МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»

Тема: Алгоритм Флойда-Уоршелла

Студентка гр. 8303 _____ Потураева М.Ю.

Преподаватель _____ Фирсов М.А.

Санкт-Петербург
2020

ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

Студентка Потураева М.Ю.

Группа 8303

Тема работы : алгоритм Флойда-Уоршелла

Исходные данные:
Исследование зависимости времени работы алгоритма Флойда-Уоршелла от входных данных.

Дата сдачи курсовой работы:

Дата защиты курсовой работы:

Студентка _____ Потураева М.Ю.

Преподаватель _____ Фирсов М.А.

АННОТАЦИЯ

В данной работе рассмотрены генерация случайного графа по количеству вершин и ребер и исследование алгоритма Флойда-Уоршелла.

Программный код написан на языке программирования C++.

Результат работы программы выводится в файл.

SUMMARY

In this paper, we consider the generation of a random graph by the number of vertices and edges and the study of the Floyd-Warshell algorithm.

The program code is written in the C++programming language.

The result of the program is output to a file.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Алгоритм Флойда — Уоршелла — динамический алгоритм для нахождения кратчайших расстояний между всеми вершинами взвешенного ориентированного графа.

Пусть вершины графа G=(V,E), |V|=n пронумерованы от 1 до n и введено обозначение d_{ij}^{k} для длины кратчайшего пути от i до j, который кроме самих вершин i,j проходит только через вершины 1…k . Очевидно, что d_{ij}^{0} — длина (вес) ребра (i,j), если таковое существует (в противном случае его длина может быть обозначена как ∞).

Существует два варианта значения d_{ij}^{k} ,k∈(1…n):

1.Кратчайший путь между i,j не проходит через вершину k , тогда $d_{ij}^{k} = d_{ij}^{k-1}$

2.Существует более короткий путь между i,j , проходящий через k , тогда он сначала идёт от i до k , а потом от k до j . В этом случае, очевидно, $d_{ij}^{k} = d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$

Таким образом, для нахождения значения функции достаточно выбрать минимум из двух обозначенных значений.

Тогда рекуррентная формула для d_{ij}^{k} имеет вид:

d_{ij}^{0} — длина ребра (i,j)

$$d_{ij}^{k} = \min\left(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}\right)$$

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Написать программу, с помощью которой можно будет генерировать граф по количеству вершин и ребер, а также анализировать время работы алгоритма в зависимости от входных данных.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследование алгоритма Флойда-Уоршелла на большом количеству входных данных.

СПЕЦИФИКАЦИЯ ПРОГРАММЫ

Программа написана на языке C++. Считывание происходит из терминала. Пользователь вводит количество вершин и ребер, далее по ним строится граф. Результат работы программы помещается в файл.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

На вход алгоритму подается количество вершин N и количество ребер edges, которое может быть в диапазоне [1;N*(N-1)]. Далее происходит заполнение матрицы смежности -1, т.к. граф еще не заполнен. Формируется массив случайно сгенерированных чисел для дальнейшей записи их как вес ребер. В цикле edges раз генерируем ребро (кроме диагональных и уже созданных) и берем значение его веса из массива случайных чисел.

Далее алгоритм Флойда-Уоршелла обрабатывает матрицу смежности ,и на выходе получаем мтарицу с итоговыми кратчайшими расстояниями в графе.

Чтобы рассчитать время работы программы используется функция clock(), перед работой алгоритма и после.

Сложность алгоритма по времени: три вложенных цикла содержат операцию, исполняемую за константное время O(1),то есть алгоритм имеет кубическую сложность O(n*n*n), где n-количество вершин.

Сложность алгоритма по памяти: так как в структуре графа хранится только двумерный массив, хранящий информацию о ребрах, то сложность O(n*n), где n-количество вершин.

ОПИСАНИЕ ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ И СТРУКТУР ДАННЫХ

```
class Graph {
private:
   int** matrix;
public:
   int N;
   int edges;
};
```

Структура для хранения графа, matrix-матрица смежности, N-количество вершин, edges-количество ребер.

void FloydWarshall()

Функция, реализующая алгоритм Флойда-Уоршелла.

Graph()

Конструктор графа, в котором происходит считывание данных из терминала и генерация графа.

void Print(bool flag)

Функция для вывода графа в файл, в зависимости от флага выбирается файл, в который будет записана матрица.

