МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»

Тема: Алгоритм Флойда-Уоршелла

Студентка гр. 8303 _____ Потураева М.Ю.

Преподаватель _____ Фирсов М.А.

Санкт-Петербург
2020

ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

Студентка Потураева М.Ю.

Группа 8303

Тема работы : алгоритм Флойда-Уоршелла

Исходные данные:
Исследование зависимости времени работы алгоритма Флойда-Уоршелла от входных данных.

Дата сдачи курсовой работы:

Дата защиты курсовой работы:

Студентка _____ Потураева М.Ю.

Преподаватель _____ Фирсов М.А.

АННОТАЦИЯ

В данной работе рассмотрены генерация случайного графа по количеству вершин и ребер и исследование алгоритма Флойда-Уоршелла.

Программный код написан на языке программирования C++.

Результат работы программы выводится в файл.

SUMMARY

In this paper, we consider the generation of a random graph by the number of vertices and edges and the study of the Floyd-Warshell algorithm.

The program code is written in the C++programming language.

The result of the program is output to a file.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Алгоритм Флойда — Уоршелла — динамический алгоритм для нахождения кратчайших расстояний между всеми вершинами взвешенного ориентированного графа.

Пусть вершины графа G=(V,E), |V|=n пронумерованы от 1 до n и введено обозначение d_{ij}^{k} для длины кратчайшего пути от i до j, который кроме самих вершин i,j проходит только через вершины 1…k . Очевидно, что d_{ij}^{0} — длина (вес) ребра (i,j), если таковое существует (в противном случае его длина может быть обозначена как ∞).

Существует два варианта значения d_{ij}^{k} ,k∈(1…n):

1.Кратчайший путь между i,j не проходит через вершину k , тогда $d_{ij}^{k} = d_{ij}^{k-1}$

2.Существует более короткий путь между i,j , проходящий через k , тогда он сначала идёт от i до k , а потом от k до j . В этом случае, очевидно, $d_{ij}^{k} = d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$

Таким образом, для нахождения значения функции достаточно выбрать минимум из двух обозначенных значений.

Тогда рекуррентная формула для d_{ij}^{k} имеет вид:

d_{ij}^{0} — длина ребра (i,j)

$$d_{ij}^{k} = \min\left(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}\right)$$

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Написать программу, с помощью которой можно будет генерировать граф по количеству вершин и ребер, а также анализировать время работы алгоритма в зависимости от входных данных.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследование алгоритма Флойда-Уоршелла на большом количеству входных данных.

СПЕЦИФИКАЦИЯ ПРОГРАММЫ

Программа написана на языке C++. Считывание происходит из терминала. Пользователь вводит количество вершин и ребер, далее по ним строится граф. Результат работы программы помещается в файл.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

На вход алгоритму подается количество вершин N и количество ребер edges, которое может быть в диапазоне [1;N*(N-1)]. Далее происходит заполнение матрицы смежности -1, т.к. граф еще не заполнен. Формируется массив случайно сгенерированных чисел для дальнейшей записи их как вес ребер. В цикле edges раз генерируем ребро (кроме диагональных и уже созданных) и берем значение его веса из массива случайных чисел.

Далее алгоритм Флойда-Уоршелла обрабатывает матрицу смежности ,и на выходе получаем мтарицу с итоговыми кратчайшими расстояниями в графе.

Чтобы рассчитать время работы программы используется функция clock(), перед работой алгоритма и после.

Сложность алгоритма по времени: три вложенных цикла содержат операцию, исполняемую за константное время O(1),то есть алгоритм имеет кубическую сложность O(n*n*n), где n-количество вершин.

Сложность алгоритма по памяти: так как в структуре графа хранится только двумерный массив, хранящий информацию о ребрах, то сложность O(n*n), где n-количество вершин.

ОПИСАНИЕ ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ И СТРУКТУР ДАННЫХ

```
class Graph {
private:
   int** matrix;
public:
   int N;
   int edges;
};
```

Структура для хранения графа, matrix-матрица смежности, N-количество вершин, edges-количество ребер.

void FloydWarshall()

Функция, реализующая алгоритм Флойда-Уоршелла.

Graph()

Конструктор графа, в котором происходит считывание данных из терминала и генерация графа.

void Print(bool flag)

Функция для вывода графа в файл, в зависимости от флага выбирается файл, в который будет записана матрица.

