

Б. Банди

**ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО  
ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

# **Basic Linear Programming**

**Brian D Bunday,**  
**B.Sc., Ph.D., F.S.S., F.I.M.A.**

School of Mathematical Sciences, University of Bradford



Edward Arnold

Б. Банди

# **ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Перевод с английского О.В. Шихеевой

Под редакцией В.А. Волинского



**МОСКВА «РАДИО И СВЯЗЬ» 1989**

ББК 32.973  
Б23  
УДК 519.852 (420)

Редакция переводной литературы

**Банди Б.**

Б23 Основы линейного программирования: Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1989. - 176 с.: ил.

**ISBN 5-256-00186-8.**

В книге английского автора освещены основные положения и методы линейного программирования. Рассмотрены симплекс-метод и его реализация на ЭВМ, проблема вырожденности, анализ чувствительности и двойственный симплекс-метод, транспортная задача, задача о назначении, двойственность в линейном программировании и др. Алгоритмы решения различных задач линейного программирования реализованы на языке Бейсик, причем программы несложно перевести на такие языки, как Фортран или Паскаль.

Для инженерно-технических работников, связанных с применением линейного программирования.

Б 1602011000-042 141.89  
046 (01)-89

ББК 32.973

Производственное издание

БАНДИ БРАЙАН

## **ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Заведующая редакцией О. В. Толкачева  
Редактор М. Г. Коробочкина  
Художественный редактор А. С. Широков  
Обложка художника В. Н. Забайрова  
Технический редактор О. А. Гришкина  
Корректор Г. Г. Казакова

**ИБ № 1643**

---

Подписано в печать с оригинала-макета 11.01.89. Формат 60х88/16. Бумага  
Тип. № 2. Гарнитура "Пресс-роман". Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,78.  
Усл. кр.-отт. 11,52. Уч.-изд. л. 10,51. Тираж 50 000 экз. (1 завод: 1 - 25 000 экз.).  
Изд. №22183. Заказ № 6622. Цена 70 к.  
Издательство "Радио и связь". 101000 Москва, Почтамт, а/я 693

---

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО "Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова" Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054 Москва, Валовая, 28

©В D Bunday 1984

ISBN 5-256-00186-8 (рус.)  
ISBN 0-7131-3509-3 (англ.)

©Перевод на русский язык, предисловие  
и примечания редактора перевода,  
дополнительный список литературы.  
Издательство "Радио и связь", 1989

## Оглавление

Предисловие редактора перевода.....	6
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	6
ПРЕДИСЛОВИЕ .....	7
ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ИДЕИ .....	9
1.1. ВВЕДЕНИЕ .....	9
1.2. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХМЕРНЫХ ЗАДАЧ .....	12
1.3. СТАНДАРТНАЯ ФОРМА ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.....	14
1.4. ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ $n$ ПЕРЕМЕННЫХ .....	16
1.5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.....	17
1.6. УПРАЖНЕНИЯ .....	20
ГЛАВА 2. СИМПЛЕКС-МЕТОД .....	24
2.1. СИМПЛЕКС-МЕТОД ПРИ ЗАДАННОМ НАЧАЛЬНОМ ДОПУСТИМОМ БАЗИСНОМ РЕШЕНИИ.....	24
2.2. РЕАЛИЗАЦИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДА НА ЭВМ.....	31
2.3. ПОРОЖДЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО БАЗИСНОГО ДОПУСТИМОГО РЕШЕНИЯ .....	35
2.4. ПОЛНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА .....	40
2.5. ПРОБЛЕМЫ ВЫРОЖДЕНИЯ.....	46
2.6. УПРАЖНЕНИЯ .....	51
ГЛАВА 3 АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ.....	56
3.1. ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА И СИМПЛЕКС-МНОЖИТЕЛИ .....	56
3.2. ЧТО ПОЛУЧАЕТСЯ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЗАДАЧИ.....	59
3.3. ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД .....	63
3.4. УПРАЖНЕНИЯ .....	69
ГЛАВА 4 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА .....	74
4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ.....	74
4.2. АЛГОРИТМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ПЛАНА.....	78
4.3. ДИСБАЛАНС И ВЫРОЖДЕННОСТЬ В ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧЕ.....	80
4.4. ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ НА ЭВМ.....	83
4.5. УПРАЖНЕНИЯ .....	91
ГЛАВА 5 ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ .....	95
5.1. ВВЕДЕНИЕ .....	95
5.2. МЕТОД РЕШЕНИЯ МАКА .....	96
5.3. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА МАКА НА ЭВМ.....	99
5.4. УПРАЖНЕНИЯ .....	102
ГЛАВА 6 УЛУЧШЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД.....	106
6.1. УЛУЧШЕННЫЙ СИМПЛЕКС-АЛГОРИТМ .....	106
6.2. ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА.....	111
6.3. ЕЩЕ РАЗ О ВЫРОЖДЕННОСТИ .....	113
6.5. УПРАЖНЕНИЯ .....	120
ГЛАВА 7. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ .....	125
7.1. ПРЯМАЯ И ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧИ .....	125
7.2. ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ .....	128
7.3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ .....	133
7.4. УПРАЖНЕНИЯ .....	137
РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО ЧТЕНИЯ.....	139
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	139
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	139
ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ .....	141

## Предисловие редактора перевода

Линейное программирование как раздел исследования операций имеет почти сорокалетнюю историю. Внедрение вычислительной техники дало значительный толчок исследованиям в этой области математики. Был разработан ряд алгоритмов решения задач линейного программирования, а в последующие годы были созданы программы и пакеты программ преимущественно для больших ЭВМ. Основная масса литературы по линейному программированию в нашей стране выпущена в 60 - 70-е годы. Исследования в этой области (как теоретические, так и прикладные) продолжаются и в настоящее время. Однако книг по приложениям линейного программирования, учитывающих появление новых алгоритмических языков, а также микроЭВМ и персональных ЭВМ, практически нет. Предлагаемая читателям книга восполнит этот пробел.

Книга Б. Банди состоит из семи глав, в которых рассмотрены симплекс-метод и улучшенный симплекс-метод, решение транспортной задачи и задачи о назначениях. Кроме того, в ней обсуждаются вопросы устойчивости и двойственности. Книга написана в расчете на читателя, не знакомого с линейным программированием. Для ее понимания требуются только знание языка Бейсик и знакомство с теорией матриц.

Отличительной особенностью книги является ее прикладной характер. Автор не только подробно описывает математический аппарат решения задачи, но и предлагает строгий алгоритм решения, а затем приводит программу на языке Бейсик с описанием ее особенностей. Такая форма изложения удобна и для обучения, и для получения справочного материала. Все более широкое распространение персональных ЭВМ, для которых основным языком программирования является Бейсик, будет способствовать росту интереса к программам, приведенным в книге.

Большое количество примеров значительно упрощает усвоение материала. Приведенные в конце каждой главы упражнения дают возможность самостоятельно опробовать программы, приведенные в книге, и получить практические навыки решения задач линейного программирования. Результаты, полученные на разных ЭВМ, могут несколько отличаться от приведенных в книге из-за различий в разрядности машин и программном обеспечении.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдин Д. Б., Гольдштейн Е. Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. - М.: Наука, 1969. - 424 с.
2. Еремин И. И., Астафьев Н. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. - М.: Наука, 1976. - 191 с.
3. Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. А. Численные методы линейного программирования/ Под ред. Л. В. Канторовича. - М.: Наука, 1977. - 367 с.
4. Раскин Л. Г., Кириченко И. О. Многоиндексные задачи линейного программирования. Теория, методы, приложения. - М.: Радио и связь, 1982. - 239 с.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Вниманию читателя предлагается курс линейного программирования, который может служить основой вузовских и специальных курсов. Книга будет полезна и своевременна для студентов, изучающих и теоретическую, и прикладную математику, а также для слушателей курсов численных методов. Специалисты, повышающие квалификацию на курсах исследования операций, также оценят этот материал.

Математическая теория в предлагаемой книге рассматривается вполне корректно, хотя имеются и более строгие изложения. Недостаточная строгость изложения компенсируется обилием примеров. Основная задача книги - показать, каким образом теоретические идеи воплощаются в практические вычислительные процедуры, реализуемые на ЭВМ. Появление основных теоретических идей совпало по времени с появлением компьютеров, и это не случайно<sup>1</sup>. Без компьютеров невозможно использовать весь потенциал теории при решении практических задач.

Программы в книге написаны на языке Бейсик (предполагается, что читатель с ним знаком), широко распространенном на большинстве микрокомпьютеров. На многих больших ЭВМ реализованы пакеты программ, основанные на методах, обсуждаемых в настоящей книге. Однако большие ЭВМ могут быть труднодоступны, а пакеты прикладных программ часто применяются вслепую. Интерактивный режим работы микрокомпьютеров позволяет студентам лучше понять, как работают программы. Не надо думать, что эти программы нельзя улучшить. Автор был бы рад получить от читателей соображения по улучшению программ. Предлагаемые программы просты и практичны. При желании можно применить их на других ЭВМ - они легко могут быть переведены на такие языки, как Фортран или Паскаль.

Несколько замечаний о языке Бейсик и его применении в книге. Программы написаны с таким расчетом, чтобы они с минимальным количеством трудностей запускались на любом микрокомпьютере. В связи с этим в программах не предусмотрена графика высокого разрешения, не использованы цветовые и звуковые возможности.

В операторах присваивания команда LET опускается. На некоторых компьютерах эта команда обязательна и должна быть вставлена. Команда THEN включена в операторы IF ... THEN GOTO, хотя на некоторых компьютерах команды THEN или GOTO могут быть опущены. Не использовались конструкции IF ... THEN ... ELSE и REPEAT ... UNTIL ... , поскольку они применимы не на всех компьютерах. Предполагается, что нумерация массивов начинается с 0. Если нумерация массивов ЭВМ начинается с 1, необходимы некоторые изменения. В любом случае достаточно увеличить на 1 аргументы всех операторов DIM. Например, вместо DIM A (M) будет DIM A (M + 1), вместо B (K, L) - B (K + 1, L + 1) и т. д. Может быть, читатели найдут более элегантные изменения. Приводимые численные результаты получены на ЭВМ PET. На некоторых ЭВМ, работающих с числами другой точности, результаты могут не воспроизводиться идентично, однако различия должны возникать лишь в последних, несущественных знаках.

Автор выражает благодарность друзьям, коллегам и студентам, внесшим вклад в эту книгу. Многие задачи были решены студентами на экзаменах университета г. Брэдфорда. Автор признателен за разрешение их использовать. Особенно хотелось бы упомянуть доктора Р. И. Скратона, который помимо сделанных им улучшений в численном анализе позволил автору использовать в некоторых программах его формирующие процедуры. Автор благодарен К. Маку за полезные и содержательные беседы о его методе решения задачи назначения и подходах к программированию этого метода. В заключение автор

---

<sup>1</sup> Это утверждение ошибочно, так как идеи линейного программирования были разработаны еще до появления ЭВМ (см., например, Канторович Л. В. Математические методы в организации и планировании производства - Л.: ЛГУ, 1939). - Прим. ред.

благодарит В. Хантер, превратившую беспорядочную рукопись в аккуратно перепечатанный текст.

*Брайан Банди*



# ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ИДЕИ

## 1.1. ВВЕДЕНИЕ

Методы линейного программирования оказались весьма эффективными для решения некоторых задач из области исследования операций. Слово "программирование" мы понимаем как планирование, и это определяет характер рассматриваемых приложений. Основные идеи линейного программирования возникли во время второй мировой войны в связи с поиском оптимальных стратегий при ведении военных операций. С тех пор они нашли широкое применение в промышленности, торговле и управлении - как в местных, так и в государственных масштабах. Этими методами можно решить многие (хотя не все) задачи, связанные с эффективным использованием ограниченных ресурсов.

### Пример 1

Фирма производит две модели А и В сборных книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья (высококачественных досок) и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели А требуется 3 м<sup>2</sup> досок, а для изделия модели В - 4 м<sup>2</sup>. Фирма может получить от своих поставщиков до 1700 м<sup>2</sup> досок в неделю. Для каждого изделия модели А требуется 12 мин машинного времени, а для изделия модели В - 30 мин. В неделю можно использовать 160 ч машинного времени.

Сколько изделий каждой модели следует фирме выпускать в неделю, если каждое изделие модели А приносит 2 дол. прибыли, а каждое изделие модели В - 4 дол. прибыли?

Чтобы сформулировать эту задачу математически, обозначим через  $x_1$  количество выпущенных за неделю полок модели А, а через  $x_2$  - количество выпущенных полок модели В. Задача состоит в том, чтобы найти *наилучшие* значения  $x_1$  и  $x_2$ . Очевидно, наилучшими для данной задачи являются такие значения, которые *максимизируют еженедельную прибыль*. Еженедельная прибыль

$$P = 2x_1 + 4x_2. \quad (1.1)$$

Фирма будет получать максимальную еженедельную прибыль, если максимизирует **целевую функцию**  $P = 2x_1 + 4x_2$ .

Согласно классической теории оптимизации функция принимает экстремальные значения в точках, в которых обращаются в нуль ее производные, либо на границе области определения. Рассмотрения производных в нашем случае недостаточно, так как

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = 4$$

и никаким выбором  $x_1$  и  $x_2$  нельзя обратить эти производные в нуль. Действительно, чтобы увеличить функцию  $P$ , надо увеличить  $x_1$  и  $x_2$ . Но (и в этом суть проблемы) значения  $x_1$  и  $x_2$  не могут быть увеличены неограниченно. Эти значения ограничены, в частности, лимитами на сырье и машинное время.

Поскольку выражают еженедельный объем выпускаемых изделий, то они не могут быть отрицательны, т. е.

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (1.2)$$

Теперь ограничения на наличие досок и машинное время могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 1700 \quad (\text{для досок}), \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 1600 \quad (\text{для машинного времени}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

Следовательно, задача состоит в том, чтобы найти значения  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющие условиям неотрицательности (1.2) и ограничениям типа неравенства (1.3) и максимизирующие функцию  $P = 2x_1 + 4x_2$ .

Это типичная двумерная задача линейного программирования. Целевая функция, которая должна быть максимизирована, является линейной функцией своих переменных. Ограничения на эти переменные тоже линейны (они представлены на рис. 1.1). Условия неотрицательности

позволяют ограничиться рассмотрением положительного квадранта. Границы определяются прямыми

$$3x_1 + 4x_2 = 1700,$$

$$2x_1 + 5x_2 = 1600.$$

Стрелка на каждой границе рис 1.1 указывает, с какой стороны прямой выполняется ограничение. Заштрихованная область ОАВС, содержащая точки, для которых соблюдены условия (1.2) и (1.3), называется допустимой. Точки внутри и на границе этой области изображают допустимые решения. Допустимых решений много. Задача состоит в том, чтобы найти решение (может ли их быть более одного?), максимизирующее функцию  $P$ .

Штриховыми линиями на рис. 1.1 изображены прямые  $2x_1 + 4x_2 = 0$ ,  $2x_1 + 4x_2 = 800$ , обозначенные  $a$  и  $b$  соответственно. Эти прямые параллельны и представляют собой две линии уровня функции  $P$  со значениями соответственно 0 и 800. Ясно, что значение функции  $P$  возрастает по мере того, как линии уровня удаляются от начала координат в положительном квадранте. Действительно, вектор с компонентами  $\frac{\partial P}{\partial x_1}$

,  $\frac{\partial P}{\partial x_2}$ , т. е. вектор с компонентами  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  указывает направление возрастания функции  $P$ , перпендикулярен штриховым линиям и направлен в сторону, противоположную началу координат.

Линией уровня с наибольшим значением функции  $P$ , имеющей хотя бы одну общую точку с допустимой областью, является прямая  $c$ , проходящая через вершину  $B$ ; на ней  $P$  принимает значение 1400. Точка  $B$ , в которой  $x_1 = 300$ ,  $x_2 = 200$ , соответствует оптимальному решению задачи. Эти значения могут быть получены как решения уравнений

$$3x_1 + 4x_2 = 1700,$$

$$2x_1 + 5x_2 = 1600.$$

Следовательно, максимальная прибыль составляет  $2 \times 300 + 4 \times 200 = 1400$ . При оптимальном решении оба ограничения превращаются в равенства, что означает полное использование сырья и машинного времени.

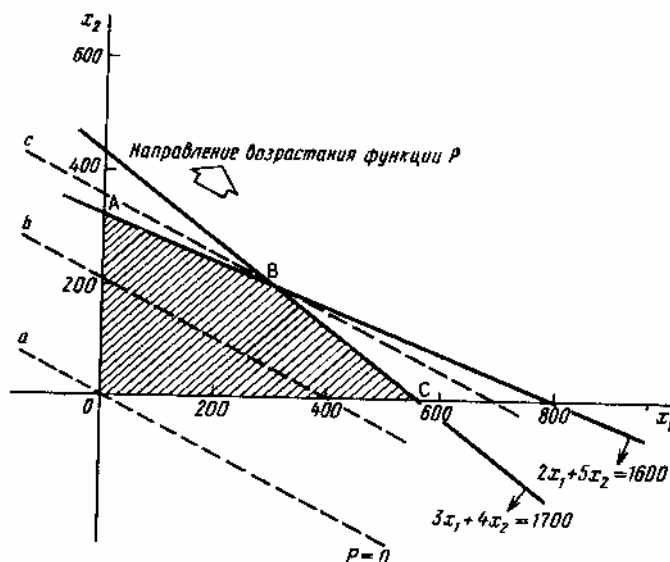


Рис 1.1.

Общая задача линейного программирования состоит в максимизации (или минимизации) линейной функции

от  $n$  вещественных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , удовлетворяющих условиям неотрицательности

и  $m$  линейным ограничениям

Среди ограничений могут одновременно встречаться знаки  $\leq$ ,  $=$  и  $\geq$ . Задача состоит в максимизации (минимизации) целевой функции. Значения  $b_i$ ,  $c_j$ ,  $a_{ij}$  предполагаются известными. Часто мы будем (как в примере 1) приводить их конкретную интерпретацию в практических задачах.

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_0, \quad (1.7)$$

где

$$\mathbf{x}_0 \geq 0, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0 \leq (=, \geq) \mathbf{b}, \quad (1.9)$$

И

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} - \text{вектор-столбец } \mathbf{n} \times 1 ,$$

a

$$\mathbf{c}^T = \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n \rangle - \text{вектор-строка } 1 \times n,$$

$$\mathbf{b} = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{matrix} \right\rangle - \text{вектор-столбец } m \times 1,$$

$$\mathbf{A}_0 = \langle \mathbf{a}_{ij} \rangle - \text{матрица } m \times n.$$

11

## 1.2. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХМЕРНЫХ ЗАДАЧ

На примере, рассмотренном в предыдущем разделе, мы показали, каким образом задачи линейного программирования возникают на практике, и продемонстрировали графический метод их решения. Рассмотрев еще несколько примеров такого рода, достаточно простых, чтобы было "видно, что происходит", мы сможем выявить несколько общих свойств задач линейного программирования, которые могут подсказать путь к их общему решению.

### Пример 1

Минимизировать функцию

$$z = -3x_1 - 4x_2$$

при ограничениях  $x_1, x_2 \geq 0$ ,

$$x_1 + x_2 \leq 20,$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 20,$$

$$x_1 \geq 10,$$

$$x_2 \geq 5.$$

Допустимой областью, изображенной на рис. 1.2, является четырехугольник PQRS. Два последних ограничения усиливают условия неотрицательности. Функция  $z$  убывает в направлении вектора

$$-\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Минимальное значение функции  $z = -68$  и достигается в точке  $R = (12, 8)$ . Заметим, что, как и в примере разд. 1.1, минимум достигается в вершине допустимой области. Оптимальным решением задачи является точка  $x_1 =$

12,  $x_2 = 8$  с минимальным значением функции  $z = -68$ .

Иногда задача имеет более чем одно оптимальное решение.

### Пример 2

Минимизировать функцию  $z = -6x_1 - 2x_2$

при ограничениях

$$2x_1 + 4x_2 \leq 9,$$

$$3x_1 + x_2 \leq 6.$$

На рис. 1.3 четырехугольник OABC изображает допустимую область  $\frac{\partial z}{\partial x_1} = -6$ ,

$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -2$ , и, таким образом, вектор  $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$  указывает направление убывания функции  $z$ .

Любая точка на отрезке BC является оптимальным решением. В частности, в вершинах B =

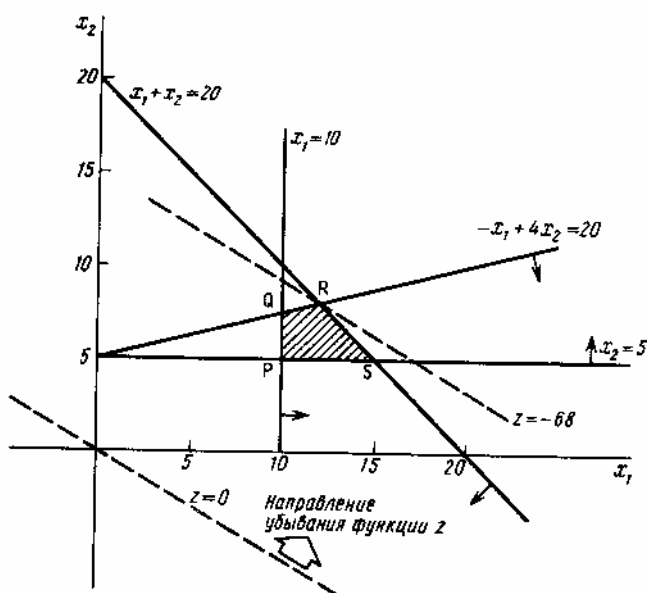


Рис 1.2.

$\left\langle 1 \frac{1}{2}, 1 \frac{1}{2} \right\rangle$  и  $C = (2, 0)$  достигаются оптимальные решения, соответствующие одному и тому же минимальному значению функции  $z = -12$ .

Любая точка на отрезке BC представляется формулой

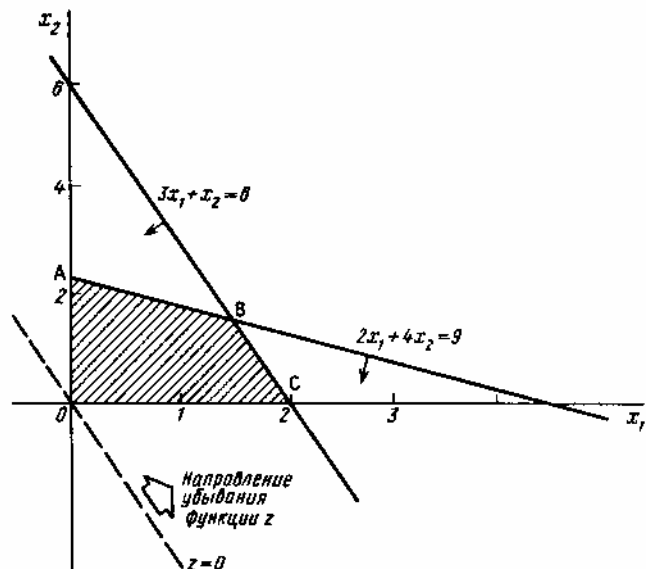


Рис 1.3.

$$\Theta \left\langle 1 \frac{1}{2}, 1 \frac{1}{2} \right\rangle + (1 - \Theta) \langle 2, 0 \rangle = \left\langle 2 - \frac{1}{2} \Theta, 1 \frac{1}{2} \Theta \right\rangle,$$

где  $0 \leq \Theta \leq 1$ .

Для каждой такой точки значение функции  $z$  равно

$$-6 \left\langle 2 - \frac{1}{2} \Theta \right\rangle - 2 \left\langle 1 \frac{1}{2} \Theta \right\rangle = -12. \quad \text{Функция } z \text{ имеет единственное}$$

минимальное значение.

Иногда решение задачи не ограничено.

### Пример 3

Максимизировать функцию  
 $z = x_1 + x_2$   
 при ограничениях  $x_1, x_2 \geq 0$ ,  
 $x_1 - x_2 \geq 1$ ,  
 $x_2 \leq 2$ .

Допустимая область, изображенная на рис. 1.4, не ограничена в направлении, в котором функция  $z$  возрастает, т. е. в допустимой области не существует конечной точки, в которой функция  $z$  достигала бы максимума. Решение, как и максимальное значение функции  $z$ , не ограничено. Однако некоторые задачи с неограниченными допустимыми областями имеют конечные решения. Например, задача максимизации функции  $z' = x_2$  при ограничениях из примера 3 имеет конечное решение.

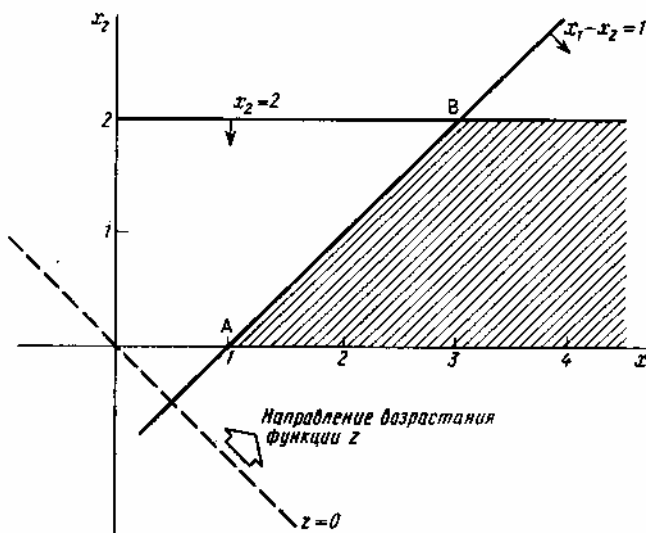


Рис 1.4.

Разумеется, если бы задача состояла в минимизации функции  $z = x_1 + x_2$  при тех же ограничениях, то минимум достигался бы в единственной точке  $z(\min) = 1$  в вершине допустимой области ( $x_1 = 1, x_2 = 0$ ).

Иногда задача не имеет решения, поскольку допустимой области не существует.

#### Пример 4

Минимизировать функцию  $z = 2x_1 + 3x_2$

при ограничениях  $x_1, x_2 \geq 0$ ,

$$x_1 + x_2 \geq 10,$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15.$$

Ограничения задачи противоречивы, поэтому нет допустимых решений (рис. 1.5).

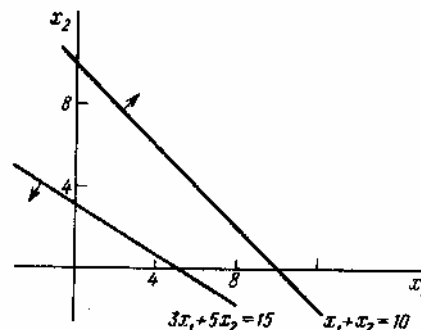


Рис 1.5.

Уже из рассмотренных выше примеров можно вывести несколько характерных черт задач линейного программирования. Во-первых, допустимая область всегда является выпуклым многоугольником, даже в случае, когда она не ограничена. Во-вторых, оптимальное решение всегда достигается в вершинах допустимой области. В примере 2 и вершина В, и вершина С являются оптимальными точками.

Эти результаты могут быть обобщены. Сначала покажем, что задачи линейного программирования могут быть приведены к стандартной форме.

### 1.3. СТАНДАРТНАЯ ФОРМА ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

На первый взгляд задачи линейного программирования представляются по-разному. Все они могут быть приведены к стандартной форме, в которой целевая функция должна быть **минимизирована**, а все ограничения должны быть заданы в виде равенств с **неотрицательными переменными**.

Привести задачу к стандартной форме очень просто, используя следующие правила:

а) Максимизация целевой функции  $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$  равносильна минимизации целевой функции  $z' = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$ .

б) Ограничение в виде неравенств, например  $3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 6$ , может быть приведено к стандартной форме  $3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6$ , где **новая переменная**  $x_4$  неотрицательна.

Ограничение  $x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10$  может быть приведено к стандартной форме  $x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 10$ , где **новая переменная**  $x_5$  неотрицательна.

в) Если некоторая переменная  $x_k$  может принимать любые значения, а требуется, чтобы она была неотрицательная, ее можно привести к виду  $x_k = x'_k - x''_k$ , где  $x'_k \geq 0$  и  $x''_k \geq 0$ .

Таким образом, приведение задачи к стандартной форме может потребовать введения дополнительных переменных (по-прежнему неотрицательных).

Аналогично соотношениям (1.7), (1.8), (1.9) выразим наиболее общую задачу линейного программирования в следующем виде:

$$\text{минимизировать функцию } z = c^T x, \quad (1.10)$$

$$\text{где } x \geq 0, \quad (1.11)$$

$$\text{и } Ax = b, \text{ причем } b \geq 0. \quad (1.12)$$

Если задача в таком виде является следствием задачи, рассмотренной выше, то в  $x$  наряду с *исходными* переменными будут входить новые переменные (и в матрицу  $A$  тоже).

Так, пример 1 разд. 1.2 может быть приведен к следующему виду:

$$\begin{aligned} &\text{минимизировать функцию } z = -3x_1 - 4x_2 \\ &\text{при ограничениях} \\ &\quad x_1 - x_3 = 10, \\ &\quad x_2 - x_4 = 5, \\ &\quad x_1 + x_2 + x_5 = 20, \\ &\quad -x_1 + 4x_2 + x_6 = 20 \\ &\text{и } x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned}$$

Пример 1 разд 1.1 может быть приведен к следующему виду:

$$\begin{aligned} &\text{минимизировать функцию } z = -2x_1 - 4x_2 \\ &\text{при ограничениях} \\ &\quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700, \\ &\quad 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600 \\ &\text{и } x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

В матричной форме ограничения можно записать таким образом:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1700 \\ 1600 \end{pmatrix}.$$

Они состоят из двух уравнений с четырьмя неизвестными. Любое неотрицательное решение при этих ограничениях является **допустимым** решением.

Конечно, имея два уравнения с четырьмя неизвестными, можно получить решение (хотя не всегда допустимое), придавая двум неизвестным произвольные значения и разрешая уравнения относительно двух других неизвестных. Особенно интересны решения такого типа, когда два неизвестных приравниваются нулю. Если такое решение единственно, то оно называется **базисным** решением. Если оно к тому же допустимо, то называется **базисным допустимым** решением. Для общей задачи линейного программирования с  $n$  переменными, подчиненными  $m$  ограничениям ( $m < n$ ), **базисные решения** ограничений могут быть получены, если приравнять нулю  $n - m$  из переменных и решить  $m$  уравнений относительно оставшихся  $m$  переменных; предполагается, что эти уравнения имеют **единственное** решение. Переменные, приравненные нулю, называются **небазисными переменными**. Остальные называются базисными и образуют **базис**.

В рассмотренных выше задачах можно выбрать две небазисные переменные шестью способами. Легко видеть, что базисные решения могут быть сведены в таблицу, в которой каждое решение соответствует паре небазисных переменных  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_3)$ ,  $(x_1, x_4)$ ,  $(x_2, x_3)$ ,  $(x_2, x_4)$ ,  $(x_3, x_4)$ . Из этих шести базисных решений только четыре допустимы и соответствуют вершинам допустимой области рис. 1.1 (см. приведенную таблицу).

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
1	0	0	1700	1600	0
2	0	425	0	-525	
3	0	320	0	$466 \frac{2}{3}$	A
4	$566 \frac{2}{3}$	0	0	$466 \frac{2}{3}$	C
5	800	0	-700	0	
6	300	200	0	0	B

В трехмерном случае линейные ограничения являются плоскостями, а не прямыми, допустимая область является выпуклым многогранником, а не выпуклым многоугольником. Оптимальному решению задачи будет соответствовать вершина этого многогранника, поскольку поверхностями уровня целевой функции будут плоскости вместо прямых, а плоскость, соответствующая наименьшему значению, имеет, вообще говоря, только одну общую точку с допустимой областью; эта точка и будет вершиной выпуклого многогранника, соответствующей оптимальному решению задачи.

Мы увидим, что этот результат закономерен. Базисные решения системы  $m$  уравнений с  $n$  неизвестными соответствуют вершинам допустимой области; оптимальное решение (если оно существует) соответствует базисному допустимому решению и, следовательно, является вершиной допустимой области.

#### 1.4. ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ $n$ ПЕРЕМЕННЫХ

Прежде чем получить упомянутые выше результаты, необходимо обобщить некоторые геометрические понятия.