ТЕСТИРОВАНИЕ

№	Input	Output
1	0 50 19 5 0 20 41 6 0	0 25 19 5 0 20 11 6 0
2	0 47 24 -1 0 -1 26 48 0	0 47 24 -1 0 -1 26 48 0
3	0 -1 -1 -1 -1 -1 0 1 -1 10 -1 -1 0 1 5 -1 -1 -1 0 1 -1 -1 -1 -1 0	0 -1 -1 -1 -1 -1 0 1 2 3 -1 -1 0 1 2 -1 -1 -1 0 1 -1 -1 -1 -1 0
4	0 43 10 31 7 -1 0 43 32 39 9 48 0 50 17 48 44 32 0 2 35 25 24 13 0	0 32 10 20 7 52 0 43 32 34 9 41 0 29 16 35 27 26 0 2 33 25 24 13 0
5	0 42 2 25 11 25 28 29 0 35 48 42 48 -1 37 18 0 43 29 33 20 10 36 21 0 50 45 -1 1 10 42 3 0 39 42 31 27 15 36 13 0 1 2 23 36 12 10 49 0	0 20 2 14 11 25 22 29 0 31 43 40 48 49 22 18 0 32 29 33 20 10 30 12 0 21 35 32 1 10 3 3 0 26 23 3 21 5 13 11 0 1 2 20 4 12 10 27 0

