

**П.Н. Коробов**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
ПРОГРАММИРОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

2002  
Санкт-Петербург

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Использование экономико-математических методов и электронно-вычислительной техники в целях оптимизации планирования и управления производством на разных уровнях вызывает все больший интерес у менеджеров и инженеров, научных работников и студентов к методологии постановки и математического моделирования различных проблем и задач, методике подготовки и решения их посредством методов математического программирования.

В этой связи, содержание книги раскрывает сущность математического программирования и методологии математического моделирования основных типов оптимизационных экономических задач.

Основная часть книги, по крайней мере по объему, посвящена изложению теоретических и прикладных вопросов математического программирования.

В достаточно понятной форме излагаются основы теории линейного программирования, сущность основных его методов (симплексного, потенциалов, дифференциальных рент). Для усвоения сущности методов линейного программирования необходимы знания основ линейной алгебры. Учитывая, что некоторые читатели, особенно инженеры и менеджеры производства, ранее линейную алгебру не изучали вовсе или изучали в недостаточном объеме, в книге эти вопросы изложены так кратко, как это было возможно, и в такой форме, которая доступна читателям, ранее не изучавшим линейную алгебру.

В настоящее издание книги включены "Элементы теории линейного программирования" в авторской редакции к.ф.-м. наук, доцента Шерстобитова В.В. в знак памяти и признания его, как талантливого ученого и прекрасного педагога, научного редактора первого учебника ().

Две главы в книге посвящены нелинейному и динамическому программированию. Методы решения задач нелинейного и динамического программирования довольно сложны и в этой связи в практике планирования и управления производством применяются еще ограничено.

Особый интерес представляет вычислительный аппарат динамического программирования, разработанный для решения ряда оптимизационных производственных задач (разработка стратегии управления запасами, ресурсами, замена оборудования и др.)

Как линейное, так и динамическое программирование изложены в доступной форме для понимания сущности вычислительных процедур и дальнейшего их использования в решении производственных задач.

На современном этапе, для успешного управления экономикой развития и функционирования отраслей, объединений и предприятий, необходимы хорошие знания не только существа методов математического программирования, а также методологии математического моделирования реальных экономических проблем и производственных задач.

Экономико-математическое моделирование различных задач проходит через все разделы книги.

Мы убеждены в том, что изучение применения экономико-математических методов (ЭММ) и ПЭВМ должно осуществляться не только на общих - типовых моделях, но и в равной степени на реальных моделях оптимального планирования и управления соответствующих отраслей, объединений и предприятий.

Поэтому вторая часть книги посвящена содержательной постановке и математическому моделированию оптимизационных проблем и задач из области

перспективного и текущего планирования и управления производствами применительно к лесопромышленному комплексу. Рассматриваются экономико-математические модели основных проблем управления на уровне предприятий, объединений региона, которые разработаны автором в последние два десятилетия и прошли апробацию в производственных условиях. В этом большую помощь оказал к.э.н., доцент Ловков А.Б., за что выражаю ему искреннюю благодарность.

С надеждой полагаем, что книга будет полезна научным работникам, преподавателям и аспирантам, студентам экономических и технических факультетов, а также менеджерам и инженерам производства.

## **ВВЕДЕНИЕ. ОБЪЕКТИВНАЯ НЕОБХОДИМОСТЬ ПОВЫШЕНИЯ НАУЧНОГО УРОВНЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ**

Повышение эффективности производства является главным направлением развития экономики и связано с внедрением результатов и достижений научно-технического прогресса, рациональных форм технологии и организации производства, повышением интенсификации использования основных фондов и денежных средств и т.п. Наряду с этим повышение эффективности производства в значительной степени зависит от совершенствования системы и методов планирования промышленного производства и управления им.

Дальнейшее развитие промышленного производства сопровождается ростом выпуска продукции, увеличением ее номенклатуры, усложнением производственной структуры и связей между предприятиями, строительством новых, расширением и реконструкцией действующих предприятий, внедрением новых видов техники, технологии, организации производства и т.п. В этих условиях планирование функционирования и развития производства, управление им с помощью традиционных методов не всегда обеспечивает получение обоснованных решений.

Для обеспечения пропорционального развития и нормальной деятельности взаимосвязанных звеньев народного хозяйства, расширения самостоятельности предприятий и объединений, заинтересованности их в научно-техническом прогрессе и повышении эффективности производства требуется повышение научного уровня экономических решений.

Одним из основных путей повышения научного уровня с целью обеспечения максимальной эффективности планирования производства и управления им является *внедрение математических методов на основе широкого использования современной электронно-вычислительной техники (ПЭВМ).*

В физике и химии, астрономии и космонавтике, механике и геологии крупные научные достижения получены за последнее столетие благодаря тому, что исследования строились на применении совершенного математического аппарата. Не случайно еще "К. Маркс считал, - пишет П. Лафарг в брошюре "Воспоминания о Марксе", - что наука только тогда достигает совершенства, когда ей удастся пользоваться математикой".

Экономика, в широком понимании этой категории, по сравнению с другими науками, в большей степени нуждается в совершенствовании, ибо она создает реальную базу, которая необходима для дальнейшего развития всех сфер деятельности человека.

Дело еще и в том, что подавляющее большинство реальных производственных экономических задач имеют множество решений, ибо достижение цели может рассматриваться как функция многих переменных. Так, например, производственная деятельность по выпуску продукции схематически может быть описана с помощью функции:

$$Z = f(T, M, R, D),$$

где  $Z$  - объем производства,  $T$  - средства труда,  $M$  - предмет труда,  $R$  - рабочая сила,  $D$  - денежные средства.

Множество возможных количественных сочетаний факторов  $T, M, R, D$  обеспечивает многовариантность достижения цели производства. Экономико-математические методы (ЭММ) и современная вычислительная техника позволяют отыскивать *оптимальные решения* из всей совокупности решений. *Оптимальным считается такое решение,*

которое обеспечивает достижение цели в рассматриваемых условиях с максимальным эффектом.

Оптимальные планы отраслей, объединений и предприятий должны обеспечивать: во-первых, - балансовую увязку программы по выпуску продукции, вытекающей из потребности народного хозяйства и внешнего рынка с производственными ресурсами, которыми располагают отдельные звенья народного хозяйства;

во-вторых, - максимальную эффективность использования производственных ресурсов, которые всегда являются ограниченными.

Кроме того, и что также очень важно, - внося изменения и дополнения в экономическое (содержательное) условие проблемы, экономико-математические методы и ПЭВМ позволяют исследовать многовариантные направления решения проблемы, так сказать, проводить экономический эксперимент.

При этом объективные решения отыскиваются посредством математических методов количественного анализа вариантов, который позволяет исключить субъективные, волевые факторы, тем самым ставит планирование и управление на научную основу.

Идея необходимости оптимизации решения экономических задач волновала умы ученых давно. Применение математических методов в экономических исследованиях, если под этим понимать не простую числовую арифметическую иллюстрацию, а математические исследования конкретных экономических проблем с целью установления экономических зависимостей и закономерностей, относится к концу XIX и началу XX столетия.

Классическое применение математических методов для формализованного описания дано К. Марксом в его знаменитой модели расширенного воспроизводства. Эта модель была, по-видимому, первой макроэкономической моделью, позволяющей вскрыть целый ряд важных особенностей производства.

Основатель математической школы в буржуазной политэкономии, *Л.Вальрас* в 1874 г. создал общую статистическую экономико-математическую модель хозяйства в целом, известную под названием системы общего экономического равновесия. Рациональные элементы модели Вальраса заключаются в постановке *экстремальной задачи* для хозяйства в целом (достижение максимального эффекта при минимальных затратах) и подходе к ценам как составному элементу нахождения общего оптимума.

Далее, в 1897 г., известный буржуазный экономист-математик *Парето* на основании статистического материала установил закономерность распределения доходов населения в капиталистических странах в форме гиперболы ("*кривая Парето*").

Затем в 1904 г. русским экономистом-математиком *В.К.Дмитриевым* были созданы *уравнения связи затрат и выпуска продукции*, которые в дальнейшем (в 30-х годах) были использованы американским экономистом *В.Леонтьевым* для построения балансов "*затраты - выпуск*".

