \varphi(x)$$

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = A \in \bar{\mathbb{R}} \\ \forall x \in D_1 \setminus \{a\} \ \exists \varphi(x) = \lim\limits_{y \to b} f(x,y) \\ \forall y \in D_2 \setminus \{b\} \ \exists \psi(y) = \lim\limits_{x \to a} f(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) \\ \exists \lim\limits_{y \to b} \psi(y) \\ \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{y \to b} \psi(y) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) \end{cases}$$

1.52 Частные производные

https://youtu.be/i6m1YzUm8mU?t=37s

$$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$
$$a \in \operatorname{Int} E$$
$$k \in \{1, \dots, m\}$$
$$\varphi_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_m), \quad t \in U(a_k)$$

Тогда частная проивзодная функции f по k-й переменной в точке a_k — это

$$\varphi_k'(a_k) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_k(a_k + h) - \varphi_k(a_k)}{h}$$

Обычно используются обозначения:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a), \quad D_k f(a), \quad f_k'(a), \quad f_{x_k}'(a)$$

Вообще можно не усложнять себе жизнь всякими промежуточными $\varphi_k(t)$ и записать сразу:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + h, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_m)}{h}$$

1.53 Производная по направлению

"Направление" $\Leftrightarrow$ Единичный вектор

$$f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ a,\ h \in \mathbb{R}^m,\ |h| = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial h} := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

1.54 Градиент

$$f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ a,\ h \in \mathbb{R}^m,\ f(a+h) = f(a) + \langle L, h \rangle + o(h)$$

$L = \nabla f(a) = \operatorname{grad} f(a)$ — градиент функции f в точке a

2 Теоремы

2.3 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

Пусть функции $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразные, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Тогда:
1. Функция $f+g$ имеет первообразную и $\int(f+g) = \int f + \int g$
2. Функция αf имеет первообразную и при $\alpha \neq 0$: $\int \alpha f = \alpha \int f$.

Доказательство:
Пусть первообразная f равна F, а первообразная g равна G
1. По правилам дифференцирования первообразная $(f+g)$ равна $(F+G)$.

Требуется доказать, что $\{F+G+C : C \in \mathbb{R}\} = \{F+C_1 : C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G+C_2 : C_2 \in \mathbb{R}\}$

Обозначим левую и правую часть равенства как A и B,

В левую сторону, рассмотрим некоторое $k \in A$, тогда $k = F+G+C$, пусть $C_1 = C$, а $C_2 = 0$, тогда $k = (F+C_1)+(G+C_2)$, а это значит, что $k \in B$.

В правую сторону, рассмотрим некоторое $d \in B$, тогда $d = (F+C_1)+(G+C_2)$, тогда пусть $C = C_1 + C_2$, тогда $d = F+G+C$, а это значит, что $d \in A$.

2. Требуется доказать, что $\{\alpha F + C : C \in \mathbb{R}\} = \alpha\{F + C_1 : C_1 \in \mathbb{R}\}$

В левую сторону, рассмотрим некоторое $k \in A$, тогда $k = \alpha F + C$, пусть $C_1 = \frac{C}{\alpha}$, тогда $k = \alpha(F+C_1)$, а это значит, что $k \in B$.

В правую сторону, рассмотрим некоторое $d \in B$, тогда $d = \alpha(F+C_1)$, тогда пусть $C = \alpha C_1$, тогда $d = \alpha F + C$, а это значит, что $d \in A$.

2.4 Лемма об ускоренной сходимости

Пусть $f,\, g : D \to \mathbb{R}$, a - предельная точка $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$
Пусть также существует $U(a) : f \neq 0$ и $g \neq 0$ в $\dot{U}(a)$

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{y \to a} g(x) = 0$ (Также возможен вариант, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{y \to a} g(x) = +\infty$)
Тогда для любой последовательности $x_k \to a$, $x_k \in D$, $x_k \neq a$ найдётся такая последовательность $y_k \to a$ ($y_k \in D$, $y_k \neq a$), что $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0$ и $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{f(y_k)}{f(x_k)} = 0$

Доказательство:

1. Пусть $f,\, g \to 0$, тогда для любого фиксированного i можно добиться того, что $\left|\frac{f(x_j)}{f(x_i)}\right| < \frac{1}{i}$, начиная с какого-то $j_1 > i$. Аналогично, $\left|\frac{f(x_j)}{g(x_i)}\right| < \frac{1}{i}$ начиная с какого-то $j_2 > i$ (просто потому-что $f(x_i)$ и $g(x_i)$ константы)
Продолжаем так до бесконечности, получая последовательность $y_i := x_{max(j_1, j_2)}$

2. Пусть $f,\, g \to +\infty$. Считаем, что $f > 0$ и $g > 0$. Пусть $f(x_k)$ и $g(x_k)$ — возрастающие последовательности (остальные случаи рассматриваются аналогично).
Тогда $i = \min j : \begin{cases} f(x_j) \geq \sqrt{g(x_k)} \\ f(x_j) \geq \sqrt{f(x_k)} \end{cases}$
Возьмём $y_k := x_{i-1}$
Тогда $\frac{f(y_k)}{f(x_k)} < \frac{\sqrt{f(x_k)}}{f(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{f(x_k)}} \to 0$
$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} < \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \to 0$

2.5 Правило Лопиталя

Пусть f, g — дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$, $g' \neq 0$ на $\langle a, b\rangle$ и существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Не стоит забывать, что $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенно.

Тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство:

Берём последовательность $y_k \to a$ из леммы об ускоренной сходимости.

По теореме Коши $\exists \xi_k \in [x_k, y_k]$ (не факт, что $x_k \leq y_k$)

$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$

Домножаем правую и левую часть на $\dfrac{g(x_k) - g(y_k)}{g(x_k)}$

$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$

По лемме об ускорении, $\frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0$ и $\frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$

$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} \to \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$

2.6 Теорема Штольца

Пусть y_n — положительна, неограничена и строго монотонна (если $a = 0$, то x_n — тоже строго монотонна)

Тогда если существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in [0, +\infty]$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$

Доказательство:

Из предела следует, что $a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$, значит для любого $n > N$,

все дроби вида $\frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}} \dots \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ лежат в этом промежутке.

Воспользуемся свойством дробей(медианты), что

если $\alpha < \frac{a}{b} < \beta$ и $\alpha < \frac{c}{d} < \beta$, то $\alpha < \frac{a+c}{b+d} < \beta$ и сложим все дроби

Значит $a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$

Рассмотрим $\frac{x_n}{y_n} - a = \frac{x_N - a y_N}{y_n} + (1 - \frac{y_N}{y_n})(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a)$,

Так как y_n возрастает, то $(1 - \frac{y_N}{y_n}) < 1$

Поэтому можем преобразовать в $|\frac{x_n}{y_n} - a| \leq |\frac{x_N - a y_N}{y_n}| + |\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a|$

Сумма справа состоит из двух слагаемых, при $n > N$, второе слагаемое из доказанного меньше, чем ε. Первое слагаемое тоже меньше ε (начиная с какого-то N_1, в силу того, что $x_N - a y_N$ константа, а y_n строго возрастает).

Тогда, $|\frac{x_n}{y_n} - a| < 2\varepsilon$, а значит

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$

2.7 Пример неаналитической функции

$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Докажем, что f — бесконечное дифференцируема на $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N} : \exists f^{(k)}(x))$

Доказательство:

Если $x \neq 0$ — то очевидно

Пусть $x = 0$, тогда для любого k существует $f^{(k)}(0) = 0$ Из теоремы Лагранжа:

Если $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f'(x) = L$, где $L \in \mathbb{R}$, то

f — дифференцируема и $f'(a) = L$

$f'(x) = \dfrac{2}{x^3} \cdot e^{\left(-1/x^2\right)}$, $x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1/x^3}{e^{(1/x^2)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-3/x^4}{(-2/x^3)e^{(1/x^2)}} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{1/x}{e^{(1/x^2)}}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1/x^2}{-(2/x^3)e^{(1/x^2)}} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{4} \cdot x \cdot e^{\left(-1/x^2\right)} \to 0$$

$f'(x) = \dfrac{2}{x^3} \cdot e^{\left(-1/x^2\right)}$, $x \neq 0$

$f'(0) = 0$

2.8 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

$f, g \in C[a,b]$, $f \leq g$, тогда:

1) $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$.
2) $min(f)(b-a) \leq \int_a^b f\,dx \leq max(f)(b-a)$.
3) Теорема о среднем: $\exists c \in [a,b]$: $\int_a^b f\,dx = f(c)(b-a)$. $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx$.

2.9 Теорема Барроу

$f \in C[a,b],\ F : [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f\,dx.$

Тогда F - дифференцируемая на $[a,b]$ и $F'(x) = f(x)$.

Доказательство:

$x \in Int([a,b])$. $F'(x) = \lim_{y\to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x}$;

$\lim_{y\to x+0} \frac{\int_a^y f\,dx - \int_a^x f\,dx}{y-x} = \lim_{y\to x+0} \frac{\int_x^y f\,dx}{y-x} = \lim_{y\to x+0} f(c) = f(x) = \lim_{y\to x-0}$.

2.10 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

$f \in C[a, b]$, F - первообразная f на $[a, b]$. Тогда:

$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство:

По т. Барроу $\int_a^b f\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, $F = \Phi + C$.

2.11 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

$f, g \in C[a,b]$ - монотонно возрастают. Тогда: $I_f \cdot I_g \le I_{fg}$. То есть $\int_a^b f\,dx \cdot \int_a^b g\,dx \le (b-a)\int_a^b fg\,dx$.

Доказательство:

$(f(x)-f(y))\cdot(g(x)-g(y)) \ge 0$;

$f(x)g(x)-f(y)g(x)-f(x)g(y)+f(y)g(y) \ge 0$; Интегрируем по x и поделим на $(b-a)$.

$I_{fg}-f(y)I_g-g(y)I_f+f(y)g(y) \ge 0$; Интегрируем по y и поделим на $(b-a)$.

$I_{fg}-I_f\cdot I_g-I_g\cdot I_f+I_{fg} \ge 0$;

$I_f \cdot I_g \le I_{fg}$.

2.12 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

$f, g \in C[a,b]; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Линейность: $\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$.

Доказательство: из формулы Н-Л.

Интегрирование по частям: $\int_a^b fg' = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f'g$.

Замена переменных:

$\phi :< \alpha, \beta > \to < a, b >, \phi \in C, [p,q] \subset [\alpha, \beta]$. Тогда $\int_p^q f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(u)\,du$.

Доказательство: F - первообразная f. $F(\phi(t))$ - первообразная $f(\phi(t))$.

$\int_p^q f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = F(\phi(q)) - F(\phi(p)) = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(u)\,du$

2.13 Иррациональность числа пи

https://youtu.be/24lOpDOdHLU?t=7918

Теорема 1. *Число π^2 — иррационально (π — тоже :))*

Доказательство.

$$H_n := \frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt$$

Пусть $\pi^2 = \frac{p}{q}$

$$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

$$H_0 = 2, \quad H_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2)\cos t = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = 2t(-\cos t)\Big|_{\dots}^{\dots} + 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t = 4$$

$$H_n = \dots H_1 + \dots H_0 = P_n(\pi^2) \text{ — многочлен с целыми коэффициентами, степень} \leq n$$

$$q^n P_n\left(\frac{p}{q}\right) = \text{ целое число } = q^n H_n > 0 \Rightarrow q^n H_n \geq 1 \Leftarrow \text{этого не может быть}$$

$$1 \leq \frac{q^n}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt \leq \frac{q^n 4^n}{n!}\pi \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Противоречие. □

2.14 Лемма о трех хордах

https://youtu.be/Ddj4g9BI0d4?t=1883

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. f — вып. $\langle a, b \rangle$
2. $\forall x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b \rangle \;\; x_1 < x_2 < x_3 \quad \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \le \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} \le \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$

Доказательство. Очевидно по рисунку посмотрите леку (2 это просто угловые коэффициенты).