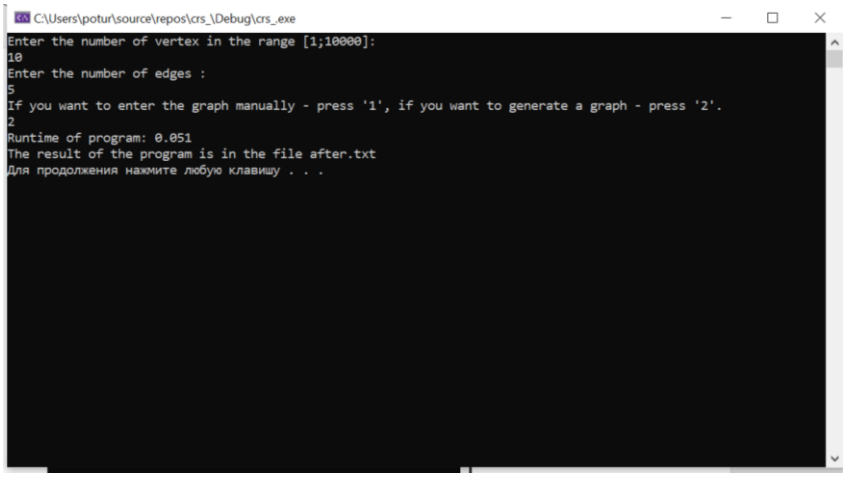


Рисунок 1. Построение графа с 10 вершинами и 5 ребрами

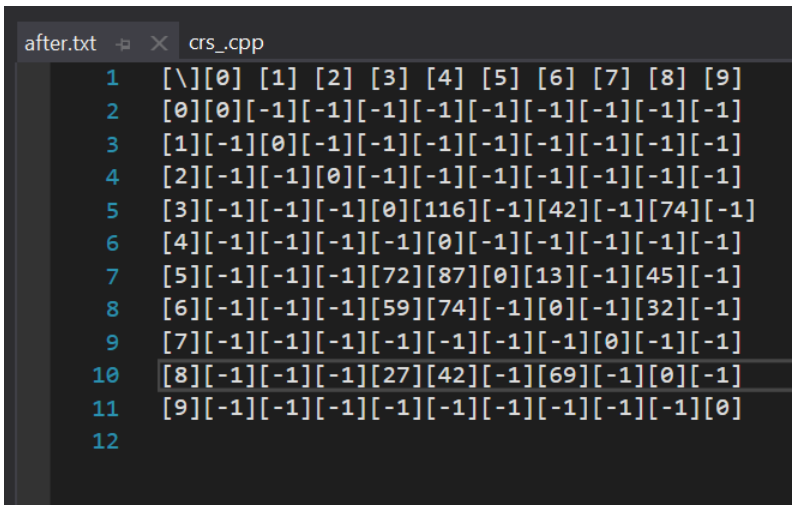


Рисунок 2. Построение графа с 10 вершинами и 5 ребрами

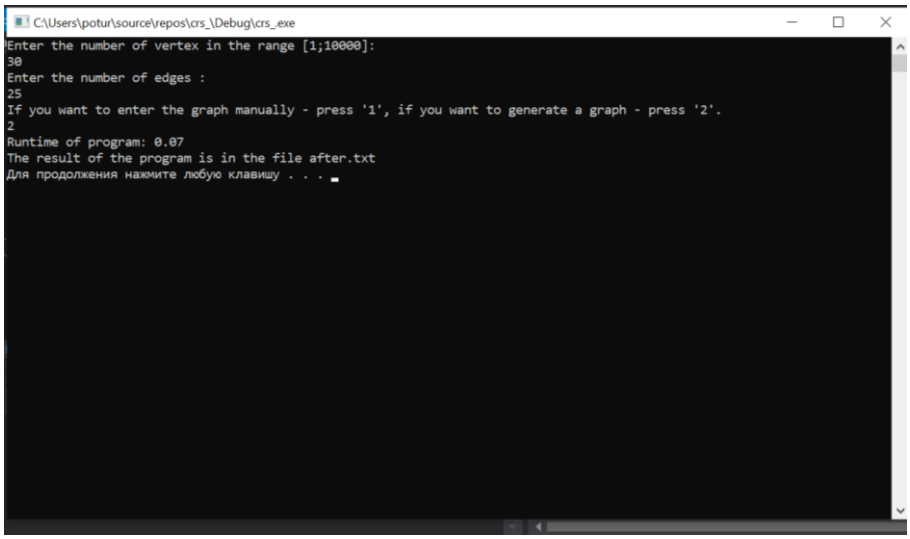


Рисунок 3. Построение графа с 30 вершинами и 25 ребрами

