Моделирование электромеханических переходных процессов (ЭМПП) в том или ином виде предполагает решение системы дифференциально-алгебраических уравнений (СДАУ) вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где:

– вектор-столбец дифференциальных переменных;

– вектор-столбец алгебраических переменных;

и – гладкие векторные функции;

– время;

– заданные значения переменных при (начальные условия)

Решение системы (1) состоит в нахождении функций и , определенных на интервале . В качестве может использоваться константа, задаваемая в исходных данных, но также этот параметр может определяться автоматически в зависимости от поставленной цели моделирования ЭМПП. Часто (1) приводят в компактном виде, опуская обозначение функциональных зависимостей:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

Разделение переменных на дифференциальные и алгебраические обусловлено тем, что для дифференциальных переменных заданы аналитические выражения производных по времени . Для алгебраических переменных такие выражения неизвестны, поэтому алгебраическая часть (2) может рассматривается как функциональное ограничение при решении дифференциальной части. Так как моделирование ЭМПП выполняется в пространстве состояний, для ряда операций удобно объединять дифференциальные и алгебраические переменные в общий вектор переменных состояния . Данный вектор однозначно определяет состояние моделируемой системы в любой момент времени, и кроме того при некотором может рассматриваться как вектор начальных условий для интегрирования (2) на интервале .

За редким исключением аналитическое решение (2) невозможно. Вместо аналитического решения используется численное, с нормированной точностью . Численное решение предусматривает замену дифференциальной части (2) конечно-разностными уравнениями и их пошаговое решение с помощью некоторого метода численного интегрирования. Метод интегрирования строит последовательность аппроксимаций удовлетворяющих условию:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

в дискретных точках времени , , Интервал между соседними точками времени называется шагом интегрирования . Для принимается . Таким образом решаемая СДАУ преобразуется к виду:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Система (4) сохраняет свойства (1) при выполнении условия (3). Одним из важнейших свойств системы дифференциальных уравнений, а значит и СДАУ, является так называемая жесткость. Это термин имеет несколько вариантов математического определения, но качественно сильная жесткость означает наличие в СДАУ компонентов со скоростями изменения различающимся на несколько порядков. В задаче моделирования ЭМПП примером компонентов с высокой скоростью изменения могут служить контуры моделей АРВ, с низкой скоростью изменения – контуры моделей тепломеханического оборудования. Степень жесткости СДАУ диктует выбор метода интегрирования. Шаг метода интегрирования должен выбираться таким образом, чтобы обеспечивалось выполнение (3). При этом метод интегрирования можно рассматривать как некоторую векторную функцию , с помощью которой по известному можно определить . Безусловно для алгебраических переменных должна быть выполнена аналогичная операция , но она может быть реализована различными способами по отношению к , и пока не будет приниматься во внимание. Функция метода интегрирования может быть задана в явном виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

или неявном:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Очевидно, что (5) выглядит предпочтительно по отношению к (6), так как позволяет вычислить напрямую, без решения системы. Однако рассмотрим пример интегрирования с помощью метода Эйлера в явной

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

и неявной

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

формах. Для определения по выражению (8) потребуется решение уравнения относительно . Предположим что . Это так называемое модельное уравнение, используемое для анализа свойств методов интегрирования. В соответствии с (7) и (8) можно записать следующие схемы решения для явного метода:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

И для неявного

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

Пусть начальные условия , тогда для явного метода

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

и для неявного

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

Решение модельного уравнения известно: . Если , . Это означает, что для явного метода должно выполняться условие:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

и для неявного метода:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

из чего следует, что для обеспечения численного решения модельного уравнения шаг явного метода интегрирования должен быть ограничен сверху, в то время как шаг неявного метода не требует ограничения. При этом ограничение шага явного метода не может быть отброшено до конца интегрирования, так как лишь стремится к нулю, но не достигает его.

В случае, если требуется решить систему дифференциальных уравнений, и в данной системе хотя бы небольшая часть компонент изменяется существенно быстрее остальных (то есть система является жесткой), явный метод интегрирования должен работать с шагом, который ограничивается параметрами уравнений быстрых компонент. Попытка увеличения шага может привести не только к нарушению условия (3) в локальных , но и к потере устойчивости всего решения. Для неявного метода интегрирования локальная ошибка, как правило, не означает потери устойчивости и возможность получить правдоподобное решение, пусть и с погрешностью, сохраняется. Данным свойством неявных методов можно воспользоваться на практике для приближенного, но ускоренного интегрирования процесса с компонентами, время изменения которых существенно меньше заданного шага интегрирования. Неявный метод не сможет адекватно воспроизвести поведение данных компонент на интервалах быстрых изменений, но после их затухания позволит продолжить интегрирование без риска неконтролируемого роста погрешности и нарушения численной устойчивости. Необходимо отметить, что данное свойство можно использовать только при условии, что решаемая система уравнений неизменна на интервале интегрирования, в противном случае отказ от точного воспроизведения быстрых компонент может привести тому, что будут проигнорированы изменения структуры модели, ограничения, срабатывание устройств автоматики и т.д.