ТЕСТИРОВАНИЕ

№	Input	Output
1	0 50 19 5 0 20 41 6 0	0 25 19 5 0 20 11 6 0
2	0 47 24 -1 0 -1 26 48 0	0 47 24 -1 0 -1 26 48 0
3	0 29 20 8 0 38 6 30 0	0 29 20 8 0 28 6 30 0
4	0 4 5 32 0 25 8 32 0	0 4 5 32 0 25 8 12 0
5	0 43 2 26 0 19 50 13 0	0 15 2 26 0 19 39 13 0

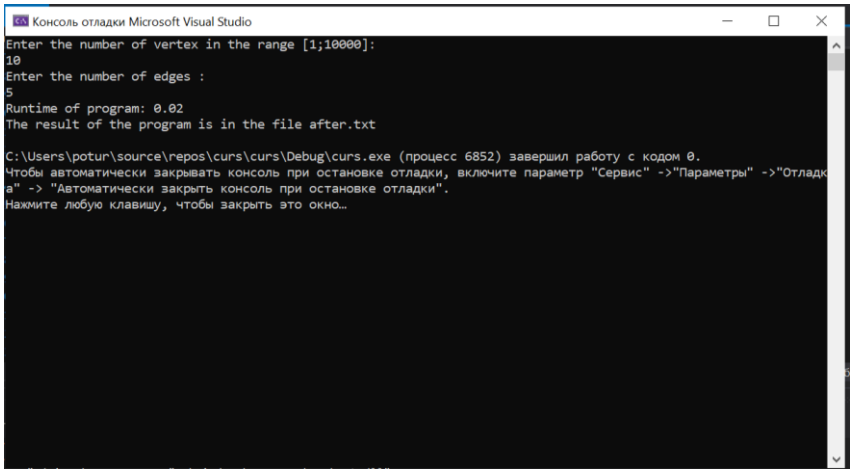


Рисунок 1. Построение графа с 10 вершинами и 5 ребрами

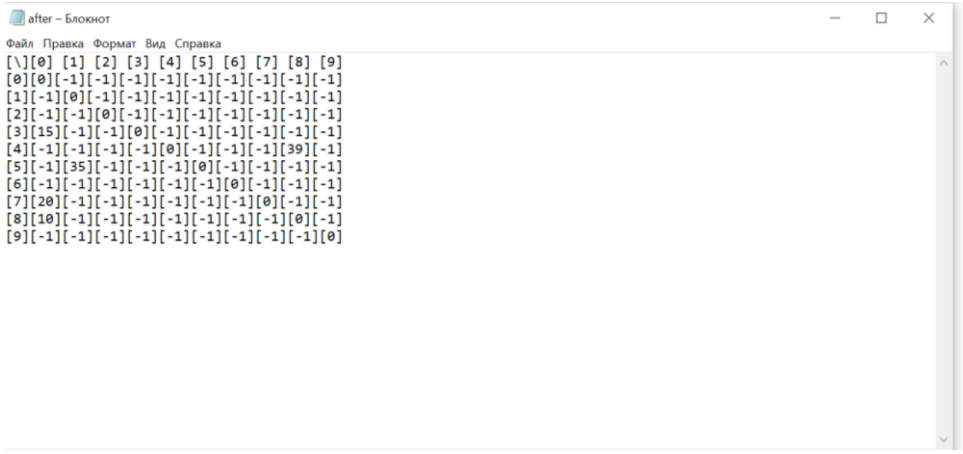


Рисунок 2. Построение графа с 10 вершинами и 5 ребрами

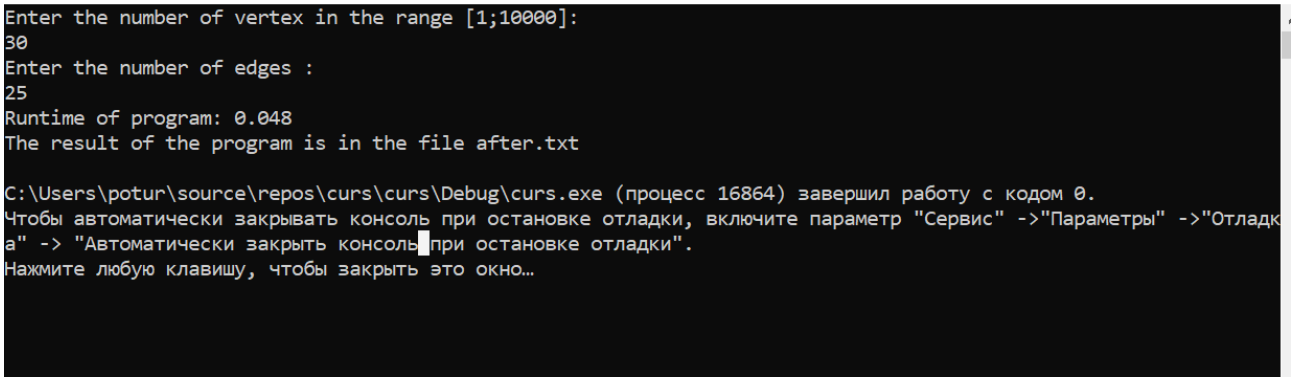


Рисунок 3. Построение графа с 30 вершинами и 25 ребрами