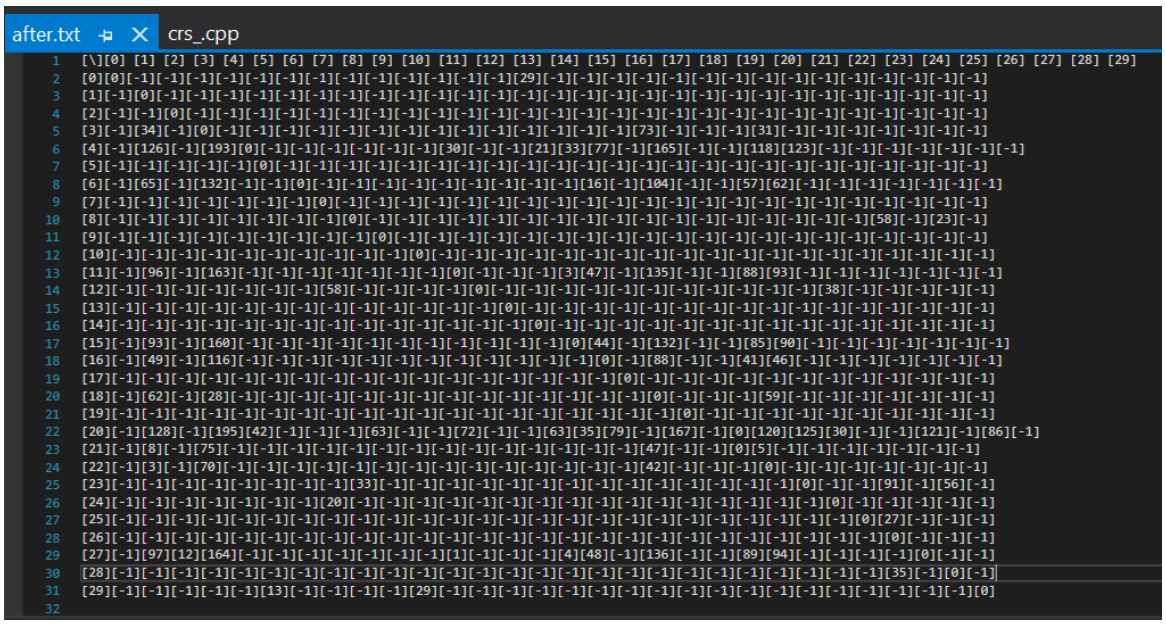


Рисунок 4. Построение графа с 30 вершинами и 25 ребрами

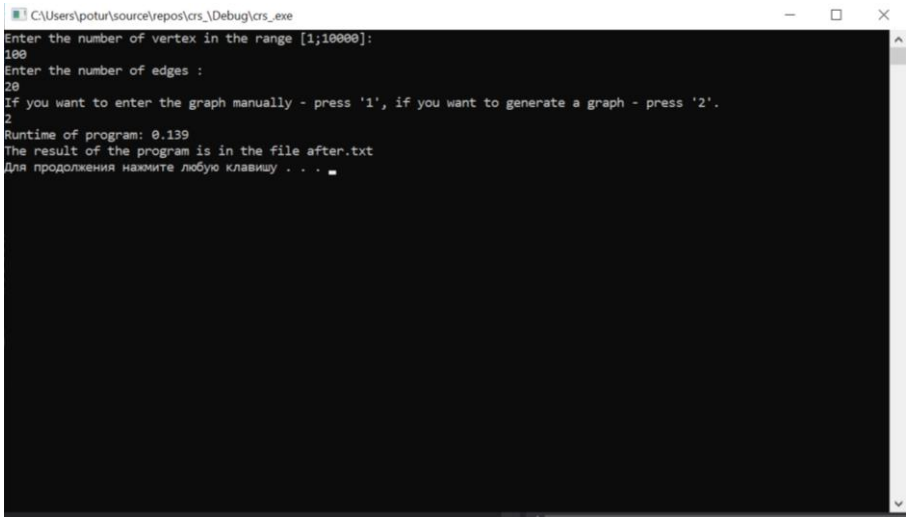


Рисунок 5.Построение графа с 100 вершинами и 20 ребрами

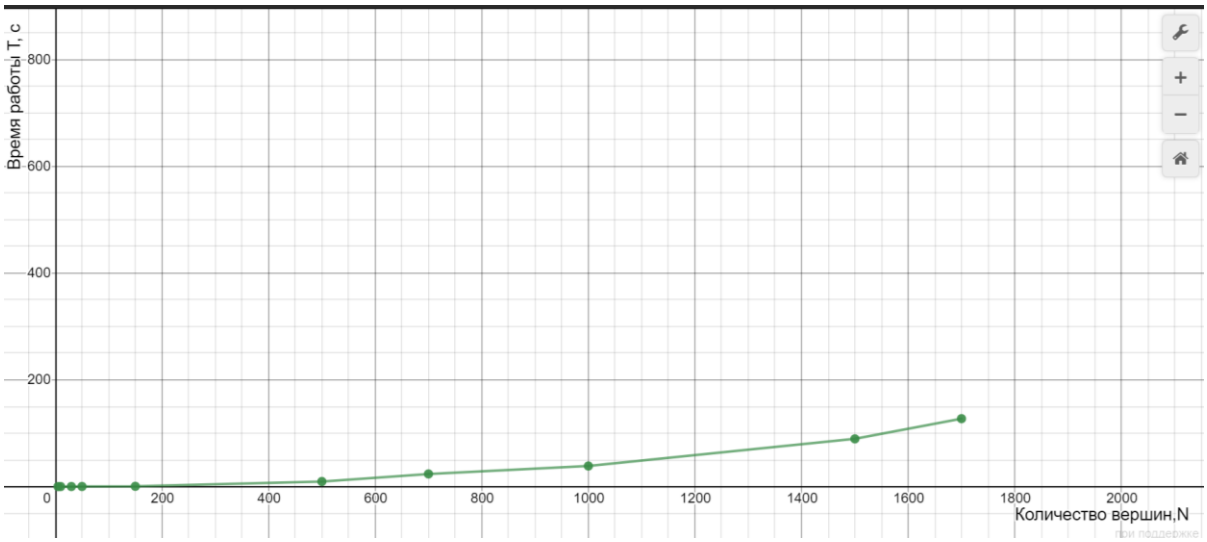
Рисунок 6. Построение графа с 100 вершинами и 20 ребрами

