РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ КАЧМАЖ ДЛЯ ШУМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СИСТЕМЫ

Диана Ниделл

Аннотация. Метод Качмаж является итерационный алгоритм для решения систем линейных уравнений Ax = Ь. Теоретические скорости сходимости для этого алгоритма были в значительной степени неизвестны до недавнего времени, когда работа не была сделана на рандомизированном версии алгоритма. Было доказано, что для переопределенных систем, рандомизированной метод Качмаж сходится с ожидаемым экспоненциальной скоростью, независимо от число уравнений в системе. Здесь мы анализируем случай, когда система Ax = Ь поврежден шумом, таким образом, мы рассмотрим систему Ax ≈ b + r, где r произвольное вектор ошибок. Докажем, что в этом шумном версии, рандомизированной метод достигает об ошибке порог, зависящий от матрицы с той же скоростью как и в случае безошибочного. Мы предоставляем примеры, показывающие, наши результаты являются точными в общий контекст.

1. Введение

Метод Качмаж [8] является одним из наиболее популярных решений переопределенной линейные системы и имеет многочисленные приложения с компьютерной томографии для изображения обработка. Это итерационный метод, и поэтому применим для практической области в очень большой системы уравнений. Алгоритм состоит из ряда чередующихся прогнозов и часто рассматривается тип проекции на выпуклые множества. Учитывая последовательную систему линейного уравнения вида

$$Ax = b,$$

Метод Качмаж рассматривает многократно проекты над пространствами решений каждого уравнения в системе. То есть, если a1,. , , , ∈ R п обозначают ряды A, метод циклически проецирует текущую оценку ортогонально на гиперплоскостей, состоящих решений в $(a_i,x)=b_i$. Каждая итерация состоит из одной ортогональной проекции.

Алгоритм может быть, таким образом описывается с помощью рекуррентного соотношения,

$$x_{k+1} = x_k + \frac{b_i - \langle a_i, x_k \rangle}{\|a_i\|_2^2} a_i,$$

где xk это kth иттерация и i =(k mod m)+1. Хотя метод Качмаж популярен в практике, теоретические результаты по скорости сходимости метода, было трудно получить. Наиболее известные оценки зависят от свойств матрицы A, может занять много времени, чтобы вычислить и не так легко сопоставимы с таковыми из других итеративных методов (см, например, [3], [4], [5]).

С Качмажа метода циклом через строки A последовательно, его скорость сходимости зависит от рядов. Интуитивно понятно, что порядкок рядов A не изменить уровень сложности системы в целом, так что можно надеяться на результат не зависит от порядка. Один естественный способ преодоления этого является использовать строки A в произвольном порядке, а не последовательно. Несколько исследований были сделаны на улучшение этой рандомизированной версии [9, 6], но только в последнее время теоретические результаты были получены [11, 13].

1.1. **Рандомизированный Качмаж**. При проектировании случайной версии метода Качмажа, необходимо установить вероятность каждой строке, которую выбирают. Штромер и Вершинин предложили в [11, 13], чтобы установить вероятность, пропорциональной евклидовой норме подряд. Их алгоритм может быть описана:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{b_{p(i)} - \langle a_{p(i)}, x_k \rangle}{\|a_{p(i)}\|_2^2} a_{p(i)},$$

где p (i) принимает значения в {1,. , , ,m} с вероятностями $\frac{\|a_{p(i)}\|_2^2}{\|A\|_F^2}$. Здесь и повсюду, обозначает норму Фробениуса A и $\|\cdot\|_2$ обозначает обычную евклидову норма или спектральная норма для векторов или матриц, соответственно. Заметим здесь, что нужно некоторое знание норме рядов A в этой версии алгоритма. В общем, это вычисление занимает O (mn) времени. Тем не менее, во многих случаях например, в котором A содержит гауссовые записи, это может быть приблизительно или точно известно. В [11, 13], Штромер и Вершинин доказывают следующую экспоненциальную оценку на ожидание, скорость сходимости рандомизированного метода Качмажа,

$$(11) \quad \mathbb{E}\|x_k - x\|_2^2 \leq \left(1 - \frac{1}{R}\right)^k \|x_0 - x\|_2^2,$$

где $R = \|A^{-1}\|^2\|A\|_F^2$, x_0это произвольная первоначальная оценка, и E обозначает ожидание (по выбору строк). Здесь и будем считать, что имеет полный ранг столбцов, так что $\|A^{-1}\| \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{M : M\|Ax\|_2 \geq \|x\|_2 \text{ for all } x\}$ является четко определены. Поясним здесь, что именно этот смешанный состояние номер приходит как непосредственное следствие из простых вероятностей, используемых в рандомизированном алгоритме.

