Моделирование электромеханических переходных процессов (ЭМПП) в том или ином виде предполагает решение системы дифференциально-алгебраических уравнений (СДАУ) вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где:

– вектор-столбец дифференциальных переменных;

– вектор-столбец алгебраических переменных;

и – гладкие векторные функции;

– время;

– заданные значения переменных при (начальные условия)

Решение системы (1) формально состоит в нахождении функций и , определенных на интервале . В качестве может использоваться константа, задаваемая в исходных данных, но также этот параметр может определяться автоматически в зависимости от поставленной цели моделирования ЭМПП. Часто (1) приводят в компактном виде, опуская обозначение функциональных зависимостей:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

Разделение переменных на дифференциальные и алгебраические обусловлено тем, что для дифференциальных переменных заданы аналитические выражения производных по времени . Для алгебраических переменных такие выражения неизвестны, поэтому алгебраическая часть (2) может рассматривается как функциональное ограничение при решении дифференциальной части. Так как моделирование ЭМПП выполняется в пространстве состояний, для ряда операций удобно объединять дифференциальные и алгебраические переменные в общий вектор переменных состояния . Данный вектор однозначно определяет состояние моделируемой системы в любой момент времени, и кроме того при некотором может рассматриваться как вектор начальных условий для интегрирования (2) на интервале .

За редким исключением аналитическое решение (2) невозможно. Вместо аналитического решения используется численное, с нормированной точностью . Численное решение предусматривает замену дифференциальной части (2) конечно-разностными уравнениями и их пошаговое решение с помощью некоторого метода численного интегрирования. Метод интегрирования строит последовательность аппроксимаций удовлетворяющих условию:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

в дискретных точках времени , , Интервал между соседними точками времени называется шагом интегрирования . Для принимается . Таким образом решаемая СДАУ преобразуется к виду:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Система (4) сохраняет свойства (1) при выполнении условия (3). Одним из важнейших свойств системы дифференциальных уравнений, а значит и СДАУ, является так называемая жесткость. Это термин имеет несколько вариантов математического определения, но качественно сильная жесткость означает наличие в СДАУ компонентов со скоростями изменения различающимся на несколько порядков. В задаче моделирования ЭМПП примером компонентов с высокой скоростью изменения могут служить дифференциальные контуры моделей АРВ, с низкой скоростью изменения – контуры моделей тепломеханического оборудования. Степень жесткости СДАУ диктует выбор метода интегрирования. Шаг метода интегрирования должен выбираться таким образом, чтобы обеспечивалось выполнение (3). При этом метод интегрирования можно рассматривать как некоторую векторную функцию , с помощью которой по известному можно определить . Безусловно для алгебраических переменных должна быть выполнена аналогичная операция , но она может быть реализована различными способами по отношению к , и пока не будет приниматься во внимание. Функция метода интегрирования может быть задана в явном виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

или неявном:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Очевидно, что (5) выглядит предпочтительно по отношению к (6), так как позволяет вычислить напрямую, без решения системы. Однако рассмотрим пример интегрирования с помощью метода Эйлера в явной

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

и неявной

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

формах. Для определения по выражению (8) потребуется решение уравнения относительно . Предположим что . Это так называемое модельное уравнение, используемое для анализа свойств методов интегрирования. В соответствии с (7) и (8) можно записать следующие схемы решения для явного метода:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

И для неявного

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

Пусть начальные условия , тогда для явного метода

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

и для неявного

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

Решение модельного уравнения известно: . При , . Это означает, что для явного метода должно выполняться условие:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

и для неявного метода:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

из чего следует, что для обеспечения численного решения модельного уравнения шаг явного метода интегрирования должен быть ограничен сверху параметром решаемой задачи, в то время как шаг неявного метода не требует ограничения. При этом ограничение шага явного метода не может быть отброшено до конца интегрирования, так как асимптотически стремится к нулю.

В случае, если требуется решить систему дифференциальных уравнений, и в данной системе хотя бы небольшая часть компонент изменяется существенно быстрее остальных (то есть система является жесткой), явный метод интегрирования должен работать с шагом, который ограничивается параметрами уравнений быстрых компонент. Попытка увеличения шага может привести не только к нарушению условия (3) в локальных , но и к потере устойчивости всего решения. Для неявного метода интегрирования локальная ошибка, как правило, не означает потери устойчивости и возможность получить правдоподобное решение, пусть и с погрешностью, сохраняется. Данным свойством неявных методов можно воспользоваться на практике для приближенного, но ускоренного интегрирования процесса с компонентами, время изменения которых существенно меньше заданного шага интегрирования. Неявный метод не сможет адекватно воспроизвести поведение данных компонент на интервалах быстрых изменений, но после их затухания позволит продолжить интегрирование без риска неконтролируемого роста погрешности и нарушения численной устойчивости. Необходимо отметить, что данное свойство можно использовать только при условии, что решаемая система уравнений неизменна на интервале интегрирования, в противном случае отказ от точного воспроизведения быстрых компонент может привести тому, что будут проигнорированы изменения структуры модели, ограничения, срабатывание устройств автоматики и т.д.