Указанные работы можно считать первыми построениями экономико-математических моделей (Э.-М.М). Они наметили два направления экономико-математического анализа статистических данных: применение математических методов, во-первых, для описания экономических явлений, во-вторых, для установления зависимости между ними. Оба типа исследований относятся к области математической статистики; они и получили дальнейшее развитие в последующие два десятилетия.

В 1939 г. в издании Ленинградского Государственного университета появилась небольшая книга известного математика профессора того же университета *Л.В.Канторовича* "Математические методы организации и планирования

производством"<sup>1</sup>.

Этой книге, которая положила начало новой дисциплине прикладной математики - *линейному программированию*, суждено было сыграть огромную роль в применении математических методов к решению самых разнообразных задач в различных областях знаний, прежде всего в экономических исследованиях и в оптимальном планировании народного хозяйства.

Примечателен тот факт, что новая дисциплина возникла в результате больших раздумий и исследований над решением конкретной производственной задачи, с которой обратились к *Л.В.Канторовичу* в 30-е годы работники лаборатории Ленинградского фанерного треста. Требовалось найти наивыгоднейшее распределение работы восьми лущильных станков по пяти различным номенклатурам материалов при заданной величине производительности каждого станка по каждой номенклатуре материала при условии, что материал номенклатуры I составляет 10%, II-12%, III- 28%, IV - 36%, и V - 14% - распределение, дающее наибольшую продукцию в заданном ассортименте.

Таким образом, экономическая задача сформулирована как экстремальная на отыскание максимума (max.) при определенных условиях.

Основное достижение *Л.В.Канторовича* состоит в том, что он *открыл во всякой задаче*, в которой ищется экстремум (максимум или минимум величины) линейной функции, удовлетворяющей ряду ограничений, существование чрезвычайно важных множителей, названных им в рассматриваемой работе *разрешающими множителями*.

Только примерно через 10 лет метод линейного программирования в другой форме был переоткрыт в США. Первые статьи по линейному программированию были опубликованы в США лишь в 1949 г.

В них американский ученый *Дж.Б.Данциг* выступил тогда с изложением своего *симплексного метода*<sup>2</sup>.

Симплексный метод *Дж.Б.Данцига* имеет очень много общего с методом последовательного улучшения плана, применявшимся в дальнейшем (после 1939 г.) *Л.В.Канторовичем* и его сотрудниками для решения ряда практических задач и представляющим конкретную реализацию метода разрешающих множителей. Однако есть и отличия их в некоторых существенных частях (на них мы не останавливаемся).

Еще до *Л.В.Канторовича* в нашей стране были опубликованы работы, которые можно считать зародышами линейного программирования. Так, в 1930 г. советские экономисты-транспортники (*А.Н.Толстой и др.*) для построения оптимального плана перевозок составили транспортную задачу в сетевой форме и решили ее без математического обоснования, применяя метод последовательного улучшения плана<sup>3</sup>.

Расцвет работ по линейному программированию падает на 50-е годы XX столетия. В эти годы детально были разработаны основные методы решения, создано много разных алгоритмов, началось практическое применение новых методов, появилась обширная литература.

В 1949 г. *Л.В.Канторовичем* и *М.К.Гавуриным* в совместной статье был изложен *метод потенциалов* (в сетевой постановке) для решения транспортных задач.

Несколько позднее (в 1951г.) *Дж.Б.Данцигом* был разработан аналогичный метод, получивший название *модифицированного распределительного метода*.

<sup>1</sup>Эта работа с незначительными изменениями под тем же названием перепечатана в 1959г.

<sup>2</sup>Первая статья *Дж.Б.Данцига* (в соавторстве с *Маршалом Вудом*) дает общую постановку вопроса; вторая, собственно *Данцига*, излагает его математическую модель.

<sup>3</sup>Это название является общим и относится по существу к целой группе близких друг другу методов, которая включает как частные виды симплексный метод *Дж.Б.Данцига*, метод разрешающих слагаемых *А.Л.Лурье* и др.

В 1958 г. советский ученый *А.Л.Лурье* разработал *метод разрешающих слагаемых* для решения транспортных задач.

В 50-е годы, кроме различных методов и их модификаций для решения задач линейного программирования, появляется целый ряд работ, в которых излагаются методы *нелинейного и динамического программирования*. Так, в 1951 г. американские ученые *Х.Кун* и *А.Таккер* опубликовали работу по решению нелинейных задач. В 1954 г. *А.Чарнс* и *Лемке* разработали и опубликовали метод решения задач с сепарабельной выпуклой целевой функцией и линейными ограничениями. В этом же году появляются работы по методам *целочисленного* линейного программирования. К ним относится и метод *Гомори*, опубликованный в США в 1958 г.

Также в 50-е годы американским математиком *Р.Беллманом* разрабатываются методы *динамического программирования*, появляется ряд работ, посвященных *квадратичному программированию*, например работы *Е.Баранкина*, *Р.Дорфмана*, *Е.Била* и др.

Кроме основателя линейного программирования *Л.В.Канторовича*, из советских ученых значительный вклад в развитие и практическое применение экономико-математических методов внесли ученые СО АН СССР, сотрудники научно-исследовательского экономико-математического института АН СССР, ученые других научно-исследовательских институтов, лабораторий, вычислительных центров и вузов.

Разработанный учеными за последние пятьдесят лет совершенный аппарат экономико-математических методов и наличие современных ПЭВМ создают практически неограниченные возможности научного решения экономических проблем и задач.

Сравнительно небольшой период времени использования экономико-математических методов и электронно-вычислительных машин в народном хозяйстве, в том числе и в отраслях лесной и деревоперерабатывающей промышленности, показал большую экономическую эффективность.

Однако преимущества оптимизации экономических решений следует рассматривать значительно шире, чем увеличение прибыли или, скажем, снижение затрат на производство. Внедрение экономико-математических методов и ПЭВМ - основы автоматизированной системы управления (АСУ) - создает реальную научную базу совершенствования планирования, тем самым позволяет упорядочить систему управления производством, повысить обоснованность и оперативность при определении производственных заданий а также корректировки их.

Экономико-математические методы в дальнейшем будут распространяться на решение все более широкого круга проблем и задач, однако не смогут охватить всю совокупность экономических, технологических, социальных и других проблем. Так как далеко не все проблемы и задачи могут быть математизированы и являться объектом приложения экономико-математических методов. Целый ряд проблем оказываются частично математизируемыми или вовсе нематематизируемыми и должны решаться иными методами.

Классификация проблем и методов их решения осуществляется на основе понятия *структуризации*.

Структура проблемы определяется пятью основными логическими элементами:

- цель или ряд целей, достижение которых будет свидетельствовать, что проблема решена;
- направления действий, с помощью которых может быть достигнута цель;
- затраты ресурсов, потребные по каждому направлению;
- модель или модели, в которых отражаются связи между целями, направлениями и затратами;

- критерий или критерии, с помощью которых сопоставляются цели и затраты и отыскивается предпочтительное решение.

В зависимости от того, насколько ясно и определенно просматриваются эти элементы, все проблемы можно подразделить на четыре типа:

- стандартные,
- хорошо структуризованные,
- слабоструктуризованные,
- неструктуризованные.

В соответствии с этим могут быть использованы четыре класса методов решения проблем и задач:

- стандартные процедуры и правила расчета решений;
- экономико-математические методы поиска оптимальных решений;
- системный анализ для построения рациональных хозяйственных альтернатив;
- экспертно-эвристические методы принятия хозяйственных решений.

*Стандартные проблемы* отличаются полной ясностью и однозначностью не только целей, направлений действий и затрат, но и самих решений; решаются на основе простейших вычислительных процедур по четко определенной методике. В производственном планировании к ним можно отнести, например, расчет потребности в оборудовании, материалах исходя из производственной программы.