Можно обобщить графический метод решения двухмерных задач, использованный в разд. 1.2. Однако в  $n$ -мерном пространстве наглядно представить себе ситуацию очень трудно. Для решения геометрических задач в этом случае необходимы алгебраические методы.

Прежде чем определить выпуклое множество, введем несколько терминов. Для обозначения точки  $n$ -мерного пространства будем использовать символ

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**Отрезок  $PQ$** , где  $P$  и  $Q$  - две точки, представленные векторами  $p$  и  $q$ , состоит из точек, определяемых соотношением

$$\Theta p + (1 - \Theta) q; \quad 0 \leq \Theta \leq 1.$$

Точечное множество  $S$  называется выпуклым, если для любых точек  $P$  и  $Q$  этого множества весь отрезок  $PQ$  содержится в множестве  $S$ .

**Экстремальной точкой** (вершиной или углом) выпуклого множества называется любая точка, не лежащая внутри произвольного отрезка, соединяющего разные точки множества.

**Выпуклой оболочкой** точек  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , представленных векторами  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , называется множество точек вида

$$\Theta_1 p_1 + \Theta_2 p_2 + \dots + \Theta_k p_k,$$



где  $\Theta_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) и  $\sum_{i=1}^k \Theta_i = 1$ .

На рис. 1.6, а изображено выпуклое множество. Множество, изображенное на рис. 1.6, б не является выпуклым – некоторые точки отрезка  $VW$  не принадлежат ему. Точки  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  являются вершинами

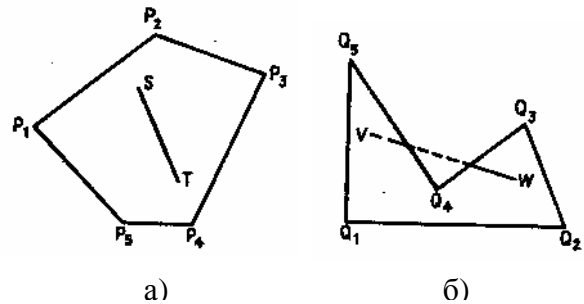


Рис 1.6.

первого множества. Выпуклая оболочка двух точек  $P_1, P_2$  есть отрезок  $P_1P_2$ . Выпуклая оболочка трех точек – треугольник  $P_1P_2P_3$ , четырех – тетраэдр  $P_1P_2P_3P_4$ , а пяти точек – гипермногогранник с вершинами в этих пяти точках.

## 1.5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая задача линейного программирования в стандартной форме записывается следующим образом:

минимизировать функцию  $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

при ограничениях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

и  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ .

Ограничения можно задать в виде  $Ax = b, x \geq 0$ , где матрица  $A$  имеет ранг  $m$  ( $< n$ ).

Теперь докажем следующие основные утверждения линейного программирования.

**Утверждение 1.** Если ограничения имеют допустимое решение, то они имеют и базисное решение.

Докажем это, построив базисное допустимое решение. Пусть в допустимом решении  $n - r$  переменных равны 0, а остальные положительны. Тогда без потери общности

$$x_j = 0, j = r + 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^r x_j a_j = b, \text{ где } x_j > 0 \text{ для } j = 1, 2, \dots, r, \quad (1.13)$$

а  $a_j$  - столбцы матрицы  $A$ .

Если  $a_j$  - линейно независимы, то  $r \leq m$  - ранг матрицы  $A$  и решение является базисным допустимым решением ( $m - r$  базисных переменных равны 0).

Если  $a_1, a_2, \dots, a_r$  линейно зависимы, то

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j a_j = 0, \text{ где не все } \alpha_j \text{ равны 0 или отрицательны} \quad (1.14)$$

(при необходимости это равенство может быть умножено на -1).

Пусть  $a_k > 0$ ,

$$\mathbf{a}_k = - \sum_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^r \frac{\alpha_j \mathbf{a}_j}{\alpha_k}, \quad (1.15)$$

тогда

$$\sum_{j \neq k}^r \left\langle \mathbf{x}_j - \frac{\alpha_j \mathbf{x}_k}{\alpha_k} \right\rangle \mathbf{a}_j = \mathbf{b}.$$

Если выбрать  $k$  так, что

$$\frac{\mathbf{x}_k}{\alpha_k} = \min_{j=1, \dots, r} \left\langle \frac{\mathbf{x}_j}{\alpha_j} ; \alpha_j > 0 \right\rangle,$$

то значения

$$\mathbf{X}_j = \mathbf{x}_j - \alpha_j \left\langle \frac{\mathbf{x}_k}{\alpha_k} \right\rangle, j = 1, \dots, r (j \neq k), \quad (1.16)$$

$$\mathbf{X}_j = 0, j = k, r+1, \dots, n,$$

неотрицательны и поэтому являются допустимыми решениями, в которых по крайней мере  $r - 1$  переменная имеет строго положительное значение. Следовательно, количество строго положительных переменных уменьшено на одну переменную. Продолжая рассуждения таким же образом, в конце концов придем к ситуации, при которой  $r \leq m$ , т.е. получим базисное допустимое решение.

**Утверждение 2.** Допустимая область является выпуклым множеством.

Если  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  принадлежат допустимой области и  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$ , причем  $\mathbf{x} \geq 0$ ,  $\mathbf{y} \geq 0$ , тогда, если

$$\mathbf{w} = \Theta \mathbf{x} + \langle 1 - \Theta \rangle \mathbf{y}, \text{ где } 0 \leq \Theta \leq 1, \text{ то } \mathbf{w} \geq 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{Aw} &= \mathbf{A} \langle \Theta \mathbf{x} + \langle 1 - \Theta \rangle \mathbf{y} \rangle = \Theta \mathbf{Ax} + \langle 1 - \Theta \rangle \mathbf{Ay} = \\ &= \Theta \mathbf{b} + \langle 1 - \Theta \rangle \mathbf{b} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\mathbf{w}$  принадлежит допустимой области, значит, доказано, что допустимая область является выпуклым множеством.

**Утверждение 3.** Базисные допустимые решения соответствуют вершинам выпуклого множества

$$\text{Пусть } \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{базисное допустимое решение.}$$

Тогда  $\mathbf{x}^0$  является единственным решением уравнения  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{x} \geq 0$ , причем последние  $n - m$  координат вектора  $\mathbf{x}$  равны 0.

Если  $x^0$  - не вершина, то можно найти две *другие* точки  $u$  и  $v$ , такие что  $x^0 = \Theta u + \langle 1 - \Theta \rangle v$  для некоторого  $\Theta$ , причем  $0 < \Theta < 1$  и выполнены условия  $Au = b$ ,  $Av = b$ ,  $u, v \geq 0$ . Таким образом, для последних  $n - m$  координат имеем

$$\Theta u_{m+1} + \langle 1 - \Theta \rangle v_{m+1} = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Theta u_n + \langle 1 - \Theta \rangle v_n = 0$$

Но поскольку  $\Theta$ ,  $1 - \Theta$ ,  $u_j$  и  $v_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), система равенств

$$\Theta u_j + \langle 1 - \Theta \rangle v_j = 0 \quad (j = m+1, \dots, n)$$

имеет решение только в случае  $u_j = v_j = 0$ , где  $j = m+1, \dots, n$ .

Таким образом,  $u$ ,  $v$  - базисные допустимые решения, обращающиеся в 0 в тех же точках, что и  $x^0$ . Поэтому из единственности решения  $x^0$  следует, что  $x^0 = u = v$ , что противоречит выбору  $u$  и  $v$ . Поэтому каждое базисное допустимое решение - вершина.

Можно доказать и обратное, т. е. что все вершины соответствуют: базисным допустимым решениям.

Пусть  $x^0$  - вершина допустимой области. Пусть  $r$  координат  $x^0$  строго положительны. Покажем, что  $r$  не превосходит  $m$ , т. е.  $x^0$  - базисное допустимое решение. Пусть  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0$  ( $r > m$ ) положительны. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_r$  - соответствующие столбцы матрицы  $A$ ; предположим, что они линейно зависимы.

Как и при доказательстве утверждения 1, найдем такие  $\alpha_j$ , не все равные 0, что

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j a_j = 0.$$

Легко видеть, что если

$$0 < \rho < \min_j \frac{x_j^0}{|a_j|} \text{ для } \alpha_j \neq 0,$$

то векторы

$$x_1 = x^0 + \rho \alpha,$$

$$x_2 = x^0 - \rho \alpha$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

удовлетворяют условию  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

Поскольку  $A\alpha = 0$ , то

$$Ax_1 = A \langle x^0 + \rho \alpha \rangle = Ax^0 + \rho A\alpha = b.$$

Аналогично  $Ax_2 = b$ .

Таким образом,  $x_1$  и  $x_2$  - допустимые решения и  $x^0 = \frac{1}{2} \langle x_1 + x_2 \rangle$ . Следовательно,  $x^0$  - не вершина, а это противоречит выбору  $x^0$ , значит,  $r$  не превосходит  $m$ .

Если заданы  $m$  ограничений на  $n$  переменных, то имеется самое большее  $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\rangle$  базисных допустимых решений (или вершин) и их выпуклая оболочка образует допустимую область.

**Утверждение 4.** Если целевая функция имеет конечный минимум, то, по крайней мере, одно оптимальное решение является базисным.

Пусть допустимые базисные решения соответствуют точкам  $P_1, P_2, \dots, P_k$  векторов  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , и пусть целевая функция принимает в этих точках значения  $z_1, z_2, \dots, z_k$ .

Если  $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = c^T x$ , то  $z_i = c^T p_i$  для  $i = 1, 2, \dots, k$ . Для любой другой точки в допустимой области

$$x = \Theta_1 p_1 + \Theta_2 p_2 + \dots + \Theta_k p_k, \text{ где } \Theta_i \geq 0, \sum \Theta_i = 1,$$

значение функции  $z$  в этой точке

$$\begin{aligned} z &= c^T x = \Theta_1 c^T p_1 + \Theta_2 c^T p_2 + \dots + \Theta_k c^T p_k = \\ &= \Theta_1 z_1 + \Theta_2 z_2 + \dots + \Theta_k z_k. \end{aligned}$$

Таким образом, нахождение в выпуклой оболочке точек  $P_1, P_2, \dots, P_k$  точки  $x$ , в которой функция  $z$  достигает минимума, сводится к задаче нахождения чисел  $\Theta_i \geq 0$ , удовлетворяющих условию  $\sum_{i=1}^k \Theta_i = 1$  и минимизирующих функцию  $z$ .

Среди значений  $z_1, z_2, \dots, z_k$  имеется минимальное (их может быть несколько). Пусть  $z_j$  такое значение, т. е.  $z_j \leq z_i$  для  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Величина  $\sum \Theta_i z_i$ , являющаяся взвешенной средней величин  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , с весами  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$ , будет минимальна при  $\Theta_j = 1$  и  $\Theta_i = 0$  ( $i \neq j$ ). Итак, минимум функции  $z$  достигается в вершине  $P_j$ .

Полученные результаты означают, что при поиске оптимального решения в допустимой области можно ограничиться базисными допустимыми решениями, Симплекс-метод, которому посвящена следующая глава, представляет собой процедуру получения такого решения.

## 1.6. УПРАЖНЕНИЯ

1. Фирма производит два продукта А и В, рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан каждой из машин I, II, III. Время обработки в часах для каждого из изделий А и В приведено ниже:

	I	II	III
A	0.5	0.4	0.2
B	0.25	0.3	0.4

Время работы машин I, II, III соответственно 40, 36 и 36 ч в неделю. Прибыль от изделий А и В составляет соответственно 5 и 3 дол.

Фирме надо определить недельные нормы выпуска изделий А и В, максимизирующие прибыль. Сформулируйте эту задачу как задачу линейного программирования и решите ее.

2. Максимизируйте функцию  $w = x_1 + 2x_2$

при ограничениях  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 10,$$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_1 - x_2 \leq 3,$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 4.$$

3. Приведите задачу 2 к стандартной форме. Покажите, что она имеет 15 базисных решений, 5 из которых допустимы. Поставьте эти решения в соответствие вершинам допустимой области.

4. Минимизируйте функцию  $z = -2x_1 - x_2$

при ограничениях  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$

$$x_1 + 2x_2 \leq 11,$$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_1 - x_2 \leq 2,$$

$$2x_1 - 4x_2 \leq 3.$$

5. Минимизируйте функцию  $z = -3x_1 - x_2$

при ограничениях  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$

$$x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$x_1 - x_2 \leq 1,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \leq 6$$

в случаях

а)  $\alpha = \beta = 1$ , б)  $\alpha = 2, \beta = \frac{2}{3}$ , в)  $\alpha = 6, \beta = -6$ .

6. Минимизируйте функцию  $z = -x_1 - 5x_2$

при ограничениях  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 6, 3x_1 + 4x_2 \leq 12$ .

7. Максимизируйте функцию  $3x_1 + 6x_2 + 2x_3$

при ограничениях  $x_1, x_2, x_3 \geq 0, 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 2, x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1$ .

Покажите, что допустимая область этой трехмерной задачи является выпуклым многогранником, и что оптимальное решение достигается в вершине.

8. Фирме требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03 % и с долей зольных примесей не более 3,25 %. Три сорта угля А, В, С доступны по следующим ценам (за 1 т):

Сорт угля	Содержание примеси фосфора, %	Содержание примеси золы, %	Цена, дол.
А	0.06	2.0	30
В	0.04	4.0	30
С	0.02	3.0	45

Как их смешивать, чтобы получить минимальную цену и удовлетворить ограничениям на содержание примесей? Покажите, что задача может быть представлена графически в двухмерном пространстве и таким образом может быть получено решение.

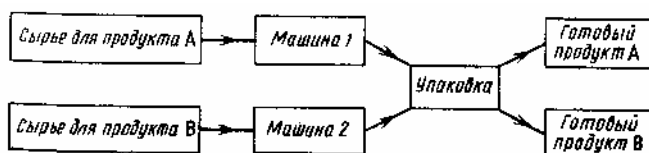
9. Средства очистки пола оценивают по следующим трем показателям: а) очищающие свойства, б) дезинфицирующие свойства, в) раздражающее воздействие на кожу. Каждый из этих показателей измеряется по линейной шкале от 0 до 100 единиц.

Продукт на рынке должен иметь, по крайней мере, 60 единиц очищающих свойств и по крайней мере 60 единиц дезинфицирующих свойств по соответствующей шкале. При этом раздражающее воздействие на кожу должно быть минимальным. Конечный продукт должен быть смесью трех основных очистителей, характеристики которых приводятся в таблице.

Очиститель	Очищающие свойства	Дезинфицирующие свойства	Раздражающее воздействие на кожу
А	90	30	70
В	65	85	50
С	45	70	10

Сформулируйте задачу нахождения оптимальной смеси как задачу линейного программирования. Покажите, что эта задача может быть представлена графически в двухмерном пространстве, и получите таким образом решение.

10. Фирма производит два продукта А и В, продаваемых соответственно по 8 и по 15 центов за упаковку; рынок сбыта для каждого из них практически неограничен. Продукт А обрабатывается на машине 1, продукт В - на машине 2. Затем оба упаковываются на фабрике:



1 кг сырья стоит 6 центов: машина 1 обрабатывает 5000 кг в 1 ч с потерями 10%. Машина 2 обрабатывает 4000 кг в 1 ч и с потерями 20 %. Машина 1 доступна 6 ч. в день, ее использование стоит 288 дол. в 1 ч. Машина 2 доступна 5 ч в день, ее использование стоит 336 дол в 1 ч. Упаковка продукта А весит 1/4 кг, а упаковка продукта В - 1/3 кг. Фабрика может работать 10 ч в день, производя в 1 ч продукцию стоимостью 360 дол. За 1 ч можно упаковать 12000 продуктов А и 8000 продуктов В.

Компания хочет определить такие значения  $x_1$  и  $x_2$  потребления сырья для продуктов А и В (в тысячах килограммов), при которых дневная прибыль максимальна. Сформулируйте задачу как задачу линейного программирования и вычислите оптимальное решение графически.

11. Приведите двухмерные задачи из примеров разд. 1.2 к стандартной форме. Найдите все базисные решения и покажите, что допустимые базисные решения могут быть сопоставлены с вершинами допустимой области.

12. В некоторой местности в двух пунктах А и В имеется потребность в дополнительном транспорте. В пункте А требуется 5 дополнительных автобусов, а в пункте В - 7. Известно, что 3, 4 и 5 автобусов могут быть получены соответственно из гаражей  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$ .

Как следует распределить эти автобусы между пунктами А и В, чтобы минимизировать их суммарный пробег? Расстояния от гаражей до пунктов А и В приведены в таблице.

Гараж	Расстояние до пунктов	
	А	В
$G_1$	3	4
$G_2$	1	3
$G_3$	4	2

13. Компания производит полки для ванных комнат двух размеров - А и В. Агенты по продаже считают, что в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой

полки типа А требуется  $m^2$  материала, а для полки типа В -  $3 m^2$  материала. Компания может получить до  $1200 m^2$  материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин машинного времени, а для изготовления одной полки типа В - 30 мин; ЭВМ можно использовать 160 ч в неделю. Если прибыль от продажи полок типа А составляет 3 дол., а от полок типа В – 4 дол., то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю?

14. Автозавод выпускает две модели: «Каприз» и (более дешевую) «Фиаско». На заводе работает 1000 неквалифицированных и 800 квалифицированных рабочих, каждому из которых оплачивается 40 ч в неделю. Для изготовления модели "Каприз" требуется 30 ч неквалифицированного и 50 ч квалифицированного труда; для "Фиаско" требуется 40 ч неквалифицированного и 20 ч квалифицированного труда. Каждая модель "Фиаско" требует затрат в размере 500 дол. на сырье и комплектующие изделия, тогда как каждая модель "Каприз" требует затрат в размере 1500 дол.; суммарные затраты не должны превосходить 900 000 дол. в неделю. Рабочие, осуществляющие доставку, работают по пять дней в неделю и могут забрать с завода не более 210 машин в день. I

Каждая модель "Каприз" приносит фирме 1000 дол. прибыли, а каждая модели "Фиаско" - 500 дол. прибыли. Какой объем выпуска каждой модели Вы бы порекомендовали? Что бы Вы порекомендовали для повышения прибыли фирмы?

15. Заводы фирмы расположены в городах Лидсе и Кардиффе; они доставляют товары на склады городов Манчестер, Бирмингем и Лондон. Расстояния между этими городами приведены в таблице (расстояния округлены до десятков миль) :

	Манчестер	Бирмингем	Лондон
Лидс	40	110	190
Кардифф	170	100	150

а) Завод в г. Лидсе выпускает в год 800 т товаров, а в г. Кардиффе - 500 т. Манчестерский склад вмещает 400 т, бирмингемский - 600 т, а лондонский - 300 т. Как следует транспортировать товары для минимизации цен на перевозки?

б) На дороге Лондон - Кардифф ведутся работы, удваивающие стоимость перевозок по ней. Как бы Вы пересмотрели расписание?





такой замены одной допустимой канонической формы на другую, при которой значение целевой функции уменьшается.

Отметим, что если матрица  $A$  может быть разбита следующим образом:

$$A = (BR)$$

где  $B$  - матрица с коэффициентом на диагонали  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , а  $R$  - матрица размерностью  $m \times \langle n - m \rangle$  (остаток матрицы  $A$ ), умножение уравнения (2.3) на  $B^{-1}$  приводит к уравнению (2.4). Для базисного допустимого решения должна существовать матрица  $B^{-1}$ .

Для системы уравнений (2.3) из соотношения

$$(BR) x = b \quad (2.6)$$

следует соотношение

$$B^{-1} (BR) x = B^{-1} b,$$

$$\text{т.е. } I_m (B^{-1}R) x = b' \text{ (это - уравнение (2.4)),} \quad (2.7)$$

$$\text{так что } b' = B^{-1}b \quad (2.8)$$

$$\text{и } a'_j = B^{-1}a_j \text{ для всех столбцов } j = m+1, \dots, n \quad (2.9)$$

Имеем также

$$c'_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i a'_{ij},$$

$$c'_j = c_j - c_B^T a'_j = c_j - c_B^T B^{-1} a_j, \quad (2.10)$$

где  $c_B^T = (c_1, c_2, \dots, c_m)$  - вектор-строка коэффициентов базисных переменных в исходном виде для функции  $z$  (см. уравнение (2.1)).

Для нахождения базисного допустимого решения такой метод весьма неэффективен. Иногда базисное допустимое решение очевидно, как в выбранном для иллюстрации симплекс-метода примере 1 из разд. 1.1, который уже решен графически.

Пример 1

Минимизировать функцию  $-2x_1 - 4x_2 = z$

при ограничениях  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ,

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1700,$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1600.$$

В стандартной форме с неотрицательными дополнительными переменными  $x_3$  и  $x_4$  ограничения и целевая функция принимают вид

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1700, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 &= 1600, \\ -2x_1 - 4x_2 &= z. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Поскольку в этом случае коэффициенты  $b$  положительны, а новые переменные имеют коэффициент +1, ясно, что набор  $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1700, x_4 = 1600$  образует базисное фундаментальное решение, а уравнения (2.11) имеют соответствующий вид.

Функция  $z$ , имеющая нулевое значение, выражена через небазисные переменные, которые также имеют нулевое значение. Как в таком случае можно уменьшить значение функции  $z$ ? Поскольку  $x_1$  и  $x_2$  должны быть неотрицательны, любое изменение их значений является увеличением этих значений. Поскольку коэффициенты при  $x_1$  и  $x_2$  в

канонической форме функции  $z$  отрицательны, любое такое изменение приведет к убыванию функции  $z$ . Вместо того чтобы увеличить их значения одновременно, для простоты выберем одну из переменных. Так как коэффициент при  $x_2$  больше по модулю, выбираем  $x_2$ .

Однако при увеличении  $x_2$  значения  $x_3$  и  $x_4$  будут изменяться, поскольку должны выполняться уравнения (2.11). Все переменные при этом должны оставаться неотрицательными. Таким образом, должен существовать предел увеличения  $x_2$ .

Поскольку  $3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700$ ,  $x_3$  обращается в 0 при  $x_2 = 1700/4 = 425$ .

Поскольку  $2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600$ ,  $x_4$  обращается в 0 при  $x_2 = 1600/5 = 320$ .

Таким образом, мы не можем увеличивать  $x_2$  более чем до 320 (минимального из этих значений), не нарушая условие неотрицательности.

Второе ограничение может быть записано в виде

$$2/5x_1 + x_2 + 1/5x_4 = 320.$$

Если вычесть это уравнение, умноженное на 4, из уравнения (2.11) (4 - коэффициент при  $x_2$  в этом уравнении), а затем вычесть это же уравнение, умноженное на -4, из выражения для целевой функции (-4 - коэффициент при  $x_2$  в целевой функции), то переменная  $x_2$  будет исключена отовсюду, кроме второго ограничения, куда она входит с коэффициентом 1. Ограничения и целевая функция принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{7}{5}x_1 + x_3 - \frac{4}{5}x_4 &= 420, \\ \frac{2}{5}x_1 + x_2 + \frac{1}{5}x_4 &= 320, \\ -\frac{2}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_4 &= z + 1280, \end{aligned} \tag{2.12}$$

что является канонической формой для базиса  $x_2, x_3$ , представляющего базисное допустимое решение.

Небазисными переменными стали переменные  $x_1$  и  $x_4$ . В данный момент они равны 0. Теперь можно уменьшить значение функции  $z$ , увеличив только  $x_1$ . Но на сколько можно увеличить  $x_1$ , чтобы  $x_2$  и  $x_3$  оставались неотрицательными?

Для уравнения

$$\frac{7}{5}x_1 + x_3 - \frac{4}{5}x_4 = 420$$

$x_3$  обращается в 0 при  $x_1 = \frac{420}{\frac{7}{5}} = 300$ .

$$\text{Для уравнения } \frac{2}{5}x_1 + x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 320$$

обращается в 0 при  $x_1 = \frac{320}{\frac{2}{5}} = 800$ .

Таким образом, нельзя увеличивать  $x_1$ , более чем до 300 (минимального из этих значений). После деления на 7/5 (коэффициент при  $x_1$ ) первое ограничение принимает вид

$$x_1 + \frac{5}{7} x_3 - \frac{4}{7} x_4 = 300$$

Исключим  $x_1$  из другого ограничения и выражения для целевой функции, вычтя последнее соотношение, умноженное на  $2/5$  и  $-2/5$ , из ограничения и целевой функции. Получим каноническую форму задачи в базисе  $x_1, x_2$ , тоже являющимся допустимым. Она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{5}{7} x_3 - \frac{4}{7} x_4 &= 300, \\ x_2 - \frac{2}{7} x_3 + \frac{3}{7} x_4 &= 200, \\ \frac{2}{7} x_3 + \frac{4}{7} x_4 &= z + 1400. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Заметим, что увеличение любой из небазисных переменных  $x_3, x_4$  (эти переменные входят в выражение для целевой функции  $z$  с положительными коэффициентами) приведет к возрастанию функции  $z$ . Таким образом, дальнейшее убывание функции  $z$  невозможно и достигнуто минимальное значение функции  $z$ , равное  $-1440$  при допустимом базисном решении  $x_1 = 300, x_2 = 200, x_3 = x_4 = 0$ . Если вернуться к геометрической интерпретации на рис. 1.1, то можно убедиться, что последовательность канонических форм привела из точки  $O$  в точку  $A$  и из точки  $A$  в точку  $B$  - точку минимума. Читателю рекомендуется проверить, что при выборе в уравнениях (2.11) увеличения  $x_1$  та же процедура привела бы из точки  $O$  в точку  $B$  через точку  $C$ .

Этот **итерационный процесс** удобно проиллюстрировать в так называемых симплекс-таблицах. Они состоят из уравнений (2.11) - (2.13) для ограничений и целевой функции, записанных в виде

$$\begin{aligned} -z - 2x_1 - 4x_2 &= 0; \\ -z - \frac{2}{5} x_1 + \frac{4}{5} x_4 &= 1280; \\ -z + \frac{2}{7} x_3 + \frac{4}{7} x_4 &= 1400. \end{aligned}$$

Ниже приведены три таблицы.

Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	$x_3$	1700	3	4	4	.
	$x_4$	1600	2	5*	.	1
	$-z$	0	-2	-4	.	.
1	$x_3$	420	7/5*	.	1	-4/5
	$x_2$	320	2/5	1	.	1/5
	$-z$	1280	-2/5	.	.	4/5
2	$x_1$	300	1	.	5/7	-4/7
	$x_2$	200	.	1	-2/7	3/7
	$-z$	1400	.	.	2/7	4/7

На итерации 0 звездочкой отмечено значение 5 - коэффициент при переменной, которую мы собираемся обратить в базисную в предельном ограничении. На итерации 1 отмечено

число  $7/5$ . Заметим также, что мы ставим точки вместо переменных, обязанных иметь нулевые значения, чтобы отличить их от переменных, обращающихся в 0 случайно.

Результаты, полученные в рассмотренном примере, можно обобщить. Предположим, что начальная каноническая форма задана, и что на  $k$ -й итерации получена каноническая форма, заданная уравнениями (2.4) и (2.5), запись которых приведена ниже в таблице.

Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$		$x_r$		$x_m$	$x_{m+1}$		$x_s$		$x_n$
k	$x_1$	$b'_1$	1	.	.	.		.	$a'_{1m+1}$		$a'_{1s}$		$a'_{1n}$
	$x_2$	$b'_2$	.	1	.	.		.	$a'_{2m+1}$		$a'_{2s}$		$a'_{2n}$
	$x_r$	$b'_r$	.	.	.	1		.	$a'_{rm+1}$		$a'_{rs}$		$a'_{rn}$
	$x_m$	$b'_m$	.	.	.	.		1	$a'_{mm+1}$		$a'_{ms}$		$a'_{mn}$
	$-z$	$-z'_0$	.	.	.	.		.	$c'_{m+1}$		$c'_s$		$c'_n$

Итерационный процесс состоит из трех шагов.

1. *Найти переменную для включения в базис.*

Переменные  $x_{m+1}, \dots, x_n$  являются небазисными. Находим наименьший из коэффициентов  $c'_{m+1}, \dots, c'_s, \dots, c'_n$ . Пусть это коэффициент  $c'_s$ . Если коэффициент  $c'_s$  отрицателен, то увеличение  $x_s$  приведет к убыванию функции  $z$ . В связи с этим принимается соглашение, что если некоторые коэффициенты  $c'_j$  - отрицательны, то из них следует выбрать наибольший по модулю коэффициент. Это разумно, но несущественно, поскольку подходит любое отрицательное значение  $c'_j$ . Если все  $c'_s \geq 0$ , то значение функции  $z$  не может быть уменьшено, и минимум найден.

2. *Найти переменную для исключения из базиса.*

Насколько можно увеличивать  $x_s$ , не нарушая условия неотрицательности текущих базисных переменных? Если в  $i$ -м ограничении  $a'_{is} > 0$ , то наибольшее значение, которое может принимать переменная  $x_s$ , равно  $b'_i / a'_{is}$ , иначе переменная  $x_i$  станет отрицательна. (Если  $a'_{is} \leq 0$ , то при увеличении  $x_s$  базисная переменная  $x_i$  будет возрастать.) Таким образом  $x_s$  может увеличиваться до значения

$$\max x_s = \min_{i=1, \dots, m} \left\langle \frac{b'_i}{a'_{is}} \right\rangle, a'_{is} > 0 \quad (2.14)$$

Если этот минимум достигается в строке  $r$ , то  $x_r$  обращается в 0, когда  $x_s$  принимает значение  $b'_r / a'_{rs}$ . Другие базисные переменные останутся неотрицательными. Элемент  $a'_{rs}$  называется ведущим<sup>2</sup> элементом, строка  $r$  - ведущей строкой, а столбец  $s$  - ведущим столбцом.

3. *Построить новую каноническую форму.*

Теперь новый базис  $x_1, x_2, \dots, x_s, \dots, x_m$ ;  $x_r$  и переменная  $x_r$  стала базисной. Чтобы построить новую каноническую форму, коэффициент при  $x_s$  в ведущей строке сделаем равным 1, поделив строку на  $a'_{rs}$ , чтобы образовать новую ведущую строку.

<sup>2</sup> Используется также термин "разрешающий". - Прим. ред. 30

Затем удалим  $x_s$  из других ограничений целевой функции. Для этого из  $i$  -строки ( $i \neq r$ ) с коэффициентом  $a'_{is}$  при  $x_s$  вычтем  $a'_{is} \times$  (новая ведущая строка). Чтобы преобразовать целевую функцию с коэффициентом  $c'_s$  ( $< 0$ ) при  $x_s$ , вычтем  $c'_s \times$  (новая ведущая строка) из строки соответствующей целевой функции.

На очередной итерации каноническая форма будет выглядеть следующим образом:

Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$		$x_r$		$x_m$	$x_{m+1}$		$x_s$		$x_n$
k+1	$x_1$	$b_1^+$	1	.	.	$a_{1r}^+$		.	$a_{1m+1}^+$		.		$a_{1n}^+$
	$x_2$	$b_2^+$	.	1	.	$a_{2r}^+$		.	$a_{2m+1}^+$		.		$a_{2n}^+$
			.	.	.			.			.		
	$x_r$	$b_r^+$	.	.	.	$a_{rr}^+$		.	$a_{rm+1}^+$		1		$a_{rn}^+$
	$x_m$	$b_m^+$	.	.	.	$a_{mr}^+$		1	$a_{mm+1}^+$		.		$a_{mn}^+$
	$-z$	$-z_0^+$	.	.	.	$c_r^+$		.	$c_{m+1}^+$		.		$c_n^+$

где

$$b_r^+ = b_r / a'_{rs}; \quad (2.15)$$

$$a_{rj}^+ = a'_{rj} / a'_{rs}; \quad (2.16)$$

$$b_i^+ = b_i' - a'_{is} b_r^+, \quad i \neq r; \quad (2.17)$$

$$a_{ij}^+ = a'_{ij} - a'_{is} a_{rj}^+; \quad (2.18)$$

$$c_j^+ = c_j' - c'_s a_{rj}^+; \quad (2.19)$$

$$z_0^+ = z_0' + c'_s b_r^+. \quad (2.20)$$

Формулы (2.15) - (2.20) запоминать не надо; они приведены здесь для дальнейших ссылок. Вычисления удобнее выполнять в соответствии с шагом 3.