Вот норм док-во.

Левое $\Leftrightarrow f(x_2)(x_3 - x_1) \le f(x_3)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_3 - x_2)$

$$f\left(x_3\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + x_1\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) = f(x_2) \le f(x_3)\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + f(x_1)\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

Это неравенство из определения выпуклости

Примечание. Если f — строго выпуклая, то в лемме оба неравенства строгие.

□

2.15 Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

https://youtu.be/Ddj4g9BI0d4?t=3014

Теорема 1. *f — вып. $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b)$ $\exists f'_+(x), f'_-(x)$ и $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$*

$$f'_-(x_1) \le f'_+(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'_-(x_2)$$

Для лучшего понимания рисунок в леке.
Напоминание:
$f'_+(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1 + 0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ — монотонно убывающая функция от x

Доказательство. Пусть $u < x_1 < v < x_2$, тогда (по лемме о 3 хордах)

$$\frac{f(x_1) - f(u)}{x_1 - u} \le \frac{f(v) - f(x_1)}{v - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(v)}{x_2 - v}$$

$\frac{f(x_1) - f(u)}{x_1 - u}$ (A) - возрастает как функция от u (по лемме о 3 хордах)
$\frac{f(v) - f(x_2)}{v - x_2}$ (B) - тоже возрастает
3 - C
4 - D
Перейдём к пределу при u $\to x_1 - 0$ в н-ве $A \le B$: $f'_-(x_1) \le B$
Перейдём к пределу при v $\to x_1 + 0$ в н-ве $A \le B$: $f'_-(x_1) \le f'_+(x_1)$
Так же остальные

□

Следствие:

Следствие. f — вып. на $\langle a, b\rangle \Rightarrow f$ непр. на (a, b)

2.16 Следствие о точках разрыва производной выпуклой функции

Не оч понял что за следствие мб вот это (Если не то пишите в тг)
https://youtu.be/Ddj4g9BI0d4?t=7211
(Далее из конспекта 37)

Примечание. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — вып.
Тогда f — дифф. на (a, b) за исключением, может быть, счетного множества точек.

Доказательство. $\forall x \;\; \exists f'_+(x), f'_-(x)$
$f'_\pm$ возрастает
$f'_-(x) = f'_+(x) \Rightarrow f$ дифф. в x
$f'_-(x) < f'_+(x) \Rightarrow f$ не дифф. в x
Тогда x — точка скачка для f'_+, f'_-, их НБСЧ, т.к. f^+ и f^- возрастают. $\square$

2.17 Описание выпуклости с помощью касательных

https://youtu.be/Ddj4g9BI0d4?t=4858

Теорема 1. *f — дифф. на $\langle a, b \rangle$. Тогда эквивалентны:*
1) f — выпуклый (вниз)
2) График f расположен не ниже любой касательной
т.е. $\forall x, x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Доказательство. "$\Rightarrow$"
Если $x > x_0 \quad f'(x_0) \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, это неравенство 2. из предпредыдущей теоремы
$x < x_0$ аналогично
"$\Leftarrow$" фиксируем x_0. Берем $x_1 < x_0 < x_2$
$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$;
$f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$,
т.е. $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$. Это верно по лемме о 3 хордах. □

2.18 Дифференциальный критерий выпуклости

Ссылка: https://youtu.be/Ddj4g9BI0d4?t=6293

Сама теорема:
1. $f \in C < a, b >$, f - дифференциируема на (a, b), тогда
   f (строго) выпукла $\Leftrightarrow f'$ (строго) возрастает на (a, b)

2. $f \in C < a, b >$, f - дважды дифференциируема на (a, b), тогда
   f - выпуклаяы $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b)

Доказательство:
1 $\Rightarrow$: $x_1 < x_2, f'(x_1) = f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) = f'(x_2)$
1 $\Leftarrow$: $x_1 < x < x_2$, $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ (Лемма о 3-х хордах)
2 f - выпукла $\Leftrightarrow f$ - возрастает (доказанно в пункте 1) $\Leftrightarrow f'' \geq 0$

2.19 Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

Формулировка

Пусть заданы f и ϕ на $\langle a, b\rangle$, f — непрерывна, ϕ — аддитивная функция промежутка, f — плотность ϕ

Тогда $\forall [p, q] \subset \langle a, b\rangle\ \phi([p, q]) = \int\limits_p^q f(x)\ dx$

Доказательство

Можно принять за факт, что у нас дан промежуток $[a, b]$ (если это не так, то уменьшим его чуть-чуть и переобозначим)

$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \phi([a, x]), & x > a \end{cases}$ — первообразная f

$\inf\limits_{[x,x+h]} f \leq \frac{\phi([x,x+h])}{h} \leq \sup\limits_{[x,x+h]} f$

$x : F'_+(x) = \lim\limits_{h\to 0+0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim \frac{\phi([a,x+h])-\phi([a,x])}{h} = \lim \frac{\phi([x,x+h])}{h} = \lim\limits_{h\to 0+0} f(x + \Theta h) = f(x)$, где

$0 \leq \Theta \leq 1$

$\Theta = \Theta(h)$

Аналогично посчитаем и $F'_-(x)$

$\phi([p, q]) = F(q) - F(p) = \int\limits_p^q f(x)\ dx$

2.20 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой

Формулировка для полярных координат

Пусть $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi)$

$\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ — непрерывная, $\rho \geq 0$

$A = \{(r, \phi) : \phi \in [\alpha, \beta]\ 0 \leq r \leq \rho(\phi)\}$ — «Аналог ПГ»

Тогда $\sigma(A) = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi)\ d\phi$

Доказательство

$[\alpha, \beta] \longmapsto \sigma(A)$ — функция промежутка $\mathrm{Segm}[\alpha, \beta]$ — аддитивная функция.

Проверим, что $\frac{1}{2}\rho^2(\phi)$ — плотность

$[\gamma, \delta]$ — строим $A_{\gamma,\delta}$

$\sigma(A_{\gamma,\delta}) \leq \sigma(\text{Круговой сектор } (0, \max\limits_{[\gamma,\delta]} \rho(\phi), [\gamma, \delta]))$

$\sigma(A_{\gamma,\delta}) \geq \sigma(\text{Круговой сектор } (0, \min\limits_{[\gamma,\delta]} \rho(\phi), [\gamma, \delta]))$

$\min\limits_{[\gamma,\delta]} \frac{1}{2}\rho^2(\phi) l([\gamma, \delta]) \leq \sigma(A_{\gamma,\delta}) \leq \max\limits_{[\gamma,\delta]} \frac{1}{2}\rho^2(\phi) l([\gamma, \delta])$

По определению плотности получили то, что хотели

(если непонятно, откуда берётся $\dfrac{1}{2}\rho^2(\phi)$, то гуглим форму площади круга)

Формулировка для параметрической кривой

$$\sigma(A) = \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{t_1} (y'(t)x(t) - x'(t)y(t))dt$$

Доказательство

Пусть дано $(x(t), y(t)), t \in [a, b]$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

Итого:

$r(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ и $\varphi(t) = \operatorname{arctg} \dfrac{y(t)}{x(t)}$ — параметрическое задание того же пути в полярных координатах

$$\sigma(A) = \frac{1}{2} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} (x(t)^2 + y(t)^2) \left(\operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)}\right) dt$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{t_1} (x^2 + y^2) \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - x'y}{x^2} dt = \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{t_1} (y'(t)x(t) - x'(t)y(t))\, dt$$

2.21 Изопериметрическое неравенство

Формулировка

Пусть G — замкнутая выпуклая фигура в $\mathbb{R}^2$

$\operatorname{diam} G \le 1$ $(\operatorname{diam} G = \sup\limits_{x,y\in G} \rho(x,y))$

Тогда $\sigma(G) \le \frac{\pi}{4}$

Доказательство

Поскольку G выпукла, значит к ней можно провести касательные $f(x)$ и $g(x)$

$f(x) = \sup\{t : [(x,0),(x,t)] \cap G = \varnothing\}$

$g(x)$ — аналогично, только inf

$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$r(-\frac{\pi}{2}) = r(\frac{\pi}{2}) = 0$

$r(\varphi)$ — непрерывная функция от φ

$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2(\varphi)\ d\varphi = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\pi/2}^{0} + \int\limits_{0}^{\pi/2}\right)$

Проведём какую-нибудь прямую AB, полностью лежащую в фигуре G, а также отметим какую-нибудь точку O, что $OA \perp OB$. Тогда

$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} OA^2 + OB^2$

$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} r^2(\varphi - \dfrac{\pi}{2}) + r^2(\varphi)\ d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} AB^2\ d\varphi \le \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} 1\ d\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

2.22 Обобщенная теорема о плотности

Формулировка

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\phi : \mathrm{Segm}\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция.

Пусть $\forall \Delta \subset \mathrm{Segm}\langle a, b\rangle$ заданы числа m_Δ, M_Δ.

1. $m_\Delta \cdot l(\Delta) \le \phi(\Delta) \le M_\Delta \cdot l(\Delta)$
2. $\forall x \in \Delta\ m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$
3. $\forall x \in \langle a, b\rangle\ M_\Delta - m_\Delta \to 0$, если $l(\Delta) \to 0$, $x \in \Delta$

3-й пункт можно переформулировать по-другому:
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \Delta \in \mathrm{Segm}\langle a, b\rangle : x \in \Delta : l(\Delta) < \delta \Longrightarrow |M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon$
Тогда f — плотность ϕ (и $\forall [p, q]\ \phi([p, q]) = \int\limits_p^q f(x)\ dx$)

Доказательство

$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \phi([a, x]), & x > a \end{cases}$

Дифференцируем F_+
$m_\Delta \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le M_\Delta$
$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{n} - f(x)\right| \le |M_\Delta - m_\Delta| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, $\Delta = [x, x+h]$
$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$
Аналогично и с F_-

2.23 Объем фигур вращения

Формулировка

Обозначим фигуры, полученную вращением по оси x за $T_x(A) = \Big\{(x, y, z) : (x, \sqrt{y^2 + z^2}) \in A\Big\}$
По оси y — $T_y(A) = \big\{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + z^2}, y^2) \in A\big\}$
Пусть $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$
Тогда:

1. $V(T_x(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\ dx$

2. $[a, b] \subset [0, +\infty)$ $V(T_y(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = 2\pi \int\limits_a^b xf(x)\ dx$

Доказательство

1. $\phi : \Delta \in \text{Segm}([a, b]) \mapsto V(T_{x\ or\ y}(\Pi\Gamma(f, \Delta)))$ — аддитивная функция.
   $\pi \min\limits_{x\in\Delta} f^2(x) \cdot l(\Delta) = V(F_\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq V(\varepsilon_\Delta) = \pi \max\limits_{x\in\Delta} f^2(x) \cdot l(\Delta)$
   ε_Δ — цилиндр прямой круговой
   $\phi(\Delta)$ — плотность, значит $V(T_x(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$
   $\Delta : m_\Delta, M_\Delta$
   (a) $m_\Delta l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$
   (b) $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$, $x \in \Delta$
   (c) $\Delta \to x$ $M_\Delta - m_\Delta \to 0$