Для решения исходной СДАУ (2) дифференциальные уравнения должны быть преобразованы в алгебраические с использованием функций, зависящих от метода интегрирования. Применение явного метода интегрирования не требует ввода эквивалентной системы алгебраических уравнений, позволяет решить дифференциальные уравнения (2) отдельно от алгебраических, использовать найденные решения в алгебраической системе и согласовать общее решение СДАУ итерационным путем. Применение неявного метода таким способом также возможно, но так как его использование в любом случае означает ввод новой системы алгебраических уравнений (6), то по сути система дифференциальных уравнений в (2) заменяется на алгебраическую систему. При этом исходная СДАУ преобразуется в эквивалентную чисто алгебраическую систему нелинейных уравнений, которую необходимо решать итерационным методом. Таким образом необходимость решения системы алгебраических уравнений возникает вне зависимости от используемого метода интегрирования, применяемого к СДАУ. В связи с этим представляется целесообразным использовать неявные методы интегрирования, так как их преимущества очевидны, а трудоемкость реализации, связанная с необходимостью итерационного решения системы уравнений, возникает в любом случае. Для решения результирующей системы алгебраических уравнений могут применяться различные методы. Возможен упрощенный в части реализации подход на базе метода простой итерации. Практика показывает, что данный метод работоспособен, но в определенных ситуациях в принципе не позволяет получить решения из-за присущих ему ограничений, связанных с жесткими требованиями к свойствам системы. Для использования метода Ньютона потребуется формирование матрицы Якоби алгебраической системы, что многократно повышает трудоемкость разработки моделей: дополнительно к набору уравнений для каждой модели потребуется формировать блок матрицы Якоби. Однако метод Ньютона позволяет получать надежное решение, обладает хорошей сходимостью и кроме того может использоваться не только для решения (2), но и для определения начальных условий. Слабой стороной метода Ньютона является чувствительность к качеству начального приближения. Отчасти эта проблема решается путем использования начального приближения от предыдущего шага интегрирования. В качестве дополнительного фактора, улучшающего условия сходимости метода Ньютона, может выступать схема метода интегрирования. Распространенной схемой интегрирования является схема прогноза-коррекции. Располагая данными о выполненном решении в точке метод с помощью экстраполяции может построить прогноз значений . Полученный прогноз используется в качестве начального приближения для решения эквивалентной (2) системы, в которой дифференциальные уравнения дискретизированы в виде, зависящем от выбранного метода интегрирования. В процессе решения прогноз корректируется так, чтобы значения удовлетворили заданной системе уравнений. Рассматриваемая схема эффективно реализуется при использовании многошаговых методов интегрирования, которые предполагают сохранение данных выполненных шагов и их использование для выполнения очередного шага. Для решения СДАУ этот подход реализован в методе Гира [1]. Данный метод предполагает использование метода интегрирования BDF как для дифференциальных, так и для алгебраических уравнений. В Eurostag [2] метод модифицирован так, что для дифференциальных переменных используется метод Адамса, а для алгебраических – BDF. Модификация применена ввиду того, что методы семейства BDF обладают свойством гиперустойчивости – демпфирования даже неусточивых компонент решения при работе с шагом интегрирования, превышающим время изменения данных компонент. Применение гибридного метода для решения (2) позволяет исключить эффект гиперустойчивости.

Все многошаговые методы любого порядка несмотря существенные различия их свойств могут быть формализованы в виде, использующем представление с вектором Нордсика. Данный вектор, имеет размерность . Для реализованного метода интегрирования , поэтому для вектора Нордиска зарезервирована размерность 1×3.

На шаге интегрирования для дифференциальных и алгебраических переменных векторы Нордсика имеют вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

Векторы содержат всю необходимую информацию для представления и в виде ряда Тейлора до второго порядка в точке . Если известны векторы Нордсика для , то прогноз в точке может быть выполнен по выражениям:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

где:

– нижне-треугольная матрица Паскаля;

– экстраполированные в векторы Нордсика по дифференциальным и алгебраическим переменным.

Коррекция прогноза для получения вектора Нордсика в точке выполняется по выражениям:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |

где:

– вектор-строка коэффициентов метода интегрирования для дифференциальных переменных;

– вектор-строка коэффициентов метода интегрирования для алгебраических переменных;

– векторы отклонений значений прогноза от решения в точке .