Хорошо структуризованные проблемы, по своему существу, многовариантны, в то же время все их элементы и связи настолько хорошо определены, что могут быть выражены количественно и экономико-математическими моделями. В условии и постановке таких проблем отсутствуют элементы неопределенности. В этом случае для нахождения оптимального решения используются методы оптимального программирования, или, как их часто называют в иностранной и некоторой нашей литературе, — методы исследования операций.

В планировании отраслей, объединений и предприятий имеет место большое множество хорошо структуризованных проблем, начиная от выбора оптимального плана развития и размещения производств отрасли или промышленного комплекса, определения производственной программы выпуска продукции и кончая выбором вариантов загрузки оборудования и поиском оптимальных технологических процессов.

*Слабоструктуризованные проблемы*, в большинстве своем, связаны с выработкой долгосрочных прогнозов и направлений действий. В условии и постановке таких проблем наряду с количественно изменяемыми элементами содержатся неизвестные и неизмеряемые компоненты — следствие неопределенности каких-то условий. Такие проблемы решают с помощью количественно-качественной методологии *системного анализа*, сочетающей математические расчеты с качественным анализом. К слабоструктуризованным проблемам можно отнести, например, проблемы создания новых производственных комплексов, определение стратегии технического перевооружения, совершенствование организационной структуры управления и другие.

*Неструктуризованные проблемы* отличаются значительной неопределенностью и неформализуемостью как самих целей деятельности, так и возможных направлений действий. При решении таких проблем главное значение имеют опыт, интуиция, квалификация и другие качества исследователя или руководителя, принимающего решение. К неструктуризованным проблемам можно отнести, например, проблему формирования долгосрочных и среднесрочных планов научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, построение планов социального развития и др. Методы решения этих и подобных им проблем состоят в использовании общих идей системного подхода, а также в правильной организации



экспертных опросов и квалифицированной обработке данных, полученных на их основе.

Таким образом объектом применения экономико-математических методов могут являться широкий круг многовариантных, по своему существу, хорошо структуризованных производственных проблем и задач на любом уровне управления производством.

На основе сочетания трех фундаментальных наук математики, экономики и кибернетики учеными разработан значительный арсенал экономико-математических методов, которые можно объединить под одним названием - *методы разработки оптимальных решений (или исследования операций)*, в то же время, которые по праву могут рассматриваться как самостоятельные науки:

- Теория управления запасами,
- Теория массового обслуживания,
- Теория игр,
- Теория статистических решений,
- Сетевые методы планирования и управления,
- Математическое программирование.

Математическое или оптимальное программирование включает в себя: линейное, нелинейное, целочисленное, динамическое, дискретное и выпуклое программирование.

## ЛАТИНСКИЙ И ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТЫ

### Латинский алфавит

(в скобках указаны английские названия букв)

А						
	<i>a</i>	а (эй)		<i>N</i>	<i>n</i>	эн (эн)
<i>B</i>	<i>b</i>	бе (би)		<i>O</i>	<i>o</i>	о (оу)
<i>C</i>	<i>c</i>	це (си)		<i>P</i>	<i>p</i>	пе (пи)
<i>D</i>	<i>d</i>	де (ди)		<i>Q</i>	<i>q</i>	ку (кью)
<i>E</i>	<i>e</i>	э (и)		<i>R</i>	<i>r</i>	эр (ар)
<i>F</i>	<i>f</i>	эф (эф)		<i>S</i>	<i>s</i>	эс (эс)
<i>G</i>	<i>g</i>	ге (джи)		<i>T</i>	<i>t</i>	те (ти)
<i>H</i>	<i>h</i>	га (эйч)		<i>U</i>	<i>u</i>	у (ю)
<i>I</i>	<i>i</i>	и (ай)		<i>V</i>	<i>v</i>	ве (ви)
<i>J</i>	<i>j</i>	йот (джей)		<i>W</i>	<i>w</i>	дубль-ве (даблью)
<i>K</i>	<i>k</i>	ка (кей)		<i>X</i>	<i>x</i>	икс (экс)
<i>L</i>	<i>l</i>	эль (эль)		<i>Y</i>	<i>y</i>	игрек (уай)
<i>M</i>	<i>m</i>	эм (эм)		<i>Z</i>	<i>z</i>	зет (дзет)

### Греческий алфавит

А						
	$\alpha$	альфа		<i>N</i>	$\nu$	ню
В	$\beta$	бета		$\Xi$	$\xi$	кси
Г	$\gamma$	гамма		$\omicron$	$\omicron$	омикрон
Д	$\delta$	дельта		$\Pi$	$\pi$	пи
Е	$\varepsilon$	эпсилон		$\rho$	$\rho$	ро
З	$\zeta$	дзета		$\Sigma$	$\sigma$	сигма
Н	$\eta$	эта		$\tau$	$\tau$	тау
Θ	$\theta$	тета		$\Upsilon$	$\upsilon$	ипсилон
Ι	$\iota$	иота		$\Phi$	$\phi$	фи
Κ	$\kappa$	каппа		$\chi$	$\chi$	хи
Λ	$\lambda$	ламбда		$\Psi$	$\psi$	пси
Μ	$\mu$	мю		$\Omega$	$\omega$	омега

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

### **Глава 1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

#### **1.1. Основы экономико-математического моделирования**

Решение экономических оптимизационных задач с помощью методов математического программирования базируется на последовательном выполнении ряда взаимосвязанных этапов:

- экономической (смысловой) постановки проблемы или задачи и подбора исходной информации,
- разработки математической модели и, при необходимости, последующего преобразования ее до типа разрешимых,
- нахождение оптимального решения посредством соответствующего метода математического программирования и компьютерной программы,
- оценки (математической и экономической) полученного решения,
- проведение экономического эксперимента посредством корректировки условия, модели и повтора решений,
- анализа расчетов и принятия решения для внедрения.

Первый этап является творческим, наиболее трудным и ответственным. Он складывается из экономической постановки проблемы или задачи и подбора достоверной исходной информации. Требуется квалифицированное знание объекта (отрасли, объединения или предприятия, организации и технологии производства и т.п.).

Здесь прежде необходимо сформулировать цель (или несколько целей при более сложных постановках) достижение которой будет свидетельствовать, что проблема решена. Затем, подобрать критерий оптимальности (греч. *kriterion* - мерило, оценка). Под *критерием оптимальности* понимается *экономический, технический или технико-экономический показатель, по которому судят об оптимальности решения*, находят наилучшее решение из возможных.

Выбор показателя критерия оптимальности зависит прежде всего от характера и цели решаемой задачи. Например, в задаче требуется определить программу выпуска продукции по ассортименту, которая обеспечивала бы максимальную рентабельность производства. Здесь за критерий оптимальности может быть принят показатель прибыли от реализации продукции. В иных постановках задач могут использоваться и другие показатели: цены, затраты на производство, съем продукции, транспортные расходы и др.

В более сложных постановках решаются многокритериальные задачи.

Затем должны быть сформулированы условия, от которых зависит искомое решение, т.е. факторы, влияющие на достижение цели, и их числовые значения, показывающие связь факторов и цели. Так, например, при определении ассортиментной программы прежде всего должны быть учтены наличные производственные ресурсы (сырья, материалов, машинного времени, трудовые, энергетические и денежные ресурсы и т.п.), нормы расходования их и другие ограничивающие условия.

Чтобы последующая разработка математической модели была успешной, необходимо выполнять три основных правила:

- учитывать главные факторы, от которых зависит искомое решение;
- пренебрегать второстепенными - не определяющими факторами;
- надо уметь отличать главные факторы от второстепенных.

В этом заключается искусство смысловой экономической постановки решаемой проблемы или задачи.

Исходя из экономической постановки задачи, разрабатывают ее математическую модель. Сущность математического моделирования заключается в следующем. Если в тех или иных условиях мы собираемся применить математические методы, то прежде всего эти условия следует описать в математических терминах. Даже простые явления в экономике, технике, промышленности и других областях становятся чрезвычайно громоздкими, когда они подвергаются строгому математическому описанию и анализу. Поэтому в первую очередь этот анализ должен заключаться в разложении явления (задачи) на простейшие элементы и затем в математическом описании элементов, и связей между ними.