2. $V(T_y(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = 2\pi \int\limits_a^b x \cdot f(x)dx$
   $F_\Delta = T_y(\Pi\Gamma(\min\limits_\Delta f, \Delta))$
   $\phi(\Delta) \leq V(\varepsilon_\Delta) = \sigma(ring) \cdot \max\limits_\Delta f = \pi(q^2 - p^2) \cdot \max\limits_{[p,q]} f = \pi(q + p) \max\limits_{x\in[p,q]} f(x) \cdot (q - p) \leq$
   $\pi \cdot \max\limits_{x\in[p,q]} (2x) \cdot \max\limits_{x\in[p,q]} f(x) \cdot (q - p)$
   Аналогично
   $\pi \min\limits_{x\in[p,q]} (2x) \cdot \min\limits_{x\in[p,q]} f(x)(q - p)$
   (a) $m_\Delta l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$
   $\phi(\Delta) = \pi \cdot 2x \cdot f(x) \leq \pi \max(2x) \cdot max f(x)$
   (b) $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$
   (c) $p \to x_0$, $q \to x_0$, Итого $V(T_y(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = \pi \cdot 2x_0 \cdot f(x_0)$

2.24 Вычисление длины гладкого пути

Формулировка

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma \in C^1$ — путь.
Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

Доказательство

Будем дополнительно считать, что $\gamma' \neq 0$ и что γ — инъективно. Если это не так, то разобьём на несколько частей, и каждую из них посчитаем отдельно.
Пусть $\phi : \mathrm{Segm}[a,b] \to \mathbb{R}$ и $[p,q] \mapsto l\left(\gamma|_{[p,q]}\right)$
Пусть ϕ — аддитивная функция промежутка по следующей аксиоме:
$\forall [a,b]$ и $\forall \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ и $\forall c \in (a,b) \implies l(\gamma) = l\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + l\left(\gamma|_{[c,b]}\right)$
Проверим, что $\|\gamma'(t)\|$ — её плотность
Это значит, что $\forall \Delta : \exists m_\Delta, M_\Delta$ и выполняются следующие свойства:

1. $l(\Delta) m_\Delta \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$
2. $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$, $x \in \Delta$
3. $\Delta \to x \implies M_\Delta - m_\Delta \to 0$

$\Delta \subset [a,b]$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t))$
$m_i(\Delta) = \min\limits_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|$
$M_i(\Delta) = \max\limits_{\Delta} |\gamma_i'(t)|$
$m_\Delta = \sqrt{\sum m_i(\Delta)^2}$
$M_\Delta = \sqrt{\sum M_i(\Delta)^2}$
Очевидно, что при любом $t \in \Delta \implies m_\Delta \leq \|\gamma'(t)\| \leq M_\Delta$, где $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum (\gamma_i'(t))^2}$
При $\Delta \to x$ выражение $M_\Delta - m_\Delta \to 0$ по непрерывности $\gamma_i'(t)$ в точке $t = x$.
Проверим, что $m_\Delta l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$
$\widetilde{\gamma} : \Delta \to \mathbb{R}^m, \widetilde{\gamma}(t) = (M_1(\Delta)t, M_2(\Delta)t, \ldots, M_m(\Delta)t) = M \cdot t$, где $M = (M_1(\Delta), M_2(\Delta), \ldots, M_m(\Delta))$
Отображение $T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}} \implies \gamma(t) \mapsto \overline{\gamma}(t)$ — проверим, что расстяжение
$\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} = \sqrt{\sum (\gamma_i'(\mathcal{T}_i))^2 (t_0 - t_1)^2} \leq \sqrt{\sum M_i \Delta^2 |t_0 - t_1|} = \rho(T(\gamma(t_0)), T(\gamma(t_1)))$, значит T — растяжение
$l\left(\gamma|_\Delta\right) \leq l(\widetilde{\gamma})$, т.е. $\phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$.
Аналогично $\phi(\Delta) \geq m_\Delta l(\Delta)$ — сжатие.
Значит $\|\gamma'\|$ — плотность

2.25 Интеграл как предел интегральных сумм

Формулировка

Пусть $f \in C[a, b]$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \mathcal{T} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ранга меньше δ и $\forall \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x)\ dx \right| < \varepsilon$$

Доказательство

1. Поделим на отрезки в соответствии с дроблением. Очевидно, что $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$. Тогда рассмотрим разность

   $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\ dx - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\ dx$

   $\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\xi_k) - f(x)\ dx) \to 0$, т.к. $x_{k-1} \to x_k$, а $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

2. По теореме Кантора о равномерной непрерывности

   $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ «Китайский ε»

   Берём $x_0, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

   $$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x)\ dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\ dx - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\ dx \right| =$$

   $$= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\xi_k) - f(x))\ \ dx \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(\xi_k) - f(x)|\ \ dx$$

   $|\xi_k - x_k| < \delta$ для любых $[x_{k-1}, x_k]$ (по условию)

   $$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a}\ dx = \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\ dx = \varepsilon$$

2.26 Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера–Маклорена

Формулировка теоремы о формуле трапеций

Пусть $f \in C^2[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$
Тогда $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx\right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int\limits_a^b |f''|$

Доказательство

$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v' = 1 & v = x - \xi_i \end{bmatrix}$, причём ξ_i — середина промежутка $[x_{i-1}, x_i]$.

$f(x)(x-\xi_i)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x-\xi_i)dx = f(x_i)(x_i - \xi_i) - f(x_{i-1})(x_{i-1} - \xi_i) -$

$- \left(f'(x)\dfrac{(x-\xi_i)^2}{2}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''\dfrac{(x-\xi_i)^2}{2}dx\right) = (f(x_i) + f(x_{i-1}))\,\dfrac{x_i - x_{i-1}}{2} -$

$- \left(f'(x)\left(-\dfrac{1}{2}\psi(x)\right)\Bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''\left(-\frac{1}{2}\psi(x)\right)\ dx\right)$

$\begin{bmatrix} u = f' & u' = f'' \\ v' = (x - \xi_i) & \psi(x) = (x - x_{i-1})(x_i - x) \end{bmatrix}$ $x \in [x_{i-1}, x_i]$ на $[a, b]$

$v = -\frac{1}{2}\psi(x)$

$(f(x_i) + f(x_{i-1})) \cdot \frac{(x_i - x_{i-1})}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''\psi(x)\ dx$

$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx\right| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx\right)\right|$

$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\psi(x)dx\right| = \frac{1}{2}\int\limits_a^b |f''(x)|\,\psi(x)\ dx \leq \frac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$

Простейший случай формулы Эйлера-Маклорена

$m, n \in \mathbb{Z}, f \in C^2[m,n]$. Тогда
$\int\limits_m^n f(x)\ dx = (\sum\limits_{i=m}^{n})^{\triangledown} f(i) - \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(x)\,\{x\}\,(1 - \{x\})\ dx$
x — дробная часть числа x, $\triangledown$ — крайние суммы, т.е. крайние члены берутся с множителем 0.5.
Очевидно^{TM}, что это формула трапеции.
$[a,b] \leftrightarrow [m,n]$ $x_0 = m, x_1 = m+1, \ldots, x_{last} = n$
$\{x\}\,(1 - \{x\})$ — парабола между двумя целыми точками

2.27 Свойства верхнего и нижнего пределов

Формулировка

Пусть x_n, x'_n — произвольные последовательности. Тогда

1. $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$
2. $\forall n \quad x_n \le x'_n$. Тогда
   $\overline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x'_n$
   $\underline{\lim}\, x_n \le \underline{\lim}\, x'_n$
3. $\forall \lambda > 0$
   $\overline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \cdot \overline{\lim}\, x_n$
   $\underline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \cdot \underline{\lim}\, x_n$
4. $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}(x_n)$
   $\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim}(x_n)$
5. $\overline{\lim}(x_n + x'_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, x'_n$
   $\underline{\lim}(x_n + x'_n) \ge \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, x'_n$
   Если правые части имеют смысл
6. $t_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$
   $\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + \lim t_n$
   Если правая часть имеет смысл
7. $t_n \to l > 0, l \in \mathbb{R}$
   $\overline{\lim}(x_n \cdot t_n) = l \cdot \overline{\lim}\, x_n$

Доказательство

1. Следует из того факта, что $z_n \le x_n \le y_n$
2. $y_n \le y'_n$
3. $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$
4. $\sup(-A) = -\inf(A)$
5. $\sup(x_n + x'_n, x_{n+1} + x_{n+1};, \ldots) \le y_n + y'_n$, т.к. это верхняя граница для всех сумм над sup

6. $l \in \mathbb{R}$, тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 : \forall k > N_0$
   $x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l_k + \varepsilon$
   $y_n + l - \varepsilon \leq \sup(x_n + t_n, x_{n+1} + t_{n+1}, \ldots) \leq y_n + l + \varepsilon$, при $N \to +\infty$
   $(\overline{\lim}\, x_n) + l - \varepsilon \leq \overline{\lim}(x_n + y_n) \leq (\overline{\lim}\, x_n) + l + \varepsilon$
7. Без доказательства

2.28 Техническое описание верхнего предела

Формулировка

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \iff x_n$ — не ограничена сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \iff x_n \to -\infty$
3. $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \implies$:
   - $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$
   - $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $x_n > l - \varepsilon$ выполняется для бесконечного множества номеров n

Доказательство

1. Очевидно, что $x_n < y_n$, y_n убывает Таким образом, если $\lim y_n = +\infty \implies y_n = +\infty \iff x_n$ — не ограничена сверху
2. $y_n \to -\infty$, $\forall E : \exists N : \forall n > N \; x_n \leq y_n < E \Rightarrow \forall E > 0 : \exists N : \forall n > N : x_n < E, y_n < E$
3. $x_n \leq y_n$, $y_n \to l$
   - $\Rightarrow$) $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : x_n \leq y_n < l + \varepsilon$
     Если $\exists N_0 : \forall n > N_0 : x_n < l - \varepsilon$, то $\forall n > N_0 : y_n = \sup(\ldots) \leq l - \varepsilon$ и тогда $y_n \nrightarrow l$
   - $\Leftarrow$) $\forall \varepsilon : \exists N : \forall n > N : y_n \leq l + \varepsilon$, y_n — супремум
     $x_k \geq l - \varepsilon \Rightarrow y_n \geq l - \varepsilon \Rightarrow y_n \to l$

2.29 Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов

Формулировка

Пусть существует $\lim x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда и только тогда $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$

Доказательство

- $\Rightarrow$) $\lim x_n = +\infty \Longleftrightarrow \underline{\lim} x_n = +\infty \Rightarrow \underline{\lim} \leq \overline{\lim} x_n = +\infty$

  $\lim x_n = -\infty \Longleftrightarrow \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} = -\infty$

  $\lim x_n \in \mathbb{R}$ — очевидно

- $\Leftarrow$) $z_n \leq x_n \leq y_n$, то по теореме о сжатой последовательности $x_n \to l$, поскольку $z_n \to l$ и $y_n \to l$

2.30 Теорема о характеризации верхнего предела как частичного

Формулировка

1. Пусть l — частный предел x_n, тогда $\underline{\lim}\, x_n \leq l \leq \overline{\lim}\, x_n$

2. Существуют такие n_k, m_k, что $\lim x_{n_k} = \overline{\lim}\, x_n$ и $\lim x_{m_k} = \underline{\lim}\, x_n$

Доказательство

1. Пусть $x_{n_j} \to l$

   $z_{n_j} \leq x_{n_j} \leq y_{n_j}$, где $z_{n_j} \to \underline{\lim}\, x_n$, $x_{n_j} \to l$, $y_{n_j} \to \overline{\lim}\, x_n$