Первое замечательное примечание об этом результате, что это практически не зависит числа m уравнений в системе. Действительно, по определению R, R является пропорциональна n в квадратной фактор κ (A), число обусловленности (κ (A) определяется как отношение наибольшего к наименьшему сингулярных значений). Эта оценка также демонстрирует, однако, что метод Качмаж является эффективной альтернативой другие методы только тогда, когда число состояние очень мала. Если это не так, то другие альтернативные методы могут предложить улучшения в практике.

Оценка (1.1) и отношения R к n показывает, что оценка xk сходится экспоненциально быстро к решению всего за O (N) итераций. С каждой итерации требуется O (N) времени, метод в целом имеет O (n2) выполнения. Будучи итерационный алгоритм, ясно, что метод рандомизированного Качмажа является конкурентоспособной только для очень большие системы. Для таких больших систем, время работы O (N2) явно превосходит, Рандомизированного Качмажа решения для шумных линейных систем 3

например, Гаусса, который имеет время выполнения O (mn2). Для таких больших систем, время работы O (n2) явно превосходит, например, Гаусса, который имеет время выполнения O (mn2). Кроме того, поскольку алгоритм должен иметь доступ только к случайным образом выбранных рядов A, метод не обязательно знает всю матрицу A, который для очень больших систем является явным преимуществом. Таким образом, интересные случаи для рандомизированного метода являются те, в которых n и m большие, и особенно те, в которых m является чрезвычайно большим. Штромер и Веришинин обсудили подробно в разделе 4.2 [13] случаях, когда рандомизированный метод Качмаж даже превосходит метод сопряженных градиентов (CGLS). Они показывают, что, например, рандомизированной Качмаж вычислительно превосходит CGLS для гауссовских матриц при m> 3n. Численные эксперименты в [13] также демонстрируют преимущества рандомизированого методом Качмаж во многих случаях. Поскольку результаты [11, 13], имели некоторое дальнейшее обсуждение, преимущества этого рандомизированного метода Качмажа (см [2, 12]). Метод Качмаж был изучен более семидесяти лет, и полезно во многих приложения. Понятие выбора строк случайно в методе был предложил ранее (см [9, 1, 6]), и усовершенствований по сравнению со стандартным методом были. Тем не менее, работа Штромер и Вершинина в [11, 13] дает первое доказательство от скорости сходимости. Ставка экспоненты в ожидании и с точки зрения стандартных свойств матрицы. Мы не знаем любого другого Качмажа метод, который доказуемо достигает экспоненциальной сходимости.

Важно отметить, что метод выбора строки, предложенный в этой рандомизированой версии методом Качмаж не является оптимальным, и пример, который показывает, это дано в [13]. Тем не менее, в рамках данной стратегии выбора, скорости сходимости доказано в [11, 13], являются оптимальными, и есть матрицы, удовлетворяющие проверенные границы точно. Стратегия выбора в этом методе был выбран потому, что часто приводит к очень хорошие результаты, позволяет доказуемую гарантию экспоненциальной сходимости, и вычислительния эффективным.

Так как алгоритм выбирает строк на основе их норм ряда, естественно спросить можно ли просто масштабировать строки любой путь один хочет.

Действительно, выбирая строки на основе их норм, связанных с понятием применения диагональную предобуславливателя. Тем не менее, так как поиск оптимального диагонального предобуславливателя для системы Ax = b. Сама задача, зачастую обходится дороже, чем переворачивая всю матрицу, мы выбираем проще, хотя и не оптимальным, предобуславливатель, что просто весы (по площади в) нормы подряд. Этот тип предварительного кондиционирования дает баланс вычислительных затрат и оптимальность (см [14, 10]). Различие между действием альтернативы диагональ предобуславливатель на методе Качмажа против рандомизированного метода обсуждается здесь важно. Если система умножается на диагональную матрицу, стандартный метод Качмаж не изменится, так как углы между всеми рядами сделать не изменится. Однако такое умножение к системе в нашем рандомизированном настройки изменяет вероятности выбора строк (по определению). Тогда не удивительно, что это также будет влиять на скорость сходимости оказалась для этого метода (с умножение будет влиять на стоимость R в (1.1)).