Теперь, построив новую каноническую форму, необходимо вернуться к шагу 1 и выбрать минимальное из чисел  $c_j^+$ . В конце концов мы обнаружим, что все они положительны; это и будет означать, что минимум функции  $z$  достигнут.

## Пример 2

Минимизировать функцию  $-6x_1 - 2x_2 = z$

при ограничениях  $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ ,

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 9,$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 6.$$

Это - пример 2 разд. 1.2, представленный в стандартной форме.

Последовательность таблиц, которую читателю предлагается проверить, приводится ниже. Начальный базис и каноническая форма очевидны.

На итерации 1 коэффициенты при небазисных переменных неотрицательны. Сравнение с рис. 1.3 показывает, что мы передвинулись из точки 0 в точку С. Оптимум найден в точке С, в которой  $x_1 = 2$ ,  $x_3 = 5$ ,  $x_2 = x_4 = 0$ , с минимальным значением функции  $z$ , равным -12.

Нулевой коэффициент при  $x_2$  в выражении для функции показывает, что можно было бы увеличить  $x_2$ . Такое увеличение не привело бы ни к возрастанию функции, ни к убыванию. Это случай, когда имеется более чем одно оптимальное решение.

Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	$x_3$	9	2	4	1	.
	$x_4$	6	3*	1	.	1
	$-z$	0	-6	-2	.	.
1	$x_3$	5	.	10/3*	1	-2/3
	$x_1$	2	1	1/3	.	1/3
	$-z$	12	.	0	.	2

Полученные в результате каноническая форма и соответствующая таблица (ведущий элемент отмечен звездочкой) приведены ниже.

2	$x_2$	3/2	.	1	3/10	-2/10
	$x_1$	3/2	1	.	-1/10	4/10
	$-z$	12	.	.	0	2

Эта таблица оптимальных решений соответствует точке В на рис. 1.3. Видно, к чему приводит многочисленность оптимальных точек, найденных в процедуре: она приводит к наличию нулевых коэффициентов в канонической форме оптимального решения для функции  $z$ .

### Пример 3

Минимизировать функцию  $-x_1 - x_2 = z$

при ограничениях  $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ ,

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1,$$

$$x_2 + x_4 = 2.$$

Ясно, что точка  $x_1 = 1, x_4 = 2, x_2 = x_3 = 0$  является базисным решением и что ограничения приведены в соответствующем виде, так что метод применим. Целевая функция содержит одну из базисных переменных  $x_1$ . Пользуясь первым ограничением, можно исключить  $x_1$  и получить  $-2x_2 - x_3 = z + 1$ .

Эта задача - пример 3 разд. 1.2. Приведем первую таблицу, соответствующую точке А на рис. 1.4:

Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	$x_1$	1	1	-1	-1	.
	$x_4$	2	.	1*	0	1
	$-z$	1	.	-2	-1	.
1	$x_1$	3	1	.	-1	1
	$x_2$	2	.	1	0	1
	$-z$	5	.	.	-1	2

Здесь приведена также вторая таблица, вычисленная обычным образом. Она соответствует точке В на рис. 1.4. Функция  $z$  может быть еще уменьшена увеличением  $x_3$ . Но здесь возникает определенная трудность. В столбце, соответствующем  $x_3$ , в ограничениях нет строго положительных коэффициентов. Таким образом, сколько не увеличивай  $x_3$ , базисная переменная никогда не обратится в 0. Действительно,  $x_1$  будет увеличиваться, а  $x_2$  - оставаться неизменным. Это случай неограниченного решения (см. рис. 1.4). В симплекс-методе неограниченность решения выражается в том, что все коэффициенты  $a'_{is} \leq 0$ .

## 2.2. РЕАЛИЗАЦИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДА НА ЭВМ

Вычислительная процедура симплекс-метода является итерационным процессом. Если задача содержит несколько переменных и ограничений, то этот процесс очень громоздок. Во многие практические задачи входят десятки переменных и ограничений (иногда намного больше), и ясно, что неразумно решать эти задачи вручную. Симплекс-метод - это метод для ЭВМ. Не случайно развитие теории линейного программирования совпало по времени с развитием ЭВМ. Без них теория имела бы весьма узкую область приложений.

Процедура последнего раздела может быть представлена в виде блок-схемы для вычислений, которая, в свою очередь, может быть реализована как программа для ЭВМ.

Итерационная процедура состоит в основном из трех шагов. Сначала находим  $\min_j c'_j = c'_s (< 0)$ , чтобы определить переменную для включения в базис. Затем строка базисной переменной для удаления из базиса находится по формуле

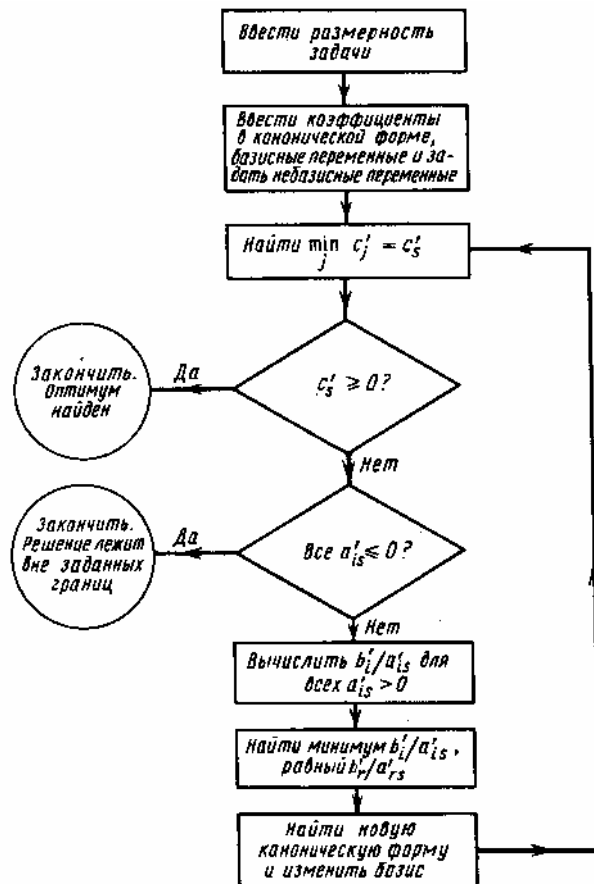


Рис. 2.1. Блок-схема симплекс-метода в первой канонической форме

$$\max x_s = \min_{\substack{i=1 \dots m \\ a'_{is} > 0}} \left\langle \frac{b'_i}{a'_{is}} \right\rangle = \frac{b'_r}{a'_{rs}}. \quad (2.21)$$

Конечно, этот результат совпадает с выражением (2.14). В конце концов, приходим к следующей канонической форме в соответствии с уравнениями (2.15) - (2.20).

Текст программы соответствует блок-схеме, приведенной на рис. 2.1; в программе используются те же обозначения, что и в тексте. Значения переменных и целевой функции ( $b'_i$  и  $z'_0$ ) запоминаются в нулевом столбце матрицы А. Последняя строка этой матрицы используется для коэффициентов целевой функции. Данные в строках 4000 - 4030 соответствуют данным примера 1 разд. 2.1.

READY.

10 REM В ПРОГРАММЕ РЕАЛИЗОВАН СИМПЛЕКС-МЕТОД С ЗАДАНЫМ

```

15 REM БАЗИСНЫМ ДОПУСТИМЫМ РЕШЕНИЕМ ДЛЯ ОГРАНИЧЕНИЙ
20 REM ВВЕСТИ КОЛИЧЕСТВО ОГРАНИЧЕНИЙ И ПЕРЕМЕННЫХ
30 READ M,N
40 M1=M+1
50 DIM A(M1,N),BS(M),NB(N),V(M1)
60 PRINT "ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ"
100 REM ВВЕСТИ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕНИЙ И ЦЕЛЕВОЙ
105 REM ФУНКЦИИ ПОСТРОЧНО
110 FOR I=1 TO M1:FOR J=1 TO N
120 READ A(I,J)
130 NEXT J:NEXT I
150 REM ВВЕСТИ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ БАЗИСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И
155 REM ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В МАССИВ A(1,0)
160 FOR I=1 TO M1:READ A(I,0):NEXT I
200 REM ВВЕСТИ БАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ;BS - МЕТКА БАЗИСНОЙ
205 REM ПЕРЕМЕННОЙ В ОГРАНИЧЕНИИ I
210 FOR I=1 TO M:READ BS(I):NEXT I
250 REM ПОМЕТИТЬ НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ;ЕСЛИ ] -
255 REM НЕБАЗИСНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ,ТО NB(J)=0
260 FOR I=1 TO M:Nb(BS(I))=1:NEXT I
290 НАПЕЧАТАТЬ ТАБЛИЦУ
300 PRINT "ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА": PRINT "ИТЕРАЦИЯ" K
310 GOSUB 3000:STOP
400 ZERO =1E-08
490 REM НАЙТИ НАИМЕНЬШИЙ КОЭФФИЦИЕНТ В СТРОКЕ Z (Т.Е.
495 REM СТРОКУ M1)
500 MIN=-ZERO:S=0:PV=0
510 FOR J=1 TO N
520 IF NB(J)=1 THEN GOTO 550
530 IF A(M1,J)>=MIN THEN GOTO 550
540 MIN =A(M1,J):S=J
550 NEXT J
560 REM ЕСЛИ S=0,ТО ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ И
565 REM МИНИМУМ НАЙДЕН
570 IF S=0 THEN GOTO 2000
740 REM НАЙТИ СТРОКУ ПЕРЕМЕННЫХ,КОТОРУЮ СЛЕДУЕТ
745 REM ИСКЛЮЧИТЬ ИЗ БАЗИСА ПО УСЛОВИЮ МИНИМУМА  $B_I/A(I,S)$ 
750 MIN =1E20:R=0
760 FOR I=1 TO M
770 IF A(I,S)<=ZERO THEN GOTO 810
780 RT=A(I,0)/A(I,S)
790 IF RT>=MIN THEN GOTO 810
800 R=I:MIN=A(I,0)/A(I,S)
810 NEXT I
890 REM ЕСЛИ R=0,ТО ИМЕЕТ МЕСТО РЕШЕНИЕ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ
900 IF R=0 THEN GOTO 1800
910 PRINT "ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ" ;R; "СТОЛБЦА";S
920 PRINT ""
990 REM РАЗДЕЛИТЬ ВЕДУЩУЮ СТРОКУ НА ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ
1000 PV=A(R,S)
1010 FOR J=0 TO N:A(R,J)=A(R,J)/PV:NEXT J
1040 REM ВЫЧИСЛИТЬ НОВУЮ КАНОНИЧЕСКУЮ ФОРМУ, ЗАПОМНИВ
1045 REM ВЕДУЩИЙ СТОЛБЕЦ ДО ЕГО ИЗМЕНЕНИЯ
1050 FOR I=1 TO M1:V(I)=A(I,S):NEXT I
1070 FOR I=1 TO M1
1080 IF I=R THEN GOTO 1120
1090 FOR J=0 TO N
1100 A(I,J)=A(I,J)-V(I)*A(R,J)

```



```

1110 NEXT J
1120 NEXT I
1150 REM ПЕРЕНАЗНАЧИТЬ И ПОВТОРНО ПОМЕТИТЬ БАЗИСНЫЕ
1155 REM И НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
1160 NB(BS(R))=0:NBS(S)=1:BS(R)=S
1170 REM СЧЕТЧИК ИТЕРАЦИЙ
1180 K=K+1
1190 REM НАПЕЧАТАТЬ НОВУЮ ТАБЛИЦУ
1200 PRINT "ИТЕРАЦИЯ"K
1210 GOSUB 3000:STOP
1240 REM ПОВТОРИТЬ ИТЕРАЦИОННУЮ ПРОЦЕДУРУ
1250 GOTO 500
1800 PRINT "ПЕРЕМЕННАЯ "S" НЕ ИМЕЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ"
1810 GOSUB 3000:STOP
1820 GOTO 2500
2000 PRINT "ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ"
2010 PRINT "ОГРАНИЧЕНИЕ    БАЗИС    ЗНАЧЕНИЕ"
2020 PB=144
2030 FOR I=1 TO M
2040 PRINT " ";I; "          ";BS(I);
2050 PA=A(I,0):GOSUB 9000:PRINT ""
2060 NEXT I
2090 PRINT "МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН ";-A(M1,0)
2100 GOSUB 3000
2500 END
3000 PRINT "БАЗИС    ЗНАЧЕНИЕ";
3010 FOR J=1 TO N:PRINT" X"J " ";:NEXT J
3020 PRINT ""
3030 PB=122
3040 FOR I=1 TO M1
3050 IF I=M1 THEN PRINT"-Z";:GOTO 3080
3060 PRINT BS(I);
3080 FOR J=0 TO N
3090 PA=A(I,J):GOSUB 9000
3100 NEXT J
3110 PRINT ""
3120 NEXT I:PRINT ""
3200 RETURN
4000 DATA 2,4
4010 DATA 3,4,1,0,2,5,0,1,-2,-4,0,0
4020 DATA 1700,1600,0
4030 DATA 3,4
9000 PC=INT(PB/100)
9010 P$= ""
9020 IF PC=0 THEN PRINT "":GOTO 9040
9030 PRINT LEFT$(P$,PC)'
9040 PC=PB-100*PC
9050 PD=INT(PC/10):PC=PC-10*PD
9060 IF PD=0 THEN P0=1
9070 IF PA<0 THEN P$=P$+"-"
9080 PE=ABS(PA)
9090 PE=PE+5*10^(-1-PC)
9100 IF PE>=10^PD THEN PRINT PA;:RETURN
9110 P$=P$+MID$(STR$(INT(PE)),2,PD)
9120 PRINT RIGHT$(P$,PD+1)
9130 IF PC=0 THEN RETURN
9140 PRINT " . ";
9150 PE=INT((PE-INT(PE))*10^PC)

```

```

9160 P$="0000000000"
9170 P$=P$+MID$(STR$(PE),2,PC)
9180 PRINT RIGHT$(P$,PC);:RETURN
READY.

```

Полезно сделать следующие замечания по поводу этой программы. Минимум  $c'_j$ , определяется в строках от 500 до 550 в предположении, что они существуют. Положив сначала переменную  $MIN = -10^{-8}$ , можно избежать поиска ложного отрицательного значения. Следует помнить, что ЭВМ выполняет действия с конечной точностью. Симплекс-метод иногда требует длинных и скрупулезных вычислений, в процессе которых ошибки могут накапливаться; в частности, величины, которые должны быть нулевыми, могут принимать значения, скажем,  $-1,23947 \times 10^{-29}$ . Мы хотим избежать таких ошибочных отрицательных значений.

Аналогичные предосторожности следует принять в процедуре нахождения строки переменных для исключения из базиса (строки 750-880). Проверяем, что коэффициенты  $a'_{is}$  положительны. Отметим, что в рассматриваемой процедуре (где ищется минимальное значение  $b'_i/a'_{is}$ ) это означает, что не придется делить на 0 - это вызвало бы ошибку в процессе выполнения программы.

Промежуточные таблицы могут быть распечатаны в строках 300, 310, 1200, 1210, 1810, 2100. Некоторые из них (в строке 1210) могут быть выброшены. Первый фрагмент распечатки служит для проверки того, что данные правильны. Печать в строке программы 910 определяет позицию ведущего элемента, ведущей строки и ведущего столбца.

В процедуре, начинающейся со строки 3000, производится распечатка таблицы. Хотя выводимая информация и форматирована, ясно, что для больших значений выдача на экран и на АЦПУ приведет к переполнению количества допустимых колонок печати, так что необходимы будут некоторые модификации. Однако если ограничиться иллюстративными задачами с небольшим (до 10) количеством переменных, то осложнений не будет.

Процедура, начинающаяся со строки 9000, является формирующей. Ее значение объясняется в приложении. Форматирующие значения  $PB = 144$  в строке 2020 и  $PB = 122$  в строке 3030, конечно, могут меняться в зависимости от значений, рассматриваемых величин и от требований точности при выводе.

Приведенный образец распечатки относится к примеру 1 разд. 2.1; данные в распечатке верные. Ясно, что воспроизведена симплексная таблица этого решения.

Читателю предлагается проверить программу на других примерах, в которых начальное допустимое решение очевидно.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ  
 ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА  
 ИТЕРАЦИЯ 0

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4
3	1700	3.00	4.00	1.00	0.00
4	1600	2.00	5.00	0.00	1.00
-Z	0.00	-2.00	-4.00	0.00	0.00

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 2 СТОЛБЦА 2

ИТЕРАЦИЯ 1

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4
3	420	1.40	0.00	1.00	-0.80
2	320	0.40	1.00	0.00	0.20
-Z	1280	-0.40	0.00	0.00	0.80

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 1

## ИТЕРАЦИЯ 2

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4
1	300	1.00	0.00	0.71	-0.57
2	200	0.00	1.00	-0.29	0.43
-Z	1400	0.00	0.00	0.29	0.57

## ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

ОГРАНИЧЕНИЕ	БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ
1	1	300.0000
2	2	200.0000

МИНИМУМ ФУНКЦИИ РАВЕН -1400

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4
1	300	1.00	0.00	0.71	-0.57
2	200	0.00	1.00	-0.29	0.43
-Z	1400	0.00	0.00	0.29	0.57

## 2.3. ПОРОЖДЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО БАЗИСНОГО ДОПУСТИМОГО РЕШЕНИЯ

Примеры, выбранные для иллюстрации симплекс-метода, были заимствованы из разд.1.2. Начальное базисное допустимое решение и соответствующая каноническая форма этих примеров были очевидны, или же, как в примере 3, их можно было легко получить.

Пусть требуется решить следующую задачу.

### Пример 1

Минимизировать функцию  $-3x_1 - 4x_2 = z$

при ограничениях  $x_1, x_2 \geq 0$ ,

$$x_1 \geq 10,$$

$$x_2 \geq 5,$$

$$x_1 + x_2 \leq 20,$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 20.$$

Это - пример 1 из разд.1.2; он решается графически без всяких затруднений. В стандартной форме с неотрицательными дополнительными переменными ограничения принимают вид

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 10, \\ x_2 - x_4 &= 5, \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 20, \\ -x_1 + 4x_2 + x_6 &= 20. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Однако при попытке применить симплекс-метод возникает определенная трудность. Дело в том, что нет очевидного базисного допустимого решения. Базисное решение, получаемое приравнением дополнительных переменных значениям в правых частях, недопустимо. Этим решением является точка  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $x_3 = -10$ ,  $x_4 = -5$ ,  $x_5 = 20$ ,  $x_6 = 20$ , и в нем  $x_3$  и  $x_4$  оказываются отрицательны. Трудности возникают из-за ограничений в виде неравенств. Они возникли бы и при ограничениях в виде равенств.

Один из путей преодоления этих трудностей состоит в использовании того же симплекс-метода для порождения базисного допустимого решения. **Изменим** первые два ограничения

(два других не создают проблем) введением в левую часть **искусственных переменных**  $x_7$  и  $x_8$  (неотрицательных). **Измененные** ограничения запишутся так:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_7 &= 10 \\ x_2 - x_4 + x_8 &= 5, \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 20, \\ -x_1 + 4x_2 + x_6 &= 20. \end{aligned} \quad (2.23)$$

и для них базисное решение очевидно. Это решение  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$  (небазисные переменные),  $x_7 = 10$ ,  $x_8 = 5$ ,  $x_5 = 20$ ,  $x_6 = 20$ . Затем симплекс-метод используется для минимизации функции

$$x_7 + x_8 = w \quad (2.24)$$

Функция  $w$  называется искусственной целевой функцией. Этап I задачи состоит в минимизации функции  $w$ .

Предположим, что ограничения (2.22) имеют допустимое решение и, следовательно, базисное допустимое решение (это не всегда так); тогда решение этапа I задачи закончится тем, что функция  $w$  обратится в 0 и при этом  $x_7$  и  $x_8$  тоже будут нулевыми. Но когда  $x_7$  и  $x_8$  равны нулю, измененные ограничения (2.23) равносильны исходным (2.22). Базисное допустимое решение, минимизирующее функцию  $w$ , может быть использовано как начальное базисное допустимое решение для минимизации функции  $z$  на этапе II задачи. Начиная с этого момента, нулевые значения  $x_7$  и  $x_8$  игнорируются.

Разумеется, для минимизации функции  $w$  надо выразить ее в подходящем виде, т. е. через небазисные переменные. Переменные  $x_7$  и  $x_8$  являются, конечно, базисными в первом решении уравнений (2.23). Из функции  $w$  легко исключить  $x_7$  и  $x_8$ . Надо просто вычесть из выражения для функции  $w$  содержащие их строки. Эта идея применяется и в других задачах. Таким образом, получаем

$$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = w - 15$$

При решении этапа I задачи соответствующие вычисления производятся в выражении для функции  $z$ , к которому применимы те же операции, что и к ограничениям. Таким образом, по завершении этапа I получим функцию  $z$ , приведенную к данному базису. После того как функция  $w$  обратилась в 0, игнорируем ее на этапе II задачи. То же относится и к искусственным переменным.

Таблицы для этапа I задачи имеют следующий вид:

Итера-ция	Базис	Значе-ние	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
0	$x_7$	10	1*	0	-1	0	.	.	1	.
	$x_8$	5	0	1	0	-1	.	.	.	1
	$x_5$	20	1	1	0	0	1	.	.	.
	$x_6$	20	-1	4	0	0	.	1	.	.
	$-z$	0	-3	-4	0	0	.	.	.	.
	$-w$	-15	-1	-1	1	1	.	.	.	.

1	$x_1$	10	1	0	-1	0	.	.	1	.
	$x_8$	5	.	1*	0	-1	.	.	0	1
	$x_5$	10	.	1	1	0	1	.	-1	.
	$x_6$	30	.	4	-1	0	.	1	1	.
	$-z$	30	.	-4	-3	0	.	.	3	.
	$-w$	-5	.	-1	0	1	.	.	1	.
2	$x_1$	10	1	.	-1	0	.	.	.	0
	$x_2$	5	.	1	0	-1	.	.	0	1
	$x_5$	5	.	.	1	1	1	.	-1	-1
	$x_6$	10	.	.	-1	4	.	1	1	-4
	$-z$	50	.	.	-3	-4	.	.	3	4
	$-w$	0	.	.	0	0	.	.	1	1

На этой стадии минимизирована функция  $w$ , переменные  $x_7$  и  $x_8$  небазисные и потому равны 0. Заметим, что можно было бы пренебречь  $x_7$ , еще на итерации 1 и уж точно с настоящего момента можно пренебречь и  $x_7$ , и  $x_8$ . Переменная  $x_7$  сохранена просто для того, чтобы показать, что в оптимальное решение для функции  $w$  и  $x_7$ , и  $x_8$  входят с коэффициентом 1, когда значение функции  $w$  равно 0 ( $-w + x_7 + x_8 = 0$ ). Поскольку выражение для функции  $z$ , приведенной к данному базису, сохраняется, можно минимизировать функцию  $z$  по-настоящему. Сейчас мы находимся в точке Р (рис. 1.2). Этап I задачи завершен, и конечная таблица без последних двух столбцов и без последней строки является входной для этапа II. Таблицы этапа II имеют следующий вид:

Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
2	$x_1$	10	1	.	-1	0	.	.
	$x_2$	5	.	1	0	-1	.	.
	$x_5$	5	.	.	1	1	1	.
	$x_6$	10	.	.	-1	4	.	1
	$-z$	50	.	.	-3	-4	.	.
3	$x_1$	10	1	.	-1	.	.	0
	$x_2$	15/2	.	1	-1/4	.	.	1/4
	$x_5$	5/2	.	.	5/4*	.	1	-1/4
	$x_4$	5/2	.	.	-1/4	1	.	1/4
	$-z$	60	.	.		.	.	1
4	$x_1$	12	1	.	.	.	4/5	-1/5
	$x_2$	8	.	1	.	.	1/5	1/5
	$x_3$	2	.	.	1	.	4/5	-1/5
	$x_4$	3	.	.	.	1	1/5	1/5
	$-z$	68	.	.	.	.	16/5	1/5

Последовательные таблицы 2, 3, 4 соответствуют точкам Р, Q, R (рис. 1.2). Последняя таблица оптимальна, так что минимум функции  $z$  равен -68 при  $x_1 = 12$ ,  $x_2 = 8$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$ .

Поскольку дополнительные переменные  $x_3$  и  $x_4$  принимают положительные значения при оптимальном решении, видно, что ограничения в оптимальном решении, в которые эти переменные входят, превращаются в строгие неравенства.

## Пример 2

(это - пример 4 разд 1.2).

Минимизировать функцию  $2x_1 + 3x_2 = z$

при ограничениях  $x_1, x_2 \geq 0$ ,

$$x_1 + x_2 \geq 10,$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15.$$

Приведем ограничения к стандартной форме

$$x_1 + x_2 - x_3 = 10,$$

$$3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15, \quad (2.26)$$

$$2x_1 + 3x_2 = z.$$

Изменим первое ограничение, введя искусственную переменную  $x_5$  и минимизировав функцию  $w = x_5$ . В канонической форме получим  $-x_1 - x_2 + x_3 = w - 10$ . Симплекс-таблицы выглядят следующим образом:

Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	$x_5$	10	1	1	-1	.	1
	$x_4$	15	3*	5	0	1	.
	$-z$	0	2	3	0	.	.
	$-w$	-10	-1	-1	1	.	.
1	$x_5$	5	.	-2/3	-1	-1/3	1
	$x_1$	5	1	5/3	0	1/3	.
	$-z$	-10	.	-1/3	0	-2/3	.
	$-w$	-5	.	2/3	1	1/3	.

На этой стадии функция  $w$  минимизирована. Все коэффициенты в строке  $w$  таблицы положительны. Но функция  $w$  не обратилась в 0, а  $x_5 = 5$ . Мы не можем найти допустимое решение неизменных ограничений (2.26), что иллюстрирует и рис. 1.5. Этап I задачи завершен, но мы не можем перейти к этапу II, поскольку исходные ограничения не имеют допустимого базисного решения.

## Пример 3

Фирме требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03 % и с примесью пепла не более 3,25 %. Доступны три сорта угля А, В, С по следующим ценам (за 1 т) :

Сорт угля	Содержание примеси фосфора, %	Содержание примеси золы, %	Цена, дол.
А	0.06	2.0	30
В	0.04	4.0	30
С	0.02	3.0	45

Как их следует смешать, чтобы удовлетворить ограничениям на примеси и минимизировать цену? (Это - упр. 8 разд. 1.6, в котором рекомендовалось свести эту задачу к двухмерной.) Используя симплекс-метод, можно решать эту задачу в той форме, в которой она поставлена.

Пусть 1 т смеси содержит  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  угля типа А, В и С соответственно.

Тогда  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ . При этом должны выполняться следующие ограничения:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\0,06x_1 + 0,04x_2 + 0,02x_3 &\leq 0,03, \\2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leq 3,25.\end{aligned}$$

При этих ограничениях необходимо, чтобы значение функции  $z = 30x_1 + 30x_2 + 45x_3$  было минимально.

Если добавить дополнительные переменные ко второму и третьему ограничению (предварительно умножив последнее на 100), получим задачу в стандартной форме.

Для неотрицательных  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ )

минимизировать  $30x_1 + 30x_2 + 45x_3 = z$

при ограничениях

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3, \\2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_5 &= 3 \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Базисное допустимое решение неочевидно. Будем обращаться с первым ограничением в виде равенства так же, как с ограничениями в виде неравенств в предыдущих примерах. Добавим искусственную переменную  $x_6$ . Затем минимизируем функцию  $w = x_6$  и используем полученное оптимальное решение в качестве начальной точки для минимизации функции  $z$ .

Таким образом, ограничения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 1, \\6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3, \\2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_5 &= 3 \frac{1}{4}, \\30x_1 + 30x_2 + 45x_3 &= z,\end{aligned}$$

при этом допустимые базисные решения являются  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ,  $x_6 = 1$ ,  $x_4 = 3$ ,  $x_5 = 3\frac{1}{4}$ . Выразим  $w$  через небазисные переменные, исключив  $x_6$ . Для этого надо просто вычесть первое равенство (единственное равенство, содержащее  $x_6$ , причем с коэффициентом 1) из выражения для функции  $w$ , получим

$$-x_1 - x_2 - x_3 = w - 1.$$

Последовательные вычисления таблиц приведены ниже:

Итера-ция	Базис	Значе-ние	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
0	$x_6$	1	1	1	1*	.	.	1

	$x_4$	3	6	4	5	1	.	.
	$x_5$	$3\frac{1}{4}$	2	4	3	.	1	.
	$-z$	0	30	30	45	.	.	.
	$-w$	-1	-1	-1	-1	.	.	.
1	$x_3$	1	1	1	1	.	.	1
	$x_4$	2	4	2	.	1	.	-2
	$x_5$	$1/4$	-1	$1^*$	.	.	1	-3
	$-z$	-45	-15	-15	.	.	.	-45
	$-w$	0	0	0	.	.	.	1
2	$x_3$	$3/4$	2	.	1	.	-1	
	$x_4$	$1/2$	$6^*$	.	.	1	-2	
	$x_2$	$1/4$	-1	1	.	.	.	
	$-z$	$-41\frac{1}{4}$	-30	.	.	.	15	
3		$7/12$	.	.	1	$-1/3$	$-1/3$	
	$x_1$	$1/12$	1	.	.	$1/6$	$-1/3$	
	$x_2$	$1/3$	.	1	.	$1/6$	$2/3$	
	$-z$	$-38\frac{3}{4}$	.	.	.	5	5	

Этап I задачи заканчивается после итерации 1; затем значения  $w$  и  $x_6$  игнорируются. Минимальное значение функции  $z$  равно  $38\frac{3}{4}$  дол.; оно достигается при  $x_1 = 1/12$ ,  $x_2 = 1/3$ ,  $x_3 = 7/12$ .

## 2.4. ПОЛНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Как было показано, ограничения в задачах линейного программирования могут быть заданы в разных видах. Базисное допустимое решение не всегда очевидно. Таким образом, в программе для ЭВМ должны вводиться автоматически дополнительные и искусственные переменные и должно порождаться первое базисное допустимое решение.

Предположим, что в задачу входят  $M$  ограничений и  $N$  (исходных) данных. Пусть среди них содержатся  $GC$  ограничений в виде неравенств со знаком  $\geq$ ,  $EC$  - в виде равенств со знаком  $=$  и  $LC$  в виде неравенств со знаком  $\leq$  и пусть они расположены именно в таком порядке. Предположим, что правые части ограничений положительны. При этом не происходит потери общности. Исходная задача имеет следующий вид:

минимизировать  $c_1 x_1 + \dots + c_N x_N = z$

при ограничениях  $x_i \geq 0, (i = 1, \dots, N)$

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11}x_1 + \dots + a_{1N}x_N & \geq & b_1 \\
 & \geq & b_{GC} \\
 & = & b_{GC+1} \\
 & = & b_{GC+EC} \\
 & \geq & b_{GC+EC+1} \\
 a_{M1}x_1 + \dots + a_{MN}x_N & \leq & b_M
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \geq b_1 \\
 \geq b_{GC} \\
 = b_{GC+1} \\
 = b_{GC+EC}
 \end{array} \right\} \right. \\
 \geq b_{GC+EC+1}
 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l}
 GC \text{ строк} \\
 EC \text{ строк}
 \end{array} \right\} \\
 LC \text{ строк}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{Всего} \\
 M \text{ строк}
 \end{array}
 \end{array}
 \right.$$



В первые GC ограничений вводятся дополнительные переменные  $x_{N+1}, \dots, x_{N+GC}$  с коэффициентом -1. В последние LC ограничений вводятся дополнительные переменные  $x_{N+GC+1}, \dots, x_{N+GC+LC}$  с коэффициентом +1. Искусственные переменные  $x_{N+MK+1}, \dots, x_{N+MK+GC+EC}$  (МК = GC + LC - количество дополнительных переменных) с коэффициентом +1 вводятся в первые GC + EC ограничений. Эти переменные вместе с последними LC дополнительными переменными образуют исходное базисное допустимое решение. Ими являются значения правых частей ограничений.

Искусственная целевая функция  $w$  является суммой искусственных переменных. Выраженная через небазисные переменные, она имеет вид

$$d_1 x_1 + \dots + d_N x_N + \dots + d_{N+MK} x_{N+MK} = w + w_0,$$

где коэффициент  $d_j$  состоит из отрицательного значения суммы, взятой по первым GC + EC строкам коэффициентов при  $x_j$  расширенной матрицы ограничений. Величина  $w_0$  равна сумме правых частей, взятой с противоположным знаком. Величины  $w_0$  и  $d$  содержатся в (M + 2)-и строке расширенной таблицы.

