Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша

Российской академии наук

С. А. Шестаков, Д. С. Иванов

Оптимизационные задачи при управлении групповым полетом спутнков с помощью переброса массы

Москва — 2014

1. Задача о переброse массы

1.1. Постановка задачи

Будем рассматривать конфигурацию из двух спутников с близкими орбитами. Для описания траекторий в таком случае удобно пользоваться уравнениями движения в относительных координатах. Общий вид уравнения относительного движения двух спутников достаточно сложен для аналитического рассмотрения, поэтому в данной работе используется система уравнений Клохесси–Уилтшира (Clohessy–Wiltshire) [12], которая описывает движение спутника относительно некоторого опорного тела O, движущегося вокруг Земли. Система имеет вид

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + 2\omega\dot{z} = 0, \\ &\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \\ &\ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где ось Oz направлена вдоль радиус-вектора опорного тела от центра Земли, ось Oy — по нормали к плоскости опорной орбиты в направлении орбитального момента, ось Ox дополняет систему до правой тройки, O — опорное тело, движущееся по круговой орбите радиуса ρ с угловой скоростью $\omega = \sqrt{\mu/\rho^3}$, μ — гравитационный параметр Земли. Система координат $Oxyz$ — орбитальная система координат (ОСК) — схематично представлена на рис. 2.

Предположим, что изначально движение одного из спутников (далее «бросающего») в ОСК описывается уравнениями (1), а второй спутник (далее «ловящий») покоится в точке O.

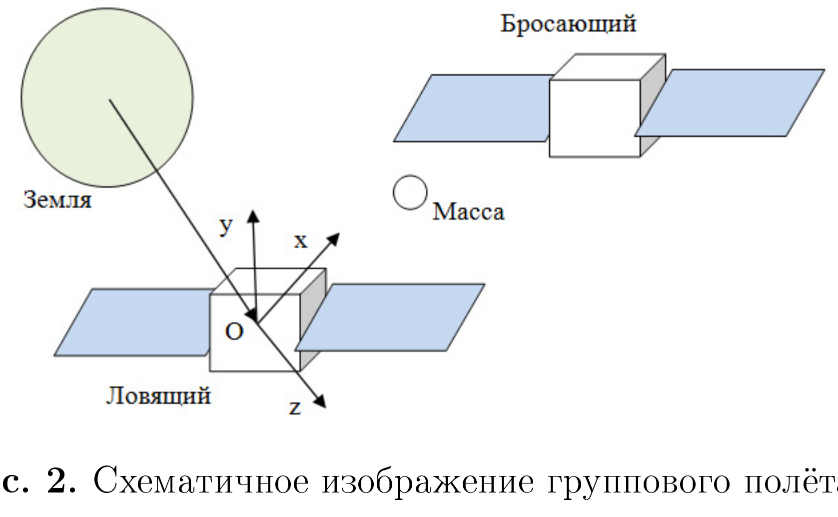

Рис. 2. Схематичное изображение группового полёта

Пусть поставлена задача Коши для системы (1) с начальными условиями

$$\begin{aligned} &x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0, \\ &\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0 \end{aligned} \tag{2}$$

Решение задачи (1, 2) есть

$$
\begin{aligned}
x(t) = & \left[x_0 - \frac{2\dot{z}_0}{\omega} + 3\omega\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0\right)t_0\right] - 3\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0\right)\omega t \\
& + 2\left[\frac{\dot{z}_0}{\omega}\cos\omega t_0 - \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0\right)\sin\omega t_0\right]\cos\omega t \\
& + 2\left[\frac{\dot{z}_0}{\omega}\sin\omega t_0 + \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0\right)\cos\omega t_0\right]\sin\omega t, \\
y(t) = & \left(y_0\sin\omega t_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega}\cos\omega t_0\right)\sin\omega t \\
& + \left(y_0\cos\omega t_0 - \frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t_0\right)\cos\omega t, \\
z(t) = & \left[\frac{\dot{z}_0}{\omega}\cos\omega t_0 - \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0\right)\sin\omega t_0\right]\sin\omega t \\
& - \left[\frac{\dot{z}_0}{\omega}\sin\omega t_0 + \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0\right)\cos\omega t_0\right]\cos\omega t + 2\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0\right).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Удобно ввести константы