Для решения исходной СДАУ (2) дифференциальные уравнения должны быть преобразованы в алгебраические с использованием функций, зависящих от метода интегрирования. Применение явного метода интегрирования не требует ввода эквивалентной системы алгебраических уравнений, позволяет решить дифференциальные уравнения (2) отдельно от алгебраических, использовать найденные решения в алгебраической системе и согласовать общее решение СДАУ итерационным путем. Применение неявного метода таким способом также возможно, но так как его использование в любом случае означает ввод новой системы алгебраических уравнений (6), то по сути система дифференциальных уравнений в (2) заменяется на алгебраическую систему. При этом исходная СДАУ преобразуется в эквивалентную чисто алгебраическую систему нелинейных уравнений, которую необходимо решать итерационным методом. Таким образом необходимость решения системы нелинейных алгебраических уравнений возникает вне зависимости от используемого метода интегрирования, применяемого к СДАУ. В связи с этим представляется целесообразным использовать неявные методы интегрирования, так как их преимущества очевидны, а трудоемкость реализации, связанная с необходимостью итерационного решения системы уравнений, возникает в любом случае. Для решения результирующей системы алгебраических уравнений могут применяться различные методы. Возможен упрощенный в части реализации подход на базе метода простой итерации. Практика показывает, что данный метод работоспособен, но в определенных ситуациях в принципе не позволяет получить решения из-за присущих ему ограничений, связанных с жесткими требованиями к свойствам системы. Для использования метода Ньютона потребуется формирование матрицы Якоби алгебраической системы, что многократно повышает трудоемкость разработки моделей: дополнительно к набору уравнений для каждой модели потребуется формировать блок матрицы Якоби. Однако метод Ньютона позволяет получать надежное решение, обладает хорошей сходимостью и кроме того может использоваться не только для решения (2), но и для определения начальных условий. Слабой стороной метода Ньютона является чувствительность к качеству начального приближения. Отчасти эта проблема решается путем использования начального приближения от предыдущего шага интегрирования. В качестве дополнительного фактора, улучшающего условия сходимости метода Ньютона, может выступать схема метода интегрирования. Распространенной схемой интегрирования является схема прогноза-коррекции. Располагая данными о выполненном решении в точке метод с помощью экстраполяции может построить прогноз значений . Полученный прогноз используется в качестве начального приближения для решения эквивалентной (2) системы, в которой дифференциальные уравнения дискретизированы в виде, зависящем от выбранного метода интегрирования. В процессе решения прогноз корректируется так, чтобы значения удовлетворили заданной системе уравнений. Рассматриваемая схема эффективно реализуется при использовании многошаговых методов интегрирования, которые предполагают сохранение данных выполненных шагов и их использование для выполнения очередного шага. Для решения СДАУ этот подход реализован в методе Гира [1]. Данный метод предполагает использование метода интегрирования BDF как для дифференциальных, так и для алгебраических уравнений и обеспечивает совместное решение (2). В Eurostag [2] метод модифицирован так, что для дифференциальных переменных используется метод Адамса, а для алгебраических – BDF. Модификация применена ввиду того, что методы семейства BDF обладают свойством гиперустойчивости – демпфирования даже неусточивых компонент решения при работе с шагом интегрирования, превышающим время изменения данных компонент. Применение гибридного метода для решения (2) позволяет исключить эффект гиперустойчивости.

Все многошаговые методы любого порядка , несмотря на существенные различия их свойств, могут быть формализованы в виде, использующем представление с вектором Нордсика. Данный вектор, имеет размерность . Для реализованного метода интегрирования , поэтому для вектора Нордиска зарезервирована размерность 1×3.

На шаге интегрирования для дифференциальных и алгебраических переменных векторы Нордсика имеют вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

Векторы содержат информацию для представления и в виде ряда Тейлора до второго порядка в точке . Если известны векторы Нордсика для , то прогноз в точке может быть выполнен по выражениям:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

где:

– нижне-треугольная матрица Паскаля;

– экстраполированные в векторы Нордсика по дифференциальным и алгебраическим переменным.

Коррекция прогноза для получения вектора Нордсика в точке выполняется по выражениям:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |

где:

– вектор-строка коэффициентов метода интегрирования для дифференциальных переменных;

– вектор-строка коэффициентов метода интегрирования для алгебраических переменных;

– векторы отклонений значений прогноза от решения в точке .