В большинстве случаев моделирования задач первые математические выражения получаются в таком виде, который затрудняет, а иногда и совсем исключает применение того или иного математического метода для решения задачи. Поэтому необходимы квалифицированные знания для того, чтобы упростить полученные математические выражения (уравнения, неравенства, тождества и т.д.) и привести их к такому виду, при котором они не искажают основных характеристик явления и в то же время поддаются математическому исследованию и пригодны для решения методами математического программирования.

Процесс экономико-математического моделирования сам по себе является искусством, и здесь его мы можем лишь частично, бегло рассмотреть на примере некоторых типичных задач.

В дальнейшем мы еще множество раз будем его рассматривать на разных примерах экономических задач и проблем.

Следующие этапы полностью зависят от первых двух. В зависимости от характера полученной в окончательной форме математической модели выбирается метод решения; в зависимости от размеров задачи - программа и средства решения. Некоторые задачи на оптимум можно решать классическими методами математического анализа, однако большинство экономических экстремальных задач решаются специальными методами математического (линейного, целочисленного, нелинейного и динамического) программирования. Средства решения могут быть различные. Некоторые, незначительного размера, задачи можно решать вручную (в основном, для познания сущности алгоритма решения). Производственные задачи успешно решаются на персональных компьютерах с использованием типового программного обеспечения. Для решения специфических задач разрабатываются соответствующие программы решения.

Следующий этап заключается в математическом и экономико-логическом анализе полученного оптимального решения. Прежде устанавливается соответствие найденного решения условию задачи. Затем с помощью специальных приемов проводится контроль правильности решения —соответствия оптимальному варианту. И, наконец, посредством экономико-логического анализа устанавливается приемлемость и практическая возможность реализации найденного оптимального решения.

Однако при решении целого ряда реальных производственных проблем и задач целесообразно разнообразить решение посредством его повтора. Для этого вносятся некоторые коррективы в постановку задачи, в отношении к некоторым условиям, соответственно вносятся изменения в математическую модель, используются иные показатели критерия и другие соображения. Таким образом проводится экономико-математический эксперимент, позволяющий получить некоторые разновидности решения

одной и той же проблемы, из которых далее выбирается предпочтительный или компромиссный вариант для внедрения.

Далее рассмотрим экономико-математическую постановку основных задач математического программирования на некоторых простых экономических примерах.

## **1.2. Постановка стандартной задачи линейного программирования на максимум целевой функции**

Здесь по экономическому условию задачи необходимо составить математическую модель ее. Затем преобразовать модель с целью подготовки ее к решению. В математической модели, как указывалось выше, все условия задачи — факторы и их числовые значения — должны быть взаимно увязаны в определенных математических выражениях.

С этой целью прежде всего устанавливают неизвестные (переменные) задачи. Содержание неизвестных устанавливают по той части задачи, в которой оговаривается, что необходимо определить в результате решения. В математическом программировании неизвестные принято обозначать через  $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$ . Затем составляют уравнение целевой функции (линейной формы), которую в данном случае необходимо максимизировать, и систему ограничительных условий задачи. В целевой функции находят отражение показатели критерия оптимальности, в ограничительной системе — условия задачи.

При постановке стандартной задачи линейного программирования на максимум целевой функции ограничения будут представлены в виде алгебраических неравенств, которые следует далее превратить в уравнения путем введения в каждое неравенство по одной дополнительной (уравновешивающей или выравнивающей) переменной  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+i}, \dots, x_{n+m}$  (здесь  $m$  — число неравенств). Дополнительные переменные вводятся также и в уравнение целевой функции.

Рассмотрим экономико-математическую постановку задачи на типичном, хотя и несколько упрощенном примере ассортиментной задачи.

**Условие задачи.** В цехе установлено две группы (или типа) машин -  $A$  и  $B$ , с помощью которых производится продукция трех видов:  $P_1, P_2, P_3$ . Каждое из этих изделий подвергается некоторой последовательной обработке как на одной, так и на другой группах (типах) машин.

Известны нормы затрат машинного времени на обработку единицы (или 10, 100 ед., комплекта) продукции, а также фонд эффективного рабочего времени по каждой группе машин на определенный планируемый период. Эти данные приведены: в табл. 1.1.

Табл. 1.1

Типы (группы) машин	Нормы затрат машинного времени, $\tau$ , на единицу продукции			Фонд рабочего времени машин, $\tau$
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	
$A$	2	3	5	1500
$B$	1	4	2	1000

Кроме того, известно, что на производство этой продукции расходуются два вида материалов  $M_1$  и  $M_2$ , ресурсы которых на предприятии на планируемый период ограничены определенными объемами. Известны нормы расхода каждого материала на единицу (или 10, 100ед., комплект) каждого вида продукции. Известна также прибыль, получаемая от реализации единицы (и 10, 100ед., комплекта) продукции. Эти данные приведены в табл.1.2.

Табл. 1.2

Виды материалов	Нормы расхода материалов на единицу продукции			Располагаемые ресурсы материалов
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	
$M_1$	3	2	3	1800
$M_2$	4	2	5	2200
Прибыль, руб., от единицы продукции	3	4	6	-

В задаче требуется найти оптимальный план выпуска продукции (по ассортименту) из имеющихся материалов, который обеспечил бы получение максимальной суммарной прибыли от реализации продукции при условии, что потребности в материалах и машинном времени не превысят имеющихся ресурсов. Другими словами следует определить, какую продукцию необходимо выпускать и в каком количестве, чтобы получить максимальный доход от производства ее.

Если проанализировать исходные данные этого примера то можно прийти к выводу, что здесь нет очевидного наилучшего варианта искомой производственной программы по ассортименту продукции. Так, если прибыль на единицу продукции  $P_3$  в 2 раза выше прибыли на единицу продукции  $P_1$ , то в то же время и нормы расхода производственных ресурсов на выработку  $P_3$ , значительно выше, чем при выпуске  $P_1$ . Следовательно, одни и те же ресурсы позволяют выработать большее число продукции  $P_1$  по сравнению с  $P_3$  и т. д.

В более сложных производственных примерах тем более не может быть очевидного ответа на поставленный вопрос, ибо экономические задачи по своему характеру всегда многовариантны и, кроме того, они отличаются сложностью цифровой информации.

Оптимальный вариант плана при решении экономических задач может быть найден посредством использования специальных математических методов и при больших размерах задачи - современной вычислительной техники (этот же и подобные ему примеры легко решаются вручную).

Не вдаваясь в экономический анализ приведенных данных, составим математическую модель этой задачи.

В данном примере неизвестными являются: количество продукции  $P_1$ , которое обозначим через  $x_1$ , количество продукции  $P_2$  обозначим —  $x_2$  и количество продукции  $P_3$  —  $x_3$ .

Нас интересует нахождение таких значений переменных  $x_1, x_2, x_3$ , которые дали бы максимальную величину суммарной прибыли.

Прибыль в данном случае можно выразить как функцию от выпуска продукции разного вида

$$F = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3. \quad (1.1)$$

Здесь коэффициенты при переменных  $x_1, x_2, x_3$  обозначают размер прибыли на единицу продукции.

Поскольку в задаче ставится условие получения максимальной прибыли, следовательно, полученную *линейную функцию* (1.1), которую в дальнейшем будем называть *целевой функцией*, надо максимизировать.

Производство продукции должно быть запланировано таким образом, чтобы получить максимальную прибыль, но при этом необходимо учесть, что потребности в материалах и машинном времени не должны превышать имеющихся количеств. Для этого необходимо составить ограничительные условия задачи.

Рассмотрим прежде ограничения, налагаемые машинным временем.

Общие затраты машинного времени на выпуск продукции  $P_1, P_2, P_3$  в количествах  $x_1, x_2, x_3$  определяются как

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3$  — по машинам группы  $A$ ;

$x_1 + 4x_2 + 2x_3$  — по машинам группы  $B$ .

Здесь коэффициенты при переменных  $x_1, x_2, x_3$  обозначают затраты машинного времени на единицу (или комплект) каждого вида продукции.