Итак, для этой задачи, в которой все переменные неотрицательны, а GC = 2, EC = 1, LC = 1 (т. е. M = 4, МК = 3) и N = 3, имеем следующие ограничения:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6,$$

$$x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 9,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$

$$-x_1 + x_3 \leq 2$$

и функцию  $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 = z$ , которую необходимо минимизировать. Заполним первую таблицу.

Итера- ция	Базис	Значе- ние	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
0	$x_7$	6	2	3	1	-1	0	.	1	.	.
	$x_8$	9	1	5	6	0	-1	.	.	1	.
	$x_9$	4	1	1	1	0	0	.	.	.	1
	$x_6$	2	-1	0	1	0	0	1	.	.	.
	$-z$	0	-1	-2	-3	0	0	.	.	.	.
	$-w$	-19	-4	-9	-8	1	1	.	.	.	.

Для вычислений можно использовать предыдущую программу (строки с 500-й по 1180-ую). Необходимо знать, на каком этапе задачи (I или II) в настоящий момент производятся вычисления. На этапе I L = 1 (в программе); целевая функция  $z$  хранится в строке M + 2, а с выражением для функции  $z$  следует обращаться так же, как со всеми остальными ограничениями. На этапе II полагаем L = 0; целевая функция  $z$  хранится в строке M + 1, а столбцы с искусственными переменными игнорируются. Когда в конце этапа I задачи минимизирована функция  $w$ , необходимо проверить, достигло ли ее значение 0 с точностью до ошибок округления, и приравнять L 0, прежде чем переходить к этапу II задачи. Ниже приведена распечатка текста программы.

READY.

10 PRINT "РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМЛЕКС-МЕТОДОМ"

```

15 READ ZZ
18 REM ПРИ ZZ=+1 ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ТАБЛИЦА ВЫВОДИТСЯ НА
19 REM ПЕЧАТЬ;ПРИ ZZ=-1 НЕ ВЫВОДИТСЯ
20 REM ВВЕСТИ КОЛИЧЕСТВО ВИДОВ ОГРАНИЧЕНИЙ И КОЛИЧЕСТВО
22 REM ПЕРЕМЕННЫХ
25 READ GC,EC,LC,N
30 MM=GC+EC:M=MM+LC:MK=GC+LC:N1=MK+N
40 P=N1+MM:M1=M+1:M2=M+2:N0=N1
50 DIM A(M2,P),BS(M),V(M2),NB(P),SL(P)
55 REM ВВЕСТИ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕНИЙ И ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ
60 FOR I=1 TO M1:FOR J=1 TO N:READ A(I,J):NEXT J:NEXT I
90 REM ЗАДАТЬ ОСЛАБЛЕННЫЕ, ИСКУССТВЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ,
95 REM ПОМЕСТИТЬ БАЗИС И ПРОЧИТАТЬ ПЕРЕМЕННЫЕ В НУЛЕВОЙ
98 REM СТОЛБЕЦ
100 IF GC =0 THEN GOTO 150
110 FOR I=1 TO GC
120 A(I,N+I)=-1:A(I,N1+I)=1
130 BS(I)=N1+I:READ A(I,0)
140 NEXT I
150 IF EC=0 THEN GOTO 200
160 FOR I=GC+1 TO MM
170 A(I,N1+I)=1:BS(I)=N1+1:READ A(I,0)
180 NEXT I
200 IF LC=0 THEN GOTO 240
210 FOR I=MM+1 TO M
230 A(I,N+I-EC)=1:BS(I)=N+I-EC:READ A(I,0)
240 IF MM=0 THEN PRINT "ОТСУТСТВУЕТ ЭТАП 1 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ"
250 REM ЗАДАТЬ ИСКУССТВЕННУЮ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЭТАПА 1
260 L=1:N0=P:REM N0 ЯВЛЯЕТСЯ НОМЕРОМ НУЖНОГО СТОЛБЦА
270 FOR I=1 TO MM:FOR J=0 TO N1
280 A(M2,J)=A(M2,J)-A(I,J)
290 NEXT J:NEXT I
300 ML=M1+L:REM ML=M+2 ДЛЯ ЭТАПА 1;ML=M+1 ДЛЯ ЭТАПА 2
320 IF ZZ>=0 THEN PRINT"ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА"
325 GOSUB 3000:STOP
330 REM ПОМЕСТИТЬ НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ;NB(J)=0,ЕСЛИ
335 REM J-НЕБАЗИСНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ
350 FOR I=1 TO M:NBS(BS(I))=1:NEXT I
400 ZERO = 1E-08
490 REM НАЙТИ НАИМЕНЬШИЙ КОЭФФИЦИЕНТ В СТРОКЕ ЦЕЛЕВОЙ
495 REM ФУНКЦИИ, Т.Е. СТРОКУ ML
500 MIN=-ZERO:S=0:PV=0:M1=M1+L
510 FOR J=1 TO N0
520 IF NB(J)=1 THEN GOTO 550
530 IF A(ML,J)>=MIN THEN GOTO 550
540 MIN =A(ML,J):S=J
550 NEXT J
560 REM ЕСЛИ S=0,ТО ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ И
565 REM МИНИМУМ НАЙДЕН
570 IF S=0 THEN GOTO 1900
740 REM НАЙТИ СТРОКУ ПЕРЕМЕННЫХ,КОТОРУЮ СЛЕДУЕТ
745 REM ИСКЛЮЧИТЬ ИЗ БАЗИСА ПО УСЛОВИЮ МИНИМУМА VI/A(IS)
750 MIN =1E20:R=0
760 FOR I=1 TO M
770 IF A(I,S)<=ZERO THEN GOTO 810
780 RT=A(I,0)/A(I,S)
790 IF RT>=MIN THEN GOTO 810
800 R=I:MIN=A(I,0)/A(I,S)

```

```

810 NEXT I
890 REM ЕСЛИ R=0,ТО ИМЕЕТ МЕСТО РЕШЕНИЕ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ
900 IF R=0 THEN GOTO 1800
910 PRINT "ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ";R;"СТОЛБЦА";S:PRINT""
990 REM РАЗДЕЛИТЬ ВЕДУЩУЮ СТРОКУ НА ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ
1000 PV=A(R,S)
1010 FOR J=0 TO N0:A(R,J)=A(R,J)/PV:NEXT J
1040 REM ВЫЧИСЛИТЬ НОВУЮ КАНОНИЧЕСКУЮ ФОРМУ,ЗАПОМНИВ
1045 REM ВЕДУЩИЙ СТОЛБЕЦ ДО ЕГО ИЗМЕНЕНИЯ
1050 FOR I=1 TO ML:V(I)=A(I,S):NEXT I
1070 FOR l=1 TO ML
1080 IF I=R THEN GOTO 1120
1090 FOR J=0 TO N0
1100 A(I,J)=A(I,J)-V(I)*A(R,J)
1110 NEXT J
1120 NEXT I
1150 REM ПЕРЕНАЗНАЧИТЬ В ПОВТОРНО ПОМЕТИТЬ БАЗИСНЫЕ
1155 REM И НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
1160 NB(BS(R))=0:NB(S)=1:BS(R)=S
1170 REM СЧЕТЧИК ИТЕРАЦИЙ
1180 K=K+1
1190 REM НАПЕЧАТАТЬ НОВУЮ ТАБЛИЦУ
1200 IF ZZ>=0 THEN PRINT"ИТЕРАЦИЯ"K:GOSUB 3000:STOP
1240 REM ПОВТОРИТЬ ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС
1250 GOTO 500
1800 PRINT "ПЕРЕМЕННАЯ "S" НЕ ИМЕЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ"
1810 GOSUB 3000:STOP
1820 GOTO 2500
1900 IF L=0 THEN GOTO 2000
1905 REM ДЛЯ ЭТАПА 2 ЭТА ТОЧКА ЯВЛЯЕТСЯ МИНИМУМОМ.ЕСЛИ
1908 REM МЫ НАХОДИМСЯ НА ЭТАПЕ 1,ТО ПЕРЕЙТИ К ЭТАПУ 2
1910 REM ПРОВЕРИТЬ,ЧТО W СТАЛО РАВНО 0
1920 IF ABS(A(ML,0))>=1E-08 THEN GOTO 1960
1930 PRINT "ЭТАП 1 УСПЕШНО ЗАВЕРШЕН"
1940 L=0:N0=N1:REM ЗАДАТЬ L И НОМЕР СТОЛБЦА ДЛЯ ЭТАПА 2
1950 GOTO 500
1960 PRINT "ОГРАНИЧЕНИЯ НЕ ИМЕЮТ ДОПУСТИМОГО РЕШЕНИЯ"
1970 PRINT "СУММА ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ РАВНА";:PRINT -A(ML,0)
1980 GOSUB 3000:STOP
2000 PRINT "ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ"
2010 PRINT "ОГРАНИЧЕНИЕ БАЗИС      ЗНАЧЕНИЕ"
2020 PB=144
2030 FOR I=1 TO M:SL(BS(I))=A(I,0)
2040 PRINT"  ";I;" ":BS(I);
2050 PA=A(I,0):GOSUB9000:PRINT ""
2060 NEXT I
2090 PRINT "МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН ";-A(M1,0)
2100 PRINT "ОГРАНИЧЕНИЕ СОСТОЯНИЕ      ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ"
2120 FOR l=1 TO M
2130 PRINT"";I;" ";
2140 IF I<=GC OR I>MM THEN GOTO 2160
2150 PRINT"УРАВНЕНИЕ НЕ РЕШЕНО":GOTO 2180
2160 IF NB(N+1)=1 THEN PRINT"ДОПОЛ.ПЕРЕМ.";
2165 PA=SL(N+1):GOSUB 9000:PRINT"":GOTO 2180
2170 PRINT "ОГРАННННННННН      0"
2180 NEXT I
2300 GOSUB 3000
2500 END

```

```

3000 PRINT "БАЗИС  ЗНАЧЕНИЕ";
3010 FOR J=1 TO N:PRINT"  X"J" ";:NEXT J
3020 PRINT""
3030 PB=122
3040 FOR I=1 TO M1
3050 IF I=M1 THEN PRINT"-Z";:GOTO 3080
3060 PRINT BS(I);
3080 FOR J=0 TO N
3090 PA=A(I,J):GOSUB 9000
3100 NEXT J
3110 PRINT""
3120 NEXT I:PRINT""
3200 RETURN
4000 DATA 1
4010 DATA 2,0,2,2
4020 DATA 1,0,0,1,1,1,-1,4,-3,-4
4030 DATA 10,5,20,20
9000 PC=INT(PB/100)
9010 P$= ""
9020 IF PC=0 THEN PRINT"":GOTO 9040
9030 PRINT LEFT$(P$,PC);
9040 PC=PB-100*PC
9050 PD=INT(PC/10):PC=PC-10*PD
9060 IF PD=0 THEN PD=1
9070 IF PA<0 THEN P$=P$+"-"
9080 PE=ABS(PA)
9090 PE=PE+5*10^(-1-PC)
9100 IF PE>=10^PD THEN PRINT PA;:RETURN
9110 P$=P$+MID$(STR$(INT(PE)),2,PD)
9120 PRINT RIGHT$(P$,PD+1)
9130 IF PC=0 THEN RETURN
9140 PRINT".";
9150 PE=INT((PE-INT(PE))*10^PC)
9160 P$="000000000"
9170 P$=P$+MID$(STR$(PE),2,PC)
9180 PRINT RIGHT$(P$,PC);:RETURN
READY.

```

Если учесть все замечания, а также комментарии в тексте программы, то будет понятно, каким способом программа вводит дополнительные и искусственные переменные (строки с 100-й по 230-ую) и при необходимости - искусственную целевую функцию (строки с 250-й по 290-ую). Фактически вычисления симплекс-методом этапов I и II задачи следуют приведенной выше программе, которую теперь можно заменить на более проработанную версию. Когда все коэффициенты целевой функции положительны, следует позаботиться о том, чтобы программа не закончила работу, если вычисления осуществляются на этапе I. В этом случае переходим к этапу II, просто заменив L с 1 на 0, что изменит ML в строке 500 с  $M + 2$  на  $M + 1$  и NO с P (количество столбцов, соответствующих исходным, дополнительным и искусственным переменным) на N1 (количество столбцов, соответствующих исходным и дополнительным переменным). При этом следует удостовериться, что все искусственные переменные обратились в 0.

В конечной распечатке результатов (строки с 2000-й по 2300-ую) выводятся значения базисных переменных и признаки того, удовлетворяются ли ограничения как строгие неравенства или (связывающие) равенства. Это может быть полезно с точки зрения практической интерпретации, так как позволяет судить о том, какие из ресурсов исчерпаны. Снова используется форматирующая процедура 9000 (см. приложение). Форматные переменные в строках 2020 - 3030 могут быть изменены. При работе с большим количеством

переменных оператор печати в строке 3000 следует изменить. Ее, конечно, можно подавить, скажем присвоив значение -1 первой величине ZZ из области данных.

### Пример 1

(это - пример 1 разд.2.3)

Найти такие неотрицательные  $x_1, x_2$ , что

$$x_1 \geq 10,$$

$$x_2 \geq 5,$$

$$x_1 + x_2 \leq 20,$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 20.$$

и минимизировать функцию  $-3x_1 - 4x_2 = z$ .

В этом примере GC = 2, EC = 0, LC = 2, N = 2. Соответствующие данные содержатся в строках 4000-4030. В распечатке приводятся вычисленные ранее таблицы:

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ  
ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X4	X5	X6	X7	X8
7	10.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
8	5.00	0.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
5	20.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
6	20.00	-1.00	4.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
-Z	0.00	-3.00	-4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-W	-15.00	-1.00	-1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 1

ИТЕРАЦИЯ 1

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7	X 8
1	10.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
8	5.00	0.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
5	10.00	0.00	1.00	1.00	0.00	1.00	0.00	-1.00	0.00
6	30.00	0.00	4.00	-1.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00
-Z	30.00	0.00	-4.00	-3.00	0.00	0.00	8.00	3.00	0.00
-W	-5.00	0.00	-1.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 2 СТОЛБЦА 2

ИТЕРАЦИЯ 2

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7	X 8
1	10.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
2	5.00	0.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
5	5.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	0.00	-1.00	-1.00
6	10.00	0.00	0.00	-1.00	4.00	0.00	1.00	1.00	-4.00
-Z	50.00	0.00	0.00	-3.00	-4.00	0.00	0.00	3.00	4.00
-W	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00

ЭТАП 1 УСПЕШНО ЗАВЕРЕН

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 4 СТОЛБЦА 4

ИТЕРАЦИЯ 3

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6
1	10.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00
2	7.50	0.00	1.00	-0.25	0.00	0.00	0.25
5	2.50	0.00	0.00	1.25	0.00	1.00	-0.25
4	2.50	0.00	0.00	-0.25	1.00	0.00	0.25

-Z	60.00	0.00	0.00	-4.00	0.00	0.00	1.00
----	-------	------	------	-------	------	------	------

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 3    СТОЛБЦА 3

ИТЕРАЦИЯ 4

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6
1	12.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.80	-0.20
2	8.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.20	0.20
3	2.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.80	-0.20
4	3.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.20	0.20
-Z	68.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.20	0.20

ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

ОГРАНИЧЕНИЕ	БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ
1	1	12.0000
2	2	8.0000
3	3	2.0000
4	4	3.0000

МИНИМУМ ФУНКЦИИ РАВЕН -68

ОГРАНИЧЕНИЕ	СОСТОЯНИЕ	ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
1	ДОПОЛ.ПЕРЕМ.	2.0000
2	ДОПОЛ.ПЕРЕМ.	3.0000
3	ОГРАНИЧЕНИЕ	0
4	ОГРАНИЧЕНИЕ	0

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6
1	12.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.80	-0.20
2	8.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.20	0.20
3	2.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.80	-0.20
4	3.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.20	0.20
-Z	68.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.20	0.20

## 2.5. ПРОБЛЕМЫ ВЫРОЖДЕНИЯ

В рассмотренных выше примерах все базисные переменные были ненулевыми. Ясно, что все небазисные переменные равны 0 по определению. Однако нет никаких препятствий к тому, чтобы одна или несколько переменных обратились в 0. В этом случае базис называют вырожденным и могут возникнуть трудности.

Предположим, что одна из базисных переменных обратилась в 0 ( $b'_r = 0$ ). Если  $x_s$  - свободная переменная, которая должна быть введена в базис, то, если переменная  $a'_{rs}$  положительна, она должна быть ведущей; тогда  $b'_r/a'_{rs} = 0$  и поэтому

$$\min_{\substack{i \\ a'_{is} > 0}} \frac{b'_i}{a'_{is}} = 0.$$

Следовательно,  $x_s$  войдет в базис со значением 0 и новый базис тоже будет вырожден. Значение функции  $z$  останется без изменений. Таким образом, если на следующем шаге итерации  $x_s$  можно было бы обратно заменить на  $x_r$ , то образовался бы замкнутый цикл и дальнейшие итерации не приводили бы к уменьшению функции  $z$ .

### Пример 1

Найти такие неотрицательные  $x_1, x_2$ , что

$$2x_1 - x_2 \leq 4,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2,$$

$$x_1 + x_2 \leq 5,$$

и минимизировать функцию  
 $-3x_1 + x_2 = z$ .

Графическое решение (рис. 2.2) показывает, что точка минимума - это точка (3,2), где  $z = -7$ . Вырожденность возникает, поскольку прямые, соответствующие ограничениям, пересекаются в одной точке (2, 0). Обычно вершина является пересечением всего двух прямых (в двумерном случае). В данном примере в вершине пересекаются три прямые.

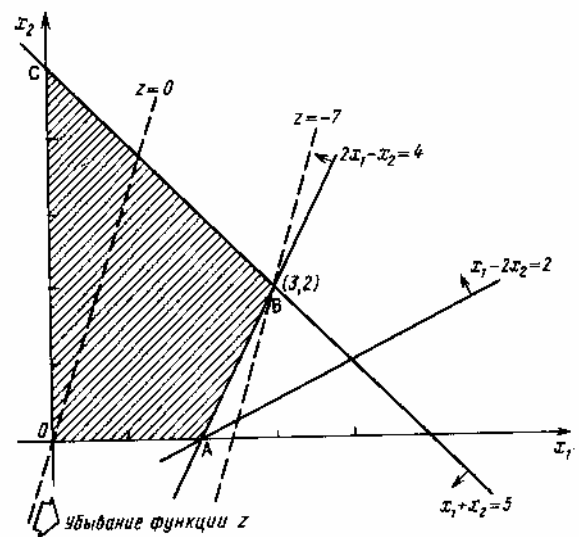


Рис. 2.2

При использовании симплекс-метода первая таблица имеет следующий вид:

Итера-ция	Базис	Значе-ние	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	$x_3$	4	2*	-1	1	.	.
	$x_4$	2	1*	-2	.	.	.
	$x_5$	5	1	1	.	.	1
	$-z$	0	-3	1	.	.	.

Переменная  $x_1$  входит в базис. Но какую переменную исключить из базиса:  $x_3$  или  $x_4$ ? В точке минимума имеет место совпадение  $4/2 = 2/1$  (поэтому в таблице звездочкой обозначены два коэффициента). Какую переменную ни выберешь, другая на следующей итерации обратится в 0, и базис будет вырожден. Пусть выбрана переменная  $x_3$ . Тогда получаем следующую таблицу:

Итера-ция	Базис	Значе-ние	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	$x_1$	2	1	-1/2	1/2	.	.
	$x_4$	0	.	-3/2	-1/2	1	.
	$x_5$	3	.	3/2	-1/2	.	1
	$-z$	6	.	-1/2	3/2	.	.
2	$x_1$	3	1	.	1/3	.	1/3
	$x_4$	3	.	.	-1	1	1
	$x_2$	2	.	1	-1/3	.	2/3
	$-z$	7	.	.	4/3	.	1/3

Итак, минимум функции  $z$  равен -7 и достигается при  $x_1 = 3, x_2 = 2$ .

Предположим, что для исключения из базиса на итерации 0 выбрана переменная  $x_4$ . Полученные таблицы приведены ниже. Окончательное решение то же, что и выше.

Итера-ция	Базис	Значе-ние	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
-----------	-------	-----------	-------	-------	-------	-------	-------

1	$x_3$	0	.	3*	1	-2	.
	$x_1$	2	1	-2	.	1	.
	$x_5$	3	.	3	.	-1	1
	$-z$	6	.	-5	.	3	.
2	$x_2$	0	.	1	1/3	-2/3	.
	$x_1$	2	1	.	2/3	-1/3	.
	$x_5$	3	.	.	-1	1*	1
	$-z$	6	.	.	5/3	-1/3	.
3	$x_2$	2	.	1	-1/3	.	2/3
	$x_1$	3	1	.	1/3	.	1/3
	$x_4$	3	.	.	-1	1	1
	$-z$	7	.	.	4/3	.	1/3

В этом случае вырожденный базис на итерации 1 меняется на вырожденный базис на итерации 2. Переменная  $z$  не меняет значения. Затем происходит перемещение в точку минимума В. Один из способов избежать вырожденности - слегка изменить ограничения, что позволит изменить положение точки А. Данциг предлагает заменять их на следующие ограничения:

$$2x_1 - x_2 \leq 4 + \varepsilon,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2 + \varepsilon^2,$$

где  $\varepsilon$  - малая величина. Так мы избегаем вырожденности, поскольку ограничения в точке А не будут выполняться одновременно. Окрестность точки А примет вид, изображенный на рис. 2.3.

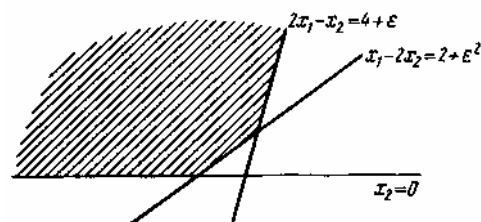


Рис. 2.3

Теперь решим невырожденную задачу. В окончательное решение будет входить  $\varepsilon$ . Затем  $\varepsilon$  следует обратить в 0. Таким образом можно обойти связанные с вырожденностью трудности. Все это может показаться очень сложным, но пусть читатель не волнуется: ниже этот вопрос будет детально рассмотрен.

Если вырожденности нет, то симплекс-методом задача линейного программирования решается за конечное число шагов (разумеется, в предположении, что решение существует).

Это можно легко показать. На любой итерации, как видно из уравнения (2.20), значение целевой функции меняется от  $z'_0$ , скажем, на  $z'_0 + c'_s b_r^+$ , где  $c'_s$  - коэффициент при переменной, которая только что была включена в базис, соответствующий предыдущей целевой функции;  $b_r^+$  - значение, которое она принимает. Далее коэффициент  $c'_s$  строго отрицателен, а значение  $b_r^+$  положительно. Таким образом, функция  $z$  убывает на каждом шаге. Поэтому никогда не происходит возвращения к предыдущему множеству базисных переменных (иначе целевая функция приняла бы то же значение, что и раньше). Поскольку имеется не более  $\binom{n}{m}$  допустимых решений, минимум будет найден не более чем за  $\binom{n}{m}$  итераций.

Если значение  $b_n^+$  обращается в 0, то возвращение к предыдущему базису возможно и приведенное выше рассуждение не применимо. Это называется закливанием. Закливание встречается редко, и его, вероятно, можно избежать при вычислениях вручную.



благодаря правильному выбору<sup>3</sup>. В программах должна быть предусмотрена возможность решить эту проблему. Мы вернемся к этому позже.

## Пример 2

Этот пример иллюстрирует заикливание. Он был построен И. М. Л. Билом.

Найти такие неотрицательные  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , что

$$\frac{1}{4} x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0,$$

$$\frac{1}{2} x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2} x_3 + 3x_4 \leq 0,$$

$$x_3 \leq 1,$$

и минимизировать функцию

$$-\frac{3}{4} x_2 + 20x_2 - \frac{1}{2} x_3 + 6x_4 = z.$$

При решении этой задачи на ЭВМ случайно произошло заикливание. Это свидетельствует о том, что для создания достаточно мощной программы необходимы некоторые изменения. На итерации производится выбор переменной для превращения ее в небазисную переменную (это может быть  $x_5$  или  $x_6$ ). Была выбрана переменная  $x_5$ . На итерации 2 была выбрана переменная  $x_1$ , а не  $x_2$ . На итерации 4 была выбрана переменная  $x_3$ , а не  $x_4$ . Таблица на итерации 6 совпадает с начальной таблицей. ЭВМ будет продолжать вычисления, не уменьшая значения функции  $z$ . При вычислении вручную можно выбрать другие переменные. Читателю предлагается сделать это.

Интересно отметить, что при замене первого ограничения на второе такая проблема не возникает и при вычислении на ЭВМ. Ниже приводится распечатка результатов при решении той же задачи, когда ограничения расположены в следующем порядке:

$$\frac{1}{2} x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2} x_3 + 3x_4 \leq 0,$$

$$\frac{1}{4} x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0,$$

$$x_3 \leq 1,$$

Минимум для функции  $z$  достигается при  $x_1 = 1, x_3 = 1, x_6 = 0,75$  и остальных  $x_i = 0$ .

Минимальное значение функции  $z = -1,25$ .

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ  
ОТСУТСТВУЕТ ЭТАП 1 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
5	0.000	0.250	-8.000	-1.000	9.000	1.000	0.000	0.000
6	0.000	0.500	-12.000	-0.500	3.000	0.000	1.000	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	0.000	-0.750	20.000	-0.500	6.000	0.000	0.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 1

ИТЕРАЦИЯ 1

<sup>3</sup> Автор, по-видимому, имеет в виду выбор небазисных переменных. - Прим. ред.

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
1	0.000	1.000	-32.000	-4.000	36.000	4.000	0.000	0.000
6	0.000	0.000	4.000	1.500	-15.000	-2.000	1.000	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	0.000	0.000	-4.000	-3.500	33.000	3.000	0.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 2 СТОЛБЦА 2

ИТЕРАЦИЯ 2

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
1	0.000	1.000	0.000	8.000	-84.000	-12.000	8.000	0.000
2	0.000	0.000	1.000	0.375	-3.750	-0.500	0.250	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	0.000	0.000	0.000	-2.000	18.000	1.000	1.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 3

ИТЕРАЦИЯ 3

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
3	0.000	0.125	0.000	1.000	-10.500	-1.500	1.000	0.000
2	0.000	-0.047	1.000	0.000	0.188	0.063	-0.125	0.000
7	1.000	-0.125	0.000	0.000	10.500	1.500	-1.000	1.000
-Z	0.000	0.250	0.000	0.000	-3.000	-2.000	3.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 2 СТОЛБЦА 4

ИТЕРАЦИЯ 4

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
3	0.000	-2.500	56.000	1.000	0.000	2.000	-6.000	0.000
4	0.000	-0.250	5.333	0.000	1.000	0.333	-0.667	0.000
7	1.000	2.500	-56.000	0.000	0.000	-2.000	6.000	1.000
-Z	0.000	-0.500	16.000	0.000	0.000	-1.000	1.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 5

ИТЕРАЦИЯ 5

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
5	0.000	-1.250	28.000	0.500	0.000	1.000	-3.000	0.000
4	0.000	0.167	-4.000	-0.167	1.000	0.000	0.333	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	0.000	-1.750	44.000	0.500	0.000	0.000	-2.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 2 СТОЛБЦА 6

ИТЕРАЦИЯ 6

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
5	0.000	0.250	-8.000	-1.000	9.000	1.000	0.000	0.000
6	0.000	0.500	-12.000	-0.500	3.000	0.000	1.000	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	0.000	-0.750	20.000	-0.500	6.000	0.000	0.000	0.000

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ  
ОТСУТСТВУЕТ ЭТАП 1 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
5	0.000	0.500	-12.000	-0.500	3.000	1.000	0.000	0.000
6	0.000	0.250	-8.000	-1.000	9.000	0.000	1.000	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000

-Z      0.000      -0.750    20.000 -0.500    6.000    0.000    0.000    0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 1

ИТЕРАЦИЯ 1

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
1	0.000	1.000	-24.000	-1.000	6.000	2.000	0.000	0.000
6	0.000	0.000	-2.000	-0.750	7.500	-0.500	1.000	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	0.000	0.000	2.000	-1.250	10.500	1.500	0.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 3 СТОЛБЦА 3

ИТЕРАЦИЯ 2

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
1	1.000	1.000	-24.000	0.000	6.000	2.000	0.000	1.000
6	0.750	0.000	-2.000	0.000	7.500	-0.500	1.000	0.750
3	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	1.250	0.000	2.000	0.000	10.500	1.500	0.000	1.250

ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

ОГРАНИЧЕНИЕ	БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ
1	1	1.0000
2	6	0.7500
3	3	1.0000

МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН -1.25

ОГРАНИЧЕНИЕ	СОСТОЯНИЕ	ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
1	ОГРАНИЧЕНИЕ	0
2	ДОПОЛ.ПЕРЕМ.	0.7500
3	ОГРАНИЧЕНИЕ	0

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
1	1.000	1.000	-24.000	0.000	6.000	2.000	0.000	1.000
6	0.750	0.000	-2.000	0.000	7.500	-0.500	1.000	0.750
3	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	1.250	0.000	2.000	0.000	10.500	1.500	0.000	1.250

## 2.6. УПРАЖНЕНИЯ

1. Используйте симплекс-метод для максимизации функции  $3x_1 + 6x_2 + 2x_3$  при ограничениях  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ ,

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 2,$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1.$$

2. Найдите такие  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ , что для них справедливы неравенства

$$-x_2 + 4x_3 \geq 1,$$

$$-x_1 + 5x_2 \leq 1,$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9.$$

и минимизируйте функцию  $2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = z$ .

3. Фирма производит три вида продукции (А, В, С), для выпуска каждого из которых требуется определенное время обработки на всех четырех устройствах I, II, III, IV.

Вид продукции	Время обработки				Прибыль, дол.
	I	II	III	IV	
А	1	3	1	2	3
В	6	1	3	3	6

С	3	3	2	4	4
---	---	---	---	---	---

Пусть время работы на устройствах - соответственно 84, 42, 21 и 42 ч. Определите, какую продукцию и в каких количествах следует производить. (Можете предположить, что рынок сбыта для каждого продукта неограничен; временем, требуемым для переключения устройства в зависимости от вида продукции, можно пренебречь; рассмотрите только задачу максимизации прибыли.)

4. Производитель безалкогольных напитков располагает двумя разливочными машинами А и В. Машина А спроектирована для пол-литровых бутылок, а машина В - для литровых, но каждая из них может использоваться для обоих типов бутылок с некоторой потерей эффективности в соответствии с приведенными в таблице сведениями о работе машин.

Машина	Количество бутылок, производимых в 1 мин	
	Пол-литровые бутылки	Литровые бутылки
А	50	20
В	40	30

Каждая из машин работает ежедневно по 6 ч при пятидневной рабочей неделе. Прибыль от пол-литровой бутылки составляет 4 цента, а от литровой - 10 центов. Недельная продукция не может превосходить 50 000 л; рынок принимает не более 44 000 пол-литровых бутылок и 30 000 литровых.

Производитель хочет максимизировать свою прибыль при имеющихся средствах. Сформулируйте задачу в виде задачи линейного программирования и найдите оптимальное решение.

5. Минимизируйте функцию  $z = 50x_1 + 25x_2$

при ограничениях  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$

$$x_1 + 3x_2 \geq 8,$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 19,$$

$$3x_1 + x_2 \geq 7.$$

6. Максимизируйте функцию  $w = 8y_1 + 19y_2 + 7y_3,$

при ограничениях

$$y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 50,$$

$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 25.$$

7. Производитель элементов центрального отопления изготавливает радиаторы четырех моделей. Ограничения на производство обусловлены количеством рабочей силы и количеством стальных листов, из которых изготавливаются радиаторы.

Модель радиатора	А	В	С	Д
Необходимое количество рабочей силы, человеко-часы	0,5	1,5	2	1,5
Необходимое количество стального листа, м <sup>2</sup>	4	2	6	8
Прибыль от продажи одного радиатора, дол	5	5	12,5	10

Решите эту задачу с максимизацией прибыли в качестве целевой функции, используя симплекс-метод.