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0, \\
C_2 &= \frac{\dot{z}_0}{\omega}\cos\omega t_0 - \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0\right)\sin\omega t_0, \\
C_3 &= \frac{\dot{z}_0}{\omega}\sin\omega t_0 + \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0\right)\cos\omega t_0, \\
C_4 &= x_0 - \frac{2\dot{z}_0}{\omega} + 3\omega\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0\right)t_0, \\
C_5 &= y_0\sin\omega t_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega}\cos\omega t_0, \\
C_6 &= y_0\cos\omega t_0 - \frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t_0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

С их помощью система (3) записывается в более простом виде

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2C_2\cos\omega t + 2C_3\sin\omega t + C_4 - 3C_1\omega t, \\
y(t) &= C_5\sin\omega t + C_6\cos\omega t, \\
z(t) &= 2C_1 + C_2\sin\omega t - C_3\cos\omega t.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Из (5) видно, что относительная траектория замкнута, когда $C_1 = 0$. При этом, значение C_1 отвечает за величину относительного дрейфа спутников в группе. Величина $\sqrt{C_2^2 + C_3^2}$ определяет амплитуду колебаний траектории вдоль осей Ox и Oz, $\sqrt{C_5^2 + C_6^2}$ — амплитуду вдоль оси Oy. C_4 представляет собой постоянный сдвиг траектории. Введённые константы удобным образом описывают форму и размер относительной траектории. Решение (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= -3C_1\omega t + 2A\cos(\omega t - \varphi) + C_4, \\ y(t) &= B\cos(\omega t - \psi), \\ z(t) &= 2C_1 + A\sin(\omega t - \varphi), \end{aligned} \tag{6}$$

где $A = \sqrt{C_2^2 + C_3^2}$, $B = \sqrt{C_5^2 + C_6^2}$, а дополнительные углы задаются выражениями

$$\varphi:\ \cos\varphi = \frac{C_2}{A},\ \sin\varphi = \frac{C_3}{A};$$
$$\psi:\ \sin\psi = \frac{C_5}{B},\ \cos\psi = \frac{C_6}{B}.$$

Из (5) дифференцированием по времени удобно выразить скорости

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -3C_1\omega - 2C_2\omega\sin\omega t + 2C_3\omega\cos\omega t, \\ \dot{y}(t) &= C_5\omega\cos\omega t - C_6\omega\sin\omega t, \\ \dot{z}(t) &= C_2\omega\cos\omega t + C_3\omega\sin\omega t. \end{aligned} \tag{7}$$

1.2. Скорость выброса

Предположим, что в момент времени $t = t_e$ бросающий спутник производит выброс дополнительного тела массы m. В ОСК оно также движется по некоторой траектории $(x_s(t), y_s(t), z_s(t))$, описываемой уравнениями (1). Потребуем, чтобы в некоторый момент $t = t_m$ эта дополнительная масса столкнулась с ловящим спутником, то есть чтобы выполнялось $x_s(t_m) = y_s(t_m) = z_s(t_m) = 0$.

Скорость массы $\dot{\mathbf{r}}_s$ в момент t_e равна:

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \dot{\mathbf{r}}_t(t_e) + \delta\mathbf{v},$$

где $\delta\mathbf{v} = (\delta\dot{x}, \delta\dot{y}, \delta\dot{z})$ — относительная скорость выброса, а $\dot{\mathbf{r}}_t(t_e)$ — скорость бросающего спутника в момент броска.

Найдем относительную скорость выброса. Для этого подставим скорости в решение (3) и положим $t_0 = t_e$, $t = t_m$

$$\delta\dot{y} = -\dot{y}_0 - y_0\omega\operatorname{ctg} u,$$

$$\begin{pmatrix} 4\sin u - 3u & 2\cos u - 2 \\ 2 - 2\cos u & \sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_0 + \delta\dot{x} \\ \dot{z}_0 + \delta\dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6z_0\omega(u - \sin u) - x_0\omega \\ z_0\omega(3\cos u - 4) \end{pmatrix},$$