В нашем примере общее время работы машин  $A$  не должно превышать 1500 ч, а машин  $B$  - 1000 ч. Математически это означает, что

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 1500, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 1000. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Далее рассмотрим ограничения, налагаемые материальными ресурсами.

Общие затраты материалов на выпуск продукции  $P_1, P_2, P_3$  в количествах  $x_1, x_2, x_3$  определяются как

$3x_1 + 2x_2 + 3x_3$  — по материалам  $M_1$ ;

$4x_1 + 2x_2 + 5x_3$  — по материалам  $M_2$ .

Здесь коэффициенты при переменных  $x_1, x_2, x_3$  обозначают затраты материалов на единицу (или комплект) каждого вида продукции.

Расходы материала первого вида  $M_1$  не должны превышать 1800 ед., а материала второго вида  $M_2$  - 2200 ед. Математически это означает, что

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 1800, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 2200. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Наконец, следует уяснить, что все переменные  $x_1, x_2, x_3$  должны быть неотрицательными, так как мы не можем производить отрицательное количество продукции, следовательно, в результате решения мы должны получить переменные, равные положительным числам или нулю, что можно записать следующим образом:

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0.$$

Итак, нами получена первоначальная модель задачи. Математически задачу можно сформулировать следующим образом. В решении систем линейных неравенств (1.2), (1.3) необходимо найти такие неотрицательные значения переменных  $x_j \geq 0$ , при которых целевая функция (1.1) примет максимальное значение

Далее заменим числовые значения коэффициентов при неизвестных  $x_j$  (количество их примем равным  $n$ ) буквенными и обозначим их в целевой функции  $F$  через  $c_j$ , в неравенствах исходных ограничений через  $a_{ij}$ , а величины ограничений (ресурсов) через  $b_i$ .

Тогда математическое условие задачи линейного программирования с ограничениями — неравенствами в общем виде может быть сформулировано следующим образом. Требуется найти наибольшее (максимальное) значение целевой функции:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \quad (1.4)$$

при условии, что переменные  $x_j$  удовлетворяют системе неравенств:

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n & \leq & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n & \leq & b_2, \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n & \leq & b_i, \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

$$x_j \geq 0 \text{ при } j = 1, 2, \dots, n$$

В настоящее время в специальной литературе наряду с расширенной формой записи (1.4), (1.5) принята краткая запись условий задачи.

Целевую функцию (1.4) кратко можно представить, как:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \max, \quad (1.6)$$

а ограничительные условия (1.5), как

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.7)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.8)$$

Если в ограничительных условиях содержатся только неравенства, то такая задача считается *стандартной* задачей линейного программирования (если же в условии наряду с неравенствами содержатся еще и равенства, такая задача считается задачей со смешанными условиями).

Поскольку любое неравенство может быть превращено в равенство (посредством введения дополнительной уравновешивающей неизвестной), то любая задача линейного программирования может быть приведена к эквивалентной — канонической задаче. Так, задаче (1.4), (1.5) соответствует следующая эквивалентная каноническая задача. Требуется найти максимальное значение целевой функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n + 0x_{n+1} + \dots + 0x_{n+m} \quad (1.9)$$

при условиях:



[illegible]

Теперь возвратимся к рассмотренному выше числовому примеру ассортиментной задачи.

В условии задачи ограничения (1.2), (1.3) представлены также в виде линейных неравенств. Преобразуем их в *эквивалентные* уравнения. Для этой цели в неравенства введем дополнительные (выравнивающие) переменные  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_6$  и  $x_7$ , тогда ограничения примут вид системы линейных уравнений:

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 & = & 1500, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 & = & 1000, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 & = & 1800, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_7 & = & 2200. \end{array} \right\} \quad (1.11)$$

Экономическое содержание дополнительных переменных в данном случае следующее:

$x_4$  — это не что иное, как неиспользуемое машинное время по машинам  $A$ ;

$x_5$  — неиспользуемое машинное время по машинам  $B$ ;

$x_6$  — неиспользуемая часть материала  $M_1$ ;

$x_7$  — неиспользуемая часть материала  $M_2$ .

Дополнительные переменные, так же как и основные, должны быть неотрицательными, т. е.

$$x_4 \geq 0; \quad x_5 \geq 0; \quad x_6 \geq 0, \quad x_7 \geq 0.$$

Целевая функция в условии задачи, приведенном к каноническому виду, также представится в расширенном виде:

$$F = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_6 + 0x_7 = \max \quad (1.12)$$

Система линейных уравнений (1.10), состоящая из 4 уравнений и 7 неизвестных, имеет бесчисленное множество решений. Нас же интересует лишь такое решение, которое давало бы максимальное значение целевой функции  $F$  (т. е. обеспечивало бы получение максимальной суммарной прибыли от реализации продукции). Поэтому задачу можно сформулировать следующим образом.

Необходимо найти такое неотрицательное решение (план) данной системы линейных уравнений (1.11), при котором целевая функция (1.12) достигнет наибольшего значения.

Полученная система линейных уравнений (1.11) эквивалентна системе линейных неравенств (1.2), (1.3), в том смысле, что неотрицательные переменные  $x_1, x_2, x_3$ , входящие в неотрицательное решение системы (1.11), являются решением системы неравенств (1.2), (1.3).

Таким образом, задача полностью сформулирована математически и тем самым подготовлена к решению.

Решение такой задачи стало возможным благодаря созданию новой математической дисциплины, получившей название *линейного программирования*.

Используя один из методов решения задач линейного программирования — метод последовательного улучшения плана (симплексный метод), который рассматривается в гл. III, сравнительно быстро ручным способом находим, что:

$$\begin{aligned} x_1=407, \quad x_2=114, \quad x_3=68, \quad x_4=0, \quad x_5=0 \\ x_6=144, \quad x_7=0 \end{aligned}$$

- оптимальное решение.

Это значит, что оптимальная производственная программа, обеспечивающая получение максимальной суммарной прибыли, равной 2091, будет при выпуске продукции  $P_1$  в количестве 407 единиц,  $P_2$  в количестве 114 единиц и  $P_3$  — 69 единиц. Ресурсы машинного времени используются полностью, так как недоиспользованное машинное время как по машинам  $A$ , так и по машинам  $B$  равно нулю ( $x_4=0, x_5=0$ ). Излишки материала  $M_1$  составляют 144 единицы; материал  $M_2$  используется полностью ( $x_7=0$ ).

Можно еще раз убедиться в том, что оптимальный вариант плана не был очевиден из логического анализа экономического условия задачи.

В дальнейшем во второй части книги мы рассмотрим подобные задачи по определению программ выпуска продукции по ассортименту в более широком аспекте и применительно к лесопромышленному комплексу.

### **1.3. Постановка стандартной задачи линейного программирования на минимум целевой функции**

В рассмотренном выше примере экономико-математической постановки задачи ограничительные условия были представлены линейными неравенствами (1.2), (1.3), (1.6) со знаком  $\leq$ . В целом ряде иных задач ограничительные условия также могут быть представлены системой неравенств, но противоположного смысла, т. е. со знаком  $\geq$ . Целевая функция  $F$  при этом минимизируется. Такие задачи считаются стандартными задачами линейного программирования на минимум целевой функции.

Рассмотрим экономико-математическую постановку такой задачи на примере раскройной задачи.

Эта задача имеет большое практическое значение, так как на лесоперерабатывающих предприятиях (особенно на мебельных) производится в больших количествах раскрой древесностружечных и древесноволокнистых плит (ДСП и ДВП), фанеры, пиломатериалов, текстурной бумаги и других материалов (листов железа, прутков, труб) на детали и заготовки; на целлюлозно-бумажных предприятиях — раскрой бумажного полотна на листы и малые рулоны и т. д.

На лесоперерабатывающих предприятиях отходы при раскросе сырья и материалов в настоящее время составляют еще немалую величину. Для повышения экономической эффективности производства проблема сокращения отходов имеет большое значение.

Математические методы позволяют оптимизировать раскрой, тем самым максимально сократить отходы раскраиваемых сырья и материалов.