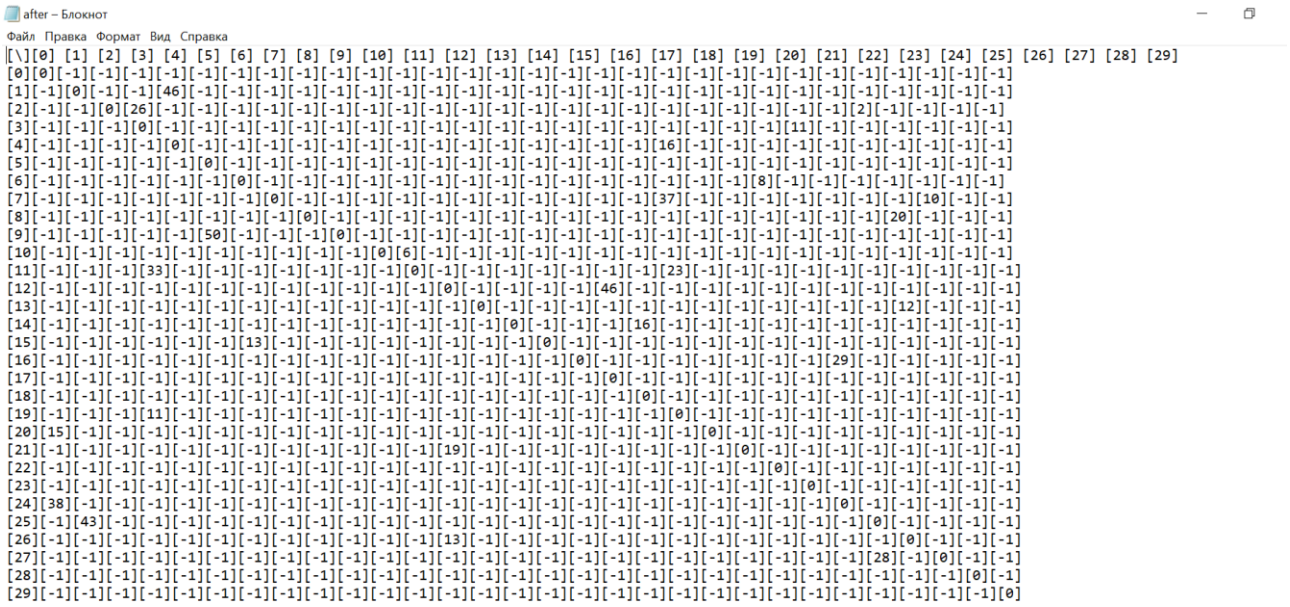


Рисунок 4. Построение графа с 30 вершинами и 25 ребрами

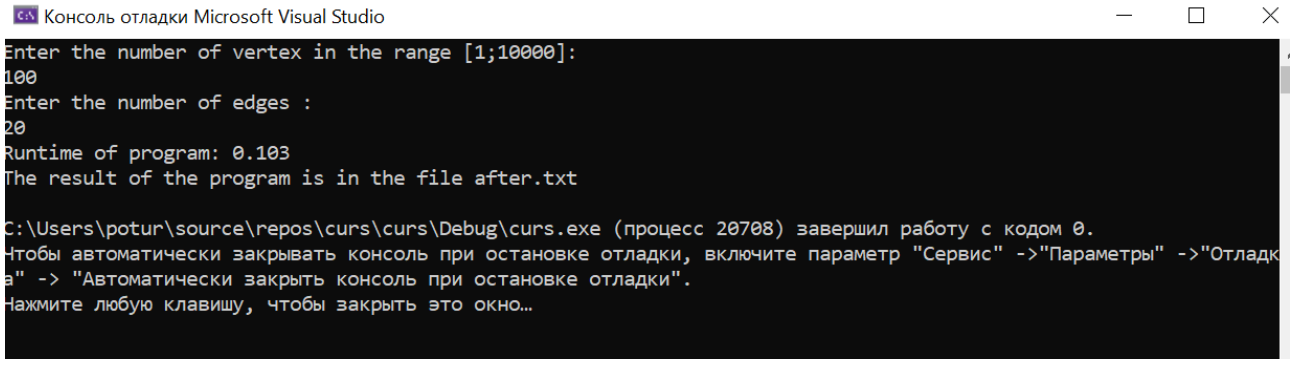


Рисунок 5.Построение графа с 100 вершинами и 20 ребрами

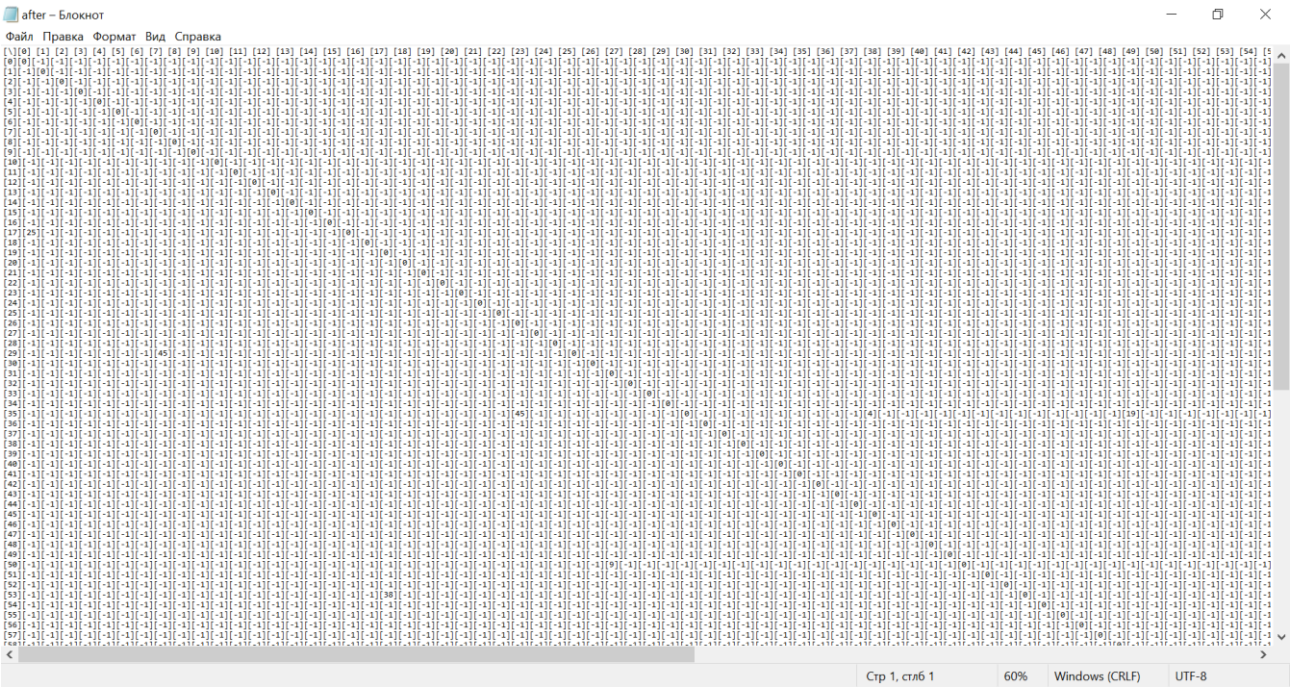
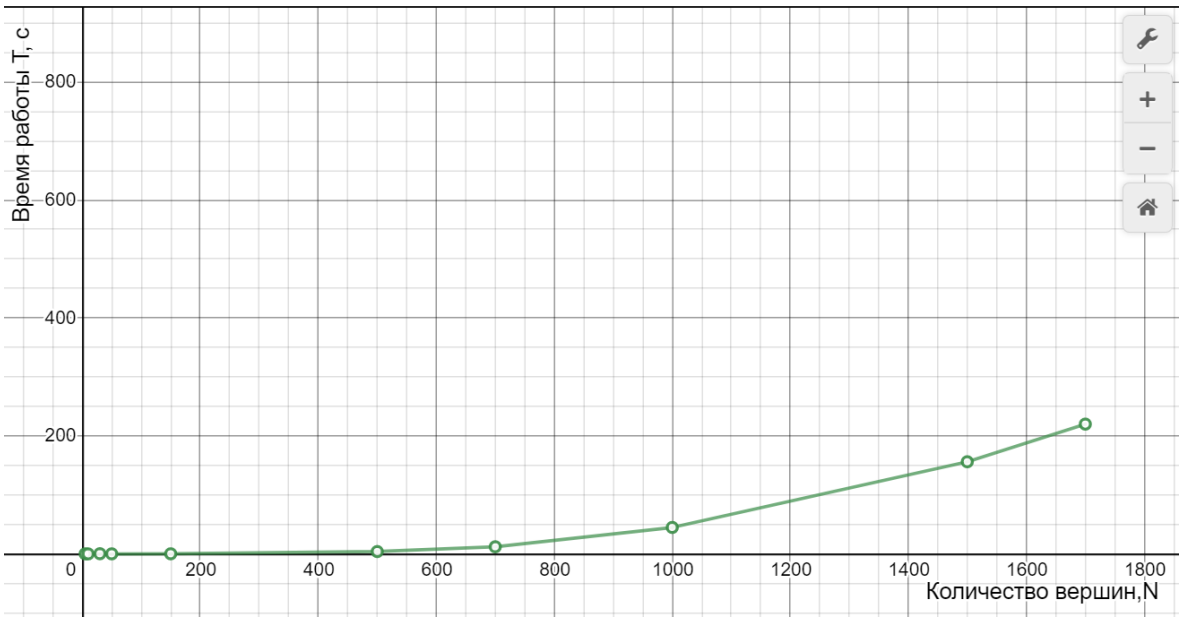