где $u = \omega(t_m - t_e)$. Неравенство нулю детерминанта $\Delta = 3u\sin u - 8(1-\cos u)$ обеспечивает существование единственного решения:

$$\begin{aligned} \delta\dot{x} &= -\dot{x}_0 - 2z_0\omega + \frac{1}{\Delta}[x_0\omega\sin u + 2z_0\omega(\cos u - 1)], \\ \delta\dot{y} &= -\dot{y}_0 - y_0\omega\operatorname{ctg} u, \\ \delta\dot{z} &= -\dot{z}_0 - \frac{1}{\Delta}[2x_0\omega(1-\cos u) + z_0\omega(3u\cos u - 4\sin u)]. \end{aligned} \tag{8}$$

Определив начальную траекторию, зададим время начала переброса t_e и длительность переброса $t_m - t_e$ и вычислим необходимую для переброса относительную скорость выброса. Система вырождается при $\sin u = 0, y_0 \neq 0$ и при $\Delta = 0$. В этих случаях нет возможности для столкновения массы с ловящим спутником — краевая задача не имеет решений.

1.3. Изменение относительной траектории

Определим влияние переброса массы на относительное движение спутников. Как показано выше, любое изменение траектории влечёт изменение значений констант $C_1 \ldots C_6$. Исследуем эти изменения при однократном перебросе.

Пусть масса каждого из двух спутников формации (без дополнительного тела) есть M, масса дополнительного тела есть m. Тогда, применяя закон сохранения импульса в момент выброса тела (считаем импульс приложенным к центру масс бросающего, а потому не влиящим на его угловое движение), получаем

$$(M+m)\mathbf{v}_{t,0} = M\mathbf{v}_t + m(\mathbf{v}_{t,0} + \delta\mathbf{v}),$$

где $\mathbf{v}_{t,0}$ и $\mathbf{v}_t$ — скорость бросающего в момент времени t_e до и сразу после отделения дополнительного тела соответственно. Отсюда находим скорость бросающего спутника после выброса

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{t,0} - \frac{m}{M}\delta\mathbf{v}.$$

Вместе с начальными условиями $x_t(t_e) = x_0$, $y_t(t_e) = y_0$, $z_t(t_e) = z_0$ она полностью определяет движение бросающего после совершения броска.

После столкновения с перебрасываемым телом траектория ловящего спутника также меняется. Для определения характера изменения вычислим траекторию дополнительного тела на отрезке времени $[t_e, t_m]$. Начальные условия для него есть $x_s(t_e) = x_0$, $y_s(t_e) = y_0$, $z_s(t_e) = z_0$, $\dot{x}_s(t_e) = \dot{x}_0 + \delta\dot{x}$, $\dot{y}_s(t_e) = \dot{y}_0 + \delta\dot{y}$, $\dot{z}_s(t_e) = \dot{z}_0 + \delta\dot{z}$, поэтому оно движется по траектории (5), где константы интегрирования имеют вид

$$
\begin{aligned}
C_{1,s} &= \frac{1}{\Delta}[x_0 \sin u + 2z_0(\cos u - 1)],\\
C_{2,s} &= \frac{\cos \omega t_e}{\Delta}[z_0(4\sin u - 3u\cos u) - 2x_0(1-\cos u)]\\
&- \frac{\sin \omega t_e}{\Delta}[z_0(4(1-\cos u) - 3u\sin u) + 2x_0 \sin u],\\
C_{3,s} &= \frac{\cos \omega t_e}{\Delta}[z_0(4(1-\cos u) - 3u\sin u) + 2x_0\sin u]\\
&- \frac{\sin \omega t_e}{\Delta}[2x_0(1-\cos u) + z_0(3u\cos u - 4\sin u)],\\
C_{4,s} &= \frac{1}{\Delta}[4x_0(\cos u - 1) + 2z_0(3u\cos u - 4\sin u)]\\
&+ \frac{1}{\Delta}[3x_0\sin u + 6z_0(\cos u - 1)]\omega t_e,\\
C_{5,s} &= y_0 \sin \omega t_e - y_0 \operatorname{ctg} u \cos \omega t_e,\\
C_{6,s} &= y_0 \cos \omega t_e + y_0 \operatorname{ctg} u \sin \omega t_e.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Согласно закону сохранения импульса скорость ловящего спутника сразу после столкновения его с дополнительным телом равна (начальная скорость ловящего в ОСК нулевая)

$$\mathbf{v}_c(t_m) = \frac{m}{M+m}\mathbf{v}_s(t_m).$$

Начальные условия для ловящего после переброса следующие: $\mathbf{r}_c(t_m) = 0$, $\mathbf{v}_c(t_m)$.