Сформулируем условие раскройной задачи прежде на частном, небольших размеров, примере с тем, чтобы он был «удобен» для последующих расчетов. В дальнейшем (в другой части книги) рассмотрим раскройную задачу в общей форме и более широком производственном аспекте.

**Условие задачи.** Положим, что на мебельном комбинате производится раскрой ДСП на заготовки и детали для мебели. Известно, что из партии ДСП необходимо нарезать четыре вида ( $A, B, C, D$ ) различных по размерам заготовок и деталей. Древесностружечная плита стандартных размеров может быть раскроена пятью способами (вариантами). По каждому возможному варианту раскроя составляется соответствующая карта раскроя. Из карт раскроя известен выход заготовок (в штуках) разных размеров, а также площадь отходов при раскрое одной плиты по тому или иному варианту.

В задании на раскрой указано общее количество заготовок каждого вида, которые необходимо нарезать из партии плит, поступивших в раскрой. Все эти данные приведены в табл. 1.3.

Табл. 1.3

Виды (типо размеры) заготовок и деталей	Задание на раскрой по выходу заготовок, шт.	Выход заготовок, шт., по видам, при раскрое одной плиты по вариантам				
		1	2	3	4	5
$A$	500	0	0	1	1	0
$B$	1000	2	1	2	1	0
$C$	200	3	0	0	0	1
$D$	400	0	1	0	2	1
Площадь отходов, м <sup>2</sup>		0,5	0,6	0,4	0,2	0,3

В задаче требуется найти оптимальный план раскроя ДСП, обеспечивающий выход планового числа заготовок при минимальных суммарных отходах от раскроя всех плит. Иными словами, в задаче необходимо определить, сколько ДСП следует раскроить по тому или иному варианту раскроя, чтобы нарезать требуемое число заготовок и при этом отходы были бы минимальными.

Из логического анализа исходных данных даже этого простого примера не вытекает очевидного наилучшего решения задачи. Тем более не может быть очевидного оптимального решения производственных задач, в которых число возможных вариантов раскроя измеряется десятками, а в некоторых задачах доходит до 100.

Оптимальное решение может быть найдено лишь посредством точных методов математического программирования. Для этого прежде всего необходимо задачу сформулировать математически.

Поскольку в задаче необходимо определить число плит, подлежащих раскрою по тому или иному варианту, через  $x_1$  обозначим количество (штук) плит, раскраиваемых по 1-му варианту,  $x_2$  — ответственно по 2-му,  $x_3$  — по 3-му,  $x_4$  — по 4-му и  $x_5$  — число плит, раскраиваемых по 5-му варианту раскроя.

Нас интересуют такие значения неизвестных  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , которые обеспечили бы минимальные суммарные отходы при раскрое всей партии ДСП.

Общие отходы в данном случае можно представить как функцию от раскроя по вариантам всей партии ДСП.

$$F = 0,5x_1 + 0,6x_2 + 0,4x_3 + 0,2x_4 + 0,3x_5 = \min. \quad (1.13)$$

Здесь коэффициенты при переменных  $x_j$  характеризуют величину отходов (площадь в  $m^2$ ) при раскрое одной плиты по тому или иному варианту.

Кроме того, раскрой плит должен быть организован таким образом, чтобы в результате его получить необходимое число заготовок по видам. Общий выход заготовок от раскроя всей партии ДСП будет равен:

$$\begin{array}{ll} x_3 + x_4 & \text{- заготовок вида } A, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & \text{- заготовок вида } B, \\ 3x_1 & + x_5 \text{ - заготовок вида } C, \\ x_2 & + 2x_4 + x_5 \text{ - заготовок вида } D. \end{array}$$

Здесь коэффициенты при переменных обозначают выход заготовок (штук) определенного вида при раскрое одной плиты по тому или иному варианту.

В условии задачи (табл. 1.3) необходимое количество заготовок по видам установлено. Поэтому общий выход их от раскроя всех ДСП должен быть не менее заданного. Математически это означает, что

$$\left. \begin{array}{llll} x_3 + & x_4 & & \geq 500, \\ 2x_1 + & x_2 + 2x_3 + & x_4 & \geq 1000, \\ 3x_1 & & & + x_5 \geq 200, \\ & x_2 & + 2x_4 & + x_5 \geq 400. \end{array} \right\} \quad (1.14)$$

В результате мы получили ограничительные условия задачи, налагаемые общим выходом заготовок, в виде системы линейных неравенств (1.14) со знаком  $\geq$ . Таким образом, нами составлена первоначальная модель заданной раскройной задачи.

Математически задачу можно сформулировать следующим образом. *В решении системы линейных неравенств (1.14) необходимо найти такие неотрицательные значения неизвестных  $x_j \geq 0$  (при  $j = 1, 2, \dots, 5$ ), при которых целевая функция (1.13) будет равна минимальной величине.*

Далее сформулируем условие этой задачи в общем виде. Для этого числовые значения коэффициентов при переменных  $x_j$  (примем  $j = 1, 2, \dots, n$ ) заменим буквенными. В целевой функции  $F$  обозначим их через  $c_j$ , в линейных неравенствах исходных ограничений через  $a_{ij}$ , а величины самих ограничений через  $P_t$  (примем  $t = 1, 2, \dots, r$ ). При этом экономическую сущность этих показателей в данном случае оставим без изменения, т. е.:

под  $c_j$ , - понимаются отходы при раскрое одной плиты по  $j$ -му варианту;

$a_{ij}$  - выход заготовок (шт.)  $t$ -го типо-размера при раскрое одной плиты по  $j$ -му варианту;

$P_t$  - количество заготовок  $t$ -го типо-размера, не менее которого необходимо получить в результате раскроя всех ДСП.

Тогда математическая модель задачи линейного программирования с ограничениями-неравенствами ( $\geq$ ) в общем виде может быть записана следующим образом.

Требуется найти неотрицательные значения неизвестных  $x_j$  минимизирующие целевую функцию

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \min \quad (1.15)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq P_t, \quad (t = 1, 2, \dots, \tau) \quad (1.16)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.17)$$

Известно, что уравнения наиболее удобны для последующих математических операций. Поэтому неравенства следует превратить в уравнения. С этой целью в каждое неравенство вводится по одной дополнительной (уравновешивающей) переменной  $x_{n+t}$ . В отличие от предыдущего примера (1.2) — (1.7), ограничительные условия задачи (1.14), (1.16) представлены линейными неравенствами со знаком  $\geq$ , поэтому уравновешивающие переменные вводятся в левую часть этих неравенств с коэффициентом -1. В уравнение целевой функции в данном случае дополнительные переменные вводятся с нулевыми коэффициентами.

Тогда задаче (1.15), (1.16) будет соответствовать следующая эквивалентная каноническая задача.

Необходимо минимизировать целевую функцию

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j - \sum_{t=1}^{\tau} 0 x_{n+t} \quad (1.18)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - 1 x_{n+t} = P_t, \quad t = 1, 2, \dots, \tau \quad (1.19)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.20)$$

$$x_{n+t} \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, \tau \quad (1.21)$$

Ограничительные условия заданной раскройной задачи (1.14) представлены также в виде линейных неравенств ( $\geq$ ). Преобразуем и их в эквивалентные уравнения.

$$\left. \begin{aligned} x_3 + x_4 - x_6 &= 500, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_7 &= 1000, \\ 3x_1 + x_5 - x_8 &= 200, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 - x_9 &= 400. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

В этих линейных уравнениях (1.22) дополнительные переменные характеризуют:  $x_6$ —выход заготовок  $A$  сверх планового задания;  $x_7$ —сверхплановый выход заготовок  $B$ ;  $x_8$ —соответственно —  $C$ ,  $x_9$  — выход заготовок  $D$  сверх задания.

Целевая функция эквивалентной экономической задачи в расширенном виде будет

$$F = 0,5x_1 + 0,6x_2 + 0,4x_3 + 0,2x_4 + 0,3x_5 - 0x_6 - 0x_7 - 0x_8 - 0x_9 = \min. \quad (1.23)$$

Эта задача, представленная системой линейных уравнений (1.22), состоящей из четырех уравнений с девятью неизвестными, имеет бесчисленное множество решений. Среди бесчисленного множества решений необходимо найти такое, которое давало бы минимальное значение целевой функции (1.23), характеризующей суммарные отходы при раскрое ДСП.