8. Небольшая фирма производит два типа подшипников А и В, каждый из которых должен быть обработан на трех станках, а именно на токарном, шлифовальном и сверлильном. Время, требуемое для каждой из стадий производственного процесса, приведено в таблице.

	Время обработки, ч
--	--------------------

Тип подшипника	Время обработки, ч			
	Токарный станок	Шлифовальный станок	Сверлильный станок	Прибыль от продажи одного подшипника, центы
А	0,01	0,02	0,04	80
В	0,02	0,01	0,01	125
Полное возможное время работы в неделю, ч	160	120	150	

Фирма хотела бы производить подшипники в количествах, максимизирующих ее прибыль. Сформулируйте задачу как задачу линейного программирования и получите решение с использованием симплекс-метода. Проверьте решение графически.

9. Минимизируйте функцию  $z = -4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4$

при ограничениях  $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ ,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15,$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120,$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100.$$

10. Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевизора, радио, газет и афиш. Из различных рекламных экспериментов, которые проводились в прошлом, известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 3, 7 и 4 дол. в расчете на 1 дол., затраченный на рекламу.

Распределение рекламного бюджета по различным средствам подчинено следующим ограничениям:

а) полный бюджет не должен превосходить 500 000 дол.;

б) следует расходовать не более 40 % бюджета на телевидение и не более 20 % бюджета на афиши;

в) вследствие привлекательности для подростков радио на него следует расходовать по крайней мере половину того, что планируется на телевидение.

Сформулируйте задачу распределения средств по различным источникам как задачу линейного программирования и используйте симплекс-метод для ее решения.

11. Найдите такие  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ , что выполняются ограничения

$$2x_1 - x_2 \leq 4,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2,$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

и функция  $-x_1 + x_2 = z$  минимальна.

12. Фирма занимается составлением диеты, содержащей по крайней мере 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов. Как дешевле всего достичь этого при указанных в таблице ценах на 1 кг (или 1 л) пяти имеющихся продуктов?

	Хлеб	Соя	Сушеная рыба	Фрукты	Молоко
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	0	0	4	3
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена	12	36	32	18	10

13. Нефтяная компания закупает необработанную нефть из нескольких источников W, X, Y и Z и занимается ее очисткой, вырабатывая различные виды A, B и C, смазочных масел, готовых к продаже. Имеются также ограничения при продаже на количество каждого вида смазочных масел.

Масло	Состав, %	Возможное количество для продажи, галлоны
A	Не меньше 10 (W) Не больше 25 (Z)	90000
B	Не меньше 15 (W)	100000
C	Не меньше 20 (X) Не больше 50 (Y)	120000

Цены (в условных единицах) 1 галлона сырья и смазочных масел приведены ниже.

Сырье				Масло		
X	Y	Z	W	A	B	C
72	60	67	75	90	87	84

Предполагая, что необработанная нефть доступна в неограниченном количестве, сформулируйте задачу максимизации прибыли как задачу линейного программирования и найдите оптимальное решение.

14. Ткацкая фабрика должна работать 24 ч в сутки согласно следующей таблице:

Время суток, ч	2-6	6-10	10-14	14-18	18-22	22-02
Минимальное необходимое количество ткачей	4	8	10	7	12	4

Каждый ткач должен работать подряд 8 ч в день. Найдите минимальное необходимое количество ткачей, удовлетворяющее перечисленным требованиям. Покажите, что расписание работ подчинено ограничениям, имеющим следующий вид:

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & & & + x_6 - x_7 & = 4 \\
 x_1 + x_2 & & & & - x_8 & = 8 \\
 & x_2 + x_3 & & & & - x_9 & = 10 \\
 & & x_3 + x_4 & & & & - x_{10} & = 7 \\
 & & & x_4 + x_5 & & & & - x_{11} & = 12 \\
 & & & & x_5 + x_6 & & & & - x_{12} & = 4
 \end{array}$$

Объясните физический смысл каждой переменной и покажите, что переменные  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_{12}$  образуют допустимый базис. Приведите эту задачу линейного программирования к канонической форме и найдите оптимальное решение, используя симплекс-метод.

15. Минимизируйте  $-3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = z$

при ограничениях  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 6.$$

16. Измените приведенные программы так, чтобы переменная, выбранная для включения в базис на очередной итерации, была первой из имеющих отрицательный коэффициент переменных. Проверьте полученную программу на задачах, приведенных в упражнениях. Приводит ли это изменение к заметному увеличению времени вычислений?

17. Условия неотрицательности линейного программирования могут быть обобщены к виду  $l_j \leq x_j \leq u_j$ , где  $l_j$  и  $u_j$  - нижняя и верхняя границы для переменной  $x_j$ . Ясно, что такие условия могут быть введены как дополнительные ограничения.

Однако имеется укороченная процедура, основанная на модификации симплекс-метода. Она рассматривается в монографии У. У. Гарвина [ 8].

Обратитесь к этой работе и попытайтесь внести необходимые изменения в программы. Сравните, что лучше: введение условий как дополнительных ограничений или использование укороченной процедуры?

## ГЛАВА 3 АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ

### 3.1. ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА И СИМПЛЕКС-МНОЖИТЕЛИ

Относительно уравнения (2.7) выше было указано, что канонический вид для некоторого базиса может быть получен умножением вектора исходных ограничений на матрицу, полученную обращением этого базиса. Таким образом, если для общей задачи линейного программирования с  $m$  ограничениями и  $n$  неотрицательными переменными вида

$$Ax = e \quad (3.1)$$

через  $B$  обозначена подматрица  $A$ , состоящая из  $m$  столбцов, соответствующих базисным переменным, так что  $A$  можно записать в виде

$$A = (BR) \quad (3.2)$$

где  $B$  - матрица из базисных переменных  $m * m$ , а  $R$  — матрица небазисных переменных  $m * (n - m)$ , то каноническая форма для базиса получается умножением уравнения

$$(BR)x = e \quad (3.3)$$

на матрицу  $B^{-1}$ . Тогда получим соотношение

$$(I_m B^{-1}R)x = B^{-1}e = e^{-1} \quad (3.4)$$

что соответствует канонической форме для ограничений.

Симплекс-метод не состоит в непосредственном вычислении обратной матрицы. Этот метод — итеративный; по существу, он обращает базис, и это обращение может быть найдено из таблиц вычислений симплекс-методом.

Если  $a_j$  — столбец из коэффициентов при переменной  $x_j$  в первом ограничении в форме неравенства, то

$$a'_j = B^{-1}a_j \quad (3.5)$$

представляет собой столбец из коэффициентов при  $x_j$  в канонической форме. Если  $x_j$  - дополнительная переменная из ограничений в виде неравенств со знаком  $\leq$ , то

$$a_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ причем } 1 \text{ находится в } p\text{-ой строке,}$$

а  $a'_j$  —  $p$ -й столбец матрицы  $B^{-1}$ . Если  $x_k$  — дополнительная переменная из ограничения в виде неравенств со знаком  $\geq$ , то

$$a_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ причем } 1 \text{ находится в } q\text{-ой строке,}$$

а  $a'_k$  -  $q$ -й столбец матрицы  $B^{-1}$ , взятый с противоположным знаком.

В качестве иллюстрации рассмотрим первую и последнюю таблицы примера 1 разд.2.1.

Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	$x_3$	1700	3	4	1	
	$x_4$	1600	2	5		1
	-z	0	-2	-4		

Это - первая таблица.



Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
2	$x_1$	300	1		5/7	-4/7
	$x_2$	200		1	-2/7	3/7
	-z	1400			2/7	4/7

А это — конечная оптимальная таблица.

Оптимальный базис —  $(x_1, x_2)$ . Матрица коэффициентов этого базиса для ограничений на итерации 0 имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

В первой канонической форме матрица коэффициентов при  $(x_3, x_4)$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В конечной таблице она принимает вид

$$B^{-1}I_2 = B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{pmatrix},$$

и легко проверить, что эта матрица - действительно матрица  $B^{-1}$ .

Таким же образом рассмотрим первую и последнюю таблицы примера 1 разд.2.3. Дополнительным переменным  $x_3, x_4, x_5, x_6$  соответствует матрица из коэффициентов первой таблицы, т. е.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Окончательному базису  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  соответствует матрица из коэффициентов первой таблицы, т. е.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В окончательной таблице дополнительным переменным  $x_3, x_4, x_5, x_6$  соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 1 & 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

поэтому (обратите внимание на изменение в первых двух столбцах) матрица  $B^{-1}$  представляет собой матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ -1 & 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & -1 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Читателю рекомендуется вернуться к другим примерам и получить обращения базисов. Значения базисных переменных вычисляются по формуле  $b' = B^{-1}b$ , что также можно проверить.

минимизировать функцию  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = Z$

[illegible]

$$x_1 \left( c_1 + \sum_{i=1}^m a_{i1} \pi_i \right) + x_2 \left( c_2 + \sum_{i=1}^m a_{i2} \pi_i \right) + \dots + x_n \left( c_n + \sum_{i=1}^m a_{in} \pi_i \right) = z + \sum \theta_i \pi_i \quad (3.7)$$
$$\begin{aligned} a_{11}\pi_1 + a_{21}\pi_2 + \dots + a_{m1}\pi_m &= -c_1, \\ a_{12}\pi_1 + a_{22}\pi_2 + \dots + a_{m2}\pi_m &= -c_2, \\ a_{13}\pi_1 + a_{23}\pi_2 + \dots + a_{m3}\pi_m &= -c_3, \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } B^T \pi = -c_B, \quad (3.8)$$

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_m \end{pmatrix}, m o \pi = -(B^{-1})^T c_B. \quad (3.9)$$

Пусть  $x_j$  — дополнительная переменная, которая не входила в целевую функцию в исходном виде. Если переменная  $x_j$  появилась из  $r$ -го ограничения в виде неравенств со знаком  $\leq$ , то коэффициент при ней 1 (если задача задана в стандартной форме) равен  $+1$ . Переменная  $x_j$  нигде больше не входит. Поэтому ясно, что коэффициент при ней в оптимальном виде для функции  $z$  будет  $\pi_r$ . Подобным образом если  $x_k$  — новая переменная в  $q$ -м ограничении типа  $\geq$ , то коэффициент при ней в оптимальном виде для функции  $z$  будет  $\pi_q$ .

Ограничения и целевая функция имеют следующий исходный вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700 \times \pi_1 (= 2/7) \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600 \times \pi_{21} (= 4/7) \\ -2x_1 - 4x_2 = z. \end{cases}$$

58

$$x_1(-2+3\times\frac{2}{7}+2\times\frac{4}{7})+x_2(-4+4\times\frac{2}{7}+5\times\frac{4}{7})+\frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4=z+1700\times\frac{2}{7}+1600\times\frac{4}{7},$$

$$т.е. \frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4=z+1400, \quad (3.10)$$

что и является окончательным видом для функции  $z$ .

Далее из уравнения (3.7) для функции  $z$  в окончательном виде ясно, что коэффициенты при базисных переменных будут нулевыми благодаря выбору  $\pi_i$ , а коэффициенты при небазисных переменных будут положительны. При этом (так как небазисные элементы равны 0) каждое слагаемое в левой части уравнения (3.7) равно 0; либо переменная, либо коэффициент при ней равны 0. Следовательно, оптимальное значение для функции  $z$  определяется формулой

$$z^{opt} + \sum \epsilon_i \pi_i = 0,$$

т.е. (3.11)

$$z^{opt} = -\sum \epsilon_i \pi_i$$

Для только что рассмотренного примера это очевидно (см. уравнение (3.10)).

Для примера 2 разд 2.3 коэффициенты при  $x_3, x_4, x_5, x_6$  в конечной таблице равны (0, 0, 16/5, 1/5), а симплекс-множители равны (-0, -0, 16/5, 1/5) (заметим, что в первых двух случаях поменялся знак; в рассматриваемом случае это не имеет значения).

Проверьте, что умножение ограничений в виде равенств (2.22) на (0, 0, 16/5, 1/5) с последующим прибавлением к выражению для функции  $z$ , как указано в (2.22), действительно приводит к канонической форме для функции  $z$ . и что  $-(-0*10 + 0*5 + 16/5*20 + 1/5*20) = -68$ .

Читателю рекомендуется проверить также другие примеры. Это улучшит понимание того, что происходит на самом деле.

В следующем разделе будет показано, что во многих задачах множители  $\pi_i$  допускают важную экономическую интерпретацию. Симплекс-множители и обращение оптимального базиса играют важную роль в понимании того, как меняется решение, если слегка изменить условия задачи.

### 3.2. ЧТО ПОЛУЧАЕТСЯ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЗАДАЧИ

Мы видели, что задачи линейного программирования возникают во многих практических ситуациях. Примеры и упражнения предыдущих двух глав могут дать представление об области применения симплекс-метода. Коэффициенты, входящие в математическую формулировку задачи, часто имеют физический смысл в практических задачах. Коэффициенты целевой функции могут выражать прибыль при коммерческих операциях. Значения, входящие в правые части ограничений, могут выражать ограниченность доступных ресурсов. Можно ожидать, что в подобных случаях эти значения будут меняться, что, в свою очередь, приведет к изменению формулировок математических задач. Например, благодаря повышению производительности труда может увеличиться доступное производственное время станков; пожар на складе может снизить поставки сырья; трудности, связанные с плохой погодой, могут привести к увеличению прибыли от продажи некоторых наименований товаров. Как действовать в подобных ситуациях?

Один из самых примитивных способов состоит в том, чтобы учесть возникающие физические изменения, поставить новую математическую задачу и решить ее с начала. Однако этот способ может быть весьма неэффективен; он не учитывает полезную работу, проведенную при решении задачи до изменений.

Давайте последовательно рассмотрим:

- 1) изменения в  $b_i$  (значения правых частей);
  - 2) изменения в  $c_j$  (коэффициенты целевой функции);
  - 3) включение дополнительных переменных;
  - 4) включение дополнительных ограничений.
- 1) Изменения в  $b_i$

Пусть исходные ограничения заданы в виде  $Ax=b$  и функция  $z=c^T x$  должна быть минимизирована.

Пусть новая задача формулируется так:

$$Ax = b + \Delta b, \quad \text{где} \quad \Delta b = \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \vdots \\ \Delta b_m \end{pmatrix}$$

с той же целевой функцией  $z=c^T x$

Предположим, что исходная задача решена. Пусть в оптимальном базисе соответствующая подматрица матрицы  $B$  имеет обратную матрицу  $B^{-1}$ . Пусть  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$  являются симплекс-множителями, а значения базисных переменных исходной задачи задаются формулой

$$x_b = B^{-1}b = b' \geq 0. \quad (3.12)$$

Из уравнения (3.7) значение целевой функции выражается следующим образом:

$$z^{opt} = -\sum \bar{c}_i \pi_i, \quad (3.13)$$

причем все

$$c_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i \geq 0 \quad (3.14)$$

(коэффициенты при базисных переменных равны 0, при небазисных переменных  $\geq 0$ ).

Теперь при изменении только коэффициентов  $b_j$ , уравнение (3.14) для новой задачи останется неизменным. Поэтому если базисное решение остается допустимым и для новой формулировки задачи, то оно будет и оптимальным базисным допустимым решением для этой задачи. Новые значения для базисных переменных находятся по формуле

$$x_B^* = B^{-1}(b + \Delta b) = b' + B^{-1} \Delta b. \quad (3.15)$$

Если  $x^* \geq 0$ , то оно будет базисным допустимым значением для новой задачи, а также оптимальным решением уравнения (3.14). Новым значением функции  $z$  будет

$$z^* = -\sum_{i=1}^m (b_i + \Delta b_i) \pi_i, \quad (3.16)$$

Таким образом из уравнения (3.13) можно получить

$$\frac{\partial z^{opt}}{\partial b_i} = -\pi_i, \quad (3.17)$$

где  $z^{opt}$  рассматривается как функция от  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Разумеется, если сильно изменить  $b_i$ , то точка  $x_B^*$ , определяемая уравнением (3.15), будет неоптимальна и задачу придется решать сначала.

### Пример 1

Рассмотрим еще раз пример 1 разд.1.1. (Для удобства повторим задачу.)

Фирма производит две модели А и В сборных книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья высококачественных, досок и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели А требуется 3 м<sup>2</sup> досок, а для изделия модели В - 4 м<sup>2</sup>. Фирма может получить от своих поставщиков до 1700 м<sup>2</sup> досок в неделю. На каждое изделие модели А требуется 12 мин машинного времени, а на изделие модели В — 30 мин. В неделю можно использовать 160 ч машинного времени. Если каждое изделие модели А приносит 2 дол. прибыли, а изделие модели В — 4 дол. прибыли, сколько изделий каждой модели фирме необходимо выпускать в неделю?

Если план выпуска изделий модели А —  $x_1$  единиц, а модели В —  $x_2$  единиц, то задача линейного программирования состоит в том, чтобы найти такие  $x_1, x_2 \geq 0$ , что

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1700,$$

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 160,$$

т.е.

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1700,$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1600,$$

при которых минимизируется функция  $-2x_1 - 4x_2 = z$  (прибыль, взятая с обратным знаком). Первая и последняя (оптимальная) таблицы имеют соответственно следующий вид:

Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
	$x_3$	1700	3	4	1	
	$x_4$	1600	2	5		1
	-z	0	-2	-4		

Итерация	базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
	$x_1$	300	1		5/7	-4/7
	$x_2$	200		1	2/7	3/7
	-z	1400			2/7	4/7

Обращенный базис имеет вид  $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$ ; симплекс-множители равны 2/7, 4/7.

1. Предположим, что появилась возможность приобрести дополнительное сырье у второго поставщика. Сколько ему можно заплатить за 1 м<sup>2</sup>?

Допустим, что в первом ограничении 1700 было заменено на 1701. Вектор  $b$  заменяется на новый вектор  $\begin{pmatrix} 1701 \\ 1600 \end{pmatrix}$ . Новыми значениями базисных переменных будут

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1701 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 + \frac{5}{7} \\ 200 - \frac{2}{7} \end{pmatrix},$$

что допустимо.

Оптимальное значение для функции  $z$  меняется на значение  $(-\sum b_i \pi_i)$  в данном случае -  $(2/7 \cdot 1701 + 4/7 \cdot 1600) = 1400 - 2/7$ .

Таким образом, **прибыль** возрастает на 2/7 дол., и это - максимальная цена, которую следует заплатить за дополнительный 1 м<sup>2</sup> доски. Нет смысла приобретать дополнительное сырье. Максимальная цена равна  $\pi_i$ .

2. Предположим, что имеется возможность получения дополнительного машинного времени. Выгодно ли это, если 1 ч машинного времени стоит 7 дол.?

В этом случае в математической задаче вектор  $b$  заменяется на вектор  $\begin{pmatrix} 1700 \\ 1610 \end{pmatrix}$ . Новыми значениями базисных переменных будут

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1700 \\ 1610 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 - \frac{40}{7} \\ 200 + \frac{30}{7} \end{pmatrix}, \text{ что допустимо.}$$

Оптимальное значение для функции  $z$  заменяется на значение  $-(2/7 \cdot 1700 + 4/7 \cdot 1610) = -1400 - 40/7$ .

Прибыль увеличивается на  $40/7$  дол. Поскольку дополнительный 1 ч машинного времени стоит 7 дол., это невыгодно. ; Легко видеть, что решение этой задачи с начала приведет к тем же результатам. Но нет никакой необходимости начинать с начала. В больших по объему задачах это неэффективно.

Заметьте, что в пункте 1 новое значение для функции  $z$  равно  $-2(300 + 5/7) - 4(200 - 2/7)$ , а в пункте 2- равно  $-2(300 - 40/7) - 4(200 + 30/7)$

## 2) Изменения в $c_j$ .

### Пример 2

Пусть в примере 1 прибыль от одной модели А составляет  $P_1$  дол., а от одной модели В —  $P_2$  дол. Для каких значений  $P_1$  и  $P_2$  полученное решение является оптимальным?

Целевая функция в первой таблице задается формулой  $-P_1x_1 - P_2x_2 = z + 0$ . Поскольку в таблице изменяется только последняя строка, каноническая форма ограничений в том же базисе останется прежней, т. е.

$$x_1 + \frac{5}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_4 = 300$$

$$x_2 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 200.$$

Чтобы записать функцию  $z$  в канонической форме, следует исключить  $x_1$  и  $x_2$  из выражения для функции  $z$ . Это можно сделать, умножив первое ограничение (в конечной таблице) на  $P_1$ , второе — на  $P_2$  и прибавив их к выражению для функции  $z$ ; в результате получим

$$\left(\frac{5}{7}P_1 - \frac{2}{7}P_2\right)x_3 + \left(-\frac{4}{7}P_1 + \frac{3}{7}P_2\right)x_4 = z + 300P_1 + 200P_2.$$

Решение будет оптимальным, если предположить, что оба коэффициента при небазисных переменных положительны. Поэтому решение оптимально при условиях

$$\frac{5}{7}P_1 - \frac{2}{7}P_2 \geq 0 \text{ и } -\frac{4}{7}P_1 + \frac{3}{7}P_2 \geq 0, \text{ т.т. } \frac{P_1}{P_2} \geq \frac{2}{5} \text{ и } \frac{P_1}{P_2} \leq \frac{3}{4}.$$

Это видно из рис. 1.1, где точка В — оптимальная, если предположить, что линия уровня функции  $z$ , проходящая через точку В, лежит между двумя линиями ограничений, пересекающимися в точке В.

Этот подход очень полезен при анализе влияния изменений в значении  $c_j$  на решение задачи. Значения базисных переменных и канонический вид ограничений остаются неизменными. Если коэффициенты при небазисных переменных в новой целевой функции положительны, то решение оптимально. Если один из них (или более) отрицателен, необходимо перевести соответствующую переменную в базисные. Получится каноническая форма, приемлемая для задачи в целом, и можно продолжать решать ее симплекс-методом.

## 3) Включение дополнительных переменных

### Пример 3

Пусть оказалось возможным изготовить полки типа С и пусть для изготовления одной полки этого типа необходимо  $4 \text{ м}^2$  материала и требуется 20 мин машинного времени. Если прибыль от одного изделия составляет? дол., стоит ли браться за его изготовление?

Если изготавливать  $x_5$  единиц типа С, то задача в стандартной форме превращается в следующую: найти такие  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  что

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_5 = 1700,$$

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_4 + \frac{1}{3}x_5 = 160,$$

$$-2x_1 - 4x_2 - Px_5 = z$$

и минимизировать функцию т.е..

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_5 = 1700,$$

$$2x_1 + 5x_2 + 10x_4 + \frac{10}{3}x_5 = 1600,$$

$$-2x_1 - 4x_2 - Px_5 = z - \text{минимальна}$$

В конечной таблице первые два элемента столбца, соответствующего  $x_5$ , будут согласно уравнению (3.5) иметь следующий вид:

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 10/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 10/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/21 \\ 6/21 \end{pmatrix}$$

Поскольку симплекс-множители  $\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$ , из уравнения (3.7) следует, что коэффициент при  $x_5$  в канонической форме для функции  $z$

$$-P + \frac{2}{7} * 4 + \frac{4}{7} * \frac{10}{3} = -P + \frac{64}{21}.$$

Конечная таблица примет следующий вид (изменения произошли только в столбце  $x_5$ ):

Итерация	базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
	$x_1$	300	1		5/7	-4/7	20/21
	$x_2$	200		1	-2/7	3/7	6/21
	-z	1400			2/7	4/7	-P+64/21

Если  $-P + 64/21 \geq 0$ , то решение, приведенное в таблице, оптимально;  $x_5$  остается небазисной переменной, и не надо составлять новую модель.

Если  $-P + 64/21 < 0$ , т. е.  $P > 64/21$ , то необходимо включить  $x_5$  в базис. С этого момента можно продолжить вычисления симплекс-методом.

#### 4) Включение дополнительных ограничений

##### Пример 4

Предположим, что в период экономического кризиса торговые агенты сообщают, что рынок принимает не более 550 полок в неделю. Как это отразится на производстве? Указанное ограничение на объем продажи равносильно ограничению  $x_1 + x_2 \leq 550$ .

Это дополнительное ограничение должно быть включено в математическую постановку задачи. Однако в данном случае оно никак не влияет на оптимальное решение. В этом решении  $x_1 = 300$  и  $x_2 = 200$ , так что  $x_1 + x_2 = 500$  удовлетворяет дополнительному ограничению.

Если бы экономический кризис был серьезнее, с ограничением рынка До 450 полок в неделю, ситуация была бы иной. Рассмотрим ее в следующем разделе.

### 3.3. ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

#### Пример 1

Предположим, что недельная продажа ограничена 450 полками. Тогда должно быть включено дополнительное ограничение  $x_1 + x_2 \leq 450$ .

В виде уравнения оно записывается как  $x_1 + x_2 + x_5 = 450$ , где  $x_5 \geq 0$  - дополнительная переменная.

Это ограничение нарушается оптимальным решением исходной задачи. Необходимо ли решать эту задачу с самого начала с новым включением? Если так поступить и повторить

проведенные вычисления, то дополнительное ограничение выразится через небазисные переменные, которые можно получить из текущей канонической формы

$$x_1 + \frac{5}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_4 = 300,$$

$$x_2 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 200.$$

Поэтому уравнение  $x_1 + x_2 + x_5 = 450$  после исключения  $x_1$  и  $x_2$  принимает вид

$$-\frac{3}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 + x_5 = -50.$$

Последняя таблица будет иметь следующий вид (изменения - только вид дополнительного ограничения):

Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
2	$x_1$	300	1		5/7	-4/7	
	$x_2$	200		1	-2/7	3/7	
	$x_5$	-50			-3/7	1/7	1
	-z	1400			2/7	4/7	

Здесь возникают определенные трудности. В этой канонической форме для базиса  $x_1, x_2, x_5$  целевая функция имеет такой же вид, как оптимальная, однако базис не допустим. Переменная  $x_5$  отрицательна. Существует ли, несмотря на это, способ сохранить результаты проделанной к этому моменту полезной работы? Да, и соответствующая процедура носит название **двойственного симплекс-метода**.

Симплекс-метод можно определить как процедуру, начинающуюся с положительных значений базисных переменных и преобразующую задачу (сохраняя это свойство) к канонической форме (возможно, в несколько стадий), в которой все коэффициенты целевой функции неотрицательны. В двойственном симплекс-методе все наоборот; при его использовании не требуется, чтобы все базисные переменные были положительны с самого начала, но для задачи минимизации необходимо чтобы все коэффициенты целевой функции были неотрицательны. Сохраняя последнее свойство, ограничения с помощью двойственного симплекс-метода преобразуются до тех пор, пока не будет получен положительный базис, и в этот момент достигается минимум (при этом коэффициенты целевой функции сохраняются неотрицательными).

В нашей задаче базисная переменная  $x_5$  отрицательна и является кандидатом на удаление из базиса. Какая переменная должна ее заменить? В строке  $x_5$  таблицы ищется отрицательный ведущий элемент, такой, что при последующих преобразованиях (которые снова примут вид уравнений (2.15) - (2.20)) коэффициенты целевой функции будут оставаться положительными. Перед формализацией этих правил посмотрим, как они выполняются в нашей задаче. В строке  $x_5$  имеется только один отрицательный коэффициент - коэффициент при  $x_3$ , равный -3/7. Если мы разделим уравнение на -3/7, чтобы включить в базисные переменные переменную  $x_3$  (с коэффициентом 1), то получим уравнение

$$x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{7}{3}x_5 = \frac{350}{3},$$

т. е. значение  $x_3$  станет положительным. Следующим шагом мы должны исключить переменную  $x_3$  из остальных ограничений и из целевой функции. Это достигается простыми симплексными вычислениями результаты, как показано ниже, могут быть сведены в таблицу. Ведущий элемент (отрицательное значение -3/7) отмечен звездочкой.

Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
2	$x_1$	300	1		5/7	-4/7	
	$x_2$	200		1	-2/7	3/7	
	$x_5$	-50			-3/7	1/7	1
	-z	1400			2/7	4/7	



Итерация	Базис	Значение	x1	x2	x3	x4	x5
3	x1	650/3	1			-1/3	5/3
	x2	700/3		1		1/3	-2/3
	x5	350/3			1	-1/3	-7/3
	-z	4100/3				2/3	2/3

В конечной таблице приведено оптимальное решение новой задачи:

$$x_1 = \frac{650}{3}, x_2 = \frac{700}{3}, \text{ причем } z = -\frac{4100}{3}.$$

Поскольку в этом решении  $x_3$  - базисная переменная, имеется избыток сырья, и в результате количество заказанных досок может быть сокращено.

Описанная процедура может быть обобщена. Если все коэффициенты целевой функции положительны, то процедура будет иметь следующие шаги:

1. Найти отрицательную базисную переменную. Если ее нет, то оптимальное решение найдено; если их более чем одна, надо взять из них самую отрицательную. Пусть эта переменная - базисная в  $r$ -м. ограничении. Она является переменной для исключения из базиса.

2. В  $r$ -й строке найти *отрицательный* коэффициент  $a'_{rj}$ . Если его нет, то, очевидно, не существует допустимого решения задачи. Для отрицательных коэффициентов в этой строке найти

$$\min_j |c'_j / a'_{rj}|.$$

Если этот минимум найден в  $s$ -м столбце, переменная  $s$  должна быть включена в базис.

3. Провести обычные симплекс-преобразования, выбрав в качестве ведущего элемент  $a'_{rj}$ . Из уравнения (2.19) для следующей итерации имеем

$$c_j^* = c'_j - c'_s a'_{rj} / a'_{rs},$$

и, поскольку все  $a'_{rj}$  отрицательны, а  $c'_j$  положительны, эта величина положительна, так как  $s$  выведено из соотношения

$$\min_j |c'_j / a'_{rj}| = |c'_s / a'_{rs}|.$$

Следовательно, двойственный симплекс-метод отличается от симплекс-метода только выбором переменной для исключения и включения в базис.

Чтобы убедиться в том, что в двойственном симплекс-методе можно начинать поиск минимума *вне* допустимой области, мы предлагаем читателю проверить пример 1 этого раздела геометрически. Этим методом в конце концов можно найти допустимую точку, которая также и оптимальна.

Процедура двойственного симплекс-метода включена в программу, приведенную ниже, которая может быть использована для того, чтобы применить либо симплекс- метод, если базис допустим, либо двойственный симплекс-метод, если все коэффициенты целевой функции положительны. Программа почти аналогична первой из приведенных программ, за исключением программ 1 и 2, описанных выше. Она предполагает наличие канонической формы, в которой одна из базисных переменных может быть отрицательна. Если она используется для того, чтобы ввести дополнительное ограничение в уже решенную задачу, дополнительное ограничение сначала должно быть приведено к канонической форме.

READY.