Рисунок 6. Построение графа с 100 вершинами и 20 ребрами

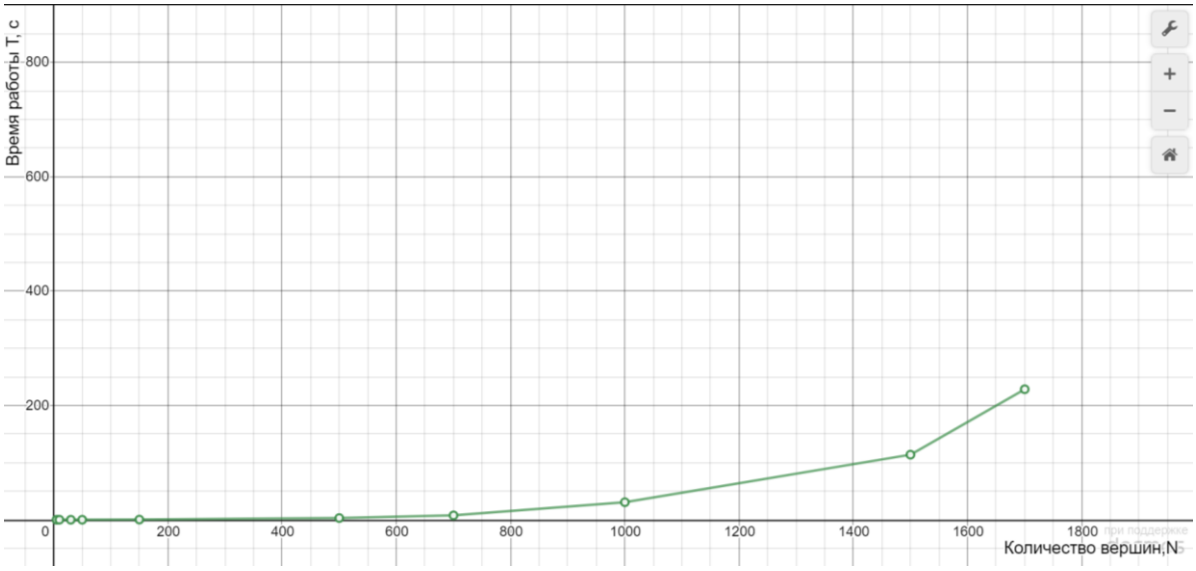
ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Проведем исследование времени работы алгоритма при разной плотности графа, которая является величиной, значение которой равно отношению числа ребер в анализируемом графе к числу ребер в полном графе с тем же количеством вершин.