Система линейных уравнений (1.22) эквивалентна системе линейных неравенств (1.14), так как неотрицательные значения переменных  $x_1, \dots, x_5$ , полученные в решении системы линейных уравнений (1.22), являются также решением системы линейных неравенств (1.14).

Экономико-математическая постановка стандартной задачи линейного программирования на минимум целевой функции на примере раскройной задачи рассмотрена и в результате разработана ее математическая модель. Тем самым задача подготовлена к решению, которое рассмотрено в гл. III. На этом можно было бы закончить рассмотрение вопроса. Однако уже здесь не безынтересно привести результат решения этой задачи – ее оптимальный план. И, кроме того, следует заметить (предупредить читателя), что проблема математического моделирования раскройной задачи на этом не исчерпана полностью и мы к ней еще возвратимся во второй части книги. Это будет видно из анализа результатов решения задачи.

Посредством одного из алгоритмов метода последовательного улучшения плана нами найдено оптимальное решение задачи (1.13, 14):

$$x_1 = \frac{200}{3}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = \frac{1000}{3}; \quad x_4 = 200; \quad x_5 = 0; \quad x_6 = \frac{100}{3}; \quad x_7 = 0; \quad x_8 = 0;$$

$$x_9 = 0; \quad F = \frac{620}{3} = \min.$$

Это означает, что если мы раскроим (разрежем) 67 плит по первому варианту, 333 плиты по третьему и 200 плит по четвертому варианту раскроя, то будет полностью обеспечен плановый выход заготовок ( $A$  — 500 шт.,  $B$  — 1000,  $C$  — 200 и  $D$  — 400 шт.) с минимальными суммарными отходами, равными  $207 \text{ м}^2$ .

В оптимальном решении уравнивающая переменная  $x_6$ , равная  $33\left(\frac{100}{3}\right)$ , характеризует выход заготовок  $A$  сверх задания (сверх 500). В данной задаче в оптимальном решении лишь одна уравнивающая имеет значение больше нуля, и получилась она по величине сравнительно небольшой (по сравнению с плановой — 500).

В иных случаях в решении задач могут получиться нежелательные большие значения уравнивающих переменных. Чтоб этого избежать, необходимо величину этих переменных ограничить сверху. Этот и некоторые другие вопросы методологии оптимизации раскроя материалов будут рассмотрены особо.

#### **1.4. Экономическое содержание и математическая постановка транспортной задачи**

В системе расширенного воспроизводства транспорту принадлежит важное место. Перевозки грузов выполняются внутри производственных предприятий, между предприятиями, а также между предприятиями и сферой потребления. Транспортировка грузов внутри предприятий — составная часть непосредственного процесса. Транспортировка грузов между предприятиями и из предприятий в сферу потребления осуществляется специальными транспортными организациями, которые образуют в своей совокупности особую отрасль материального производства — грузовой транспорт.

В производстве общественного продукта и национального дохода транспорту, как отрасли материального производства, принадлежит в России большая роль, чем в любой другой стране. Это обусловлено тем, что наша страна занимает обширную территорию и обладает развитым народным хозяйством с высоким уровнем территориальной специализации и кооперирования.

Доля транспорта в общем объеме производственных фондов России в настоящее время составляет около 20%. Непосредственно в транспортных отраслях занято более 10% рабочих и служащих. Если же учесть труд, связанный с выполнением транспортных функций в других отраслях народного хозяйства, а также затраты труда в отраслях, непосредственно обслуживающих транспорт эта цифра возрастает вдвое. Можно считать, что на пространственное перемещение грузов как в специально транспортной отрасли, так и в других отраслях народного хозяйства России затрачивается примерно одна пятая совокупного общественного труда.

В планировании лесоснабжения важнейшим звеном является организация доставки лесоматериалов от предприятий-поставщиков на предприятия-потребители, а также со складов и площадок в производственные цехи и т. п. Транспортные расходы занимают значительный удельный вес в структуре затрат. Их доля тем более увеличивается, если в организации ставок возникают нерациональные перевозки. Исходя из этого становится очевидным значение и широкая область применения методов оптимального решения транспортных задач.

Читатель уже привык к буквенному выражению числовых значений и в той или иной мере овладел искусством постановки задач, поэтому здесь нами принята наиболее строгая форма постановки транспортной задачи.

Итак, приступим к постановке транспортной задачи в общем виде.

**Условие задачи.** Допустим в пунктах  $A_1, A_2, \dots, A_m$  производится некоторая однородная продукция (сырье, материалы и т. п. В дальнейшем будем именовать — продукция). Таким образом, имеются  $m$  поставщиков  $A_i$ . Объем производства в пункте  $A_i$ , составляет  $a_i$  единиц. Следовательно, величину  $a_i$  можно назвать

*мощностью поставщика, а  $\sum_{i=1}^m a_i$  — суммарной мощностью всех  $m$  поставщиков.*

Предположим, что указанная продукция потребляется в пунктах  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , причем объем потребления в пункте  $B_j$ , составляет  $b_j$  единиц продукции. В дальнейшем величину  $b_j$  будем называть *емкостью* (или *спросом*) *потребителя*. Общий объем

потребления (суммарная емкость)  $n$  потребителей составляет  $\sum_{j=1}^n b_j$ .

Предполагается, что:

- 1) общий объем производства совпадает с общим объемом потребления<sup>1</sup>, т. е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j; \quad (1.24)$$

- 2) от каждого поставщика возможна перевозка продукции к любому потребителю<sup>2</sup>;

---

<sup>1</sup>Несколько позже будет рассмотрена задача, в которой это условие не выполняется, т. е. объем производства не совпадает с объемом потребления:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j \text{ и } \sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j.$$

<sup>2</sup>Это условие в ряде случаев может быть нарушено. Однако эти особенности нами будут рассмотрены особо, в другой части книги.

3) стоимость перевозки единицы продукции от поставщика  $A_i$  к потребителю  $B_j$  известна и составляет  $c_{ij}$  денежных единиц.

Условия задачи могут быть записаны в виде табл. 1.4. В данном случае мы имеем матрицу стоимости перевозок. Сокращенно матрицу можно записать:

$$C=(c_{ij}). \quad (1.25)$$

В задаче требуется разработать оптимальный план перевозок продукции, обеспечивающий с наименьшими транспортными затратами потребности всех потребителей при условии, что предложения и спрос сбалансированы, т. е. выдержано условие (1.24).

Если объем перевозок из пункта  $A_i$  в пункт  $B_j$  обозначить через  $x_{ij}$ , то план перевозок может быть записан также в виде табл. 1.4.

Таким образом, мы получили матрицу из чисел  $x$ , которую можно назвать матрицей перевозок. Сокращенно матрицу перевозок можно записать:

$$X=(x_{ij}) \quad (1.26)$$

Матрицу стоимости перевозок, которая дана в условии задачи, и искомую матрицу перевозок также можно представить а одной табл.1.4. В этой таблице стоимости перевозок записываются в верхнем левом углу каждой клетки.

Табл. 1.4

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос					
		$B_1$	$B_2$	...	$B_j$	...	$B_n$
		$b_1$	$b_2$	...	$b_j$	...	$b_n$
		$C=(c_{ij})$			$X=(x_{ij})$		
$A_1$	$a_1$	$c_{11}$ $x_{11}$	$c_{12}$ $x_{12}$	...	$c_{1j}$ $x_{1j}$	...	$c_{1n}$ $x_{1n}$
$A_2$	$a_2$	$c_{21}$ $x_{21}$	$c_{22}$ $x_{22}$	...	$c_{2j}$ $x_{2j}$	...	$c_{2n}$ $x_{2n}$
.	.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	.	...	.	...	.
$A_i$	$a_i$	$c_{i1}$ $x_{i1}$	$c_{i2}$ $x_{i2}$	...	$c_{ij}$ $x_{ij}$	...	$c_{in}$ $x_{in}$
.	.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	.	...	.	...	.
$A_m$	$a_m$	$c_{m1}$ $x_{m1}$	$c_{m2}$ $x_{m2}$	...	$c_{mj}$ $x_{mj}$	...	$c_{mn}$ $x_{mn}$



Исходя из условия задачи, под оптимальным следует понимать такой план перевозок, который обеспечивает поставку всей продукции с минимальными суммарными расходами.