10 REM ПРОГРАММА ДЛЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДА И ДВОЙСТВЕННОГО

15 REM СИМПЛЕКС-МЕТОДА, ИМЕЮЩЕГО В ОСНОВЕ БАЗИСНОЕ РЕШЕНИЕ

20 REM ВВЕСТИ КОЛИЧЕСТВО ОГРАНИЧЕНИЙ И КОЛИЧЕСТВО ПЕРЕМЕННЫХ

30 READ M,N

40 M1=M+1

```

50 DIM A(M1,N),BS(M),NB(N),V(M1)
60 PRINT "ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ"
100 REM ВВЕСТИ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕНИЙ И ЦЕЛЕВОЙ
105 REM ФУНКЦИИ ПОСТРОЧНО
110 FOR I=1 TO M1:FOR J=1 TO N
120 READ A(I,J)
130 NEXT J:NEXT I
150 REM ВВЕСТИ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ БАЗИСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И
155 REM ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В МАССИВ A(I,0)
160 FOR I=1 TO M1:READ A(I,0):NEXT I
200 REM ВВЕСТИ БАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ;BS - МЕТКА БАЗИСНОЙ
205 REM ПЕРЕМЕННОЙ В ОГРАНИЧЕНИИ I
210 FOR I=1 TO M:READ BS(I):NEXT I
250 REM ПОМЕТИТЬ НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ;ЕСЛИ J -
255 REM НЕБАЗИСНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ,ТО NB(J)=0
260 FOR I=1 TO M:NBS(BS(I))=1:NEXT I
290 НАПЕЧАТАТЬ ТАБЛИЦУ
300 PRINT "ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА":PRINT "ИТЕРАЦИЯ" K
310 GOSUB 3000:STOP
400 ZERO 1E-08
490 REM НАЙТИ НАИМЕНЬШИЙ КОЭФФИЦИЕНТ В СТРОКЕ Z (Т.Е.
495 REM СТРОКУ M1)
500 MIN=-ZERO:S=0:PV=0
510 FOR J=1 TO N
520 IF NB(J)=1 THEN GOTO 550
530 IF A(M1,J)>=MIN THEN GOTO 550
540 MIN=A(M1,J):S=J
550 NEXT J
560 REM ЕСЛИ S=0, ТО ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ И
565 REM МИНИМУМ НАЙДЕН
570 IF S=0 THEN GOTO 2000
740 REM НАЙТИ СТРОКУ ПЕРЕМЕННЫХ,КОТОРУЮ СЛЕДУЕТ
745 REM ИСКЛЮЧИТЬ ИЗ БАЗИСА ПО УСЛОВИЮ МИНИМУМА В/A(IS)
750 MIN=1E20:R=0
760 FOR I=0 TO M
770 IF A(I,S)<-ZERO THEN GOTO 810
780 RT=A(I,0)/A(I,S)
790 IF RT>=MIN THEN GOTO 810
800 R=I:MIN=A(I,0)/A(I,S)
810 NEXT I
890 REM ЕСЛИ R=0, ТО ИМЕЕТ МЕСТО РЕШЕНИЕ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ
900 IF R=0 THEN GOTO 1900
910 PRINT "ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ":R:"/СТОЛБЦА":S
920 PRINT"
990 REM РАЗДЕЛИТЬ ВЕДУЩУЮ СТРОКУ НА ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ
1000 PV=A(R,S)
1010 FOR J=0 TO N:A(R,J)=A(R,J)/PV:NEXT J
1040 REM ВЫЧИСЛИТЬ НОВУЮ КАНОНИЧЕСКУЮ ФОРМУ, ЗАПОМНИВ
1045 REM ВЕДУЩИЙ СТОЛБЕЦ ДО ЕГО ИЗМЕНЕНИЯ
1050 FOR I=1 TO M1:V(I)=A(I,S):NEXT I
11070 FOR I=1 TO M1
1080 IF I=R THEN GOTO 1120
1090 FOR J=0 TO N
1100 A(I,J)=(I,J)-V(I)*A(R,J)
1110 NEXT J
1120 NEXT I
1150 REM ПЕРЕНАЗНАЧИТЬ И ПОВТОРНО ПОМЕТИТЬ БАЗИСНЫЕ
1155 REM И НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
1160 NB(BS(R))=0:NBS(S)=1:BS(R)=S
1170 REM СЧЕТЧИК ИТЕРАЦИИ
1180 K=K+1
1190 REM НАПЕЧАТАТЬ НОВУЮ ТАБЛИЦУ
1200 PRINT "ИТЕРАЦИЯ"K
1210 GOSUB 3000:STOP
1240 REM ПОВТОРИТЬ ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС
1250 GOTO 500
1490 REM ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД;СНАЧАЛА НАЙТИ
1495 REM ПЕРЕМЕННЫЕ ДЛЯ ИСКЛЮЧЕНИЯ ИЗ БАЗИСА
1500 MIN=-ZERO:R=0
1510 FOR I=1 TO M
1530 IF A(I,0)> MIN THEN GOTO 1550
1540 MIN=A(I,0):R=I
1550 NEXT I
1560 REM ЕСЛИ R=0,ТО ВСЕ БАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ
1570 IF R=0 THEN GOTO 2000
1600 REM НАЙТИ ПЕРЕМЕННЫЕ,КОТОРЫЕ СЛЕДУЕТ ВВЕСТИ В БАЗИС
1610 MIN=1E20:S=0
1620 FOR J=1 TO N
1630 IF NB(J)=1 THEN GOTO 1680

```

```

1640 IF A(R,J)>=0 THEN GOTO 1680
1650 RT=ABS(A(M1,J)/A(R,J))
1660 IF RT>= MIN THEN GOTO 1680
1670 S=J:MIN=ABS(A(M1,J)/A(R,J))
1680 NEXT J
1760 REM ЕСЛИ S=0,ТО НЕТ ДОПУСТИМОГО РЕШЕНИЯ
1770 IF S=0 THEN GOTO 1800
1780 GOTO 910
1790 REM В СТРОКЕ 1780 ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ ПЕРЕХОД К
1795 REM ПРЕОБРАЗОВАНИЮ В НОВУЮ КАНОНИЧЕСКУЮ ФОРМУ
1800 PRINT "НЕТ ДОПУСТИМОГО РЕШЕНИЯ"
1810 GOSUB 3000
1820 GOTO 2500
1900 PRINT "ПЕРЕМЕННАЯ "S" НЕ ИМЕЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ"
1910 GOSUB 3000
1920 GOTO 2500
2000 PRINT "ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ"
2010 PRINT "ОГРАНИЧЕНИЕ БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ"
2020 PB=144
2030 FOR I=1 TO M
2040 PRINT " ";I;" ";BS(I);
2050 PA=A(I,0):GOSUB 9000:PRINT ""
2060 NEXT I
2090 PRINT "МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН "; -A(M1,0)
2100 GOSUB 3000
2500 END
3000 PRINT "БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ",
3010 FOR J=1 TO N:PRINT "X" J " ";:NEXT J
3020 PRINT " "
3030 PB=122
3040 FOR I=1 TO M1
3050 IF I=M1 THEN PRINT "-Z";:GOTO 3080
3060 PRINT BS(I);
3080 FOR J=0 TO N
3090 PA=A(I,J):GOSUB 9000
3100 NEXT J
3110 PRINT " "
3120 NEXT I:PRINT " "
3200 RETURN
4000 DATA 3,5
4010 DATA -1,-2,1,0,0
4020 DATA -2,1,0,1,0
4030 DATA 7,8,0,0,1
4040 DATA 1,1,6,0,0
4050 DATA -6,-6 56,0
4060 DATA 3,4,5
9000 PC=INT(PB/100)
9010 P$=""
9020 IF PC=0 THEN PRINT " ": GOTO 9040
9030 PRINT LEFT$(P$,PC);
9040 PC=PB-100*PC
9050 PD=INT(PC/10):PC=PC-10*PD
9060 IF PD=0 THEN PD=1
9070 IF PA<0 THEN P$=P$+"-."
9080 PE=ABS(PA)
9090 PE=PE+5*10^(-1-PC)
9100 IF PE>=PD THEN PRINT PA;:RETURN
9110 P$=P$+MID$(STR$(INT(PE)),2,PD)
9120 PRINT RIGHT$(P$,PD+1)
9130 IF PC=0 THEN RETURN
9140 PRINT " ";
9150 PE=INT((PE-INT(PE))*10^PC)
9160 P$=" 000000000"
9170 P$=P$+MID$(STR$(PE),2,PC)
9180 PRINT RIGHT$(P$,PC);:RETURN
READY.

```

Двойственный симплекс-метод полезен при введении дополнительных ограничений в уже решенной задаче. Он также позволяет иногда избежать применения искусственных переменных.

## Пример 2

Найти такие неотрицательные  $x_1, x_2$ , что

$$x_1 + 2x_2 \geq 6,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$7x_1 + 8x_2 \leq 56,$$

и минимизировать функцию  $x_1 + x_2 = z$ .

В стандартной форме задача формулируется следующим образом: найти такие  $x_j \geq 0$ , что

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$

$$2x_1 + x_2 - x_4 = 6$$

$$7x_1 + 8x_2 + x_5 = 56$$

и минимизировать функцию  $x_1 + x_2 = z$ .

Если базисными переменными являются  $x_3$ ,  $x_4$  и  $x_5$  (т. е. небазисными переменными  $x_1$ ,  $x_2$ ), то целевая функция оптимальна. Этот базис недопустим, поскольку  $x_3 = 6$  и  $x_4 = -6$ . Если умножить эти ограничения на -1 (для получения корректного вида базиса) будем иметь

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 = -6$$

$$-2x_1 - x_2 + x_4 = -6$$

$$7x_1 + 8x_2 + x_5 = 56$$

$$x_1 + x_2 = z$$

Нам удалось избежать использования искусственных переменных в первых двух ограничениях. Можно продолжить вычисления непосредственно пользуясь двойственным симплекс-методом, результаты работы которого приводятся ниже в таблице.

Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	$x_3$	-6	-1	-2	1		
	$x_4$	-6	-2*	-1		1	
	$x_5$	56	7	8			1
	-Z	0	1	1			
1	$x_3$	-3		-3/2*	1	-1/2	
	$x_1$	3	1	1/2		-1/2	
	$x_5$	35		9/2		7/2	1
	-Z	-3				1/2	
2	$x_2$	2		1	-2/3	1/3	
	$x_1$	2	1		1/3	-2/3	
	$x_5$	26			3	2	1
	-Z	-4			1/3	1/3	

Это — оптимальное решение. Оптимальный вид для функции  $z$  сохраняется, и полученный базис допустим. Таким образом, минимальное значение функции  $z$  равно 4 и достигается при  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 2$ . Это можно проверить графически.

Данные в строках программы 4000-4060 соответствуют рассматриваемой задаче. Ниже приведена распечатка результатов работы программы, воспроизводящей приведенные таблицы.

#### ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

##### ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

##### ИТЕРАЦИЯ 0

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X1	X2	X3	X4	X5
3	-6.00	-1.00	-2.00	1.00	0.00	0.00
4	-6.00	-2.00	-1.00	0.00	1.00	0.00
5	56.00	7.00	8.00	0.08	0.00	1.00
-Z	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00

**ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 2 СТОЛБЦА 1**

#### ИТЕРАЦИЯ 1

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X1	X2	X3	X4	X5
3	-3.00	0.00	-1.50	1.00	-0.50	0.00
1	3.00	1.00	0.50	0.00	-0.50	0.00
5	35.00	0.00	4.50	0.00	3.50	1.00
-Z	-3.00	0.03	0.50	0.00	0.50	0.00

**ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 2**

#### ИТЕРАЦИЯ 2

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X1	X2	X3	X4	X5
2	2.00	0.00	1.00	-0.67	0.33	0.00
1	2.00	1.00	0.00	0.33	-0.67	0.00
5	26.00	0.00	0.00	3.00	2.00	1.00
-Z	-4.00	0.00	0.00	0.33	0.33	0.00

#### ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

ОГРАНИЧЕНИЕ	БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ
1	1	2.00
2	1	2.00
3	5	26.00

#### МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН 4

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X1	X2	X3	X4	X5
2	2.00	0.00	1.00	-0.67	0.33	0.00
1	2.00	1.00	0.00	0.33	-0.67	0.00
5	26.00	0.00	0.00	3.00	2.00	1.00
-Z	-4.00	0.00	0.00	0.33	0.33	0.00

### 3.4. УПРАЖНЕНИЯ

1. Производитель выпускает два продукта: продукт Р, продаваемый по 2000 дол. за 1 т, и продукт Q, продаваемый по 1000 дол. за 1 т. Продукты могут производиться из двух типов сырья: А по 600 дол. за 1 т и В по 900 дол. за 1 т. Из каждых 100 т сырья А производят 30 т Р и 50 т Q, а из 100 т сырья В производят 60 т Р и 10 т Q. Если производитель обрабатывает  $x$  т А и  $y$  т В, покажите, что его прибыль составляет  $(500x + 400y)$ . Фабрика способна обработать не более 10 000 т сырья ежегодно. Поставщики сырья могут обеспечить не более 6000 т сырья А и не более 8000 т сырья В в год. Производитель может продавать ежегодно по 5000 т продукта Р и до 3200 т продукта Q. а) Определите, сколько сырья А и В должно быть заказано для максимизации его прибыли, и покажите, что эта прибыль составляет 4 550 000 дол.

Поставщики сырья А угрожают повысить цену. б) На сколько можно поднять цену, чтобы производителю пришлось изменить заказ?

2. Найдите такие  $x_i$ , что

$$\begin{aligned} -x_1 + 10x_2 + x_3 &= 40, \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 20, \end{aligned}$$

и минимизируйте функцию  $f=10x_1-11x_2$ . Найдите оптимальную симплекс-таблицу.

Пусть необходимо дополнительное ограничение  $x_3 + x_4 \geq 5$ . Примените двойственный симплекс-метод для решения расширенной задачи, начиная с оптимального решения исходной.

3. Найдите

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \text{ для } x_j \geq 0 \text{ при условии, что}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \text{ где } i = 1, \dots, m.$$

Покажите, что (после введения дополнительных переменных в ограничения) симплекс-множители  $\pi_i$ , связанные с оптимальным решением, должны удовлетворять условиям

$$a) c_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i \geq 0, \text{ где } j = 1, \dots, n;$$

$$б) -\pi_i \geq 0, \text{ где } i = 1, \dots, m$$

*Замечание:* -  $\pi_i$  - коэффициент при  $x_{n+i}$  в оптимальном решении для функции  $z$ .

Проверьте, что условие б) выполняется, если справедливо соотношение

$$\frac{\partial(z \text{ opt})}{\partial b} = -\pi_i$$

4. Фабрика производит три основных типа товара. Изделию типа I требуется 3 единицы сырья А и единица сырья В; оно приносит прибыль в 3 единицы. Изделию типа II требуется 4 единицы сырья А и 3 единицы сырья В; оно приносит прибыль в 6 единиц. Изделию типа III требуется единица сырья А и 2 единицы сырья В; оно приносит прибыль в 2 единицы. Найдите оптимальный план производства, если доступны всего 20 единиц сырья А и 10 единиц сырья В. Если окажется доступной еще одна единица сырья А (или В), какую наибольшую цену следует за нее платить?

5. Прибыль от изделий А, В, С составляет соответственно 3, 4, 5 единиц. Для каждого изделия требуется время использования станка I и II, которые доступны соответственно 12 и 15 ч в день:

	А	В	С
I	3	2	3
II	4	1	2

Найдите оптимальный план производства. Назначьте дополнительное время использования станка I(II).

6. Фирма специализируется на производстве буфетов. Она может производить три типа буфетов А, В, С, что требует различных затрат труда на каждой стадии производства:

Производственный участок	Затраты труда, чел-ч		
	А	В	С
Лесопилка	1	2	4
Сборочный цех	2	4	2
Отделочный цех	1	1	2

В течение недели можно планировать работу на лесопилке на 360 чел-ч, в сборочном цехе - на 520 чел-ч и в отделочном цехе - на 220 чел-ч. Прибыль от продажи каждого буфета типов А, В, С составляет соответственно 9, 11, 15 дол. Покажите, что задача составления оптимального плана производства может быть выражена в следующем виде:  
найти такие  $x_i \geq 0$ , что

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 360, \\2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 &= 520, \\x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 &= 220,\end{aligned}$$

и минимизировать функцию  $\omega = 9x_1 + 11x_2 + 15x_3$ . Объясните физический смысл каждой переменной и воспользуйтесь симплекс-методом, чтобы показать, что в оптимальном решении  $x_1 = 180, x_2 = 40, x_3 = 0$ .

Определите избыток чел-ч работы на лесопилке, в сборочном цехе, в отделочном цехе, воспользовавшись этим решением.

Для выполнения обязательств по организации интерьера гостиниц необходимо производить по крайней мере 10 буфетов типа С еженедельно. Как это дополнительное требование повлияет на решение?

7. Аудитории и лаборатории университета рассчитаны не более чем на 500 студентов. Университет не принимает более 4000 студентов своей страны, но разрешает прием любого количества иностранных студентов.

Персонал университета составляет 440 человек. Для обучения 12 студентов' данной страны и 10 иностранных студентов требуется один преподаватель. Необходимо, чтобы 40 % студентов данной страны и 80 % иностранных студентов могли разместиться в аудиториях, где имеется 2800 мест. Университет получает 2000 фунтов стерлингов в год из правительственных средств на каждого студента своей страны и берет плату в размере 3000 фунтов стерлингов в год за каждого иностранного студента.

Предположив, что единственной целью университета является максимизация прибыли, определите, какой прием студентов своей страны и иностранных студентов следует планировать. Покажите, что максимальный годовой доход составляет 11 850 000 фунтов стерлингов в год.

Университет может нанять дополнительный персонал с годовым окладом 10 000 фунтов стерлингов. Выгодно ли это?

8. Фирма производит на фабрике четыре сорта изделий. Производство лимитируется временем использования станков и количеством комплектующих изделий. Известно также, что суммарное время использования станков — 90 ч в день, а комплектующих изделий может быть поставлено не более 80 в день.

Производственные характеристики	Изделия			
	1	2	3	4
Время использования станка, ч	1	3	8	4
Количество комплектующих	2	2	1	3
Цена изделия, дол.	20	25	40	55
Доход от продажи, дол.	30	45	80	85

Ежедневное производство  $x_j$  изделия  $j$  является решением следующей задачи:  
минимизировать функцию  $z = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4$ , при ограничениях

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 4x_4 \leq 90,$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 80,$$

$$x_j \geq 0, j=1, \dots, 4.$$

Объясните постановку этой задачи.

Приведем оптимальную таблицу в виде, в котором ее выдает компьютер:

Базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	10	1	-1/5	-4	0	-3/5	4/5
$x_4$	20	0	4/5	3	1	2/5	-1/5
-Z	70	0	1/5	1	0	3/5	1/5

1) Найдите симплекс-множители.

2) Найдите обращенный базис.

3) Фирма может увеличить время работы станков до 10 ч в день, арендуя оборудование, что будет стоить 40 дол. в день. Рентабельно ли это; если да, то какой нужен новый план производства?

4) Стоимость одного из видов сырья, используемого при производстве изделий 1 и 3 часто меняется. В данный момент стоимость сырья составляет 80 дол. за 10 кг. Изделию 1 требуется 1 кг на единицу сырья, а изделию 3-2 кг на единицу сырья. Цена этого сырья включена в приведенную выше стоимость продукции. В каких пределах может колебаться цена этого вида сырья, чтобы исходное решение осталось тем же самым?

5) Беспорядки на заводе одного из потребителей приводят к тому, что дневной выпуск изделия 4 должен быть сокращен до 15 единиц. Воспользуйтесь двойственным симплекс-методом для составления нового производственного плана.

9. Найдите  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ , удовлетворяющие условиям

$$x_1 + 3x_2 \geq 8,$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 19,$$

$$3x_1 + x_2 \geq 7$$

и минимизирующие функцию  $50x_1 + 25x_2$  не используя искусственных переменных.

10. Найдите  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ , удовлетворяющие условиям

$$7x_1 + 8x_2 \geq 56,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

и минимизируйте функцию  $x_1 + x_2 = z$ .

11. Покажите для общей задачи линейного программирования, что если  $\Delta x_j$  зависит от  $\Delta b_i$ ,

$$\text{то } \Delta z = - \sum_{i=1}^m \pi_i \Delta b_i = \sum_{j=1}^n c_j \Delta x_j$$

(считайте, что базис остается допустимым после изменений).

12. В поисках оптимальности технологического процесса температура  $x_1$  и скорость подачи материала  $x_2$  предполагались параметрами, определяющими результат. После бесед с технологом Вы как консультант-теоретик сформулировали следующую задачу линейного программирования:

найти  $x_1$  и  $x_2$  неотрицательные и такие, что

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$4x_1 + 11x_2 \leq 44$$



и минимизировать функцию  $-2x_1 - 5x_2 = z$ . Найдите решение этой задачи с помощью симплекс-метода.

Технолог, которому полученное решение было передано для реализации, выразил большое сомнение. После дальнейших обсуждений было решено, что следует ввести дополнительное ограничение  $x_1 + 2x_2 \leq 8$ .

Проведите необходимые вычисления и покажите, каким образом двойственный симплекс-метод позволяет использовать последнюю таблицу проведенного вычисления для получения решения новой задачи.

13. Используя программу для симплекс-метода или для двойственного симплекс-метода, напишите программу для решения задачи линейного программирования с ГС ограничениями в виде неравенств со знаком  $\geq$  и ЛС ограничениями в виде неравенств со знаком  $\leq$ . Программа должна "читать" ограничения и коэффициенты целевой функции и устанавливать первое базисное решение (не обязательно допустимое, поскольку искусственные переменные не используются). Затем программа должна применить для решения задачи симплекс-метод или двойственный симплекс-метод.

14. Воспользуйтесь написанной программой для решения следующей задачи:  
найти такие  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ , что

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 9$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

и минимизировать функцию  $3x_1 + x_2 + 2x_3 = z$

15. Пусть при решении задачи линейного программирования симплекс-методом на  $k$ -й итерации каноническая форма задачи задается уравнениями (2.4) и (2.5) в матричной форме. Пусть переменная  $x_s$  включается в базис, а базисная переменная  $x_r$  в  $r$ -м ограничении исключается из базиса. Покажите, что умножение канонической формы на матрицу

$$E = \left( \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{a'_{rs}}{a'_{rs}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a'_{2s}}{a'_{rs}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a'_{rs}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a'_{ms}}{a'_{rs}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c'_s}{a'_{rs}} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{г-й столбец} \\ \\ \text{г-я строка} \\ \\ \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}} \right\} m+1 \text{ строк}$$

$m+1 \text{ столбцов}$

приводит к следующей канонической форме. Покажите, что если  $B_K^{-1}$  - обращение базиса на  $k$ -й итерации.  $B_{K+1}^{-1}$  — обращение на  $(k+1)$ -итерации, то  $B_{K+1}^{-1} = EB_K^{-1}$

Выпишите матрицу  $E$ .

## ГЛАВА 4 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

### 4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

#### Пример 1

Фирма должна отправить некоторое количество кроватей с трех складов в пять магазинов. На складах имеется соответственно 15, 25, 20 кроватей, а для пяти магазинов требуется соответственно 20, 12, 5, 8 и 12 кроватей. Стоимость перевозки одной кровати (в долларах) со склада в магазин приведена в таблице.

Склад	Магазин				
	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>5</sub>
W <sub>1</sub>	1	0	3	4	2
W <sub>2</sub>	5	1	2	3	3
W <sub>3</sub>	4	8	1	4	3

Как следует спланировать перевозку кроватей для минимизации стоимости? Пусть  $x_{ij}$  - количество кроватей, отправляемых со склада в магазин. Ясно, что  $x_{ij} \geq 0$ , и в силу ограничений на возможности поставки со складов (предложение) и спрос в магазинах они удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 15, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 25, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 20 \end{aligned}$$

(для предложения);

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 20, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 12, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 5, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 8, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} &= 15 \end{aligned}$$

(для спроса). Стоимость, равная

$$C = x_{11} - 0x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 2x_{15} + 5x_{21} + \dots + 4x_{34} + 3x_{35},$$

должна быть минимизирована при этих ограничениях.

Эта задача является задачей линейного программирования, но специального вида. В частности, коэффициенты в ограничениях принимают значения 0 или 1, а каждая переменная входит только в два ограничения. На первый взгляд может показаться, что ограничения в виде равенств, определяющих предложение, должны быть заменены на ограничения в виде неравенств со знаком  $\leq$ , а ограничения в виде равенств, определяющих спрос на ограничения в виде неравенств, - со знаком  $\geq$ . Однако, поскольку суммарный спрос равен сумме поставок, во всех случаях должно выполняться равенство. Заметим также, что сумма по первым трем ограничениям дает тот же результат, что и сумма по последним пяти ограничениям. Поскольку независимых ограничений только 7, а не 8, следовательно, базисное допустимое решение и оптимальное решение будет содержать 7 ненулевых значений  $x_{ij}$ .

Эти результаты обобщаются на транспортную задачу с  $m$  пунктами производства и объемами производства  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), и  $n$  пунктами потребления и объемами потребления  $b_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), где

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (4.1)$$

$$\begin{array}{rcl}
x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & & = a_1, \\
x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & & = a_2, \\
\hline
& x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} & = a_m, \\
x_{11} & + x_{21} & + x_{m1} = \theta_1, \\
x_{12} & + x_{22} & + x_{m2} = \theta_2, \\
\hline
& x_{1n} & + x_{2n} & + x_{mn} = \theta_n
\end{array}$$
$$C = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{mn}x_{mn}.$$
$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = a_i > 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (4.3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j > 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (4.4)$$

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (4.5)$$

Поскольку  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j$

Удобнее не рассматривать ограничения, а работать с **массивом** транспортных данных в виде, приведенном ниже. Следует разместить неотрицательные переменные в клетках таким образом, чтобы суммы по строкам и столбцам совпадали с указанными правыми частями ограничений

<i>1</i>	<i>0</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>2</i>	<i>15</i>
<i>5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>25</i>
<i>4</i>	<i>8</i>	<i>1</i>	<i>4</i>	<i>3</i>	<i>20</i>
<i>20</i>	<i>12</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>15</i>	

Переход к общему случаю очевиден.

Представляя данные в таком виде, легко построить первое базисное допустимое решение задачи. Это можно сделать по правилу "самая дешевая продукция реализуется первой". Поскольку задача состоит в минимизации общей стоимости, находим наименьшую стоимость во всех клетках: 0 в строке 1, столбце 2 и присваиваем переменной  $x_{12}$  значение 12 (наименьшая из сумм по строке и по столбцу). Теперь столбец 2 можно удалить, уменьшив сумму по строке на 12, т. е. заменив ее на 3. Потом та же процедура применяется к полученному массиву.

1	12	0	3	4	2	3
5		1	2	3	3	25
4		8	1	4	3	20
20	12	5	8	15		

Затем переменной  $x_{11}$  присваивается значение 3 (или переменной  $x_{33}$  — значение 5), удаляется строка 1, сумма по столбцу 1 заменяется на 17 и осуществляется переход к следующему массиву и т. д.

После небольшой тренировки для задач небольшого объема эту процедуру можно проводить устно. После того как последней переменной присвоено значение, суммы по всем строкам и столбцам будут равны 0. Таким образом получается решение

3	12	0	3	4	2	3
5		1	2	3	3	25
4		8	1	4	3	20
17	12	5	8	15		

(значения переменных находятся в левых верхних углах клеток) с семью приводимыми ниже базисными переменными. Остальные переменные равны 0. Для общего массива из  $m$  строк и  $n$  столбцов получаем  $m + n - 1$  переменных в силу (4.1)

3	12		3	4	2	15
2	5	1	2	8	3	25
15	4	8	5	1	4	20
17	12	5	8	15		

Полная стоимость, соответствующая этому решению  $C = 3 \cdot 1 + 12 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 15 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 147$  дол.

Попробуем теперь улучшить это решение, уменьшив стоимость  $C$ . Отметим, что полученные результаты для этого частного случая и метод их получения применимы и в случае общей транспортной задачи (см. соотношения (4.2)).

Пусть  $c_{sr}$  имеет наименьшее значение из всех  $c_{ij}$ . Положим  $x_{sr}$  равным наименьшей величине из  $a_s$  и  $b_r$ . Если этой величиной будет  $a_s$ , то удалим строку  $s$ , заменим  $b_r$  на  $b_r - a_s$  и применим вышеописанную процедуру к оставшемуся массиву. Полученное таким образом базисное решение будет содержать  $m+n-1$  базисных переменных, и каждая из этих переменных  $x_{ij}$  будет задаваться соотношением

$$x_{ij} = \pm \sum a_p \mp \sum b_q.$$

по некоторым строкам  $p$  и столбцам  $q$

Можно доказать, что этот результат справедлив для *всех* базисных допустимых решений. Сначала докажем, что все базисы транспортной задачи заданы треугольной системой уравнений. Поясним это определение. Система уравнений называется **треугольной**, если она содержит по крайней мере одно уравнение с единственным неизвестным, и если его

исключить, то опять останется по крайней мере одно уравнение с единственным неизвестным, и так далее, пока все неизвестные не будут исчерпаны. Например,

$$3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 9,$$

$$x_2 + 4x_4 = 2,$$

$$3x_3 + x_4 = 7,$$

$$x_4 = 2.$$

Такая система уравнений решается последовательными подстановками. "Треугольник коэффициентов" может содержать нулевые элементы, но диагональные коэффициенты должны быть отличны от 0.

Теперь докажем следующие утверждения.

Утверждение 1. *Все базисы в транспортной задаче задаются треугольной системой уравнений.* Рассмотрим клетки транспортного массива и покажем, что по крайней мере одна строка или по крайней мере один столбец содержит лишь одну базисную переменную и после удаления этой строки или этого столбца оставшийся массив сохранит это свойство.

Прежде всего каждая строка и каждый столбец содержит по крайней мере одну базисную переменную. В противном случае не выполняется условие отличия от 0 суммы по строке или по столбцу.

Для массива размерностью  $m * n$  и, если каждая строка содержит по крайней мере две базисные переменные, то количество базисных переменных не меньше  $2m$ ; если каждый столбец содержит по крайней мере две базисные переменные, то количество базисных переменных не меньше  $2n$ . Таким образом, общее количество базисных переменных не меньше  $m + n$ . Но это невозможно, поскольку имеется всего  $m + n - 1$  базисных переменных. Поэтому хотя бы одна строка или хотя бы один столбец содержат лишь одну базисную переменную.

Если вычеркнуть эту строку или этот столбец, рассуждение можно повторить, а значит, описанное выше свойство выполняется для оставшегося массива, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. *Значения всех базисных переменных задаются соотношениями*

$$x_{ij} = \mp \sum a_p \mp \sum b_q.$$

по некоторым строкам  $p$  и столбцам  $q$

Поскольку базис задается треугольной системой уравнений, по крайней мере одна строка или по крайней мере один столбец содержат единственную переменную.

$$x_{pq} = a_p \quad (\text{строка } p)$$

Поэтому ИЛИ

$$x_{pq} = b_q \quad (\text{столбец } q)$$

Если выполняется первое из этих равенств (т. е.  $a_p < b_p$ ), то удаляется строка  $p$ , а  $b_p$  заменяется на  $b_q - a_q$ . Затем рассуждение повторяется для оставшегося массива, т. е. полагается, что

$$x_{p'q'} = a_{p'} \text{ или } x_{p'q'} = b_{q'} \text{ или } x_{p'q'} = b_{q'} - a_{q'}$$

Повторив эту процедуру несколько раз, увидим, что все базисные переменные имеют вид

$$\begin{array}{cccc} \sum a_p & - \sum b_q & - \sum a_p & + \sum b_q \\ \text{по некот-} & \text{по неко-} & \text{по некот-} & \text{по неко-} \\ \text{торым } p & \text{торым } q & \text{торым } p & \text{торым } q \end{array}$$

*Следствие.* Заметим, что если все  $a_i$  или  $b_i$  — целые, значения базисных переменных в допустимом базисном решении тоже целые. Поскольку это задача линейного программирования, оптимальное решение является базисным допустимым решением и, следовательно, целым.

Это очень важное следствие; оно гарантирует, что в задачах не будет получено абсурдное решение (например,  $7\frac{3}{4}$  кроватей в примере 1).

## 4.2. АЛГОРИТМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ПЛАНА

Транспортную задачу можно решить и применением симплекс-метода, но в данном случае этот метод неэффективен, так как используются ограничения специального вида. Мы будем решать эту задачу с помощью алгоритма последовательного улучшения, разработанного Ф. Л. Хитчкоком. Рассмотрим задачу из примера 1 разд. 4.1 (результаты можно обобщить, используя симплекс-множители, описанные в предыдущей главе).

Для примера 1 базисное допустимое решение, полученное по правилу "самая дешевая продукция реализуется первой", было построено. При этом было показано, что результаты можно обобщить.

Предположим, что для рассмотренной задачи уже построено допустимое базисное решение, в котором некоторые из переменных  $x_{ij}$  отличны от 0, а остальные переменные — небазисные и, следовательно, равны 0.

Если  $-u_i$  и  $-v_j$  — симплекс-множители для ограничений, соответствующих  $i$ -й строке и  $j$ -му столбцу в этом базисе, то после умножения  $i$ -й строки на  $-u_i$ ,  $j$ -го столбца на  $-v_j$ , и прибавления стоимости  $C$  получаем

$$\begin{array}{rcl}
 x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & & = a_1 (X - u_1), \\
 & x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & = a_2 (X - u_2), \\
 & \dots & \\
 & x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} & = a_m (X - u_m), \\
 x_{11} & + x_{21} & + x_{m1} = b_1 (X - v_1), \\
 x_{12} & + x_{22} & + x_{m2} = b_2 (X - v_2), \\
 & \dots & \\
 x_{1n} & + x_{2n} & + x_{mn} = b_n (X - v_n) \\
 c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} & & c_{mn}x_{mn} = C,
 \end{array}$$

Уравнение (4.7) — это специальный вид уравнения (3.7) для транспортной задачи. Коэффициент при  $x_{ij}$  равен  $c_{ij} - u_i - v_j$ , так как  $x_{ij}$  входит всего в два ограничения, соответствующих  $i$ -й строке и  $j$ -му столбцу.