2. $\overline{\lim}\, x_k = \pm\infty$ — очевидно

   $\overline{\lim}\, x_k = l \in \mathbb{R}$ — очевидно

   Для $\varepsilon = \frac{1}{k}$ $\exists x_{n_k} : l - \frac{1}{k} \leq x_{n_k} \leq l + \frac{1}{k}$

2.31 Асимптотика степенных сумм

$f(x) = x^p$, $p \neq -1$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \int\limits_1^n x^p dx + \frac{n^p + 1}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_1^n (x^p)'' \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2} + \frac{p(p-1)}{2} \int\limits_1^n x^{p-2} \{x\} (1 - \{x\})$$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1}))$$

2.32 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \int\limits_1^n \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int\limits_1^n \frac{1}{x^3} \{x\} (1 - \{x\}) dx$

$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int\limits_1^n \frac{\{x\} (1 - \{x\})}{x^3} dx$

Интеграл постоянной возрастает и ограничен сверху $\frac{1}{4} \int\limits_1^n \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{8} \Big|_{x=1}^{x=n} < \frac{1}{8}$

Всё, что правее логарифма — постоянная Эйлера или γ

Итого

$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$

2.33 Формула Валлиса

Сама формула: $\frac{1}{k}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} \pi$

Вывод формулы:

Рассмотрим $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n dx$: (пока без пруфа)

n – нечетное: $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$

n – четное: $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$

При $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\sin x^{2k+1} \leq \sin x^{2k} \leq \sin x^{2k-1}$

Проинтегрируем от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$. Домножим на $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$:

$\left(\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2k}\left(\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\right)^2$. Пусть $A_k := \left(\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\right)^2$

Рассмотрим разность правой и левой частей:

$A_k(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-1}) = \frac{A_k}{2k(2k-1)}$, что в силу левого неравенства $\leq \frac{\pi}{4k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Значит, длина промежутка (из неравенства), содержащего точку $\frac{\pi}{2}$ стремится к 0, и в частности, его границы стремятся к $\frac{\pi}{2}$

Запишем это для правого неравенства:

$\frac{1}{k}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} \pi$. Что равносильно $\sqrt{\pi} = \lim \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$

2.34 Формула Стирлинга

Сама формула: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} \sqrt{2\pi}$

Вывод формулы:

Рассмотрим $f(x) = \ln x$

По формуле Эйлера-Маклорена:

$\sum\limits_{i=1}^{n} \ln i = \int\limits_1^n \ln x dx + \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{2} \int\limits_1^n \frac{1}{x^2} \{x\}(1 - \{x\}) dx$, последнее слагаемое возрастает как функция от n и ограничено, тогда верно:

$\sum\limits_{i=1}^{n} \ln i = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + c_1 + o(1)$. Перейдем к экспоненте:

$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} \cdot c \cdot e^{o(1)}$, где $c := e^{c_1}$

Заметим, что $e^{o(1)} \to 1$, поэтому тут верна эквивалентность $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} \cdot c$, осталось найти c.

Возьмем формулу Валлиса и чуток распишем ее:

$\sqrt{\pi} = \lim \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} = \lim \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2^k \cdot k!}{(2k-1)!!}$ (домножим на $(2k)!!$):

$\sqrt{\pi} = \lim \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2^{2k} \cdot (k!)^2}{(2k)!}$ (заменяем факториалы на эквивалентные по полученной формуле с константой):

$\sqrt{\pi} = \lim \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2^{2k} \cdot c^2 \cdot k^{2k} \cdot k}{c \cdot (2k)^{2k} \cdot e^{-2k} \cdot \sqrt{2k}} = \lim \frac{c}{2} \Rightarrow c = \sqrt{2\pi}$

$\Rightarrow n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} \sqrt{2\pi}$

2.35 Неравенство Йенсена для сумм

f — выпуклая на $\langle a, b\rangle$. Тогда

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \quad (\alpha_i \geq 0) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\right) \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Доказательство. Для $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ тривиально.

$$\text{Покажем, что } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \stackrel{\text{def}}{=} x^* \in \langle a, b\rangle$$

$$\min_i x_i \leq x^* \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \max_i x_i = \max_i x_i$$

В x^* можно провести опорную прямую $y = kx + b$

$$f(x^*) = kx^* + b = k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) + b = \sum_{i=1}^{n} k\alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (kx_i + b) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

□

2.36 Неравенство Йенсена для интегралов.

$$\begin{cases} f \text{ — выпуклая на } \langle A, B\rangle \\ \varphi : [a,b] \to \langle A, B\rangle \text{ — непрерывная} \\ \lambda : [a,b] \to \langle A, B\rangle \text{ — (кусочно-)непрерывная} \\ \int_a^b \lambda(t)dt = 1 \end{cases} \Rightarrow f\left(\int_a^b \lambda(t)\varphi(t)dt\right) \le \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t))dt$$

Доказательство.

$$m \overset{\text{def}}{=} \inf \varphi$$

$$M \overset{\text{def}}{=} \sup \varphi$$

$$m = m\int_a^b \lambda(t)dt \le \int_a^b \lambda(t)\varphi(t)dt \le M\int_a^b \lambda(t)dt = M$$

$$x^* \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \lambda(t)\varphi(t)dt \Rightarrow x^* \in \langle A, B\rangle$$

Для $M = m$ тривиально.
$y = kx + c$ опорная прямая в точке x^* графика f.

$$f(x^*) = kx^* + c = k\int_a^b \lambda\varphi + c\int_a^b \lambda = \int_a^b (k\varphi + c)\lambda \le \int_a^b f(\varphi(t))\lambda(t)dt$$

□

2.37 Неравенство Коши (для сумм и для интегралов)

$$a_i > 0 \quad \frac{1}{n}\sum a_i \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

Доказательство. $f(x) = \ln x$ — вогн., $\alpha_i = \frac{1}{n}$, по неравенству Йенсена:

$$\ln\left(\frac{1}{n}a_1 + \ldots + \frac{1}{n}a_n\right) \geq \frac{1}{n}\ln a_1 + \ldots + \frac{1}{n}\ln a_n$$

$$\ln\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\ln(a_1 \cdots a_n)$$

$$\ln\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) \geq \ln(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

□

Неравенство Коши для интегралов:

$$f > 0, f \in C[a,b] \quad \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Правая часть — среднее значение f на $[a,b]$, похоже на среднее арифметическое, если рассмотреть интегральную сумму:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f \approx \frac{1}{b-a}\sum \frac{1}{n}f(x_i)$$

Аналогично левая часть $\approx$ среднее геометрическое:

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right) \approx \exp\left(\sum \frac{1}{n}\ln f(x_i)\right) = \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{\ln(f(x_i))}{n}\right) = \sqrt[n]{f(x_i)\cdots f(x_n)}$$

Возьмём логарифм от искомого неравенства:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)$$

Подставим в интегральное неравенство Йенсена:

- $f \leftrightarrow \ln$
- $\lambda(t) \leftrightarrow \frac{1}{b-a}$
- $\varphi \leftrightarrow f$

2.38 Неравенство Гельдера для сумм

Пусть $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$q = \frac{p}{p-1}$

$a_i, b_i > 0$ для всех $i = 1..n$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

Если $(a_1^p, a_2^p, \ldots, a_n^p) \parallel (b_1^q, b_2^q, \ldots, b_n^q)$ — равенство

Доказательство

x^p — строго выпукла при $p > 1$ и $x > 0$

$(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$

По неравенству Йенсена $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)^p \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p$

$\alpha_i := \dfrac{b_i^q}{\sum b_i^q}$

$\alpha_i > 0$, $\sum \alpha_i = 1$

Выберем такие x_i, что

$\alpha_i \cdot x_i = a_i \cdot b_i$

$x_i = \dfrac{a_i b_i}{\alpha_i} = \dfrac{a_i b_i}{b_i^q} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q = a_i b_i^{1-q} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q = a_i b_i^{1-\frac{p}{p-1}} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q = a_i b_i^{\frac{p-1-p}{p-1}} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q = a_i \cdot b_i^{-\frac{1}{p-1}} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q$

Тогда $\alpha_i x_i = a_i b_i$

$(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^p = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i)^p$

Тогда $\alpha_i x_i^p = a_i^p (\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q)^{p-1}$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q)^{p-1} = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q)^{\frac{p}{q}}$

Тогда $(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^p \leq (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q)^{\frac{p}{q}}$

Возведём в степень $\frac{1}{p}$ и получим исходное неравенство

2.39 Неравенство Гельдера для интегралов

Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$

Пусть также f, $g \in C[a,b]$ и $f, g \geq 0$ на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b fg \leq \left(\int\limits_a^b f^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^b g^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство

Делим $[a,b]$ на n равных частей

$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$

$\xi_k := x_k$

$a_k := |f(x_k)|(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}$

$b_k := |g(x_k)|(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$

$a_k \cdot b_k = |f(x_k)g(x_k)| \cdot \Delta x_k$

$\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k)|\Delta x_k \leq (\sum |f(x_k)|^p \Delta x_k)^{\frac{1}{p}} (\sum |g(x_k)|^q \Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$

Из неравенства Гёльдера для сумм

$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|dx \leq (\int\limits_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_a^b |g|^q)^{\frac{1}{q}}$

2.40 Неравенство Минковского

Пусть $p \geq 1$

Тогда $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$

Замечания

Неравенство Минковского означает, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto (\sum |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ является нормой

Доказательство

При $p = 1$ — очевидно

При $p > 1$ — применим Гёльдера

Пусть $a_i, b_i > 0$

$\sum |a_i||a_i + b_i|^{p-1} \leq (\sum |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{q}}$

$\sum |b_i||a_i + b_i|^{p-1} \leq (\sum |b_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{q}}$

$\sum |a_i + b_i|^p \leq \sum(|a_i| + |b_i|)|a_i + b_i|^{p-1} \leq \left((\sum |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}\right) (\sum |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{q}}$

$(\sum |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \ldots \leq (\sum |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

2.41 Простейшие свойства несобственного интеграла

1. Критерий Больцано-Коши сходимости несобственного интеграла

Сходимость интеграла $\int\limits_a^{\to b} f$ равносильна

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 : \Delta < B_1 < B_2 < b : \left| \int\limits_{B_1}^{B_2} f \right| < \varepsilon$

2. f — допустима на $[a, b)$ и $C \in (a, b)$. Тогда

$\int\limits_a^{\to b} f$ и $\int\limits_c^{\to b} f$ сходятся и расходятся одновременно, и при этом в случае сходимости $\int\limits_a^{\to b} = \int\limits_a^{c} + \int\limits_c^{\to b}$

3. Пусть f, g — допустимы на $[a, b)$, а также

$\int\limits_a^{\to b} f$ и $\int\limits_a^{\to b} g$ сходятся. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда

λf и $f \pm g$ — допустимые функции на $[a, b)$ и

$\int\limits_a^{\to b} \lambda f = \lambda \int\limits_a^{\to b} f$ и $\int\limits_a^{\to b} f \pm g = \int\limits_a^{\to b} f \pm \int\limits_a^{\to b} g$

4. Пусть $\int\limits_a^{\to b} f$ и $\int\limits_a^{\to b} g$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, $f \leq g$ на $[a, b)$ Тогда

$\int\limits_a^{\to b} f \leq \int\limits_a^{\to b} g$

5. Пусть f, g — дифференцируемы на $[a, b)$, f', g' — допустимы на $[a, b)$. Тогда (при существовании двух из трёх пределов)

$\int\limits_a^{\to b} fg' = fg\Big|_a^{\to b} - \int\limits_a^{\to b} f'g$

6. Пусть $\varphi : [\alpha, \beta) \to \langle A, B\rangle$, $\varphi \in C^1([\alpha, \beta))$, $f \in C(\langle A, B\rangle)$. Пусть также существует $\varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$\int\limits_a^{\to b} (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta - 0)} f$