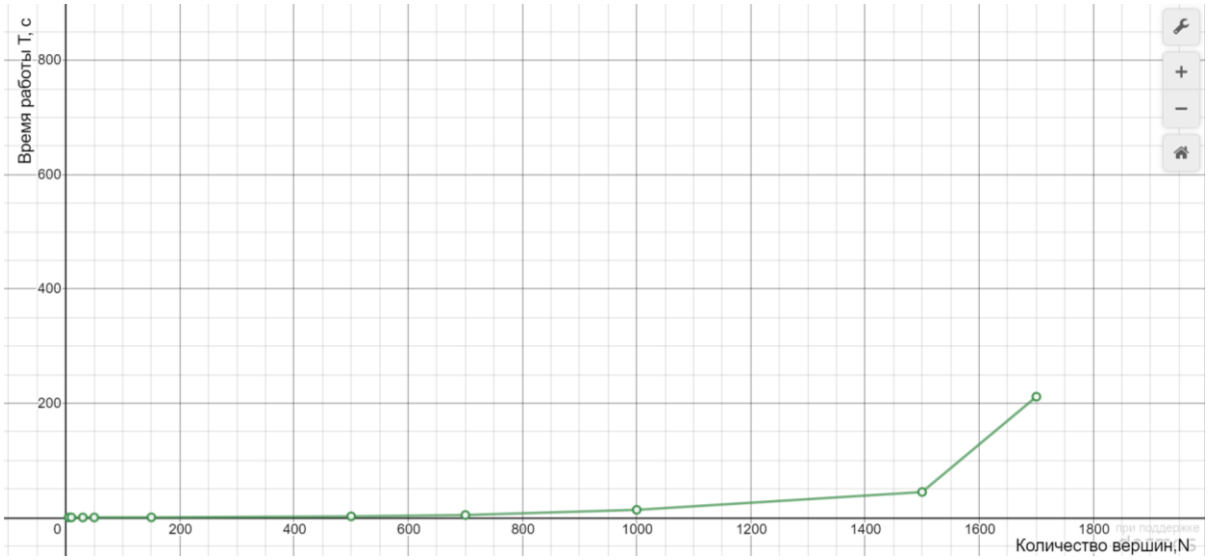
Ниже изображена зависимость времени от всех тестовых данных. График функции построен по набору данных [5,10,30,50,150,500,700,1000,2000,3000] при плотности графа 100%. Далее во всех экспериментах плотность графа определяется как отношение количества ребер в сгенерированном графе к количеству ребер в полном графе с таким же количеством вершин. Следовательно, в данном случае количество ребер в графе максимально. Время работы алгоритма практически во всех случаях увеличивается пропорционально количеству вершин в графе, т.к. граф обрабатывает в тройном цикле каждую вершину и ищет кратчайший путь. Возрастание функции схоже с экспоненциальным ростом. Результат работы для каждого количесвта вершин получился в диапазоне [0.158;220.066].