Суммарные затраты на поставку продукции можно выразить в виде уравнения целевой функции, которую надо минимизировать:

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{ij}x_{ij} + \dots + c_{mn}x_{mn} = \min. \quad (1.27)$$

Если далее все  $x$  сложить по строкам (см.табл.1.4), то сумма их должна быть равна мощности поставщиков -  $a_i$ :

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1j} + \dots + x_{1n} &= a_1, \\ \dots &\dots \\ x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{in} &= a_i, \\ \dots &\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mj} + \dots + x_{mn} &= a_m. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Сумма переменных  $x$  по столбцам равняется емкости потребителей -  $b_j$ :

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{i1} + \dots + x_{m1} &= b_1, \\ \dots &\dots \\ x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{mj} &= b_j, \\ \dots &\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{in} + \dots + x_{mn} &= b_n. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Таким образом, в виде систем линейных уравнений (1.28), (1.29) мы получили ограничительные условия транспортной задачи, которым должны удовлетворять искомые переменные  $x_{ij}$ .

При этом все неизвестные должны быть *неотрицательными*, т.е.

$$x_{ij} \geq 0 \text{ при } i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n. \quad (1.30)$$

Математически задачу можно сформулировать следующим образом.

*В решении систем линейных уравнений (1.28), (1.29) необходимо найти такие неотрицательные значения неизвестных  $x_{ij}$ , при которых целевая функция (1.27) достигнет минимальной величины.*

Математическую модель транспортной задачи в общем виде можно представить в сокращенной записи следующим образом.

Необходимо найти неотрицательные значения неизвестных  $x_{ij}$ , минимизирующие целевую функцию

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}, \quad (1.31)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (i=1,2,\dots,m), \quad (1.32)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j=1,2,\dots,n), \quad (1.33)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n). \quad (1.34)$$

В условии (1.32) записано, что суммарный объем поставки продукции всем  $n$  потребителям от конкретного поставщика  $i$  должен быть равен количеству продукции, предназначенной к поставке от этого  $i$ -го поставщика, т.е. его мощности.

В системе уравнений (1.33) отражено условие полного удовлетворения спроса потребителей: суммарный объем поставки продукции от всех  $m$  поставщиков конкретному  $j$ -му потребителю должен быть равен емкости (спросу) этого потребителя.

В ограничительных условиях транспортной задачи (1.28), (1.29) содержится  $m+n$  уравнений с  $m \times n$  неизвестными, причем одно из уравнений является следствием остальных в силу условия

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Следовательно, в системе (1.28), (1.29) *линейно независимых уравнений будет  $m+n-1$*  (это называют *рангом системы -  $r$* ), и каждый опорный план (программа) должен содержать не более чем  $m+n-1$  положительных перевозок.

Если число положительных перевозок  $x_{ij}$  равно  $m+n-1$ , то такой опорный план (программа) оказывается *невыврожденным*. В случае, когда часть базисных компонент (перевозок) плана нули, то такой план является *вырожденным*.

Для каждого невырожденного опорного плана в матрице перевозок  $X=(x_{ij})$  должно быть  $m+n-1$  заполненных числами  $x_{ij}$  клеток. Остальные клетки остаются пустыми.

Заполненные в матрице перевозок клетки называются *базисными*, не заполненные - *свободными*.

Транспортные задачи могут решаться с помощью *симплексного* метода. Однако лучше всего их решать специально разработанными методами, которые менее громоздки и сравнительно просты. Наиболее распространенными методами решения транспортных задач являются: *распределительный метод*, *метод потенциалов*, *метод дифференциальных рент* и *венгерский метод*. Существуют и другие методы.

Основные методы решения транспортных и нетранспортных задач, приводимых к типу транспортных, будут рассмотрены на числовых примерах ниже в соответствующих главах книги.

## 1.5. Постановка задачи динамического программирования

Динамическое программирование представляет собой вычислительный метод решения некоторых типов задач нелинейного программирования, а также некоторых задач линейного программирования с требованием целочисленности аргументов. Основателем динамического программирования является американский математик Р.Беллман. Введенный им термин "*динамическое программирование*" возник в результате изучения задач, в которых были существенные изменения во времени. Однако этот метод может быть использован в задачах, где время вообще не фигурирует.

При применении метода динамического программирования весь оптимизируемый процесс естественно или искусственно подразделяется на ряд *этапов* или *шагов*.

Не существует единой схемы подхода к решению различных типов задач оптимизации методом динамического программирования. В каждом типе задачи осуществляется специфика подхода для ее решения. Однако общим для этого метода является следующее. Оптимизация целевой функции производится постепенно, шаг за шагом. На каждом шаге определяется *оптимальное управление*, т.е. совокупность переменных, при которых целевая функция на этом этапе имеет наибольшее (наименьшее) значение. В одних задачах, в которых оптимизируемый процесс естественно подразделен на ряд этапов, решением задачи является совокупность оптимальных управлений на всех этапах. В других задачах, в которых обычно оптимизируемый процесс подразделяется на

ряд шагов искусственно, решением задачи является оптимальное управление, найденное на последнем шаге.

Рассмотрим пример естественно многошагового процесса. Пусть планируется работа группы разнородных промышленных предприятий, входящих в объединение

$$П_1, П_2, \dots, П_n$$

на один хозяйственный год. Конечной задачей планирования является получение максимальной прибыли от реализации некоторого вида продукции  $P$ , производимой этими предприятиями. В начале периода имеется определенный запас  $x_0$  денежных ресурсов  $C$  (или других ресурсов), необходимых для изготовления продукции  $P$ . На каждом предприятии  $П_j$  известны производственные возможности использования денежных ресурсов  $C$  с учетом использования оборудования и других факторов.

Ставится вопрос: как нужно распределить денежные средства  $C$  (или другие ресурсы) между предприятиями по кварталам хозяйственного года, чтобы к концу года суммарный доход от всей системы предприятий был максимальным?

В нашем примере планируемая операция естественно подразделена на четыре шага, причем каждый шаг представляет собой один квартал хозяйственного года.

Под управлением  $V_i$  на  $i$ -ом шаге операции следует понимать распределение количества денежных средств  $C$

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij},$$

имеющихся к этому времени. Таким образом, управление на  $i$ -ом шаге состоит в том, что предприятию  $П_1$  выделяется  $x_{i1}$  финансов, предприятию  $П_2$  -  $x_{i2}$  финансов  $C$  и т.д.

$$V_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}),$$

$$V_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}),$$

$$V_3 = (x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3n}),$$

$$V_4 = (x_{41}, x_{42}, \dots, x_{4n}),$$

от которых зависит суммарный доход

$$W = W(V_1, V_2, V_3, V_4).$$

Задача состоит в том, чтобы так выбрать все эти четыре управления, т.е. так распределить денежные средства  $C$  между предприятиями в начале каждого квартала, чтобы величина  $W$ , зависящая от управлений  $V_i$ , приняла максимальное значение. Каждое управление  $V_i$  ( $i=1,2,3,4$ ), при котором получается максимум величины  $W$ , называется *оптимальным управлением* (стратегией) на соответствующем шаге операции.

Процесс динамического программирования при решении задач такого типа разворачивается в обратном по времени направлении. Раньше всего планируется последний шаг, в нашем примере - четвертый квартал. Затем оптимально планируется третий квартал с учетом оптимально спланированного четвертого квартала. За третьим кварталом оптимально планируется второй квартал с учетом оптимально спланированных третьего и четвертого кварталов. Наконец, оптимально планируется первый квартал с учетом оптимально спланированных последующих кварталов. Как выполняется такое планирование будет показано в дальнейшей, в специальной главе книги.