Доказательство

1. Положим $\Phi(A) = \int\limits_a^A f$. Сходимость интеграла равносильна сходимости $\Phi(A)$ при $A \to b - 0$. Воспользуемся критерием Больцано-Коши, а также учтём, что $\Phi(B) - \Phi(A) = \int\limits_a^B$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 : \Delta < B_1 < B_2 < b : |\Phi(B_2) - \Phi(B_1)| < \varepsilon$$

2. При всех $A \in (c, b)$ согласно аддитивности интеграла

$$\int\limits_a^A f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^A f$$

3. Аналогично предыдущему пункту возьмём такие A и согласно линейности интеграла

$$\int\limits_a^A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^A f + \beta \int\limits_a^A g$$

4. Также выберем A и очевидно, что

$$\int\limits_a^A f \leq \int\limits_a^A g$$

5.Устремим A к $\to b$

$$\int\limits_a^A fg' = fg\Big|_a^A - \int\limits_a^A f'g$$

6. Кохась сказал, что без доказательства. На экзамене отвечаем ему то же самое

2.42 Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла

1. Пусть f — допустима на $[a, b)$, $f \geq 0$, $\Phi(B) = \int\limits_a^B f$. Тогда сходимость $\int\limits_a^b f$ равносильна ограниченности функции Φ (это не признак сравнения)

2. Признаки сравнения

   Пусть f, $g > 0$ и допустимы на $[a, b)$

   - Если $f \leq g$ на $[a, b)$

     (a) $\int\limits_a^b g$ — сходится, значит и $\int\limits_a^b f$ — сходится

     (b) $\int\limits_a^b f$ — расходится, значит и $\int\limits_a^b g$ — расходится

   - Пусть существует $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

     Тогда

     (a) $\int\limits_a^b g$ — сходится, значит и $\int\limits_a^b f$ сходится, если $l \in [0, +\infty)$

     (b) $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся и расходятся одновременно, если $l \in (0, +\infty)$

Доказательство

1. Очевидно, что Φ — монотонно возрастает, тогда существование $\lim\limits_{B\to b-0}\Phi \iff \Phi$ — ограничена

2. • Пусть $\Phi(B)=\int\limits_a^B f$, $\psi(B)=\int\limits_a^B g$, тогда Φ, ψ — монотонные
   $\Phi(B)\le\psi(B)$
   (a) $\int\limits_a^b g$ — сходится, значит $G(B)$ ограничено сверху, значит $F(B)$ ограничено сверху, значит и $\int\limits_a^b f$ — сходится
   (b) $\int\limits_a^b f$ — расходится, значит $F(B)$ неограничено сверху, значит и $G(B)$ неограничено, значит и $\int\limits_a^b g$ — расходится
   • (a) Возьмём $L>l$. Тогда существует $c\in[a,b):\forall x\in[c,b)$
   $f(x)\le L\cdot g(x)$ Заменим $\int\limits_a^b$ на $\int\limits_c^b$. Тогда $\int\limits_c^b g$ — сходится, значит и $\int\limits_c^b Lg$ — сходится и $\int\limits_c^b f$ — сходится
   (b) Для $l>0$ аналогично и $\lambda<l$ и по аналогии $\lim\frac{g}{f}=\frac{1}{l}$ и $\int\limits_a^b f$ — сходится $\Rightarrow\int\limits_a^b g$ — сходится

2.43 Изучение сходимости интеграла $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$

Рассмотрим случаи:

1. $\alpha > 1$: представим $\alpha = 1 + 2a$, $a > 0$, значит можно представить

выражение под интегралом в виде $\dfrac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{b}} = \dfrac{1}{x^{1+a}} \cdot \dfrac{1}{x^{a}(\ln x)^{\beta}}$

Докажем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{a}(\ln x)^{\beta}} = 0$

Если $\beta \geq 0$, то всё ок. Если $\beta < 0$, то $\lim \dfrac{(\ln x)^{-\beta}}{x^{a}} = \left(\lim \dfrac{\ln x}{x^{a/-\beta}}\right)^{-\beta} = 0$

Значит выражение под интегралом меньше или равно чем $\dfrac{1}{x^{1+a}}$, а такой интеграл при $a > 0$ сходится

2. $\alpha < 1$, то $\alpha = 1 - 2\gamma$, $\gamma > 0$

По аналогии, представим в виде произведения:
$\dfrac{1}{x^{1-\gamma}} \cdot \dfrac{1}{x^{-\gamma}(\ln x)^{\beta}} \geq \dfrac{1}{x^{1-\gamma}}$

Выражение большее, чем несходящийся интеграл, значит расходится.

3. $\alpha = 1$, $\int\limits_{10}^{+\infty} \dfrac{dx}{x(\ln x)^{\beta}} = \int\limits_{10}^{+\infty} \dfrac{dy}{y^{\beta}}$

$\beta > 1$ сходится, $\beta \leq 1$ расходится.

2.44 Интеграл Эйлера–Пуассона

$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Доказательство:

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \int\limits_0^t e^{-x^2}dx$

Из неравенства $e^t \geq 1 + t$, при $t = x^2$ следует

$1 + x^2 \leq e^{x^2}$

$\frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{e^{x^2}}$

$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$

Интегрируем: $\int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int\limits_0^1 e^{-nx^2} \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-nx^2} \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$

Левая часть: $x = \cos t$, тогда делаем замену и $\int\limits_{\pi/2}^0 \sin^{2n} t(-\sin t)dt = W_{2n+1}$ — формула Валлиса

Правая часть: $x = \operatorname{tg} t$ и $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \cos^2 t$

$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \cdot \frac{1}{cos^2 t}dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} dt = W_{2n-2}$

Средняя часть: $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$ и $\sqrt{n} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$

$W_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$

$W_{2n-2} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}\frac{1}{\sqrt{n}-1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$W_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \sqrt{n} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n}{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2.45 Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства.

$\Gamma(T) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx,\ t > 0$ — Гамма функция Эйлера

Свойства:

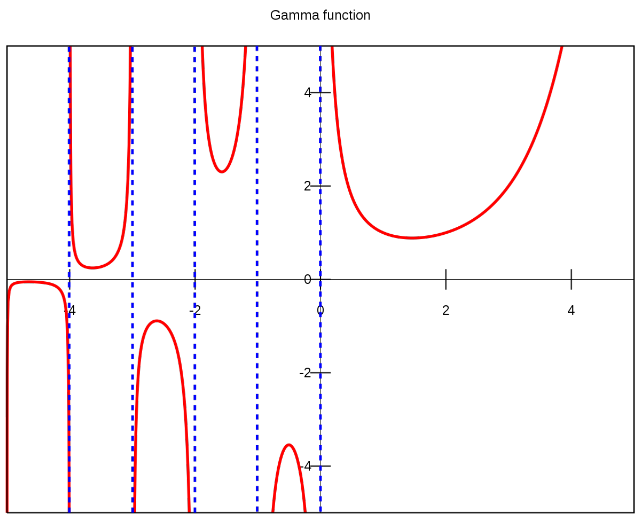
1. Интеграл сходится

2. Функция выпукла, значит она непрерывна

3. $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$

4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

5. Парабола, вершина — примерно точка $(1, 1)$, ветви полностью лежат в первой четверти



Доказательство:

1. $\int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty}$

$\int\limits_0^1 x^{t-1}e^{-x}dx$, при $x \to 0$ эквивалентно x^{t-1}, $t > 1$, значит сходится

$\int\limits_1^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx = \left(x^{t-1} \cdot e^{-x/2}\right) \cdot e^{-x/2} \leq e^{-x/2}$ при $x \geq x_0$, где $x_0 < 1$.

$\int\limits_{x_0}^{+\infty} e^{-x/2} = \lim\limits_{B \to +\infty} \left(2 \cdot e^{-x_0/2} - 2 \cdot e^{-B/2}\right)$ — конечен

2. Подынтегральная функция $h : t \mapsto x^{t-1}e^{-x}$ — выпукла.

Продифференцируем $h'' = x^{t-1}e^{-x}\ln^2 x \geq 0$

$\forall x \in [0, 1] : h\left(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2, x\right) \leq \alpha h(t_1, x) + (1-\alpha)h(t_2, x)$ — неравенство Йенсена

$\Gamma(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha\Gamma(t_1) + (1-\alpha)\Gamma(t_2)$

$\Gamma(t)$ — выпукла, значит она непрерывна

3. $\int\limits_0^{+\infty} x^t e^{-x}dx = \begin{bmatrix} f = x^t & f' = tx^{t-1} \\ g' = e^{-x} & g = -e^{-x} \end{bmatrix} = x^t(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} tx^{t-1}e^{-x}dx = t\Gamma(t)$

$\Gamma(1) = 1$, значит $\Gamma(n) = n!$

4. $\int\limits_0^{+\infty} x^{-0.5}e^{-x}dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}dy$ — интеграл Эйлера-Пуассона

2.46 Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах.

Пусть f — допустима на $[a, b)$. Тогда эквивалентны утверждения:

1. $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится
2. $\int\limits_a^b |f|$ сходится
3. $\int\limits_a^b f^+$ и $\int\limits_a^b f^-$ абсолютно сходятся

Доказательство

$1 \Rightarrow 2$ — очевидно

$2 \Rightarrow 3$ $0 \leq f^+ \leq |f|$ и $0 \leq f^- \leq |f|$

$3 \Rightarrow 1$ $f = f^+ - f^- \Rightarrow \int f$ — сходится
$|f| = f^+ + f^- \Rightarrow \int |f|$ — сходится

Случай рядов

Аналогично интегралам. Доказывается с помощью интегрального признака Коши.

2.47 Изучение интеграла $\int_1^\infty \frac{\sin x\, dx}{x^p}$ на сходимость и абсолютную сходимость

Рассмотрим три случая:

1. При $p > 1 : \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leq \frac{1}{x^p}$ — абсолютная сходимость

2. При $p \leq 0$: $\int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \frac{\sin x}{x^p} \geq \int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin x = 2$, значит интеграл расходится (и абсолютно тоже)

3.При $0 < p \leq 1$ нет абсолютной сходимости, но есть обычная сходимость:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} = \begin{bmatrix} f' = \sin x & f = -\cos x \\ g = \frac{1}{x^p} & g' = -p\frac{1}{x^{p+1}} \end{bmatrix} = -\cos x \cdot \frac{1}{x^p}\Big|_1^{+\infty} - p\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx \text{ — сходится}$$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^p} - \frac{\cos 2x}{x^p}\right)$ — расходится,т.к. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}$ расходится, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p}$ сходится.

2.48 Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла

1. (Дирихле) f — допустима на $[a, b)$, $g \in C^1([a, b))$, $g(x) \xrightarrow[x \to b-0]{} 0$ монотонная

   $F(B) = \int\limits_a^B f$ — ограничена, тогда $\int\limits_a^{\to b} fg$ — сходится

2. (Абеля) f — допустима на $[a, b)$, $\int\limits_a^{\to b} f$ — сходится

   $g \in C^1([a, b))$, монотонная, ограниченная

   Тогда $\int\limits_a^{\to b} fg$ — сходится

Доказательство:

1. Интегрируем по частям $\int\limits_a^B fg = F(x)g(x)\Big|_a^B - \int\limits_a^B F(x)g'(x)dx$ — конечен

   $\int\limits_a^{\to b} |F(x)|\,|g'(x)|dx \le k \int\limits_a^{\to b} |g'(x)|dx = \pm k \int\limits_a^{\to b} g'(x) = \pm k g(x)\Big|_a^b$

2. $\alpha = \lim\limits_{x \to b-0} g(x)$, поскольку g — ограниченная и монотонная, значит имеет предел

   $fg = f\alpha + f(g - \alpha)$

   $\int f\alpha$ — сходится, $\int\limits_a^b f(g - \alpha)$ — сходится по уже доказанному.