Далее если уравнение (4.7) является канонической формой целевой функции, соответствующей базису, то коэффициенты при базисных переменных равны 0.

Таким образом, для занятых клеток массива справедливо соотношение

$$c_{ij} - u_i - v_j = 0, \text{ и } ij$$

следовательно, можно определить  $u_i$  и  $v_j$ .

Имеется  $m$  неизвестных  $u_i$  и  $n$  неизвестных  $v_j$ , поскольку базисными переменными занято  $m + n - 1$  клеток, из уравнения (4.8) получаем  $m + n - 1$  уравнений  $m + n$  неизвестных. Эти уравнения можно решить, положив одно из неизвестных равным 0 и решив систему относительно остальных неизвестных. Это всегда возможно. В примере 1 на первом шаге имеем следующее базисное допустимое решение:

3+w	12-w							15 (-4)
1	0	3	4	2				
2-w	w-3	0	2	8	3	15	3	25 (0)    C=147
15	4	8	5	1	4	3		20 (-1)
20	12	5	8	15				
(5)	(4)	(2)	(3)	(3)				

Имеется 8 неизвестных  $u_1, u_2, u_3$  и  $v_1, \dots, v_5$  и 7 занятых клеток. Если положить  $u_2=0$ , то в трех занятых клетках этой строки получим  $v_1=5, v_4=3$  и  $v_5=3$ . Поскольку  $v_1=5$ , то в занятых клетках этого столбца  $u_1=-4$  и  $u_2=-1$ . Наконец, так как  $u_1=-4, u_3=-1$ , то  $v_2=4, v_3=2$ . Таким образом получаются указанные в скобках значения для

Теперь можно проверить, оптимально ли это решение. Если  $c'_{ij}$  - коэффициент при  $x_{ij}$  в канонической форме для целевой функции, то из уравнений (4.7) следует, что

$$c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j. \quad (4.9)$$

Для базисных переменных  $c_{ij}=0$ . Для небазисных переменных отрицательное значение  $c'_{ij}$  указывает на то, что переменная  $x_{ij}$  должна быть включена в базисные переменные, что приведет к уменьшению целевой функции. В связи с этим  $c'_{ij}$  вычисляется для незанятых клеток; те из них, в которых значение  $c'_{ij}$  отрицательно, помечаются. Результат указан в левых нижних углах массива. На этом этапе нулевые значения переменных указывают на то, что их введение в базис не изменит значение целевой функции.

Ясно, что для нашей задачи увеличение  $x_{22}$  приведет к уменьшению целевой функции. Действительно, каждое увеличение  $x_{22}$  на 1 уменьшит целевую функцию на 3. При увеличении значения  $x_{22}$  на число  $w$  необходимо уменьшить  $x_{21}$  на число  $w$ , чтобы сохранить сумму в строке (2). Для того чтобы сохранить значение суммы в столбце (1), необходимо увеличить  $x_{11}$  на число  $w$ , а затем для сохранения суммы в строке (1) уменьшить  $x_{12}$  на число  $w$ . Заметим, что другой метод: положить  $x_{22} = w$ , уменьшить  $x_{42}$  на число  $w$  до значения  $8 - w$ , поскольку невозможно сохранить сумму в столбце (4), не вводя дополнительных переменных, - приводит к некоторым трудностям и с его помощью невозможно получить базисное решение. Программа должна избегать таких "тупиковых путей".

Таким образом, максимальное значение, которое может иметь  $w$ , равно 2. В этом случае переменная  $x_{21}$  становится небазисной и нулевой в следующем допустимом базисном решении:

$5+w$	$10-w$			$0$		$15 (-1)$
$1$	$0$	$3$	$4$	$2$		
$5$	$2+w$	$1$	$2$	$8$	$15-w$	$25 (0)$
$15-w$	$4$	$8$	$5$	$1$	$-1$	$4$
$20$	$12$	$5$	$8$	$15$		
$(2)$	$(1)$	$(-1)$	$(3)$	$(3)$		

Для этого массива

$$C = 5*1 + 10*0 + 2*1 + 8*3 + 15*3 + 15*4 + 5*1 = 141 = 147 - 3*2 = (\text{предыдущее значение}) + c'_{22} * w.$$

Далее определяем  $u_i$  и  $v_j$  для этого решения. (Проверьте, что заключенные в скобки значения указаны верно.) Значения  $c'_{ij}$  для небазисных переменных, равных 0 или отрицательных, указаны в левых нижних углах клеток массива. Очевидно, что в базис следует включить переменную  $x_{35}$ . Если изменить эту величину на число  $w$ , то другие величины должны быть заменены указанным образом. (Проследите за этим.) В результате наибольшее возможное значение для  $w$  равно 10, и это приводит к тому, что в следующем массиве переменная  $x_{12}$  станет небазисной.

$15$	$1$	$0$	$3$	$4$	$2$	$15 (-3)$
$5$	$12$	$1$	$2$	$8$	$3$	$25 (0)$
$5$	$4$	$8$	$5$	$1$	$4$	$10$
$20$	$12$	$5$	$8$	$15$		
$(4)$	$(1)$	$(1)$	$(3)$	$(3)$		

Значение стоимости  $C$  уменьшается:

$$C = 15*1 + 12*1 + 8*3 + 5*3 + 5*4 + 5*1 + 10*3 = 121 = 141 - 2/10 = (\text{предыдущее значение}) + c'_{35} * w.$$

Для этого массива вычисляются  $u_i$  и  $v_j$ . Для незанятых клеток все  $c'_{ij}$  положительны. Таким образом получено оптимальное решение, в котором

$$x_{11} = 15, x_{22} = 12, x_{24} = 8, x_{25} = 5, x_{31} = 5, x_{33} = 5, x_{35} = 10.$$

Минимальное значение стоимости  $C$  равно 121 дол. Отметим, что значение стоимости  $C$  задается уравнением

$$C = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n v_j b_j, \quad (4.10)$$

что непосредственно следует из уравнения (4.7), так как в его левой части все слагаемые равны 0 (поскольку либо переменная базисная, а следовательно, коэффициент при ней равен нулю, либо переменная небазисная и, значит, равна 0). Заметим, что уравнение (4.10) — просто частный случай уравнения (3.11) для транспортной задачи.

Проверьте справедливость уравнения (4.10) для каждого из массивов. Такая проверка полезна на каждом шаге итерационной процедуры.

Отметим, что в рассматриваемой задаче  $x_{12}$  равно 0 в оптимальном решении, несмотря на то, что стоимость, указанная в этой клетке, равна 0; результат этот неожидан но, безусловно, верен.

### 4.3. ДИСБАЛАНС И ВЫРОЖДЕННОСТЬ В ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧЕ

Выполнение условия (4.1) очень важно в транспортной задаче. Для массива размерностью  $m \times n$  оно означает, что в базисное допустимое решение входит  $m \times n - 1$  базисная переменная. Предположим, что этот баланс между спросом и предложением нарушен.

**Пример 1** (вариант примера 1 из разд. 4.1 и 4.2)

Пусть 15, 25, 20 кроватей, хранящихся на складах  $W_1, W_2, W_3$ , должны быть распределены по четырем магазинам, где требуется 20, 12, 5 и 9 кроватей. Пусть стоимость перевозки одной кровати со складов в магазины задается таблицей

Склад	Магазин			
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_5$
$W_1$	2	2	2	4
$W_2$	3	1	1	3
$W_3$	3	6	3	4

Как следует планировать перевозку для минимизации стоимости? Склады располагают 60 кроватями. Магазинам требуется лишь 46 кроватей. Для того чтобы перейти к транспортной задаче, введем фиктивный магазин, которому требуется 14 кроватей. Стоимость перевозок со склада в этот магазин полагается равной 0. Если в окончательном решении будет получено, что некоторые кровати надо будет отправить в этот магазин, то это будет проигнорировано. Кровати останутся на складе. Таким образом, поставлена транспортная задача, для которой уравнения (4.1) выполняются.

На рисунке приводятся первое базисное решение для этого массива и последующие массивы, ведущие к окончательному решению. Проверьте вычисления каждой итерации. Требуется только две итерации:

15	2	2	2	4	0	15 (-1)			
5-w	3	12	1	5	1	3+w	3	0	25 (0)
W				6-w	14				20 (1)
-1	3	6	3	4	0				
20	12	5	9	14					
(3)	(1)	(1)	(3)	(-					

C=95

Переменная  $x_{13}$  входит в базис; максимальное значение  $w$  равно 5; переменная  $x_{21}$  исключается из базиса:



15					15 (0)	
2	2	2	2	4		
3	12	1	5	1	8	3
5	3	6	3	4	14	0
20	12	5	9	14		
(2)	(1)	(1)	(3)	(-1)		

$C=90$

14 кроватей из клетки (3, 5) остаются на складе 3. Потребности магазинов полностью удовлетворены. Мы получили оптимальное решение

$$x_{11} = 15, x_{22} = 12, x_{23} = 5, x_{24} = 8, x_{31} = 5, x_{34} = 1, C = 90 \text{ дол.}$$

Ясно, как справиться с дисбалансом, если спрос превышает предложение: надо ввести фиктивного поставщика с нулевой стоимостью перевозок. Продукция этого поставщика на самом деле поставляться *не* будет. Спрос на нее не будет удовлетворен.

Вырожденность в транспортной задаче возникает, если одна или более базисных переменных обращаются в 0. Из соотношения (4.6) видно, что вырожденное решение может быть получено, если частичные суммы сумм по столбцам равны частичным суммам сумм по строкам. Проблему можно решить без особых трудностей. На каждом шаге следует различать базисные переменные, которые равны 0 и стоят в соответствующих клетках, и небазисные переменные.

При построении первого базисного допустимого решения могут возникнуть трудности, если суммы и по строкам, и по столбцам равны между собой и обратились в 0. В этом случае из дальнейших рассмотрении следует исключить *только одну* из них. Другая сумма будет ликвидирована при присвоении базисной переменной значения 0. Поскольку на каждом шаге, кроме последнего, удаляется *только одна* строка или *только один столбец*, то в результате получается  $m+n-1$  базисных переменных и столько заполненных клеток, сколько требуется (даже если некоторые базисные переменные обратились в 0).

Трудности могут возникнуть и при улучшении базисного допустимого решения. Применение правил может обратить в 0 более одной базисной переменной. В этом случае важно помнить, что только одна из них должна стать небазисной; остальные следует сохранить базисными, но с нулевыми значениями. Их составляют клетки с целью определения  $u_i$  и  $v_j$ .

## Пример 2

Правительственное учреждение получило следующие предложения от фирм  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  на покупку форменных пальто трех размеров  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ :

Фирма	Стоимость одного пальто, дол.		
	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$F_1$	110	115	126
$F_2$	107	115	130
$F_3$	104	109	116

Должны быть заключены контракты на продажу 1000 пальто размера  $S_1$ , 1500 пальто размера  $S_2$  и 1200 пальто размера  $S_3$ , однако ограниченность производственных мощностей фирм приводит к тому, что общее количество заказов не может превосходить 1000 пальто для фирмы  $F_1$ , 1500 пальто для фирмы  $F_2$  и 2500 пальто для фирмы  $F_3$ . Необходимо, чтобы эти контракты были заключены с минимизацией общей стоимости, однако ограничения должны быть распределены по фирмам как можно справедливее. Как следует распределить заказы для выполнения этих требований?

Заметим, что общее предложение (5000 пальто) превосходит общий спрос (3700 пальто). Поэтому введем фиктивный сорт пальто, количество которых составит 1300; задача превращается в транспортную. Стоимость одного пальто этого сорта будет нулевой, и спрос на эти пальто в окончательном решении будет игнорироваться. Он будет просто отражать избыточную производственную мощность. Решать задачу удобно, принимая за единицу 100 пальто.

Массив задачи принимает вид

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	
$F_1$	110	115	126	0	10
$F_2$	107	115	130	0	15
$F_3$	104	109	116	0	25
	10	15	12	13	

Ниже приводятся первое базисное решение, симплекс-множители  $u_i$ ,  $v_j$  и т. д. и первая итерация вычислений:

		10	-2	10 (-4)	
110	115	126	0		
-3	13+w	2-w	-6	15 (0)	$C=4273$
107	115	130	0		
10	2-w	w	13	25 (-6)	
104	109	-8	116	0	
10	15	12	13		
(110)	(115)	(130)	(6)		

Максимальное значение  $w$  равно 2; оно обратит в 0 и  $x_{32}$ , и  $x_{23}$  (в очевидных обозначениях). Только одна из этих переменных, предположим  $x_{23}$ , удаляется из базиса. Ниже приведено базисное допустимое решение с симплекс-множителями  $u_i$  и  $v_j$ , содержащее шесть базисных переменных, одна из которых равна 0:

-4	-4	10-w	w	10 (10)	
110	115	126	-10	0	
-3	15			15 (6)	$C=4257$
107	115	130	-6	0	
10	0	2+w	13-w	25 (0)	
104	109	116	0		
10	15	12	13		
(104)	(109)	(116)	(0)		

Максимальное значение  $w$  равно 10:

			10	10 (10)	
110	115	126	0		
-3	15-w		w	15 (6)	$C=4157$
107	115	130	-6	0	
10	0+w	12	3-w	25 (0)	
104	109	116	0		
10	15	12	13		
(104)	(109)	(116)	(0)		

Максимальное значение  $w$  равно 3, и следующее решение не вырождено:

0	0		10	10 (6)
110	115	126	0	
w	12-w		3	15 (6)
-3	107	115	130	0
10-w	3+w	12		25 (0)
104	109	116	0	
10	15	12	13	
(104)	(109)	(116)	(-6)	

$C=4139$

Максимальное значение  $w$  равно 10:

	w		10-w	10 (0)
110	0	115	126	0
10	2-w		3+w	15 (0)
107	115	130	0	
	13	12		25 (-6)
104	109	116	0	
10	15	12	13	
(107)	(115)	(122)	(0)	

$C=4109$

Последнее решение оптимально. Однако, поскольку  $c'_{12} = 0$ , эта переменная также может быть введена в базис без изменения функции  $C$ . Максимальное значение  $w$  равно 2:

	2		8	10 (6)
110	115	126	0	
10			5	15 (6)
107	115	130	0	
	13	12		25 (0)
104	109	116	0	
10	15	12	13	
(101)	(109)	(116)	(-6)	

$C=4109$

Следовательно, имеется два оптимальных решения, для которых стоимость  $C = 410\,900$  дол.  
*Первое решение:* фирма  $F_2$  поставляет 1000 пальто размера  $S_1$  и 200 пальто размера  $S_2$ ; фирма  $F_3$  поставляет 1300 пальто размера  $S_2$  и 1200 пальто размера  $S_3$ .

*Второе решение:* фирма  $F_1$  поставляет 200 пальто размера  $S_2$ , фирма  $F_2$  - 1000 пальто размера  $S_1$ , фирма  $F_3$  - 1300 пальто размера  $S_2$  и 1200 пальто размера  $S_3$ .

Второе решение кажется более приемлемым, хотя такое распределение заказов тоже несправедливо, как и в первом решении.

Вырожденности можно избежать, слегка изменив суммы по строкам так, чтобы частичные суммы сумм по строкам не совпадали с частичными суммами сумм по столбцам. Можно положить суммы по строкам равными 10,01; 15,01; 25,01; по столбцам 10; 15; 12 и 13,03. В окончательном решении можно округлить дробные значения до целых. Проведите вычисления (ясно, что они аналогичны вышеописанным вычислениям).

Заметим, что, решая эту задачу, мы нигде не производили деления. Поэтому если  $a_i$  и  $b_j$  - целые, то первое допустимое базисное решение и все последующие, а также оптимальное решение - целые. Свойство базисных допустимых решений и, следовательно, оптимального решения быть целыми уже отмечалось в разд. 4.1.

#### 4.4. ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ НА ЭВМ

Программа решения транспортной задачи нетривиальна, и мы рекомендуем изучить ее внимательно. Для облегчения понимания мы разбили эту программу на части. Приведем сначала блок-схему решения транспортной задачи (рис. 4.17).

Теперь приведем блок-схему определения первого допустимого базисного решения (строки 500-840) [рис. 4.18].

В конце этой процедуры все элементы массива  $DA(I)$  и  $DB(J)$  должны быть равны 0. Переменные  $TR(I)$  и  $TC(1)$  должны быть равны количеству переменных соответственно в 1-й строке и в J-м столбце.

В следующей процедуре (строки 1000-1585) вычисляются  $u$  и  $v$  и наименьшее значение  $c'_{ij}$  предположим  $c'_{kl}$  (рис. 4.19).

Процедура перехода к новому базисному допустимому решению (начиная со строки 2000 до строки 3250) заслуживает внимательного изучения. Поясним ее подробнее. Сначала находится "цепь"  $\pm w$  клеток, которая не является "тупиковым путем" (строки 2050-2730).

На шаге 1 мы находимся в клетке  $(K, L)$ ,  $T$  - счетчик шагов,  $IP$  - индикатор "тупикового пути",  $(RT(T), CT(T)) = (RI, CJ)$  - клетка, в которую мы попадаем на шаге  $T$ . Массив  $D$  состоит из  $\pm 1$ , соответствующих  $\pm w$ ; положим  $MM = 1$ , если клетка используется,  $IU = 1$  и  $IV = 1$ , если строки и столбцы входят в цикл.

В команде 2100 на шаге  $T$  ищется строка  $RT(T)$  для столбца, содержащего базисную переменную в неиспользованном столбце (строка 2140)

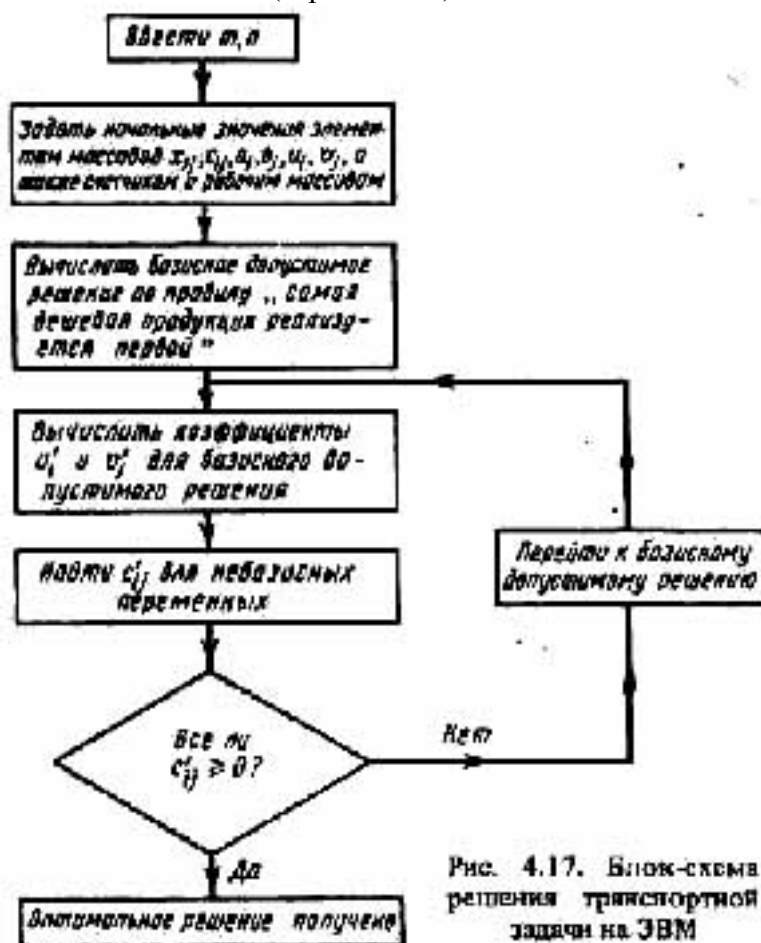


Рис. 4.17. Блок-схема решения транспортной задачи на ЭВМ

в неотмеченной клетке (строка 2150). Если это единственная переменная в своем столбце, то производится присваивание  $IP = 1$  (строка 2170). Разумеется, это не делается в начальном столбце  $L$ . После того как подходящая переменная найдена в столбце  $CJ$ , поиск прекращается; при этом  $FC = 1$ .

Затем  $T$  увеличивается для следующего шага, в переменную  $RT(T)$  заносится номер текущей строки, а в переменную  $CT(T)$  - номер только что найденного столбца  $CJ$ ; соответствующему  $D$  присваивается значение -1, и найденная клетка помечается присвоением  $MM$  значения 1 (строка 2320). Если мы снова оказались в столбце  $L$ , откуда начали, то цикл завершен (строка 2400). В противном случае ищем столбец  $CT(T) [=CJ]$  для строки, содержащей базисную переменную в неотмеченных строке и клетке; таким образом снова помечаются "тупиковые пути". Как только искомым столбец найден, поиск прекращается присвоением  $FR = 1$ . Затем  $T$  увеличивается для следующего шага, переменной  $RT(T)$  присваивается номер только что

найденной строки  $RI$ , а  $CT(T)$  - номер только что обрабатывавшегося столбца; для этой клетки осуществляются присвоения:  $D = +1$ ,  $MM = 1$ , после чего программа возвращается к поиску строки в строке 2100 программы.

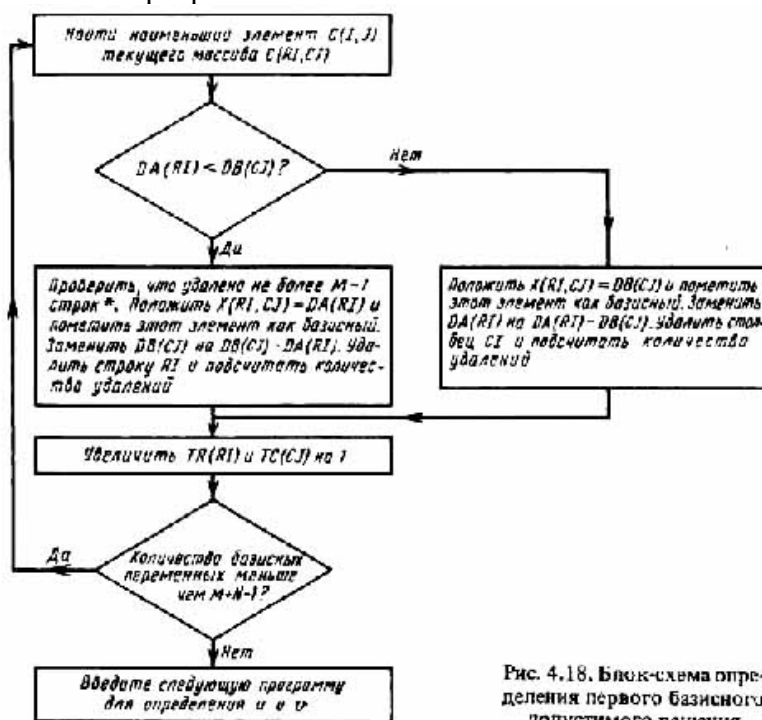


Рис. 4.18. Блок-схема определения первого базисного допустимого решения

Заметим, что если в процессе поиска строки не удастся найти столбец ( $CJ = 0$  в строке 2190), не являющийся "тупиковым путем", то происходит возвращение (строка 2210) к строке предыдущего поиска столбца. Если в поисках столбца удастся найти только строки ( $RI = 0$  в строке 2590), соответствующие тупиковым путям, то осуществляется возвращение (строка 2610) к строке предыдущего поиска строки. Однако в силу того, что  $MM$  сохраняет свое значение, ошибка не повторяется в дальнейшем ( $MM = 1$  в строках 2150 и 2550). Поскольку базис задан треугольной системой уравнений, процесс в конце концов закончится и управление будет передано из строки 2400 в строку 3000.

В строках 3000 - 3040 программы содержится наименьшая базисная переменная из клеток, в которых  $D = -1$ . Здесь определяются значение  $w$  и положение переменной ( $KK, LL$ ), которая будет удалена из базиса. В строках 3100 — 3120 клетки включаются в цепь. В конечном счете переменная ( $K, L$ ) определяется как базисная, переменная ( $KK, LL$ ) - как небазисная и определяется количество базисных переменных во всех строках и столбцах. Затем программа возвращается к вычислению симплекс-множителей  $u$  и  $v$ .

При работе программы печать ( $u$  и  $v$ ) в строках 1340- 1342 и наибольшего по модулю значения  $c'_{ij}$  в строке 1581, а также печать в строках 2071, 2321 и 2721 могут быть подавлены. Последние три строки отражают цепи и обратный поиск. Печать в строке 3221, определяющая  $w$  и переменную для удаления из базиса, тоже может быть подавлена.

Приводимые данные соответствуют примеру 1 разд. 4.1. Читателю следует проследить за шагами решения. Принятый путь не соответствует нашему полученному вручную решению, но настолько же законен. На самом деле, первые два из полученных допустимых базисных решений вырождены.

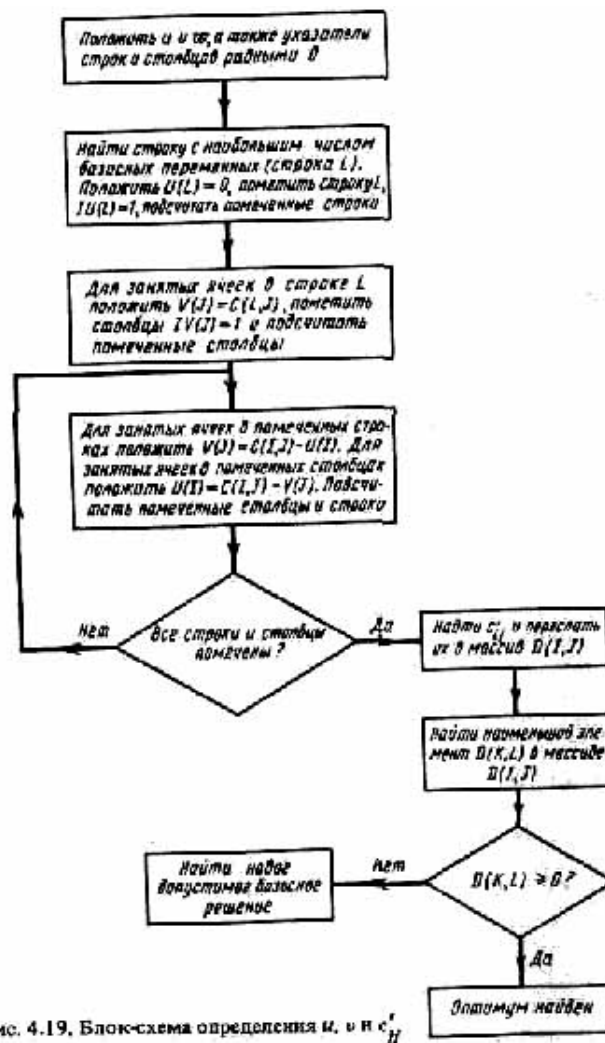


Рис. 4.19. Блок-схема определения  $u$  и  $v$  в  $s'_{ij}$

READY.

20 PRINT "РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ"

30 REM В ЗАДАЧЕ РАССМАТРИВАЮТСЯ М СТРОК И N СТОЛБЦОВ

40 READ M,N

50 REM МАССИВЫ A(I) И B(J) ЯВЛЯЮТСЯ ОБЩИМ ОБОЗНАЧЕНИЕМ СТРОК

51 REM И СТОЛБЦОВ; МАССИВЫ DA(I) И DB(J) ПРЕДНАЗНАЧЕНЫ ДЛЯ

52 REM ХРАНЕНИЯ ИХ КОПИЙ; МАССИВЫ IP(I) И IC(J) УКАЗЫВАЮТ

53 REM (ЕСЛИ ИХ ЭЛЕМЕНТЫ РАВНЫ 1), ЧТО СООТВЕТСТВУЮЩИЕ СТРОКИ

54 REM И СТОЛБЦЫ БЫЛИ УДАЛЕНЫ; МАССИВЫ TR(I) И TC(J) ЯВЛЯЮТСЯ

55 REM СЧЕТЧИКАМИ БАЗИСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В СТРОКАХ И СТОЛБЦАХ 60 DIM A(M),DA(M),B(N),DB(N),IR(M),IC(N),TR(M),TC(N)

65 REM МАССИВЫ IU(I) И IV(J) УКАЗЫВАЮТ (ЕСЛИ ИХ ЭЛЕМЕНТЫ

66 REM РАВНЫ 1), ЧТО ЭЛЕМЕНТАМ МАССИВОВ U И V БЫЛИ ПРИСВОЕНЫ

67 REM ЗНАЧЕНИЯ

70 DIM U(M),V(N),IU(M),IV(N)

80 DIM RT(M+N),CT(M+N)

85 REM МАССИВ C(I,J) СОДЕРЖИТ СТОИМОСТИ, МАССИВ X(I,J) -

90 REM НЕИЗВЕСТНЫЕ; МАССИВ IX(I,J) ОБОЗНАЧАЕТ БАЗИС, ЕСЛИ ЕГО

95 REM ЭЛЕМЕНТЫ РАВНЫ 1

100 DIM C(M,N),X(M,N),IX(M,N),D(M,N),MM(M,N)

105 REM ПРОЧИЕ МАССИВЫ ЯВЛЯЮТСЯ РАБОЧИМИ

110 REM ПОДРОБНОСТИ ОПИСАНЫ В ТЕКСТЕ КНИГИ

140 REM ВВЕСТИ СТОИМОСТИ, ОБЩИЕ СТРОКИ И СТОЛБЦЫ

150 FOR I=1 TO M

160 FOR J=1 TO N

170 READ C(I,J)

180 NEXT J

190 NEXT I

200 FOR I=1 TO M: READ A(I): DA(I)=A(I): NEXT I

210 FOR J=1 TO N: READ B(J): DB(J): NEXT J

490 REM НАЙТИ НАИМЕНЬШУЮ СТОИМОСТЬ В МАССИВЕ C(RI,CJ)

500 C=0: CT=0: CR=0

510 RI=0: CJ=0: Y=IE10

600 FOR I=1 TO M

605 REM ПРОПУСТИТЬ УДАЛЕННЫЕ СТРОКИ

613 IF IR(I)=1 THEN GOTO 670

620 FOR J=1 TO N

```

625 REM ПРОПУСТИТЬ УДАЛЕННЫЕ СТОЛБЦЫ
630 IF IC(J)=1 THEN GOTO 660
640 IF C(I,J)>Y THEN GOTO 660
650 Y=C(I,J):RI=I:CJ=J
660 NEXT J
670 NEXT I
680 REM МИНИМАЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ПО ВСЕМ СТРОКАМ И СТОЛБЦАМ
681 REM ПЕРЕСЛАТЬ В МАССИВ X(RI,CJ)
685 REM ПОМЕТИТЬ БАЗИС В МАССИВЕ IX
690 REM УДАЛИТЬ СТРОКУ ИЛИ СТОЛБЕЦ И ПОМЕТИТЬ ИХ
695 REM ОПРЕДЕЛИТЬ ДРУГУЮ СУММУ, ПОДСЧИТАТЬ КОЛИЧЕСТВО
696 REM УДАЛЕНИЙ СТРОК
700 IF DA(RI)<=DB(CJ) THEN GOTO 760
710 X(RI,CJ)=DB(CJ)
720 IX(RI,CJ)=1
730 DA(RI)=DA(RI)-DB(CJ):DB(CJ)=0
740 IC(CJ)=1:CO=CO+1:CT=CT+1
750 GOTO 810
760 IF DA(RI)=DB(CJ) AND CR=M-1 THEN GOTO 710
770 X(RI,CJ)=DA(RI)
780 IX(RI,CJ)=1
790 DB(CJ)=DB(CJ)-DA(RI):DA(RI)=0
800 IR(RI)=1:C0=C0+1:CR=CR+1
810 TR(RI)=TR(RI)+1:TC(CJ)=TC(CJ)+1
820 IF C0<M+N-1 THEN GOTO 510
830 CR=CR+1
840 REM В СТРОКЕ 760 БЫЛИ ПРИНЯТЫ МЕРЫ К ТОМУ, ЧТОБЫ
850 REM НЕ УДАЛЯТЬ ВСЕ СТРОКИ, ПОКА ОСТАЮТСЯ СТОЛБЦЫ
990 REM НАЙТИ U И V, ПОЛОЖИВ ИХ СНАЧАЛА РАВНЫМИ 0
1000 FOR I=1 TO M
1010 IU(I)=0:U(I)=0
1020 NEXT I
1030 FOR J=1 TO N
1040 IV(J)=0:V(J)=0
1050 NEXT J
1060 REM НАЙТИ СТРОКУ С НАИБОЛЬШЕЙ БАЗИСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ,
1070 REM НАПРИМЕР СТРОКУ L
1080 T=0:L=0
1090 FOR I=1 TO M
1110 IF TR(I)<T THEN GOTO 1130
1120 T=TR(I):L=I
1130 NEXT I
1140 U(L)=0:IU(L)=1:C0=1:CR=1:CT=0
1150 FOR J=1 TO N
1160 IF IX(L,J)=0 THEN GOTO 1190
1170 V(J)=C(L,J):IV(J)=1
1180 CT=CT+1:C0=C0+1
1190 NEXT J
1195 REM ОБРАБОТАТЬ БАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ В ПОМЕЧЕННЫХ
1196 REM СТРОКАХ ИЛИ ПОМЕЧЕННЫХ СТОЛБЦАХ
1200 FOR I=1 TO M
1210 FOR J=1 TO N
1228 IF IX(I,J)=0 THEN GOTO 1310
1230 IF IU(I)=0 AND IV(J)=0 THEN GOTO 1310
1240 IF IU(I)=1 AND IV(J)=1 THEN GOTO 1310
1250 IF IU(I)=0 AND IV(J)=1 THEN GOTO 1290
1260 V(J)=C(I,J)-U(I):IV(J)=1
1270 CT=CT+1:C0=C0+1
1280 GOTO 1310
1290 U(I)=C(I,J)-V(J):IU(I)=1
1300 CR=CR+1:C0=C0+1
1310 NEXT J
1320 NEXT I
1325 REM ПРОВЕРИТЬ, ВСЕ ЛИ СТРОКИ И СТОЛБЦЫ БЫЛИ ПОМЕЧЕНЫ
1330 IF C0<>M+N THEN GOTO 1200
1340 PRINT "ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СТОИМОСТИ"
1341 PRINT "U(I)";:FOR I=1 TO M:PRINT U(I);:NEXT I:PRINT ""
1342 PRINT "V(J)";:FOR J=1 TO N:PRINT V(J):NEXT J:PRINT ""
1390 REM ЭЛЕМЕНТЫ C'(IJ) ПОМЕЩАЮТСЯ В МАССИВ D(I,J);
1395 REM ПРОВЕРИТЬ, РАВНЫ ЛИ ОНИ 0 ДЛЯ БАЗИСА
1400 FOR I=1 TO M
1410 FOR J=1 TO N
1420 IF IX(I,J)=0 THEN GOTO 1460
1430 D(I,J)=C(I,J)-U(I)-V(J)
1440 IF D(I,J)<>0 THEN PRINT "ОШИБКА 1"
1450 GOTO 1470
1460 D(I,J)=C(I,J)-U(I)-V(J)
1470 NEXT J
1480 NEXT I