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА

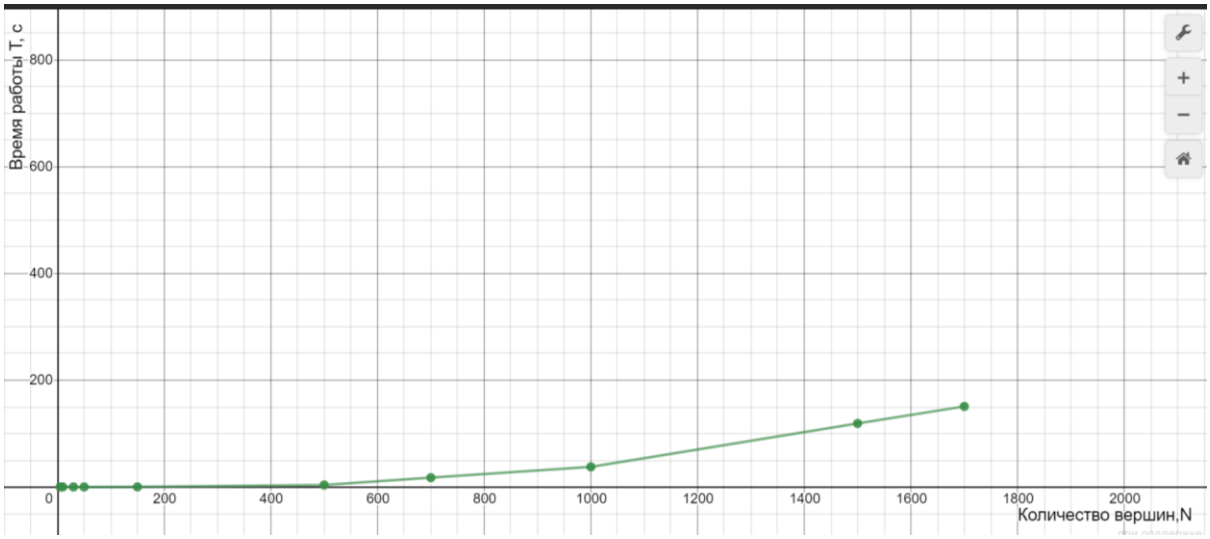
Проведем исследование времени работы алгоритма при разной плотности графа, которая является величиной, значение которой равно отношению числа ребер в анализируемом графе к числу ребер в полном графе с тем же количеством вершин.

Ниже изображена зависимость времени от всех тестовых данных. График функции построен по набору данных [5,10,30,50,150,500,700,1000,1500,1700] при плотности графа 100%. Далее во всех экспериментах плотность графа определяется как отношение количества ребер в сгенерированном графе к количеству ребер в полном графе с таким же количеством вершин. Следовательно, в данном случае количество ребер в графе максимально. Время

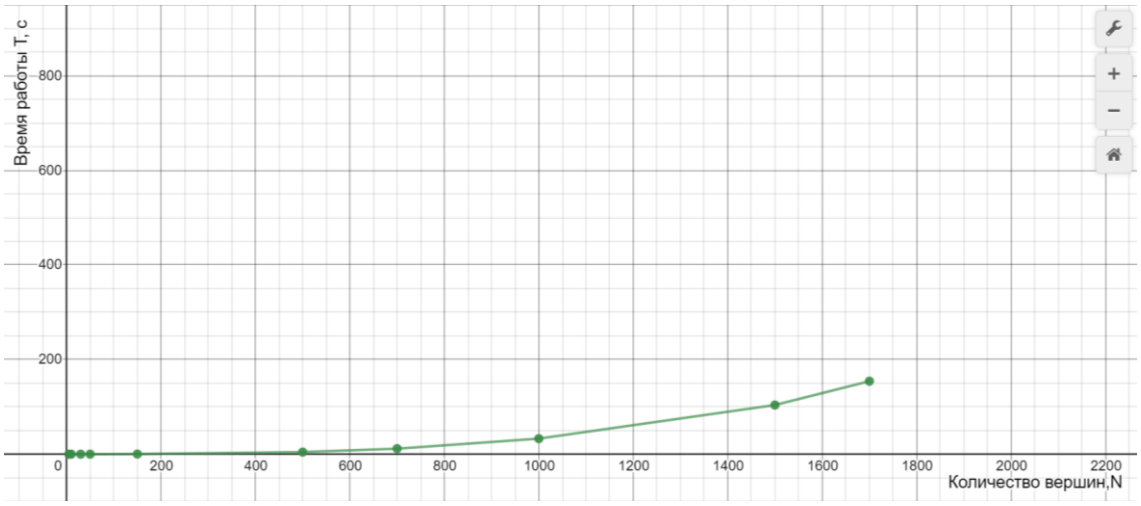
работы алгоритма практически во всех случаях увеличивается пропорционально количеству вершин в графе, т.к. граф обрабатывает в тройном цикле каждую вершину и ищет кратчайший путь. Возрастание функции схоже с ростом степенной функции. Результат работы для каждого количесвта вершин получился в диапазоне [0.044;127.251].