Векторы и нормированы так, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

Покомпонентно (17) можно записать в виде:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  |  | | | (19) |
|  |  | |

Для дифференциальных переменных (2), используя уравнение для из (19) можно записать:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

С учетом (17) и (18) получаем систему нелинейных алгебраических уравнений

|  |  |
| --- | --- |
|  | (21) |

Для решения которой относительно и необходимо сформировать матрицу Якоби со следующей структурой:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (22) |

С учетом (21) можно переписать (22) в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (23) |

Следует заметить, что матрица Якоби при не становится вырожденной, что позволяет ее использовать для решения СДАУ при поиске промежуточных начальных условий, если (2) потребуется скорректировать в некоторой точке времени.

Решение (21) выполняется итерационно. Для итерации переменные в точке можно представить в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (24) |

Итерационный процесс решения (21) относительно и выполняется по рекуррентному выражению:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (25) |

После завершения итерационного процесса векторы Нордиска и в точке рассчитываются по выражению (17).

Полученные в результате решения (25) по дифференциальным и алгебраическим переменным представляют собой разности между спрогнозированными и скорректированными значениями. По данным разностям можно оценивать погрешность локального решения и корректировать шаг и порядок метода. Локальная ошибка на шаге определяется по выражению:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (26) |

где:

– константа, зависящая от метода интегрирования;

– порядок метода интегрирования;

– вектор-строка коэффициентов метода интегрирования порядка .

При оценке погрешности удобно использовать индивидуальные характеристики для каждой из компонент решения. Для этого вводится вектор взвешенных погрешностей:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |

где:

– относительная погрешность -ой компоненты вектора состояния;

– абсолютная погрешность -ой компоненты вектора состояния.

Погрешность решения на шаге является допустимой если выполняется:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (28) |

Использование -нормы для оценки погрешности в отличие, например, от -нормы, позволяет отказаться от излишнего снижения шага интегрирования для повышения точности расчета быстрых компонент, которые сами по себе не столь важны для анализа ЭМПП. Квадратичная норма дает возможность контроля интегральной погрешности расчета всей системы (2).

Данная оценка погрешности дополнительно используется для контроля сходимости (25), а также для выбора шага и порядка метода на следующем шаге интегрирования. Возможность изменения порядка метода используется в случае, если оценка следующего шага методом иного порядка окажется больше, чем оценка следующего шага текущего метода. Операция изменения шага и порядка требует модификации векторов Нордиска, в частности масштабирования, увеличения или уменьшения размерности, поэтому частота изменения параметров метода ограничивается. Управление шагом и порядком интегрирования реализовано на базе [3], в котором данные вопросы рассматриваются применительно к чисто дифференциальным системам уравнений. Так как решаемая задача является дифференциально-алгебраической и жесткой, то дополнительные меры контроля сходимости корректора и подавления спорадических изменений шага реализованы на базе [4].

На рисунке приведено сравнение шага интегрирования ПК RUSTab и прототипа, использующего описанную выше схему интегрирования. Сравнение выполнено на тестовой схеме из комплекта RUSTab с абсолютной точностью . На рисунке представлен график мощности одного из генераторов, рассчитанный в двух программах. Генератор представлен моделью ЭДС с одним контуром и работает под управлением АРВ сильного действия с активными каналами по напряжению, производной напряжения, частоте, производной частоты и производной тока ротора.

На следующем рисунке изображен график изменения шага интегрирования.

В быстрой фазе процесса 0.5-2.5с оба метода работают с шагом близким к минимальному, но по мере затухания метод прототипа многократно увеличивает шаг, несмотря на то, что быстрые компоненты сохраняют небольшую активность, которая не дает увеличивать шаг методу RUSTab. Явный метод интегрирования не позволяет применить выражение типа (28) для контроля погрешности, и требует использования нормы . В противном случае с высокой вероятностью метод потеряет устойчивость при интегрировании быстрых компонент. Резкое снижение шага после 7с расчета обусловлено накоплением ошибки, вызванной фиксацией матрицы Якоби, которую потребовалось обновить и сократить шаг для рестарта.

# Библиографический список

1. *The Simultaneous Numerical Solution Of Differential - Algebraic Equations SLAC-PUB-0723.* **Gear, C.W.** 1971 г., IEEE Trans.Circuits Theor. 18, стр. 85-95.

2. *The mixed Adams-BDF variable step size algorithm to simulate transient and long term phenomena in power systems.* **Astic, J.Y., Bihain, A. и Jerosolimski, M.** 2, б.м. : IEEE Transactions on Power Systems, 1994 г., Т. 9.

3. *Description and Use of LSODE,the Livermore Solver for Ordinary Differential Equations.* **Krishnan Radhakrishnan, Alan C. Hindmarsh.** 1327, б.м. : NASA reference publication, 1993 г.

4. *Stepsize Control strategy For Stiff Systems Of Ordinary Differential Equations.* **Peter K. Moore, Linda R. Petzold.** TR 94-08, б.м. : Computer Science Department University of Minnesota, 1994 г.