2.49 Интеграл Дирихле

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

Доказательство

$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin{(n+0.5)x}}{2\sin 0.5x} - \frac{1}{2}$ (просто запомните это)

$2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos^2 x + \ldots = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}$

$\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2} + \left(\sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right) + \ldots = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}$

$0 = \int\limits_0^{\pi} \cos x + \ldots + \cos nx \; dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{2\sin 0.5x} - \frac{\pi}{2}$

Рассмотрим следующие интегралы:

$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{2\sin 0.5x} - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{x} \to 0$

$\int\limits_0^{\pi} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \cdot \left(\frac{1}{2\sin 0.5x} - \frac{1}{x}\right) dx$

Пусть $h(x) = \frac{1}{2\sin 0.5x} - \frac{1}{x}$, доопределим $h(0)$

$h(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2\sin 0.5x} - \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - 2\sin 0.5x}{2x\sin 0.5x}$ и по Тейлору найдём предел

$\frac{x - 2\left(0.5x - 1/6\cdot x^3/8 + o(x^3)\right)}{x^2 + o(x^2)}$ и $h'(0) = \frac{1}{24}$

$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{2\sin 0.5x} - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{x} = -\frac{\cos{(n+0.5)x}}{n+0.5}h(x)\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos{(n+0.5)x}}{n+0.5}\cdot h'(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{x} = \int\limits_0^{(n+0.5)\pi} \frac{\sin y}{y} dy$ и при $n \to +\infty$ заменяем на заданный в условии интеграл.

Итого:

$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{2\sin 0.5x} - \frac{\pi}{2} = 0$, значит $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}$

2.50 Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости, критерий Больцано–Коши

Линейность

1. Пусть $\sum a_n$, $\sum b_n$ — сходятся, тогда и ряд $\sum c_n$, где $c_n := a_n + b_n$ тоже сходится

2. Пусть $\sum a_n$ — сходится, тогда и ряд $\sum \lambda a_n$ тоже сходится, где $\lambda \in \mathbb{R}$

Доказательство

1. $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} (a_n + b_n) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} a_n + \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} b_n$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Свойства остатка

1 $\sum a_n$ — сходится, тогда и любой остаток ряда сходится
2 Какой-нибудь остаток ряда сходится, значит и сам ряд сходится
3 Пусть $R_m = \sum\limits_{k=m}^{+\infty} a_k$, $\sum a_n$ — сходится, значит и $R_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$

Доказательство

1. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m-1} a_k + \sum\limits_{k=m}^{N} a_k$, сумма и первое слагаемое конечна, значит и второе слагаемое конечное.

2. Аналогично предыдущему

3. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m-1} a_k + \sum\limits_{k=m}^{+\infty} a_k$

Необходимое условие сходимости рядов

$\sum a_n$ — сходится, тогда $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Доказательство

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S$, $S_n \to S$

$a_N = S_N - S_{N-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

Критерий Больцано-Коши

Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Доказательство

По определению сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна сходимости последовательности $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Воспользуемся критерием Больцано-Коши для последовательностей

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N : |S_m - S_n| < \varepsilon$$

Не умаляя общности можно считать, что $m > n$. Остаётся переобозначить $m = n + p$, где $p \in \mathbb{N}$ и заметить, что $S_m - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k$

2.51 Признак сравнения сходимости положительных рядов

Рассмотрим лемму:

Пусть $a_k \geq 0$, при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда сходимости $\sum a_k$ равносильно тому, что последовательность $S_n^{(a)}$ — ограничена

Доказательство:

Последовательность S_n возрастает, а по теореме о монотонной последовательности сходимость равносильна ограниченности сверху.

Сам признак:

Пусть a_k, $b_k \geq 0$. Тогда

1. $\forall k : a_k \leq b_k$ (или даже $\exists c > 0 : \exists N : \forall k > N : a_k \leq cb_k$)

   Тогда

   $\sum a_k$ расходится. значит и $\sum b_k$ расходится

   $\sum b_k$ сходится, значит и $\sum a_k$ сходится

2. Пусть $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$

   Тогда

   При $0 < l < +\infty$ $\sum a_k$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum b_k$ сходится

   При $l = 0$ $\sum b_k$ сходится, значит и $\sum a_k$ сходится, или $\sum a_k$ расходится, значит и $\sum b_k$ расходится

   При $l = +\infty$ $\sum a_k$ сходится, значит и $\sum b_k$ сходится, или $\sum b_k$ расходится, значит и $\sum a_k$ расходится

Доказательство:

1. Следует из леммы

   $\sum a_k$ сходится $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_k$ сходится

   $a_k \leq cb_k \Rightarrow S_n^{(a)} \leq c \cdot S_n^{(b)}$

   $\sum a_k$ расходится $\Rightarrow S_n^{(a)}$ не ограничено сверху, значит и $S_n^{(b)}$ тоже не ограничено сверху

2. Следует из первого случаи $l = 0$ и $l = +\infty$

   $0 < l < +\infty$. По определению предела

   $\exists N : \forall k > N : \dfrac{l}{2} < \dfrac{a_k}{b_k} < \dfrac{3l}{2}$

   $a_k > \dfrac{1}{2} b_k$, значит $\sum a_n$ сходится, значит и $\sum \dfrac{l}{2} b_n$ тоже сходится, значит и $\sum b_n$ сходится. Аналогично разбираются и остальные 3 случая.

2.52 Признак Коши сходимости положительных рядов

Пусть $a_n \geq 0$ для всех n и $k_n = \sqrt[n]{a_n}$

1. $\exists q < 1 : k_n \leq q$, начиная с некоторого места, значит ряд сходится
2. $k_n \geq 1$ для бесконечного числа номеров, значит ряд расходится

Доказательство

1. $k_n \leq q \Longleftrightarrow a_n \leq q^n$ при $n \to +\infty$, а q^n — сходится, значит и $\sum a_n$ — сходится
2. $a_n \geq 1$ — верно для бесконечного числа n, значит $\exists n_k$, что $\lim a_{n_k} \neq 0$, значит $\sum a_n$ расходится.

2.53 Признак Коши сходимости положительных рядов (pro)

Формулировка

Пусть $a_n \geq 0$, $k = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$

1. $k > 1$, значит $\sum a_n$ — расходится
2. $k < 1$, значит $\sum a_n$ — сходится

Доказательство

1. Пусть $k > 1$, тогда для бесконечного числа номеров $\sqrt[n]{a_n} > 1$, а значит $a_n > 1$, значит a_n не стремится к 0, и поэтому ряд расходится.
2. Пусть $k < 1$. Обозначим за $\varepsilon = \dfrac{1-k}{2} > 0$, $q = \dfrac{1+k}{2}$. По свойствам верхнего предела существует такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} < k + \varepsilon = \frac{1+k}{2} = q \in (0, 1)$$

Тогда $a_n < q^n$ при всех $n > N$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения со сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$

2.54 Признак Даламбера сходимости положительных рядов

Формулировка

Пусть $a_n \geq 0,\ D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

light

1. $\exists q < 1$ начиная с некоторого места $D_n \leq q$, значит $\sum a_n$ сходится
2. $D_n \geq 1$ начиная с некоторого места, значит $\sum a_n$ расходится

pro

Пусть $\exists \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D$

1. $D < 1$, значит $\sum a_n$ сходится
2. $D > 1$, значит $\sum a_n$ расходится

Доказательство

light

1. $\dfrac{a_{N+1}}{a_N} < q$
   $\dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q$
   $\dots$
   $\dfrac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} < q$
   $a_{N+k} < q^k \cdot a_{N_0}$ — сходится
   Значит a_n сходится
2. $a_{N_0+k} \geq a_{N_0} > 0$, значит a_k не стремится 0 — расходится

pro

1. $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D$, значит НСНМ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$, значит $\sum a_n$ сходится
2. $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D > 1$, значит НСНМ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, значит $\sum a_n$ расходится

2.55 Признак Раабе сходимости положительных рядов

Лемма

Формулировка

Пусть a_n, $b_n > 0$ и $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ НСНМ. Тогда
b_n — сходится, значит и a_n сходится
или
a_n — расходится, значит и b_n расходится.

Доказательство

Будем считать "НСНМ"как "1"

$a_2 < a_1\dfrac{b_2}{b_1}$

$a_3 < a_2\dfrac{b_3}{b_2}$

...

$a_n < a_{n-1}\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$, значит $a_n < \dfrac{a_1}{b_1}b_n$, т.е. $a_n < c \cdot b_n$

Теорема

Формулировка

$a_n > 0$, тогда если

$n \cdot \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r > 1$ (НСНМ), тогда $\sum a_n$ — сходится

$n \cdot \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ (НСНМ), тогда $\sum a_n$ — расходится

Доказательство

1. $n \cdot \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r \Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \dfrac{r}{n}$

   Пусть $1 < s < r$, $b_n := \dfrac{1}{n^s}$

   Итак, НСНМ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$

   $\sum b_n = \sum \dfrac{1}{n^s}$ — сходится, значит $\sum a_n$ — сходится

2. $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leq \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$

   $\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $\sum \frac{1}{n}$ — расходится, значит и $\sum a_n$ — расходится

2.56 Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов

Формулировка

Пусть $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, непрерывна, ≥ 0, монотонна

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ и $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ — сходится или расходится одновременно. Содержательный случай f — убывает и $f(1) > 0$

Доказательство

- Ряд сходится, значит $S_n^{(f)}$ — ограничена сверху

  Тогда $\Phi(A) = \int\limits_1^A f(x)dx$ — ограничена сверху

  $S_n^{(f)} \leq S$

  $\Phi(A) < \Phi([A]+1) = \int\limits_1^{[A]+1} f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{[A]} \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum \int\limits_k^{k+1} f(k)dx = \sum\limits_{k=1}^{[A]} f(k) \leq S$

- Интеграл сходится, значит и ряд сходится

  $\Phi(A) \leq S$

  Проверим, что $S_n \leq S + f(1)$

  $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum\limits_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(k)dx \leq f(1) + \sum\limits_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx = f(1) + \int\limits_1^n f(x)dx \leq f(1) + S$

2.57 Признак Лейбница

Формулировка

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$, $a_n \to 0$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}a_k$ — сходится

Доказательство

$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$
$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$
$S_{2n} \leq a_1$, $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$
$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, итого S — ограничено, значит ряд сходится

2.58 Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда

Формулировка

Дирихле

Пусть $S_n^{(a)}$ — ограничена

b_n — монотонна. $b_n \to 0$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ — сходится

Абеля

Пусть $\sum a_k$ — сходится, b_n — ограниченная, монотонная

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ — сходится

Доказательство

Дирихле

Применим преобразование Абеля $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$

Из того, что A_n ограничена, а b_n бесконечна мала, следует, что $A_n b_n \to 0$, поэтому сходимость эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$

$\sum\limits_{k=1}^{n-1} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq c_a \sum\limits_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = c_a |b_1 - b_n|$ — ограничена

Абеля

Существует конечный $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \beta$

$\sum a_k b_k = \sum a_k \beta + \sum a_k(b_k - \beta)$, первое сходится в силу сходимость $\sum a_k$, а второе сходится в силу признака Дирихле

2.59 Теорема о группировке слагаемых

Формулировка

Выберем $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \ldots$

Пусть $\sum a_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots$

$b_k = \sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i$

Тогда

1. $\sum a_n$ — сходится $\Rightarrow \sum b_k$ сходится и имеет ту же сумму
2. $a_k \geq 0 \Rightarrow \sum a_k = \sum b_k$

Доказательство

$S_k^{(b)} = S_{n_k}^{(a)}$

1. $\lim\limits_{k\to\infty} S_k^{(b)} = \lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}^{(a)} = S^{(a)}$
2. Если $\sum a_n$ — сходится, то смотри пункт 1

   Если $\sum a_n$ — расходится, значит $S_n^{(a)}$ не ограничено сверху, значит и $S_n^{(b)}$ не ограничено сверху

2.60 Теорема о перестановке слагаемых

Формулировка

1. Пусть ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится, тогда ряд $\sum b_n$, полученный из ряда $\sum a_n$ перестановкой, будет также абсолютно сходиться и иметь ту же сумму.
2. Также если $a_k \geq 0$ при всех k, то $\sum a_k = \sum b_k$

Доказательство

1. По определению $S_n^{(b)} = a_{\varphi(1)} + \ldots + a_{\varphi(n)} \leq S_{\max\varphi(i)}^{(a)}$. Устремим $n \to +\infty$, $S^{(b)} \leq S^{(a)}$. Аналогично $S^{(a)} \leq S^{(b)}$.
2. Берём срезки a_n^+ и a_n^-, тогда $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ — сходятся.