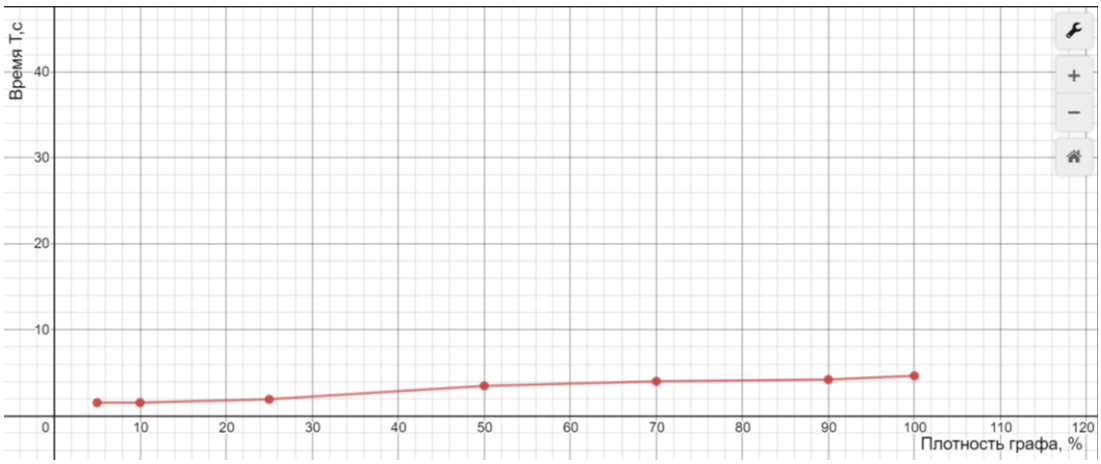
Далее проверим алгоритм на том же наборе данных, но уменьшим плотность графа до 50%. В этом случае количество ребер в сгенерированном графе равно половине от максимально возможного (E=N*N/2, где N-количество вершин графа) . При уменьшении ребер в графе, соответсвенно и уменьшается количество обрабатываемых ячеек в матрице и пересчета их расстояний. Следоваельно, в большинстве случаев уменьшается и время работы программы, которое напрямую зависит от их количества. Результат работы для каждого количества вершин получился в диапазоне [0.047;228.268].



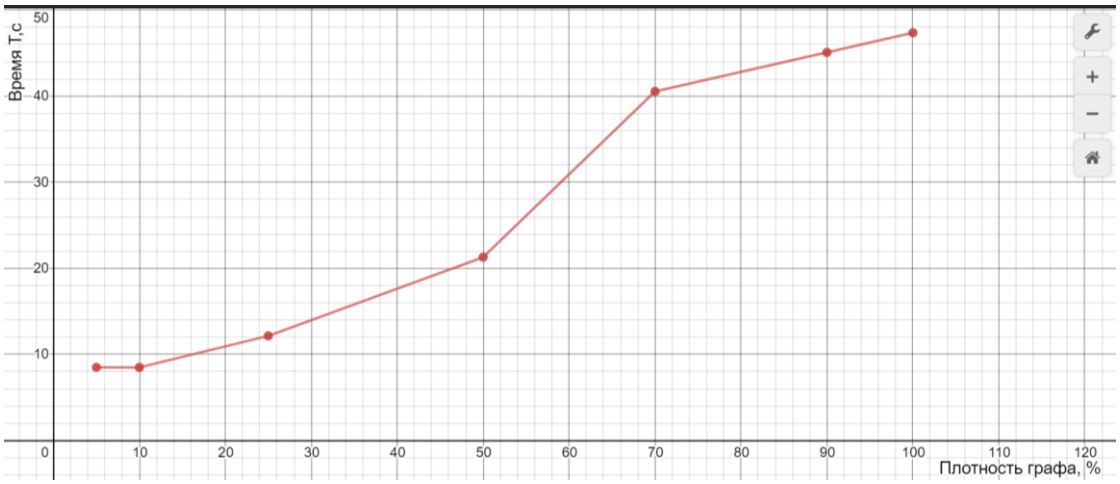
И последнее исследование проведем с плотностью графа 20%, следовательно, E=N*N/5 , где N-количество вершин графа. В данном случае время работы программы сильно отличается от значений первого исследования. Результат работы для каждого количества вершин получился в диапазоне [0.057;211.323]. Можно сделать вывод, что время работы алгоритма Флойда-Уоршелла, прямо пропорционально зависит от количества вершин и ребер в графе.



Также проведем исследования зависимости времени от плотности графа при фиксированном количестве вершин. Ниже изображена зависимость времени от всех тестовых данных. График функции построен по набору данных [5,10,25,50,70,90,100] при количестве вершин равном 500. В данном случае время работы также увеличивается с увеличением плотности графа. По данному графику нельзя точно сказать, какой является данная функция, степенной или же экспоненциальной, как это было в прошлых исследованиях .