Векторы и нормированы так, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

Покомпонентно (17) можно записать в виде:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  |  | | (19) |

Для дифференциальных переменных (2), используя уравнение для из (19) можно записать:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

С учетом (17) и (18) получаем систему нелинейных алгебраических уравнений

|  |  |
| --- | --- |
|  | (21) |

Для решения которой относительно и необходимо сформировать матрицу Якоби со следующей структурой:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (22) |

С учетом (21) можно переписать (22) в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (23) |

Следует заметить, что матрица Якоби при не становится вырожденной, что позволяет ее использовать для решения СДАУ при поиске промежуточных начальных условий, если (2) потребуется изменить в некоторой точке времени. Кроме того, уменьшение шага не вызывает численных проблем с округлением, присущих схеме интегрирования [3].

Решение (21) выполняется итерационно. Для итерации переменные в точке можно представить в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (24) |

Итерационный процесс решения (21) относительно и выполняется по рекуррентному выражению:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (25) |

После завершения итерационного процесса векторы Нордиска и в точке рассчитываются по выражению (17).

Полученные в результате решения (25) по дифференциальным и алгебраическим переменным представляют собой разности между спрогнозированными и скорректированными значениями. По данным разностям можно оценивать погрешность локального решения и рассчитывать необходимый шаг и порядок метода. Локальная ошибка на шаге определяется по выражению:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (26) |

где:

– константа, зависящая от метода интегрирования;

– порядок метода интегрирования;

– вектор-строка коэффициентов метода интегрирования порядка .

При оценке погрешности удобно использовать индивидуальные характеристики для каждой из компонент решения. Для этого вводится вектор взвешенных погрешностей:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |

где:

– относительная погрешность -ой компоненты вектора состояния;

– абсолютная погрешность -ой компоненты вектора состояния.

Погрешность решения на шаге является допустимой если выполняется:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (28) |

Использование -нормы для оценки погрешности в отличие, например, от -нормы, позволяет отказаться от излишнего снижения шага интегрирования для повышения точности расчета быстрых компонент, которые сами по себе не столь важны для анализа ЭМПП. Квадратичная норма дает возможность контроля интегральной погрешности расчета всей системы (2).

Данная оценка погрешности дополнительно используется для контроля сходимости (25), а также для выбора шага и порядка метода на следующем шаге интегрирования. Возможность изменения порядка метода используется в случае, если оценка следующего шага методом иного порядка окажется больше, чем оценка следующего шага текущего метода. Операции изменения шага и порядка требуют модификации векторов Нордиска, в частности масштабирования, увеличения или уменьшения размерности, поэтому частота изменения параметров метода ограничивается. Управление шагом и порядком интегрирования реализовано на базе работы [4], в которой данные вопросы рассматриваются применительно к чисто дифференциальным системам уравнений. Так как решаемая задача является дифференциально-алгебраической и жесткой, то дополнительные меры контроля сходимости корректора и подавления спорадических изменений шага реализованы на базе [5].

На рисунке приведено сравнение шага интегрирования ПК RUSTab и прототипа, использующего описанную выше схему интегрирования. Сравнение выполнено на тестовой схеме из комплекта RUSTab с абсолютной точностью . На рисунке представлен график мощности одного из генераторов, рассчитанный в двух программах. Генератор представлен моделью ЭДС с одним контуром и работает под управлением АРВ сильного действия с активными каналами по напряжению, производной напряжения, частоте, производной частоты и производной тока ротора.

На следующем рисунке изображен график изменения шага интегрирования.

В быстрой фазе процесса 0.5-2.5с оба метода интегрирования работают с близкими значениями шага. Неявный метод не может иметь преимущества при интенсивной динамике по всем компонентам. Кроме того, схема интегрирования RUSTab не контролирует локальную ошибку по алгебраическим переменным напрямую, в отличие от схемы прототипа, который одинаково контролирует все переменные состояния.

По мере затухания метод прототипа многократно увеличивает шаг, несмотря на то, что быстрые компоненты сохраняют небольшую активность, которая не дает увеличивать шаг методу RUSTab. Явный метод интегрирования не позволяет применить выражение типа (28) для контроля погрешности, и требует использования нормы . В противном случае с высокой вероятностью метод потеряет устойчивость при интегрировании быстрых компонент. Так как затраты на выбор шага метода RUSTab практически отсутствуют, шаг следует за скоростью изменения самой активной компоненты (производная частоты в АРВ), которая не затухает до конца расчета.

Резкое снижение шага прототипа после 7с расчета обусловлено накоплением ошибки, вызванной фиксацией матрицы Якоби, которую потребовалось обновить и сократить шаг для рестарта.