   $a_n^+ = \max(a_n^+, 0)$, $\sum b_n^+$ — перестановка ряда a_n^+

   $a_n^- = \max(-a_n^-, 0)$. Аналогично $\sum b_n^-$

   И по второму пункту всё доказали

P.S. доказательство идёт в обратном порядке

2.61 Теорема о произведении рядов

Формулировка

Пусть ряды (A) и (B) абсолютно сходятся к суммам $S^{(a)}$ и $S^{(b)}$. Тогда $\forall \gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — биекция, произведение рядов абсолютно сходится и имеют сумму $S^{(a)}S^{(b)}$

Доказательство

Пусть $\sum |a_k| = A$ и $\sum |b_k| = B$, тогда
$\sum\limits_{k=1}^{N} |a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_n| \sum\limits_{k=1}^{m} |b_k| \leq A \cdot B$, где $n := \max(\varphi(1), \ldots, \varphi(N)), m = \max(\psi(1), \ldots, \psi(N))$

Значит ряд $\sum\limits_{k=1}^{N} |a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}|$ — сходится, значит произведение рядов абсолютно сходится, значит его сумма не зависит от порядка слагаемых, следовательно не зависит и от выбора γ

2.62 Теорема об условиях сходимости бесконечного произведения

Формулировка

1. Пусть $a_n > 0$ НСНМ. Тогда равносильность $\prod(1+a_n)$ — сходится $\iff \sum a_n$ — сходится
2. Пусть $\sum a_n$ — сходится, а также $\sum a_n^2$ — тоже сходится. Тогда $\prod(1+a_n)$ — сходится

Доказательство

1. $\prod$ — сходится $\Leftrightarrow \sum \ln|1+a_n|$ — сходится $\Leftrightarrow \sum a_n$ — сходится. НСНМ $\ln|1+a_n| \sim a_n$ при $n \to +\infty$
2. $\prod$ сходится $\Leftrightarrow \sum \ln(1+a_n)$ сходится

   $\ln(1+a_n) = a_n - \dfrac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$

   Докажем, что $\sum |o(a_n^2)|$ абсолютно сходится

   $\lim\limits_{n\to} \dfrac{o(a_n^2)}{a_n^2} = 0$ из сходимости $\sum a_n^2$ следует сходимость $\sum |o(a_n^2)|$, значит и $\sum o(a_n^2)$ сходится

2.63 Лемма об оценке приближения экспоненты ее замечательным пределом

Лемма 1

Формулировка

$\Pi(n,x) = \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$, где $x > 0$

Тогда $\Pi(n,x) = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{x(x+1)\ldots(x+n)} \cdot n^x$

Доказательство

$\Pi(n,x) = n^x \int\limits_0^1 (1-s)^n \cdot s^{x-1} ds = n^x \left((1-s)^n \cdot \frac{s^x}{x}\Big|_{s=0}^{s=1} + \frac{n}{x} \int\limits_0^1 (1-s)^{n-1} \cdot s^x ds \right) = n^x \cdot \frac{n}{x} \int\limits_0^1 (1-s)^{n-1} s^x ds = n^x \cdot \frac{n}{x} \cdot \frac{n-1}{x+1} \cdot \int\limits_0^1 (1-s)^{n-2} s^{x-1} ds = \ldots$ получаем то, что хотели

Лемма 2

Формулировка

При $0 \le t \le n$

$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le \frac{1}{n} t^2 e^{-t}$

Доказательство

$(1+y) \le e^y \le (1-y)^{-1}$, $y \in [0,1]$ в силу выпуклости e^x

$e^y \ge 1 + y$

$e^{-y} \ge 1 - y$

возведём в $(-n)$, $y := \frac{t}{n}$

$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \ge e^{-t} \ge \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$

$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left(1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \le e^{-t}\left(1 - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)$

$e^{-t}\left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \le \frac{t^2}{n} e^{-t}$ (это неравенство Бернулли)

2.64 Формула Эйлера для гамма-функции

Формулировка

При $x > 0$ верно, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{x(x+1)\ldots(x+n)} \cdot n^x = \Gamma(x)$$

Доказательство

$$\Gamma(x) - \lim_{n\to+\infty} \Pi(n,x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\int\limits_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{x-1} dt + \int\limits_n^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right)$$

$$\int\limits_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\int\limits_0^n \frac{1}{n} e^{-t} t^2 t^{x-1} dt \le \frac{1}{n} \int\limits_0^{+\infty} t^{x+1} e^{-t} dt \to 0$$

2.65 Формула Вейерштрасса для Γ-функции

Формулировка

Пусть $x > 0$, γ — постоянная Эйлера. Тогда

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

Доказательство

$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{-x}\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{1\cdot 2\dots \cdot n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^{-x}\cdot x\cdot\frac{x+1}{1}\cdot\frac{x+2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{x+n}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} x\cdot n^{-x}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} xe^{x\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}\cdot e^{-x\ln n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} = x\cdot e^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}$

2.66 Вычисление произведений с рациональными сомножителями

Пусть $u_n = A \cdot \dfrac{(n+a_1)(n+a_2)\cdot(n+a_k)}{(n+b_1)(n+b_2)\dots(n+b_l)}$, где a_i и $b_i \in \mathbb{Q}$. Хотим найти $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} u_i$. Самый интересный случай, это то, что произведение сходится, тогда $u_n \to 1$, а значит $k = l$ и $A = 1$

$u_n = \dfrac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\left(1+\frac{a_2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)\left(1+\frac{b_2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{b_k}{n}\right)}$ и при $n \to +\infty$

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\left(1+\frac{a_2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)\left(1+\frac{b_2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{b_k}{n}\right)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)e^{-\frac{a_1}{n}}\left(1+\frac{a_2}{n}\right)e^{-\frac{a_2}{n}}\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)e^{-\frac{b_1}{n}}\left(1+\frac{b_2}{n}\right)e^{-\frac{b_2}{n}}\dots\left(1+\frac{b_k}{n}\right)e^{-\frac{b_k}{n}}} =$$

$$\prod_{i=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{\Gamma(a_1)a_1e^{\gamma a_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\Gamma(a_k)a_ke^{\gamma a_k}}}{\frac{1}{\Gamma(b_1)b_1e^{\gamma b_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\Gamma(b_k)b_ke^{\gamma b_k}}} = \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(1+b_1)\dots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\dots\Gamma(1+a_k)}$$

2.67 Разложение синуса в бесконечное произведение

https://youtu.be/wWtKfrt_ZQY?t=0s

Лемма 1.

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = (2 \cdot n + 1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

Доказательство.

$$m \stackrel{\text{def}}{=} 2n + 1$$

$$\text{Формула Мувара: } \cos mz + i \sin mz = (\cos z + i \sin z)^m$$

$$\operatorname{Im}(\cos mz + i \sin mz) = \operatorname{Im}\left((\cos z + i \sin z)^m\right)$$

$$\sin mz = \binom{m}{1} \cos^{m-1} z \sin z - \binom{m}{3} \cos^{m-3} z \sin^3 z + \dots$$

$\sin mz = \sin z \cdot P\left(\sin^2 z\right)$, т.к. чётные степени косинуса легко выражаются через синус

$$\text{Пусть } z \in \left\{\frac{k\pi}{m} : \; k \in \{1, \dots, n\}\right\}$$

$$\sin k\pi = \sin \frac{k\pi}{m} \cdot P\left(\sin^2 \frac{k\pi}{m}\right)$$

$$0 = \sin \frac{k\pi}{m} \cdot P\left(\sin^2 \frac{k\pi}{m}\right)$$

$$\sin \frac{k\pi}{m} \neq 0 \Rightarrow \left\{\sin^2 \frac{k\pi}{m} : \; k \in \{1, \dots, n\}\right\} \text{ — множество корней } P \text{ т.к. } \deg P \leq n$$

$$P(U) = A \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{u}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}}\right)$$

$$A = P(0) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin mz}{\sin z} = m = 2n + 1$$

$$\sin((2n+1)z) = (2n+1) \sin z \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

$$z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{2n+1}$$

$$\sin x = (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

□

Лемма 2.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}$$

Доказательство.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{\left(\frac{x}{2n+1}\right)^2}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}\right) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}$$

□

Лемма 3.

$$\lim_{n\to+\infty}(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}=x$$

Доказательство. Очевидно □

Теорема 1.

$$\forall x\in R\quad \sin x = x\cdot\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 j^2}\right)$$

Доказательство.

$$\text{Возьмём } n,k\in\mathbb{N}:\ n>k$$

$$u_k^n\overset{\text{def}}{=}(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{j\pi}{2n+1}}\right)$$

$$v_k^n\overset{\text{def}}{=}\prod_{j=k+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{j\pi}{2n+1}}\right)$$

$$\text{По первой лемме: }\sin x=u_k^n v_k^n$$

$$\text{По второй и третьей: }\lim_{n\to+\infty}u_k^n=x\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 j^2}\right)\overset{\text{def}}{=}u_k$$

$$\begin{cases}\sin x=u_k^n v_k^n\\ \exists\lim\limits_{n\to+\infty}\sin x=\sin x\\ \exists\lim\limits_{n\to+\infty}u_k^n=u_k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\exists\lim\limits_{n\to+\infty}v_k^n\overset{\text{def}}{=}v_k\\ \sin x=u_k v_k\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=u_k v_k\\ \exists\lim\limits_{k\to+\infty}\sin x=\sin x\\ \lim\limits_{k\to+\infty}u_k=x\cdot\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 j^2}\right)\ \text{очев. }\exists\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\exists\lim\limits_{k\to+\infty}v_k\overset{\text{def}}{=}v\\ \sin x=\left[x\cdot\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 j^2}\right)\right]v\end{cases}$$

Остаётся доказать, что $v=1$.

$$0<\phi<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{2}{\pi}\varphi<\sin\varphi<\varphi$$

$$1>1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{j}{2n+1}}>1-\frac{\frac{x^2}{(2n+1)^2}}{\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2 j^2}{(2n+1)^2}}=1-\frac{x^2}{4j^2}$$

$$1>v_k^n>\prod_{j=k+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4j^2}\right)$$

$$1>v_k\geq\prod_{j=k+1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{4j^2}\right)$$

$$1\geq v\geq 1\ \text{(остаток сходящегося произведения)}$$

□

2.68 Единственность производной

Производный оператор единственный

Доказательство:

Проверим, что $\forall n \in \mathbb{R}^m$ $L(n)$ задан однозначно

Пусть $h := tu$, где $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$

Тогда по определению производной в точке a, для функции F:

$F(a+tu) = F(a) + L(tu) + o(tu)$

По свойству линейности линейного оператора:

$F(a+tu) = F(a) + t \cdot L(u) + o(t)$

Выражаем $L(u)$:

$$L(u) = \frac{F(a+tu) - F(a)}{t} - \frac{o(t)}{t}$$
$$L(u) = \lim_{t\to 0} \frac{F(a+tu) - F(a)}{t}$$

В силу единственности предела - оператор тоже определен однозначно

2.69 Лемма о дифференцируемости отображения и его координатных функций

Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $F = (F_1, \ldots, F_l)$, $a \in \mathrm{Int}(E)$

Тогда

1. F — дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow$ все F_i дифференцируемы в точке a

2. Строки матрицы Якоби F равны матрицы Якоби функций F_i

Доказательство

1. В правую сторону:

Пусть F дифференцируема в точке a. Тогда для каждой координатной функции должно выполняться следующее равенство:

$f_i(x + h) = f_i(x) + A_i h + \alpha_i(h)|h|$ для всех i

т.к. координатные функции линейного оператора A являются линейными, а также непрерывность и равенство нулю в нуле отображения α равносильно такому же свойству его координатных функций, итого получили, что f_i дифференцируема в точке a_i

В левую сторону:

Пусть все f_i дифференцируемы в точке a. Тогда для каждого i существует линейная функция A_i и функция α_i, непрерывная и равная нулю в нуле, для которых справедливо равенство. Значит для f также выполняется равенство

$f(x + h) = f(x) + Ah + \alpha(h)|h|$

2. Распишем $F(x) = F(a) + F'(a)(x - a) + \alpha(x)|x - a|$

$$\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_l(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(a) \\ F_2(a) \\ \vdots \\ F_l(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{l1} & \lambda_{l2} & \ldots & \lambda_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_m - a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix} |x - a|$$

Откуда и получаем требуемое условие

2.70 Необходимое условие дифференцируемости

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } E$

f — дифференцируема в точке a

Тогда $\exists f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_m}(a)$ и тогда $(f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_m}(a))$ — матрица Якоби f в точке a

Доказательство

$f(a+h) = f(a) + L \cdot h + \alpha(h) \cdot |h|$

Пусть $t \in \mathbb{R}$,

$e_k = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, где 1 находится на k-ом месте.

Тогда $h_k := t \cdot e_k$

$f(a + t \cdot e_k) = f(a) + l_k \cdot t + \alpha(t \cdot e_k)|t|$, где l_k - строка матрицы Якоби функции F.

$l_k = \varphi'_k(a_k) = \dfrac{\partial f}{\partial_{x_k}}(a_k)$

2.71 Достаточное условие дифференцируемости

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in E$, $B(a,r) \subset E$

Пусть в этом шаре $\exists f'_{x_1}(x), \dots, f'_{x_m}(x)$, $x \in B(a,r)$

и все эти производные непрерывны в точке a. Тогда f — дифференцируемы в точке a

Доказательство

Пусть $m = 2$, на большую размерность обобщается легко

$a = (a_1, a_2)$, $x = (x_1, x_2)$

$f(x_1,x_2) - f(a_1,a_2) = (f(x_1,x_2) - f(a_1,x_2)) + (f(a_1,x_2) - f(a_1,a_2)) =$

По теореме Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, значит

$= f'_{x_1}(\overline{x_1}, x_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(x_1, \overline{x_2})(x_2 - a_2) = f'_{x_1}(a_1,a_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1,a_2)(x_2 - a_2) + (f'_{x_1}(\overline{x_1}, x_2) - f'_{x_1}(a_1,a_2))(x_1 - a_1) + (f'_{x_2}(a, \overline{x_2}) - f'_{x_2}(a_1,a_2))(x_2 - a_2) \to 0$ при $(x_1,x_2) \to (a_1,a_2)$, поскольку

Пусть $\alpha(h)|h| = (f'_{x_1}(\overline{x_1}, x_2) - f'_{x_1}(a_1,a_2))(x_1 - a_1) + (f'_{x_2}(a, \overline{x_2}) - f'_{x_2}(a_1,a_2))(x_2 - a_2)$, где $|h| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$

Тогда в качестве примера рассмотрим первое слагаемое $(f'_{x_1}(\overline{x_1}, x_2) - f'_{x_1}(a_1,a_2)) \cdot \dfrac{x_1 - a_1}{|h|}$, которое стремится к нулю, поскольку первый множитель стремится к нулю при $(x_1,x_2) \to (a_1,a_2)$, а второй множитель не превосходит по модулю 1.

2.72 Метод Лапласа

2.73 Формула Стирлинга для гамма-функции

Теорема 1.

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}x^x e^{-x},\ x \to +\infty$$

Доказательство.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \underset{t=yx}{=} \int_0^{+\infty} (yx)^x e^{-yx} x dy = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{x(\ln y - y)} dy$$

Максимум функции $\ln y - y$ достигается при $y = 1$. Воспользуемся замечанием к теореме Лапласа. Для этого перейдем к его обозначениям: $A = x,\ a = 1,\ \varphi''(a) = -1,\ L = 1,\ \varphi(a) = -1$. Получим:

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \frac{L}{\sqrt{|\varphi''(a)|}} e^{A\varphi(a)} = x^{x+1} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1}}$$

□

2.74 Теоерма Вейерштрасса о многочленах

Теорема 1.

$$\forall f \in C[a,b] \quad \exists \textit{ послед. мн-нов } P_n(x): \quad \forall x \in [a,b] \quad P_n(x) \to f(x)$$

Доказательство. Рассмотрим следующую последовательность многочленов:

$$P_n(x) = \frac{1}{b-a}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_a^b f(t)\left(1-\frac{(x-t)^2}{(b-a)^2}\right)^n dt$$

$$\int_a^b f(t)\left(1-\frac{(x-t)^2}{(b-a)^2}\right)^n dt = \int_a^b f(t)e^{n\ln\left(1-\frac{(x-t)^2}{(b-a)^2}\right)}$$

Обозначим логарифм за $\varphi(t)$. Функция φ имеет максимум. Воспользуемся методом Лапласа и получим:

$$\int_a^b f(t)\left(1-\frac{(x-t)^2}{(b-a)^2}\right)^n dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} f(x)(b-a)$$

$$P_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(x)$$

□

2.75 Лемма об оценке нормы линейного оператора

Лемма 1. *$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, лин. оператор $A = (a_{ij})$*
$\forall x \in \mathbb{R}^m \qquad |Ax|^2 \leqslant C_A|x|$, где $C_A = (\sum a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$

Доказательство.

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)^2 \underset{\text{КБШ}}{\leqslant} \sum_{i=1}^{l}\left(\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right)\right) = \sum x_j^2 \cdot \sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum x_j^2 \cdot C_A^2$$

□

Следствие. Линейное отображение всюду непрерывно

2.76 Дифференцирование композиции

Теорема 1. $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l,\ a \in \mathcal{I}\backslash\sqcup E,\ G : I \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n,\ b = F(a),\ b \in \operatorname{Int} I,\ F$ *— дифф. в* $a,\ G$ *— дифф. в* $F(a)$*, тогда* $G \circ F$ *— дифф. и*

$$(G \circ F)'(a) = G'(F(a)) \cdot F'(a)$$

Доказательство.

$$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \alpha(h)\,|h|$$

$$F(b+k) = G(b) + G'(b)k + \beta(k)\,|k|$$

Подставим $k = k(h) = F'(a)h + \alpha(h)\,|(|\,h)$, где $\gamma(h) = G'(b)\alpha(h) + \beta(k)\frac{|k|}{|h|}$. Докажем, что $\gamma(h)$ — бесконечно малое при $h \to 0$

$$|G'(b)\alpha(h)| \leqslant C_{G'(b)} \cdot |\alpha(h)| \ \text{— б.м.}$$

$$|k| = |F'(a)h + \alpha(h)\,|h|| \leqslant |f'(a)h| + |\alpha(h)|\,|h| \leqslant \big(\underset{\text{огр.}}{C_{F'(a)} + |\alpha(h)|}\big)\,|h| \Rightarrow$$

$$\frac{|k|}{|h|} \text{ — огр.},\ \beta(k) \text{ — б.м.}$$

□

2.77 Дифференцирование «произведений»

Лемма 1. $F, G : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l,\ a \in \operatorname{Int} E,\ \lambda : E \to \mathbb{R},\ F, G, \lambda$ — *дифференцируемы в* a*,* *Тогда:* $\lambda F,\ \langle F, G\rangle$ — *дифференцируемы в* a *и*

1. $(\lambda F)'(a)h = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)F'(a)h$
2. $(\langle F, G\rangle)'(a)h = \langle F'(a)h, G(a)\rangle + \langle F(a), G'(a)h\rangle$

Доказательство.

1. Рассмотрим координатную функцию ($l = 1,\ \ F \leftrightarrow f$): $\lambda f(a+h) - \lambda f(a) = (\lambda(a) + \lambda'(a)h + \alpha(h)\,|h|)(f(a) + f'(a)h + \beta(h)\,|h|) - \lambda(a)f(a) = \lambda'(a)h \cdot f(a) + \lambda(a)f'(a)h + |h|\,(\alpha(h)f(a) + \cdots) + \alpha'(a)h \cdot f'(a)h = \lambda'(a)h \cdot f(a) + \lambda(a)f'(a)h$
   Общий случай получим по принципу покоординатной сходимости
2. $\langle F, G\rangle'(a)h = \left(\sum_{i=1}^{l} f_i g_i\right)'(a)h = \sum (f_i g_i)'(a)h = \sum f_i'(a)h \cdot g_i + \sum f_i \cdot g_i'(a)h = \langle F'(a)h, G(a)\rangle + \langle F(a), G'(a)h\rangle$

□

2.78 Теорема Лагранжа для векторнозначных функций

Теорема 1. *$F : [a, b] \to \mathbb{R}^l$, непрерывная на $[a, b]$, дифференцируемая на (a, b) Тогда $\exists c \in (a, b)$:*

$$|F(b) - F(a)| \leqslant (b - a)|F'(c)|$$

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию:

$$\varphi(t) := \langle F(b) - F(a), F(t) - F(a)\rangle,\ t \in [a, b]$$

$$\varphi(a) = 0,\ \varphi(b) = |F(b) - F(a)|^2$$

$$\varphi'(t) = \langle F(b) - F(a), F'(t)\rangle$$

Функция φ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), применим т. Лагранжа:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c) \cdot (b - a)$$

$$|F(b) - F(a)|^2 = \langle F(b) - F(a), F'(c)\rangle \cdot (b - a) \leqslant |F(b) - F(a)| \cdot |F'(c)|\,(b - a)$$

$$|F(b) - F(a)| \leqslant (b - a)\,|F'(c)|$$

□

2.79 Экстремальное свойство градиента

Теорема 1.

$$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ a \in \operatorname{Int} E,\ \vec{l} = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|},$$

тогда $\vec{l}$ *— направление наискорейшего возрастания функции, т.е.*

$$\forall h,\ |h| = 1 \qquad -\frac{\partial f}{\partial l}(a) \leqslant \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leqslant \frac{\partial f}{\partial l}(a)$$

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \nabla f(a), h \rangle \leqslant |\nabla f(a)| \cdot |h| = \langle \nabla f(a), l \rangle = \frac{\partial f}{\partial l}$$

Ан-но для неравенства с минусом $\square$