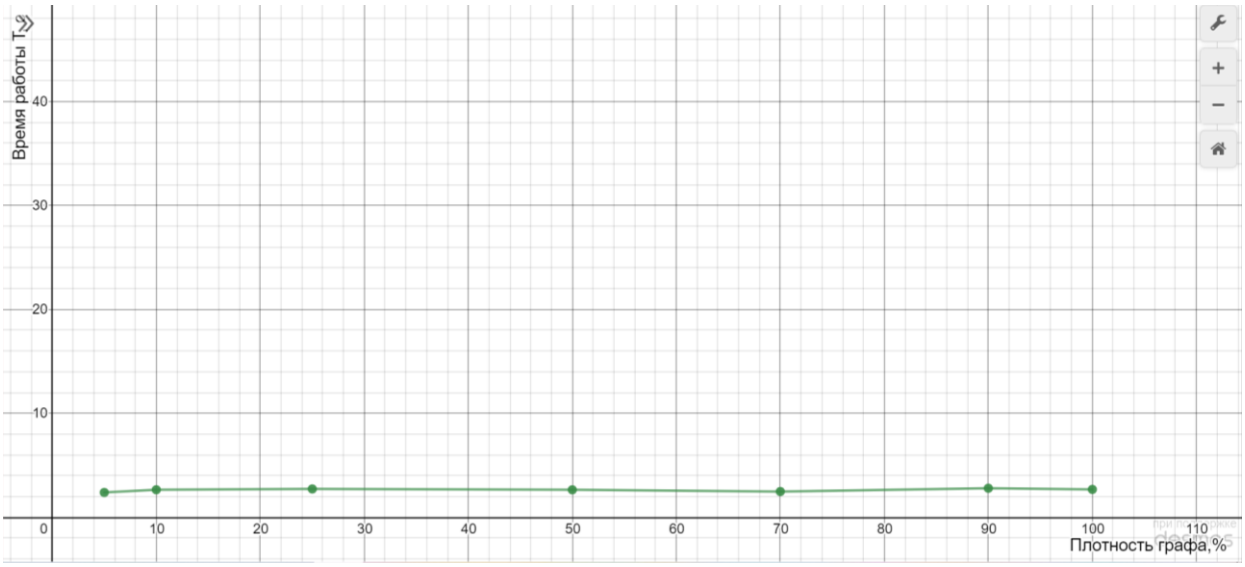
Далее проверим алгоритм на том же наборе данных, но уменьшим плотность графа до 50%. В этом случае количество ребер в сгенерированном графе равно половине от максимально возможного (E=N*N/2, где N-количество вершин графа) . При уменьшении ребер в графе, соответсвенно и уменьшается количество обрабатываемых ячеек в матрице и пересчета их расстояний. Следоваельно, в большинстве случаев уменьшается и время работы программы, которое напрямую зависит от их количества. Результат работы для каждого количества вершин получился в диапазоне [0.042;150.932].



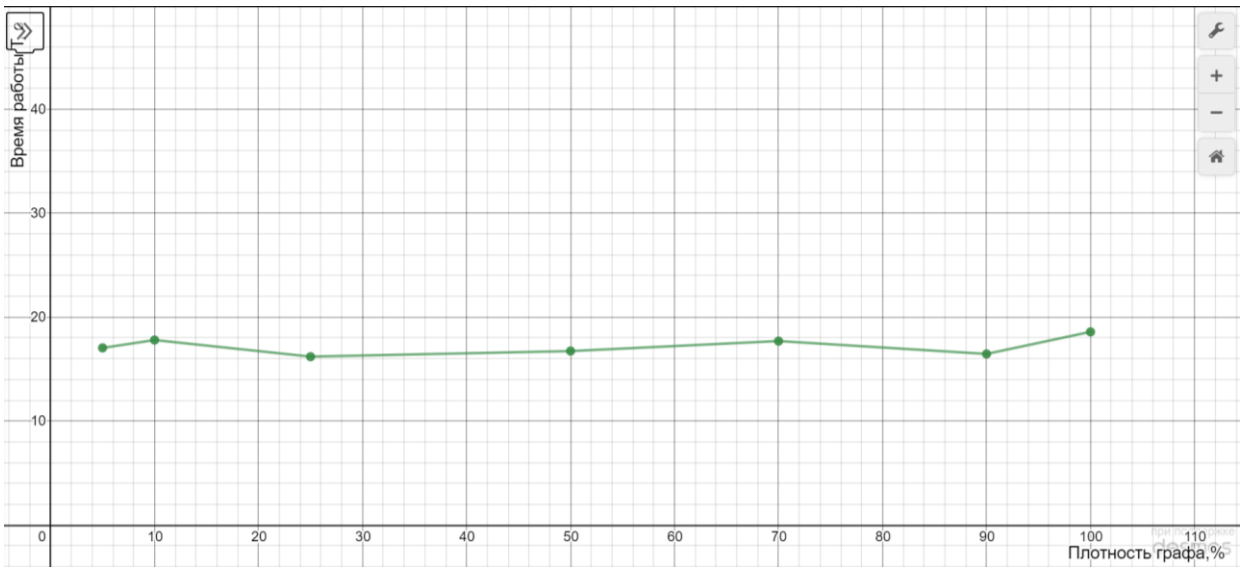
И последнее исследование проведем с плотностью графа 20%, следовательно, E=N*N/5 , где N-количество вершин графа. В данном случае время работы программы сильно отличается от значений первого исследования. Результат работы для каждого количества вершин получился в диапазоне [0.044;146.323]. Можно сделать вывод, что практически во всех случаях время работы алгоритма Флойда-Уоршелла прямо пропорционально зависит от количества вершин и ребер в графе либо же имеет минимальную разницу во времени при разной насыщенности графа и одинаковом количестве вершин. Для того чтобы более детально изучить зависимость времени работы от насыщенности графа, проведем еще исследования.