Рассмотренные выше методы и схема интегрирования предполагают, что СДАУ постоянна. При расчете ЭМПП это условие невыполнимо, так как значительная часть функций не являются гладкими на всей области определения из-за ограничений или имеют дискретный характер. Кроме того, для моделирования возмущений часть уравнений системы приходится модифицировать. В наиболее сложных случаях меняется даже размерность системы. Поэтому полноценный алгоритм расчета ЭМПП должен реализовывать так называемый процесс интегрирования, который является надстройкой над схемой интегрирования и решает следующие задачи:

1. Управление событиями.
2. Обработка разрывов.
3. Определение начальных условий и возобновление интегрирования после разрывов.
4. Поиск моментов времени условных событий.

Событие в процессе интегрирования является командой на исполнение некоторых действий в момент времени . Для исполнения действий как минимум требуется остановка работы текущей схемы интегрирования. В общем случае действия могут требовать ввода изменений в (2). После выполнения действий, как правило, необходимо возобновить работу схемы интегрирования с новыми начальными условиями. События можно разделить на две группы [6] – безусловные события (Time Events) и условные события (State Events). События первой группы вводятся в моменты времени, которые известны до начала расчета ЭМПП. К ним относятся события сценария расчета: ввод возмущений и завершение расчета на заданном времени. Условные события возникают при определенном сочетании параметров модели и время их ввода (а часто и необходимость ввода) требуется определять в процессе расчета. Примерами условных событий являются срабатывания пороговых элементов: ограничений, реле, таймеров и т.п.

Обработка события в процессе интегрирования вне зависимости от принадлежности к группе условных или безусловных выполняется одинаково, при условии что определен момент времени ввода события . Для безусловных событий он известен заранее, для условных – определяется с помощью метода, описанного ниже. Пусть процесс интегрирования выполняет шаг из в , при этом Для корректной обработки событий процесс интегрирования должен выполнить следующие операции:

1. В точке скорректировать и выполнить шаг в точку . Далее считать что .
2. Проверить локальную ошибку шага. Если она не допустима – отказаться от обработки события и вернуться в для выбора шага по условию допустимости локальной ошибки.
3. В точке зафиксировать результаты расчета до ввода события. Так как событие вводится «мгновенно», точка времени до ввода события называется , точка времени после ввода события – . Строго говоря , но для интерпретации результатов и устойчивой работы процесса интегрирования принято , где – минимально допустимый шаг метода интегрирования.
4. Ввести необходимые изменения в и (2) и решить новую систему (21) относительно при . Последнее условие означает, что . В некоторых экзотических моделях должно изменяться в точке разрыва (например производные в АРВ Мустанг), но эти изменения описываются законами отличными от и . Решение (21) в точке разрыва методом Ньютона может представлять затруднения, связанные с выбором начального приближения, поэтому оно предварительно формируется линейным методом решения, а метод Ньютона работает в режиме контроля сходимости по параметру, в отличие от обычного режима работы в итерационном процессе (25).
5. В случае успешного решения (21) зафиксировать результаты расчета после ввода события в точке .
6. Выполнить рестарт схемы интегрирования с начальных условий и , удовлетворяющих решению. Рестарт предполагает переход к первому порядку метода интегрирования и использование среднего значения шага интегрирования, которое должно быть скорректировано на последующих шагах по критерию локальной ошибки.

# Библиографический список

1. *The Simultaneous Numerical Solution Of Differential - Algebraic Equations SLAC-PUB-0723.* **Gear, C.W.** 1971 г., IEEE Trans.Circuits Theor. 18, стр. 85-95.

2. *The mixed Adams-BDF variable step size algorithm to simulate transient and long term phenomena in power systems.* **Astic, J.Y., Bihain, A. и Jerosolimski, M.** 2, б.м. : IEEE Transactions on Power Systems, 1994 г., Т. 9.

3. **Petzold, Linda.** *A Description of DASSL: A Differential/Algebraic System Solver.* б.м. : Sandia National Laboratories, 1982. SAND82-8637.

4. **Krishnan Radhakrishnan, Alan C. Hindmarsh.** *Description and Use of LSODE,the Livermore Solver for Ordinary Differential Equations.* б.м. : NASA reference publication, 1993.

5. **Peter K. Moore, Linda R. Petzold.** *Stepsize Control strategy For Stiff Systems Of Ordinary Differential Equations.* б.м. : Computer Science Department University of Minnesota, 1994.

6. **Cellier, Francois E. and Kofman, Ernesto.** *Continuous System Simulation.* б.м. : Springer-Verlag, 2006. ISBN:0387261028.