2. Основные результаты

Теоретические и эмпирические исследования показали, рандомизированный алгоритм Качмажа обеспечить весьма обнадеживающие результаты. Здесь показано, что он также хорошо работает в том случае, где система повреждена с шумом. В этом разделе мы рассмотрим последовательную систему Ax = b после вектора ошибки r добавляется к правой стороне:

$$Ax \approx b + r.$$

Обратите внимание, что мы не требуем систему, чтобы быть последовательным. Во-первых, мы представляем простой пример, чтобы получить интуиции о том, как резко может повлиять на шум система

Система. Для этого, пусть будет n × n матрицы идентичности, b = 0, и предположим, ошибка вектор, элементы которого являются все одно, г = (1, 1,..., 1). Тогда решение шумные система четко x = R = (1, 1,..., 1), и полученный раствор к невозмущенной

Проблема в том, x = 0. В силу неравенства Йенсена, у нас есть

$$\left(\mathbb{E}\|x_k - r\|_2\right)^2 \le \mathbb{E}\left(\|x_k - r\|_2^2\right).$$

Теперь рассмотрим шумный проблему, мы можем заменить r на x в (1.1) Комбинируя это с неравенством Йенсена выше, мы получаем

$$\mathbb{E}\|x_k - r\|_2 \le \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{k/2} \|x_0 - r\|_2. \tag{2.1}$$

Тогда по неравенству треугольника, у нас есть

$$\|r - x\|_2 \le \|r - x_k\|_2 + \|x_k - x\|_2.$$

Далее, взяв ожидание и используя (2.1) выше, у нас есть

$$\mathbb{E}\|x_k - x\|_2 \ge \|r - x\|_2 - \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{k/2} \|x_0 - r\|_2.$$

Наконец, по определению r и R, это означает,

$$\mathbb{E}\|x_k - x\|_2 \ge \sqrt{R} - \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{k/2} \|x_0 - r\|_2.$$

Это означает, что предельная ошибка между x_k итерации и исходного решения x это √R. В [11,13] показано, что при условии, связанного в (1.1) является оптимальным, так что даже этот тривиальный пример показывает, что, если мы хотим сохранить общий параметр, лучший ошибке связаны для шумной случае мы можем помочь для пропорциональна √R. Ваш основной результат доказывает это точная теоретическая оценка.

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Cenker, H. G. Feichtinger, M. Mayer, H. Steier, and T. Strohmer. New variants of the pocs method using affine subspaces of finite codimension, with applications to irregular sampling. *Proc. SPIE: Visual Communications and Image Processing*, pages 299–310, 1992.

[2] Y. Censor, G.T. Herman, and M. Jiang. A note on the behavior of the randomized Kaczmarz algorithm of Strohmer and Vershynin. *J. Fourier Anal. Appl.*, 15:431–436, 2009.

[3] F. Deutsch and H. Hundal. The rate of convergence for the method of alternating projections. *J. Math. Anal. Appl.*, 205(2):381–405, 1997.

[4] A. Gal`antai. On the rate of convergence of the alternating projection method in finite dimensional spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 310(1):30–44, 2005.

[5] M. Hanke and W. Niethammer. On the acceleration of Kaczmarz's method for inconsistent linear systems. *Linear Alg. Appl.*, 130:83–98, 1990.

[6] G.T. Herman and L.B. Meyer. Algebraic reconstruction techniques can be made computationally efficient. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 12(3):600–609, 1993.

[7] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge Univ. Press, 1985.

[8] S. Kaczmarz. Angen¨aherte aufl¨osung von systemen linearer gleichungen. *Bull. Internat. Acad. Polon.Sci. Lettres A*, pages 335–357, 1937.

[9] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, New York, 1986.

[10] A. Shapiro. Upper bounds for nearly optimal diagonal scaling of matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 29:145–147, 1991.

[11] T. Strohmer and R. Vershynin. A randomized solver for linear systems with exponential convergence. In *RANDOM 2006 (10th International Workshop on Randomization and Computation)*, number 4110 in Lecture Notes in Computer Science, pages 499–507. Springer, 2006.

[12] T. Strohmer and R. Vershynin. Comments on the randomized Kaczmarz method. *J. Fourier Anal. Appl.*, 15:437–440, 2009.

[13] T. Strohmer and R. Vershynin. A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence. *J. Fourier Anal. Appl.*, 15:262–278, 2009.

[14] A. van der Sluis. Condition numbers and equilibration of matrices. *Numer. Math.*, 14:14–23, 1969.