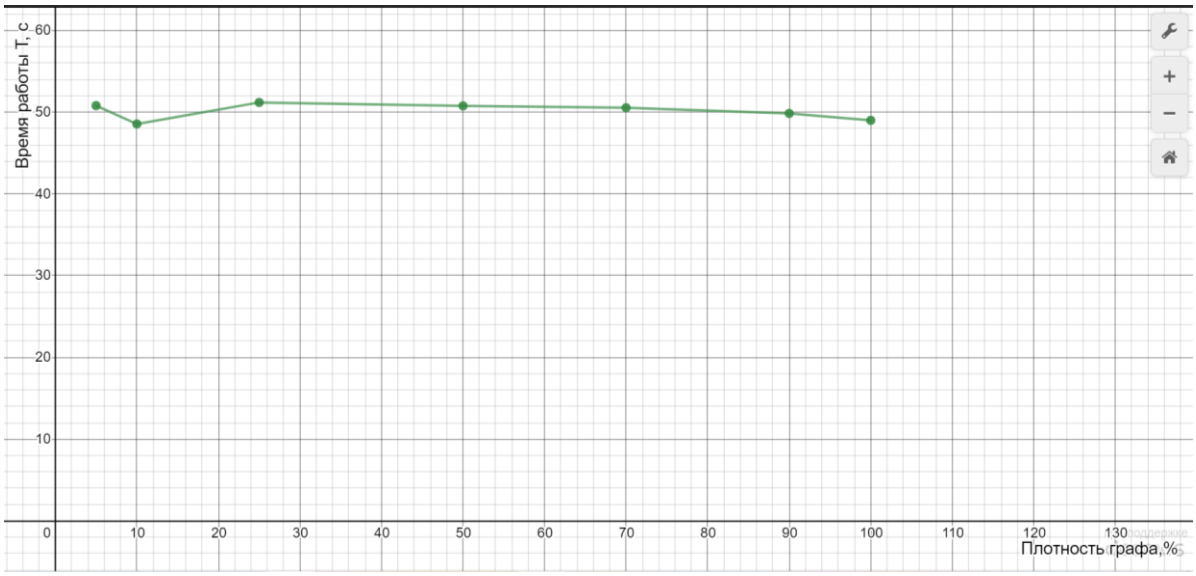
Ниже изображена зависимость времени от насыщенности графа при фиксированном количестве вершин. График функции построен по набору данных [5,10,25,50,70,90,100] при количестве вершин равном 500. По данному графику нельзя точно сказать, какой является данная функция. Время работы в данном случае изменяется в пределах 1-1.5 секунд при разных плотностях графа, что не дает нам сделать каких-либо выводов об исследуемой зависимости.



Проверим алгоритм на том же наборе данных, но увеличим количество вершин до 1000. При увеличении вершин в графе, соответсвенно и увеличивается количество обрабатываемых ячеек в матрице и пересчета их расстояний. Следовательно, в большинстве случаев увеличивается и время работы программы, которое напрямую зависит от их количества. В данном случае по графику также нельзя сделать однозначных выводов, т.к. разница между полученными данными минимальна .



