ПРОГРАММА

Тема 1. Линейное программирование

Задачи планирования и управления, их математические модели. Общая постановка задач оптимизации. Различные формы записи задач линейного программирования (ЛП) и их эквивалентность. Геометрическая интерпретация и графическое решение задач ЛП. Свойства решений задач ЛП. Нахождение начального опорного плана. Симплексный метод решения задач ЛП. Метод искусственного базиса.

Двойственность в ЛП. Построение пары взаимно двойственных задач. Основные теоремы двойственности. Экономический смысл двойственных переменных. Двойственный симплекс-метод.

Тема 2. Специальные задачи линейного программирования

Математические модели задач транспортного типа. Открытая и закрытая модели транспортной задачи (ТЗ). Построение начального опорного плана. Метод потенциалов решения ТЗ. Критерий оптимальности.

Элементы теории матричных игр. Решение игры в чистых стратегиях. Смешанные стратегии. Решение матричных игр в смешанных стратегиях путем сведения к паре двойственных задач ЛП.

Основные понятия теории графов. Элементы сетевого планирования. Построение сетевого графика и вычисление временных характеристик.

Задача о кратчайшем пути на сети. Алгоритм Дийкстры.

Потоки на сетях. Постановка задачи о максимальном потоке. Понятие разреза в сети. Алгоритм Форда–Фалкерсона для построения максимального потока.

Т Е М А 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Математические модели задач планирования и управления. Общая постановка задач оптимизации

Математическое программирование – это область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Для практического решения экономической задачи математическими методами ее прежде всего следует записать с помощью математических выражений (уравнений, неравенств и т.п.), т.е. составить экономико-математическую модель данной задачи. Для этого необходимо:

1) ввести *переменные величины* x_1, x_2, …, x_n, числовые значения которых однозначно определяют одно из возможных состояний исследуемого явления;

2) выразить взаимосвязи (присущие исследуемому параметру) в виде математических ограничений (уравнений, неравенств), налагаемых на неизвестные величины. Эти соотношения определяют *систему ограничений* задачи, которая образует *область допустимых решений* (область экономических возможностей). *Решение* (*план*) $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющее системе ограничений задачи, называют *допустимым* (*базисным*);

3) записать критерий оптимальности в форме *целевой функции* $z = z(X)$, которая позволяет выбрать наилучший вариант из множества возможных;

4) составить математическую формулировку задачи отыскания *экстремума* целевой функции при условии выполнения ограничений, накладываемых на переменные. Допустимый план, доставляющий целевой функции экстремальное значение, называется *оптимальным* и обозначается X_{opt} или X^*.

Составим, например, *математическую модель* следующей задачи.

Пример 1. Пошивочный цех изготавливает три вида обуви из поступающих из раскройного цеха заготовок. Расход заготовок на пару обуви каждого вида, запасы заготовок, а также прибыль, получаемая фабрикой при реализации пары обуви каждого вида, заданы в табл. 1.1. Сколько пар обуви каждого вида следует выпускать фабрике для получения максимальной прибыли при условии, что заготовки II вида необходимо израсходовать полностью?

Т а б л и ц а 1.1

Обувь вида / Виды заготовок	A	B	C	Запасы заготовок, ед.
I	1	2	-	12
II	1	-	1	4
III	2	2	-	14
Прибыль, ден. ед.	3	2	1	

Решение. Чтобы сформулировать эту задачу математически, обозначим через x_1, x_2, x_3 количество пар обуви соответственно видов A, B и C, которое необходимо выпускать фабрике для получения максимальной прибыли. Согласно условиям задачи прибыль от выпуска обуви вида A составит $3x_1$ ден. ед., от вида B – $2x_2$ ден. ед., от вида C – x_3 ден. ед. Следовательно, целевая функция прибыли z выразится формулой

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max .$$

Поскольку переменные x_1, x_2 и x_3 определяют количество пар обуви, они не могут быть отрицательными, т. е.

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 .$$

Согласно условиям задачи на изготовление всей обуви будет использовано $x_1 + 2x_2$ заготовок 1-го вида. А так как запасы заготовок 1-го вида составляют 12 штук, то должно выполняться неравенство $x_1 + 2x_2 \le 12$.

На изготовление всей обуви будет использовано $x_1 + x_3$ заготовок 2-го вида. Но так как по условию задачи запасы заготовок 2-го вида необходимо израсходовать полностью, то должно выполняться равенство $x_1 + x_3 = 4$.

Аналогично для заготовок 3-го вида должно выполняться неравенство $2x_1 + 2x_2 \le 14$.

Следовательно, система ограничений будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad \le 12 & \text{(количество заготовок вида I);} \\ x_1 + \qquad + x_3 = 4 & \text{(количество заготовок вида II);} \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad \le 14 & \text{(количество заготовок вида III).} \end{cases}$$

Итак, задача состоит в том, чтобы найти неотрицательные значения x_1, x_2 и x_3, удовлетворяющие системе ограничений и максимизирующие целевую функцию z.

1.2. Различные формы записи задач линейного программирования и их эквивалентность. Приведение задачи к каноническому виду

1.2.1. *Каноническая форма записи задач линейного программирования*

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max \quad \text{(целевая функция),} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{(система ограничений),} \tag{1.2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \quad \text{(ограничения на переменные).} \tag{1.3}$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы ограничений;

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – матрица-строка коэффициентов целевой функции;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец свободных членов;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец неизвестных.

Тогда каноническую форму записи задачи ЛП (1.1)–(1.3) можно представить в следующем матричном виде, эквивалентном первоначальному:

$$Z = C\,X \to \max, \tag{1.4}$$

$$A\,X = B, \tag{1.5}$$

$$X \geq O. \tag{1.6}$$

где O – нулевая матрица-столбец той же размерности, что и матрица X.

Замечание. Не ограничивая общности, можно полагать, что свободные члены неотрицательны, т.е. $b_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$ (иначе ограничительные уравнения можно умножить на (–1)).

1.2.2. *Симметричная форма записи задач линейного программирования*

$z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$	$z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = \overline{1,m},$	$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = \overline{1,m},$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$	$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$