Далее проверим алгоритм на том же наборе данных, но увеличим количество вершин до 1000. При увеличении вершин в графе, соответсвенно и увеличивается количество обрабатываемых ячеек в матрице и пересчета их расстояний. Следовательно, в большинстве случаев увеличивается и время работы программы, которое напрямую зависит от их количества. Результат работы для каждой плотности графа получился в диапазоне [0.047;228.268]. В данном случае по графику можно сказать, что функция близка к степенной.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной курсовой работы была написана программа для генерации случайного графа и исследования алгоритма Флойда-Уоршелла, также было выяснено, что время работы алгоритма, прямо пропорционально зависит от количества вершин и ребер в графе, а также от плотности графа при фиксированном количестве вершин.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Флойда_—_Уоршелла
2. https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Алгоритм_Флойда
3. https://habr.com/ru/post/105825/

ПРИЛОЖЕНИЕ А. КОД ПРОГРАММЫ.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
using namespace std;
class Graph {
private:
    int** matrix;
public:
    int N;
    int edges;

    ~Graph() {
        for (int i = 0; i < N; ++i)
            delete[] matrix[i];
        delete[] matrix;
    }

    void FloydWarshall() {
        int i, j, k;
        for (i = 0; i < N; i++)
            if (matrix[i][i] != -1)
                matrix[i][i] = 0;

        for (k = 0; k < N; k++) {
            for (i = 0; i < N; i++) {
                for (j = 0; j < N; j++) {
                    if (matrix[i][k] <= 0 || matrix[k][j] <= 0 || matrix[i][j] == -1)
continue;
                    if ((matrix[i][k] + matrix[k][j] < matrix[i][j] || matrix[i][j] == 0) &&
(i != j)) {
                        matrix[i][j] = matrix[i][k] + matrix[k][j];
                    }
                }
            }
        }
    }

    Graph() {
        cout << "Enter the number of vertex in the range [1;10000]:" << endl;
        cin >> N;
        cout << "Enter the number of edges :" << endl;
        cin >> edges;
        while (N > 10000 || N < 0) {
            cout << "Wrong value for vertexes, enter number again:" << endl;
            cin >> N;
        }
        while (edges <= 0 || edges > N * (N - 1)) {
            cout << "Wrong value for edges, enter number again:" << endl;
            cin >> edges;
        }
         int tmp = 0;
        cout << "If you want to enter the graph manually - press '1', if you want to
generate a graph - press '2'. " << endl;
        cin >> tmp;
        matrix = new int* [N];

        for (int i = 0; i < N; i++) // создание каждого одномерного массива в динамическом
двумерном массиве, или иначе - создание столбцов размерность n
```

```
        matrix[i] = new int[N];
    if (tmp == 2) {
        const int R_MIN = -1;
        const int R_MAX = 50;
        int i, j;
        int* randomArray = new int[edges];
        srand(time(NULL));

        for (int i = 0; i < edges; i++) {
            randomArray[i] = rand() % (R_MAX - R_MIN + 1) + R_MIN;
            if (randomArray[i] == 0) {
                i--;
            }
        }


        for (int i = 0; i < N; i++) {
            for (int j = 0; j < N; j++) {
                matrix[i][j] = -1;
                if (i == j)
                    matrix[i][j] = 0;
            }
        }

        for (int i = 0; i < edges; i++) {
            int k = rand() % (N);
            int j = rand() % (N);
            if (matrix[k][j] > 0 || k == j) {
                i--;
            }
            else {
                matrix[k][j] = randomArray[i];
            }

        }
    }
    else if (tmp == 1) {
        cout << "Fill in the adjacency matrix:" << endl;
        for (int i = 0; i < N; i++) {
            for (int j = 0; j < N; j++)
            {
                cout << "matrix[" << i << "][" << j << "] = ";
                cin >> matrix[i][j];
            }
        }
    }
}

void Print(bool flag) {
    FILE* f;
    if(flag)
         f = fopen("before.txt", "w");
    else
         f = fopen("after.txt", "w");
    fprintf(f, "[\\]");
    for (int i = 0; i < N; ++i)
        fprintf( f,"[%d] ",i );
    fprintf(f, "\n");
    for (int i = 0; i < N; i++) {
        fprintf(f, "[%d]", i);
        for (int j = 0; j < N; j++) {
            fprintf(f, "[%d]", matrix[i][j]);
        }
        putc('\n', f);
```

```
        }
        fclose(f);
    }

};

int main()
{

    Graph graph;
    unsigned int tmp1 = clock();
    graph.Print(true);
    graph.FloydWarshall();
    graph.Print(false);
    unsigned int tmp2 = clock();
    cout << "Runtime of program: "<<(tmp2 - tmp1)/1000.0 << endl;
    cout << "The result of the program is in the file after.txt" << endl;
    return 0;
}
```