После совершения переброса оба спутника движутся в ОСК по орбитам вида (5) с некоторыми константами $C_1 \dots C_6$, которые являются функциями начальных условий, времени начала t_e и окончания t_m переброса и масс M и m. Аналитические выражения приведены далее в формулах (10) и (11) (индекс «t» для бросающего, «c» для ловящего). Здесь $\Delta = 3u\sin u - 8(1-\cos u)$ и $k = m/M$. С помощью полученных формул можно исследовать и вычислить изменения относительных траекторий спутников для конкретных задач управления.

$$
\begin{aligned}
C_{1,t} &= (k+1)\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0\right) + \frac{k}{\Delta}[2z_0(1-\cos u) - x_0 \sin u],\\
C_{2,t} &= (k+1)\left(\frac{\dot{z}_0}{\omega}\cos\omega t_e - \left(2\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0\right)\sin\omega t_e\right)\\
&\quad + \frac{\sin\omega t_e}{\Delta}[4kz_0(1-\cos u) - 3kz_0 u \sin u + 2kx_0 \sin u]\\
&\quad + \frac{\cos\omega t_e}{\Delta}[2kx_0(1-\cos u) + 3kz_0 u\cos u - 4kz_0 \sin u],\\
C_{3,t} &= (k+1)\left(\frac{\dot{z}_0}{\omega}\sin\omega t_e + \left(2\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0\right)\cos\omega t_e\right)\\
&\quad - \frac{\cos\omega t_e}{\Delta}[4kz_0(1-\cos u) - 3kz_0 u \sin u + 2kx_0 \sin u]\\
&\quad + \frac{\sin\omega t_e}{\Delta}[2kx_0(1-\cos u) + 3kz_0 u\cos u - 4kz_0 \sin u],\\
C_{4,t} &= x_0 - 2(k+1)\frac{\dot{z}_0}{\omega} + 3(k+1)\left(2z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)\omega t_e\\
&\quad - \frac{1}{\Delta}[4kx_0(1-\cos u) + 3k\omega t_e x_0 \sin u\\
&\quad - 8kz_0 \sin u + 6k\omega t_m z_0 \cos u - 6k\omega t_e z_0],\\
C_{5,t} &= y_0 \sin\omega t_e + (k+1)\frac{\dot{y}_0}{\omega}\cos\omega t_e + k y_0 \cos\omega t_e \operatorname{ctg} u,\\
C_{6,t} &= y_0 \cos\omega t_e - (k+1)\frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t_e - k y_0 \sin\omega t_e \operatorname{ctg} u;
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1,c} &= \frac{k}{k+1}\frac{1}{\Delta}[x_0 \sin u - 2z_0(1-\cos u)],\\
C_{2,c} &= \frac{k}{k+1}\frac{1}{\Delta}[4z_0(\sin\omega t_m - \sin\omega t_e)\\
&\quad + 2x_0(\cos\omega t_m - \cos\omega t_e) - 3z_0 u \cos\omega t_m],\\
C_{3,c} &= \frac{k}{k+1}\frac{1}{\Delta}[-4z_0(\cos\omega t_m - \cos\omega t_e)\\
&\quad + 2x_0(\sin\omega t_m - \sin\omega t_e) - 3z_0 u \sin\omega t_m],\\
C_{4,c} &= \frac{k}{k+1}\frac{1}{\Delta}[4x_0(1-\cos u) + 3\omega t_m x_0 \sin u\\
&\quad + 6z_0 u\cos u - 6\omega t_e z_0(1-\cos u) - 8z_0 \sin u],\\
C_{5,c} &= \frac{k}{k+1} y_0 \frac{-\cos\omega t_m}{\sin u},\\
C_{6,c} &= \frac{k}{k+1} y_0 \frac{\sin\omega t_m}{\sin u},
\end{aligned}
\tag{11}
$$