Проверим алгоритм при количестве вершин равном 1500. По графику видно, что время также изменяется в пределах 1-2 секунд. Следовательно, можно сделать вывод, что при изменении плотности графа время работы алгоритма не изменяется либо изменения незначительны.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной курсовой работы была написана программа для генерации случайного графа и исследования алгоритма Флойда-Уоршелла, также было выяснено, что время работы алгоритма, прямо пропорционально зависит от количества вершин исследуемого графа и не зависит от насыщенности графа при фиксированном количестве вершин.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Флойда_—_Уоршелла
2. https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Алгоритм_Флойда
3. https://habr.com/ru/post/105825/

ПРИЛОЖЕНИЕ А. КОД ПРОГРАММЫ.

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <windows.h>
#include <tchar.h>
using namespace std;
class Graph
{
private:
    int** matrix;
public:
    int N;
    int edges;

    ~Graph() {
        for (int i = 0; i < N; ++i)
            delete[] matrix[i];
        delete[] matrix;
    }

    void FloydWarshall() {
        int i, j, k;
        for (i = 0; i < N; i++)
            if (matrix[i][i] != -1)
                matrix[i][i] = 0;

        for (k = 0; k < N; k++) {
            for (i = 0; i < N; i++) {
                for (j = 0; j < N; j++) {
                    if (matrix[i][k] <= 0 || matrix[k][j] <= 0 ) continue;
                    if ((matrix[i][k] + matrix[k][j] < matrix[i][j] || matrix[i][j] == -1)
&& (i != j)) {
                        matrix[i][j] = matrix[i][k] + matrix[k][j];
                    }
                }
            }
        }
    }

    Graph() {
        cout << "Enter the number of vertex in the range [1;10000]:" << endl;
        cin >> N;
        cout << "Enter the number of edges :" << endl;
        cin >> edges;
        while (N > 10000 || N < 0) {
            cout << "Wrong value for vertexes, enter number again:" << endl;
            cin >> N;
        }
        while (edges <= 0 || edges > N * (N - 1)) {
            cout << "Wrong value for edges, enter number again:" << endl;
            cin >> edges;
        }
        int tmp = 0;
        cout << "If you want to enter the graph manually - press '1', if you want to
generate a graph - press '2'. " << endl;
        cin >> tmp;
        matrix = new int* [N];

        for (int i = 0; i < N; i++)
```

```
        matrix[i] = new int[N];

    for (int i = 0; i < N; i++) {
        for (int j = 0; j < N; j++) {
            matrix[i][j] = -1;
            if (i == j)
                matrix[i][j] = 0;
        }
    }

    if (tmp == 2) {
        const int R_MIN = -1;
        const int R_MAX = 50;
        int* randomArray = new int[edges];
        srand((unsigned)time(NULL));

        for (int i = 0; i < edges; i++) {
            randomArray[i] = rand() % (R_MAX - R_MIN + 1) + R_MIN;
            if (randomArray[i] == 0) {
                i--;
            }
        }


        for (int i = 0; i < edges; i++) {
            int k = rand() % (N);
            int j = rand() % (N);
            if (matrix[k][j] > 0 || k == j) {
                i--;
            }
            else {
                matrix[k][j] = randomArray[i];
            }

        }
    }
    else if (tmp == 1) {
        printf("Enter the edges: vertex 1 vertex 2 weight\n");
        for (int k = 0; k < edges; k++) {
            int  m, n, weight;
            printf("%i) edge: ", k + 1);
            scanf_s("%i %i %i", &m, &n, &weight);
            n--; m--;
            matrix[m][n] = weight;
        }
    }
}

void Print(bool flag) {
    FILE* f;
    if (flag)
        f=fopen("before.txt", "w");
    else
        f=fopen("after.txt", "w");
    fprintf(f, "[\\]");
    for (int i = 0; i < N; ++i)
        fprintf(f, "[%d] ", i);
    fprintf(f, "\n");
    for (int i = 0; i < N; i++) {
        fprintf(f, "[%d]", i);
        for (int j = 0; j < N; j++) {
            fprintf(f, "[%d]", matrix[i][j]);
        }
        putc('\n', f);
```

```
        }
        fclose(f);
    }

};

int main()
{

    Graph graph;
    unsigned int tmp1 = clock();
    graph.Print(true);
    graph.FloydWarshall();
    graph.Print(false);
    unsigned int tmp2 = clock();
    cout << "Runtime of program: " << (tmp2 - tmp1) / 1000.0 << endl;
    cout << "The result of the program is in the file after.txt" << endl;
    system("PAUSE");
    return 0;
}
```