```

```

1490 REM НАЙТИ НАИМЕНЬШИЙ ЭЛЕМЕНТ В МАССИВЕ D(I,J) И
1495 REM ПРИПИСАТЬ ЕМУ ИНДЕКСЫ (K,L)
1500 T=0:K=0:L=0
1510 FOR I=1 TO M
1520 FOR J=1 TO N
1530 IF IX(I,J)=1 THEN GOTO 1560
1540 IF D(I,J)>=T THEN GOTO 1560
1550 T=D(I,J):K=I:L=J
1560 NEXT J
1575 REM ЕСЛИ T ВСЕ ЕЩЕ БОЛЬШЕ 0, ТО ВСЕ D(I,J) ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ
1576 REM И ДАННОЕ РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНО
1580 IF T=0 THEN GOTO 4000
1581 PRINT "C*KL=" T; PRINT "K=" K: PRINT "L=" L: PRINT ""
1582 PRINT "":GOSUB 5000
1585 REM В ПОДПРОГРАММЕ, НАЧИНАЮЩЕЙСЯ СО СТРОКИ 5000,
1586 REM ПЕЧАТАЕТСЯ БАЗИСНОЕ ДОПУСТИМОЕ РЕШЕНИЕ
1990 REM НАЙТИ СЛЕДУЮЩЕЕ БАЗИСНОЕ ДОПУСТИМОЕ РЕШЕНИЕ;
1995 REM СНАЧАЛА ВСЕ ИНДИКАТОРЫ И СЧЕТЧИКИ ПОЛОЖИТЬ РАВНЫМИ 0
2000 FOR I=1 TO M:IU(I)=0:NEXT I
2010 FOR J=1 TO N:IV(I):NEXT J
2015 FOR I=1 TO M+N:RT(I):CT(I):NEXT I
2020 FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO N
2030 D(I,J)=0:MM(I,J)=0
2040 NEXT J:NEXT I
2050 T=1:IP=0
2060 RT(T):CT(T)=L
2070 D(K,L)=1:MM(K,L)=1:IU(K)=1
2071 PRINT T,K,L
2100 FR=0:FC=0:RI=RT(T):CJ=0
2110 FOR J=1 TO N
2120 IF FC=1 THEN GOTO 2180
2130 IF IX(RI,J)=0 THEN GOTO 2180
2140 IF IV(J)=1 THEN GOTO 2180
2150 IF MM(RI,J)=1 THEN GOTO 2180
2155 IF TC(J)=1 AND J=L THEN GOTO 2170
2160 IF TC(J)=1 THEN IP=1:GOTO 2180
2170 FC=1:CJ=J:IV(J)=1:J=N
2180 NEXT J
2190 IF CJ<>0 THEN GOTO 2300
2200 IF IP >0 THEN IP=0
2210 D(RT(T),CT(T))=0:T=T-1
2220 GOTO 2500
2300 T=T+1
2310 RT(T)=RI:CT(T)=CJ
2320 D(RI,CJ)=1:MM(RI,CJ)=1
2321 PRINT T,RI,CJ
2400 IF CT(T)=L AND T>2 THEN GOTO 3000
2500 FR=0:FC=0:RI=0:CJ=CT(T)
2510 FOR I=1 TO M
2520 IF FR=1 THEN GOTO 2580
2530 IF IX(I,CJ)=0 THEN GOTO 2580
2540 IF IU(I)=1 THEN GOTO 2580
2550 IF MM(I,CJ)=0 THEN GOTO 2580
2560 IF TR(I)=1 AND IP=0 THEN IP=1:GOTO 2580
2570 FR=1:RI=I:IU(I)=1:I=M
2580 NEXT I
2590 IF RI<>0 THEN GOTO 2700
2600 IF IP>0 THEN IP=0
2610 D(RT(T),CT(T))=0:T=T-1
2620 GOTO 2100
2700 T=T+1:IP=0
2710 RT(T)=RI:CT(T)=CJ
2720 D(RT(T),CT(T))=1:MM(RI,CJ)=1
2721 PRINT T,RI,CJ
2730 GOTO 2100
3000 W=1E10:L=0:KK=0
3010 FOR I=2 TO T STEP 2
3020 IF X(RT(I),CT(I))>=W THEN GOTO 3040
3030 W=X(RT(I),CT(I)):KK=RT(I):LL=CT(I)
3040 NEXT I
3100 FOR I=1 TO T
3110 X(RT(I),CT(I))=X(RT(I),CT(I))+W*D(RT(I),CT(I))
3120 NEXT I
3200 IX(K,L)=1:IX(KK,LL)=0
3210 TR(K)=TR(K)+1:TR(KK)=TR(KK)-1
3220 TC(L)=TC(L)+1:TC(LL)=TC(LL)-1
3221 PRINT "W="W,:PRINT "KK="KK,:PRINT "LL=" LL
3222 PRINT "ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАКОНЧЕНО УСПЕШНО"
3250 GOTO 1000

```



```

4000 PRINT "ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ"
4010 GOSUB 5000
4500 END
5000 CC=0
5010 PRINT " I  J  XI  CJ  СТОИМОСТЬ"
5020 FOR I=1 TO M
5030 FOR J=1 TO N
1320 NEXT I
1325 REM ПРОВЕРИТЬ, ВСЕ ЛИ СТРОКИ И СТОЛБЦЫ БЫЛИ ПОМЕЧЕНЫ
1330 IF C0<>M+N THEN GOTO 1200
1340 PRINT "ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СТОИМОСТИ"
1341 PRINT "U(I)";:FOR I=1 TO M:PRINT U(I);:NEXT I:PRINT ""
1342 PRINT "V(J)";:FOR J=1 TO N:PRINT V(J);:NEXT J:PRINT ""
1390 REM ЭЛЕМЕНТЫ C'(IJ) ПОМЕЩАЮТСЯ В МАССИВ D(I,J);
1395 REM ПРОВЕРИТЬ, РАВНЫ ЛИ ОНИ 0 ДЛЯ БАЗИСА
1400 FOR I=1 TO M
1410 FOR J=1 TO N
1420 IF IX(I,J)=0 THEN GOTO 1460
1430 D(I,J)=C(I,J)-U(I)-V(J)
1440 IF D(I,J)<>0 THEN PRINT "ОШИБКА 1"
1450 GOTO 1470
1460 D(I,J)=C(I,J)-U(I)-V(J)
1470 NEXT J
1480 NEXT I
1490 REM НАЙТИ НАИМЕНЬШИЙ ЭЛЕМЕНТ В МАССИВЕ D(I,J) И
1495 REM ПРИПИСАТЬ ЕМУ ИНДЕКСЫ (K,L)
1500 T=0:K=0:L=0 1510 FOR I=1 TO M 1520 FOR J=1 TO N
1530 IF IX(I,J)=1 THEN GOTO 1560
1540 IF D(I,J)>=T THEN GOTO 1560
1550 T=D(I,J):K=I:L=J
1560 NEXT J
1570 NEXT I
1575 REM ЕСЛИ Т ВСЕ ЕЩЕ БОЛЬШЕ 0, ТО ВСЕ D(I,J) ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ
1576 REM И ДАННОЕ РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНО
1580 IF T=0 THEN GOTO 4000
1581 PRINT " :PRINT 'C' " KL=" T;:PRINT"K=" K;:PRINT"L=":PRINT ""
1582 PRINT"":GOSUB 5000
1585 REM В ПОДПРОГРАММЕ, НАЧИНАЮЩЕЙСЯ СО СТРОКИ 5000,
1586 REM ПЕЧАТАЕТСЯ БАЗИСНОЕ ДОПУСТИМОЕ РЕШЕНИЕ
1590 REM НАЙТИ СЛЕДУЮЩЕЕ БАЗИСНОЕ ДОПУСТИМОЕ РЕШЕНИЕ.
1995 REM СНАЧАЛА ВСЕ ИНДИКАТОРЫ И СЧЕТЧИКИ ПОЛОЖИТЬ РАВНЫМИ 0
2000 FOR I=1 TO M:IU(I)=0:NEXT I
2010 FOR J=1 TO N:IV(J)=0:NEXT J
2015 FOR I=1 TO M+N:RT(I)=0:CT(I)=0:NEXT I
2020 FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO N
2030 D(I,J)=0:MM(I,J)=0
2040 NEXT J:NEXT I
2050 T=1:IP=0
2860 RT(T)=K:CT(T)=L
2070 D(K,L)=1:MM(K,L)=1:IU(K)=1
2071 PRINT T,K,L
2100 FR=0:FC=0:RI=RT(T):CJ=0
2110 FOR J=1 TO N
2120 IF FC=1 THEN GOTO 2180
2130 IF IX(RI,J)=0 THEN GOTO 2180
2140 IF IV(J)=1 THEN GOTO 2180
2150 IF MM(RI,J)=1 THEN GOTO 2180
2155 IF TC(J)=1 AND J=L THEN GOTO 2170
2160 IF TC(J)=1 THEN IP=1 :GOTO 2180
2170 FC=1:CJ=J:IV(J)=1:J=N
2180 NEXT J
2190 IF CJ<>0 THEN GOTO 2300
2200 IF IP >0 THEN IP=0
2210 D(RT(T),CT(T))=0:T=T-1
2220 GOTO 2500
2300 T=T+1
2310 RT(T)=RI:CT(T)=CJ
2320 D(RI,CJ)=1:MM(RI,CJ)=1
2321 PRINT T,RI,CJ
2400 IF CT(T)=L AND T>2 THEN GOTO 3000
2500 FR=0:FC=0:RI=0:CJ=CT(T)
2510 FOR I=1 TO M
2520 IF FR=1 THEN GOTO 2580
2530 IF IX(I,CJ)=0 THEN GOTO 2580
2540 IF IU(I)=I THEN GOTO 2580
2550 IF MM(I,CJ)=0 THEN GOTO 2580
2560 IF TR(I) AND IP=0 THEN IP=1 :GOTO 2580
2570 FR=1:RI=I:IU(I)=1:I=M
2580 NEXT I

```

```

2590 IF RI<>0 THEN GOTO 2700
2600 IF IP>0 THEN IP=0
2610 D(RT(T),CT(T))=0:T=T-1
2620 GOTO 2100
2700 T=T-1:IP=0
2710 RT(T)=RI:CT(T)=CJ
2720 D(RT(T),CT(T))=0:MM(RI,CJ)=1
2721 PRINT T,RI;CJ
2730 GOTO 2100
3000 W=1E10:L=0:KK=0
3010 FOR I=2 TO T STEP 2
3020 IF X(RT(I),CR(I))>W THEN GOTO 3040
3030 W=X(RT(I),CT(I)):KK=RT(I):LL=CT(I)
3040 NEXT I
3100 FOR I=1 TO T
3110 X(RT(I),CT(I))=X(RT(I),CT(I))+W*D(RT(I),CT(I))
3120 NEXT I
3200 IX(K,L)=1:IX(KK,LL)=0
3210 TR(K)=TR(K)+1:TR(KK)=TR(KK)-1
3220 TC(L)=TC(L)+1:TC(LL)=TC(LL)-1
3221 PRINT "W="W: PRINT"KK="KK:PRINT"LL="LL
3222 PRINT "ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАКОНЧЕНО УСПЕШНО"
3250 GOTO 1000
4000 PRINT "ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ"
4010 GOSUB 5000
4500 END
5000 CC=0
5010 PRINT " I J  XIJ  CIJ  СТОИМОСТЬ"
5020 FOR I=1 TO M
5030 FOR J=1 TO N
5040 IF IX(I,J)=0 THEN GOTO 5110
5058 PP=C(I,J)*X(I,J)
5060 CC=CC+PP
5070 PRINT I;J;
5080 PB=430:PA=X(I,J):GOSUB 9000
5090 PA=C(I,J):GOSUB 9000:PA=PP:GOSUB 9000
5100 PRINT ""
5110 NEXT J:NEXT I
5200 PRINT "СТОИМОСТЬ РАВНА ";CC
5250 RETURN
9000 PC=INT(PB/100)
9010 P$=""
9020 IF PC=0 THEN PRINT"": GOTO 9040
9030 PRINT LEFT$(P$,PC);
9040 PC=PB-100*PC
9050 PD=INT(PC/10):PC=PC-10*PD
9060 IF PD=0 THEN PD=I
9070 IF PA<0 THEN P$=P$+"-."
9080 PE=ABS(PA)
9090 PE=PE+5*10^(-1-PC)
9100 IF PE>=10^PD THEN PRINT PA:RETURN
9110 P$=P$+MID$(STR$(INT(PE)),2,PD)
9120 PRINT RIGHT$(P$,PD+1)
9130 IF PC=0 THEN RETURN
9140 PRINT". ";
9150 PE=INT((PE-INT(PE))*10^PC)
9160 P$="0000000000"
9170 P$=P$+MID$(STR$(PE),2,PC)
9180 PRINT RIGHT$(P$,PC):RETURN
0000 DATA 3,5 10010 DATA 1,0,3,4,2
10020 DATA 5,1,2,3,3
10030 DATA 4,8,1,4,3
10040 DATA 15,25,20
10050 DATA 20,12,5,8,15
READY.

```

## РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СТОИМОСТИ

$U(I)$    -4   0   0  
 $V(J)$    5   4   1   3   3

$C'_{KL} = -3$   $K = 2$   $L = 2$

I	J	XI	CIJ	СТОИМОСТЬ
1	1	3	1	3
1	2	12	0	0
2	1	17	5	85
2	4	8	3	24
2	5	0	3	0
3	3	5	1	5

3 5 15 3 45

**ОБЩАЯ СТОИМОСТЬ РАВНА 162**

1	2	2
2	2	1
3	1	1
4	1	2

**W= 12 KK= 1 LL= 2**

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАКОНЧЕНО УСПЕШНО**

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СТОИМОСТИ**

U(I)	-4	0	0		
V(J)	5	1	1	3	3

**C'KL=-I K= 3 L=1**

I	J	XIJ	CIJ	СТОИМОСТЬ
1	1	15	1	15
2	1	5	5	25
2	2	12	1	12
2	4	8	3	24
2	5	0	3	0
3	3	5	1	5
3	5	15	3	45

**ОБЩАЯ СТОИМОСТЬ РАВНА 126**

1	3	1
2	3	5
3	2	5
4	2	1

**W= 5 KK= 2 LL= 1**

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАКОНЧЕНО УСПЕШНО**

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СТОИМОСТИ**

I	J	XIJ	CIJ	СТОИМОСТЬ
1	1	15	1	15
2	2	12	1	12
2	4	8	3	24
2	5	5	3	15
3	1	5	4	20
3	3	5	1	5
3	5	10	3	30

**ОБЩАЯ СТОИМОСТЬ РАВНА 121**

## 4.5. УПРАЖНЕНИЯ

1. Решите следующую транспортную задачу:

4	3	3	1	8
3	2	4	8	11
5	4	6	3	16
4	9	9	13	

2. Решите следующую транспортную задачу:

						9
2	9	3	10	8	7	
						14

3	2	6	3	5	2	
						15
1	8	2	4	1	5	
						11
4	8	7	6	6	6	
6	4	10	13	7	10	

3. Сталеплавильная компания располагает тремя заводами  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , способными произвести за некоторый промежуток времени 50, 30 и 20 тыс. т стали соответственно. Свою продукцию компания поставляет четырем потребителям  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$ , потребности которых составляют соответственно 12, 15, 25 и 36 тыс. т стали. Стоимости производства и транспортировки 1 тыс. т стали с различных заводов различным потребителям приведены ниже:

Потребитель	Завод		
	$M_1$	$M_2$	$M_3$
$C_1$	15	19	14
$C_2$	19	18	16
$C_3$	19	18	20
$C_4$	15	19	18

Определите минимальные общую стоимость, объемы производства на каждом заводе и планы перевозок.

4. Компания запланировала перемещения многих служащих на новые должности в соответствии с пересмотренным штатным расписанием. Служащие, которых эта реформа затрагивает, могут быть по квалификации и опыту разделены на пять групп  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  и  $S_5$ , содержащих соответственно 2, 5, 4, 8 и 6 служащих. Аналогичным образом каждую должность можно отнести к одной из следующих четырех групп:  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$  - по 8, 3, 9 и 5 должностей соответственно. В приведенной ниже таблице указывается, какие группы служащих обладают достаточной квалификацией для занятия соответствующих должностей:

Должность	Группа				
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$
$P_1$		*		*	
$P_2$				*	*
$P_3$	*			*	
$P_4$	*	*	*		*

Примените метод решения транспортной задачи, чтобы показать, что получить полностью удовлетворительное решение невозможно, и определите максимальное количество служащих, для которых возможно назначение на подходящие должности. Возможно ли ограничить все неудовлетворительные назначения группой  $S_5$ ?

5. Компания контролирует три фабрики  $F_1$ ,  $F_2$ , и  $F_3$ , способные произвести 50, 25 и 25 тыс. изделий еженедельно. Она заключила договоры с четырьмя заказчиками  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$ , которым требуется еженедельно 15, 20, 20 и 30 тыс. изделий. Стоимости производства и транспортировки 1 тыс. изделий заказчикам с фабрик приведены ниже:

Фабрика	Заказчик			
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$F_1$	13	17	17	14
$F_2$	18	16	16	18
$F_3$	12	14	19	17

Определите минимизирующие общую стоимость, объемы производства и распределения для каждой фабрики.

6. Компания владеет двумя фабриками  $F_1$  и  $F_2$ , производящими электронное оборудование. Фабрики в течение некоторого периода выпускает 16 и 12 тыс. изделий соответственно при нормальных темпах производства. При сверхурочной работе эти показатели могут быть повышены соответственно до 20 и 14 тыс. изделий. Дополнительная стоимость производства 1000 изделий в сверхурочное время на  $F_1$  и на  $F_2$  составляет 8 единиц. Компания снабжает трех потребителей  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , потребности которых в течение одного и того же периода составляют соответственно 10, 13 и 7 тыс. изделий. Стоимости перевозок 1 тыс. изделий потребителю с фабрик приведены в таблице:

Фабрика	Потребитель		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$F_1$	5	4	6
$F_2$	6	3	2

Сформулируйте задачу нахождения оптимальных планов производства и распределения как транспортную и найдите ее решение.

7. Фирма предложила владельцам трех авиалиний перевозить бригады специалистов в различные части света. Стоимость перевозок в фунтах стерлингов приведена в таблице:

Авиалиния	Сидней	Калькутта	Бейрут	Даллас	Сан-Паулу
I	24	16	8	10	14
II	21	15	7	12	16
III	23	14	7	14	12

Администрация фирмы решила, что индивидуальные контракты на перевозку будут заключаться с владельцами авиалинии I, II, III в отношении 2:3:2, и уведомила об этом управляющего транспортными перевозками, а также известила его о том, что из 70 намеченных на следующий год перевозок 10 - в Сидней, 15 - в Калькутту, 20 - в Бейрут, 10 - в Даллас и 15 - в Сан-Паулу.

Как ему следует распределить индивидуальные контракты на перевозки для минимизации общей стоимости при условии удовлетворения запросов администрации фирмы? Какова минимальная стоимость перевозок, удовлетворяющих приведенным выше ограничениям?

8. Четыре сталелитейных завода I, II, III и IV производят еженедельно соответственно 950, 300, 1350 и 450 т стали определенного сорта. Стальные болванки должны быть переданы потребителям A, B, C, D, E, еженедельные запросы которых составляют соответственно 250, 1000, 700, 650 и 450 т стали.

Стоимость транспортировки от заводов к потребителям в тоннах приведена в таблице:

Завод	Потребитель				
	A	B	C	D	E
1	12	16	21	19	32
2	4	4	9	5	24
3	3	8	14	10	26
4	24	33	36	34	49

Какой нужно составить план распределения стальных болванок, чтобы минимизировать общую стоимость.

9. Некоторый продукт производится на двух заводах и распределяется между двумя пользователями. Их потребности на ближайшие два месяца приведены в таблице:

Пользователь	Потребность	
	Август	Сентябрь
1	420	550
2	350	480

Стоимость транспортировки продукта с заводов потребителям приведена в таблице:

Завод	Пользователь	
	1	2
1	10	13
2	12	6

Стоимость производства единицы продукта и объем производства по плану за два месяца приведены в таблице:

Завод	Стоимость производства, усл. ед.		Объем	
	Август	Сентябрь	Август	Сентябрь
1	3,0	3,6	500	600
2	3,2	2,9	300	500

При этом возможно производить продукт в течение месяца, хранить его лишь в течение месяца, а затем отправлять пользователю. Стоимость хранения составляет 0,5 на заводе 1 и 0,6 на заводе 2.

Требуется оптимальные планы производства и распределения. Сформулируйте задачу как транспортную и найдите оптимальное решение. 10. Компания владеет тремя заводами A, B, C. Соответствующие стоимости производства равны 26, 23 и 22 на единицу, объем производства 6000, 3000 и 3000 единиц. Компания обязалась поставлять соответственно 1500, 2500, 2700 и 3300 единиц в города W, X, Y, Z. При заданных стоимостях перевозок составьте оптимальные планы производства и распределения.

Город	Стоимость транспортировки, центы		
	A	B	C
W	1	9	6
X	4	2	1
Y	1	2	7
Z	9	8	3

11. Решите задачи, приведенные в этой главе, и задачи приведенные в упражнениях, с помощью симплекс-метода. Как эффективнее решить эти задачи на ЭВМ - симплекс-методом или как транспортные задачи?

12. Первое базисное допустимое решение можно найти с помощью правила "северо-западного угла". Правило состоит в том, что клетка, которой приписывается очередная базисная переменная, выбирается в северо-западном углу оставшегося массива независимо от стоимости, записанной в этой клетке. Таким образом, у массива строки систематически удаляются сверху, а столбцы - слева.

Измените программу так, чтобы первое базисное решение выбиралось по этому правилу. Решите с помощью полученной программы задачи этой главы и задачи из упражнений. Заметны ли выигрыш или потеря эффективности?

## ГЛАВА 5 ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ<sup>4</sup>

### 5.1. ВВЕДЕНИЕ

#### Пример 1

Пять человек с номерами  $M_1, M_2, \dots, M_5$  способны выполнить пять заданий с номерами  $T_1, T_2, \dots, T_5$ . В силу разной квалификации на выполнение этих заданий им потребуется различное время. Как следует распределить людей по заданиям, чтобы минимизировать время выполнения? Время выполнения (в часах) приведено в таблице

Люди	Задания				
	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$
$M_1$	10	5	9	18	11
$M_2$	13	19	6	12	14
$M_3$	3	2	4	4	5
$M_4$	18	9	12	17	15
$M_5$	11	6	14	19	10

Пусть  $x_{ij}$  — время участия  $i$ -го человека в выполнении  $j$ -го задания. Все величины  $x_{ij}$  — неотрицательны, и, поскольку каждый человек должен быть полностью задействован, а каждое задание полностью выполнено, величина  $x_{ij}$  должна удовлетворять следующим ограничениям:

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{15} = 1$$

.....

$$x_{51} + x_{52} + \dots + x_{55} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{51} = 1$$

.....

$$x_{15} + x_{25} + \dots + x_{55} = 1$$

При этих ограничениях минимизируется полное время

$$T = 10x_{11} + 5x_{12} + \dots + 19x_{54} + 10x_{55}$$

Таким образом, это задача линейного программирования транспортного типа. Поскольку все суммы по строкам и по столбцам равны 1, она вырождена, так что алгоритм решения транспортной задачи применим, но неэффективен. Поскольку задача транспортная, в ее оптимальном решении (целочисленном) пять из величин  $x_{ij}$  будут равны 1, а остальные — 0. С другой стороны, в матрице времени размерностью  $5 \times 5$  надо найти пять элементов — по одному в каждой строке и каждом столбце, таких, что сумма выбранных элементов минимальна. Условие равенства  $x_{ij}$  0 или 1 в некоторых случаях необходимо, чтобы придать смысл формулировке задачи (см., например, первую фразу рассматриваемого примера). Это постулат.

Задача может быть обобщена для матриц размерностью  $n \times n$ . Для каждой такой матрицы задача состоит в выборе  $n$  элементов — по одному в каждой строке и по одному в каждом столбце, таких, что их сумма минимальна. Обозначим выбранные элементы  $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nt}$ , где  $i, j, t$  — некоторая перестановка элементов  $1, 2, \dots, n$ . Таких перестановок —  $n!$ , так что даже при минимальном количестве  $n$  решение полным перебором является недопустимо длинным.

---

<sup>4</sup> Эту задачу называют также задачей выбора. — Прим. ред.

## 5.2. МЕТОД РЕШЕНИЯ МАКА

До настоящего момента было предложено два метода решения задачи о назначениях. Оба метода основаны на том факте что *положения* оптимального выбора не меняются, если к каждому элементу некоторой строки или столбца добавить одно и то же значение или вычесть его.

Венгерский метод основан на некоторых довольно трудных и нетривиальных комбинаторных свойствах матриц. Его довольно трудно программировать; поэтому сообщим лишь о том, что описание соответствующей процедуры можно найти во многих монографиях по исследованию операций и по математическому программированию.

Метод Мака имеет преимущество более простого интуитивного обоснования. Это — логический процесс. Сначала опишем шаги этого итеративного процесса, а программу для ЭВМ приведем в разд. 5.3. Этот метод основан на идее выбора в каждой строке минимального элемента. Вообще говоря, минимальные элементы строк не распределены по всем  $n$  столбцам матрицы. Здесь используется идея сложения (или вычитания) одного и того же значения со всеми элементами строки или столбца, чтобы распределить минимальные элементы строк по столбцам (тогда они образуют оптимальный выбор). *Метод Мака для задачи выбора*

Основатель метода К. Мак очень хорошо описал его в [15].

Рассматривается задача выбора размерностью  $n \times n$ .

Выберем по минимальному элементу в каждой строке. Подчеркнем каждый из этих минимальных элементов. Если в каждом столбце имеется ровно по одному подчеркнутому элементу, то подчеркнутые элементы — **базис** — определяют оптимальный выбор.

*Начало*

Разделим множество столбцов на два множества  $A$  и  $A'$ ,  $A$  - выбранное множество,  $A'$  — невыбранное множество. В начале (и при последующих возвращениях к *Началу*) выбранных столбцов нет, так что множество  $A$  пусто, а множество  $A'$  содержит все столбцы.

*Шаг 1.* Выбрать из множества  $A'$  столбец, содержащий более одного подчеркнутого элемента. Перевести этот столбец из множества  $A'$  в множество  $A$ .

*Шаг 2.* Пусть элемент множества  $A$  из строки  $i$  равен  $b_i$ , а минимальный элемент множества  $A'$  из строки  $i$  равен  $a_i$ . Пусть

$$\min_i (a'_i - \epsilon_i) = a'_r - \epsilon_r$$

*Шаг 3.* Увеличить все элементы множества  $A$  на  $a'_r - b_r$ .

*Шаг 4.* Отметить  $a'_r$  точками внизу. Теперь  $a'_r$  - "отмеченный точками элемент".

*Шаг 5.* Пусть  $C$  - столбец, содержащий  $a'_r$ . Если в  $C$  более двух подчеркнутых элементов, перевести  $C$  из множества  $A'$  в множество  $A$  и перейти к шагу 2. В противном случае перейти к следующему шагу.

Теперь можно подчеркнуть элементы в еще одном столбце.

*Шаг 6.* Подчеркнуть последний элемент  $a'_r$  полностью. Это — новый подчеркнутый элемент.

*Шаг 7.* Найти исходный подчеркнутый элемент в той же строке, что  $a'_r$ . Убрать подчеркивание. Обозначить столбец, в котором находится этот элемент,  $D$ .

*Шаг 8.* Если  $D$  не содержит других элементов, он должен содержать элемент, отмеченный точками. Обозначить этот элемент  $a'_r$  и вернуться к шагу 6.

Если  $D$  содержит еще один подчеркнутый элемент, то полностью подчеркнутые элементы образуют новый базис.

Если остался еще столбец без подчеркнутых элементов, вернуться к *Началу*.

Если в каждом столбце имеется подчеркнутый элемент, работа алгоритма закончена. Элементы, соответствующие оптимальному выбору, могут быть отмечены, и может быть вычислена соответствующая стоимость.

Вычисления могут быть сокращены, если на шаге 3 увеличить на  $a'_r - \epsilon_r$  только подчеркнутые элементы множества  $A$ , отложив до шага 8 увеличение остальных элементов



множества  $A$ . В этом случае все оставшиеся элементы столбца увеличиваются на то же значение, на которое увеличились подчеркнутые элементы.

Ниже приводится полное описание этого метода для решения примера 1 разд. 5.1.

*Начало*

*Шаг 1.* Столбец 2 переходит в множество  $A$

*Шаг 2* Строка 1: подчеркнут элемент 5, минимум найден в точке  $A' = 9$ , разность равна 4. Строка 3: подчеркнут элемент 2, минимум найден в точке  $A' = 3$ , разность равна 1. Строка 4: подчеркнут элемент 9, минимум найден в точке  $A' = 12$ , разность равна 3. Строка 5: подчеркнут элемент 6 минимум найден в точке  $A' = 10$ , разность равна 4. Минимум  $(d'_r - v_i)$  равен 1 в строке 3

*Шаг 3.* Увеличить все элементы столбца 2 на 1

*Шаг 4.* Подчеркнуть штрихом элемент 3 в строке 3, столбце 1

*Шаг 5.*  $C$  (столбец 1) не содержит подчеркиваний, так что перейти к следующему шагу

*Шаг 6.* Полностью подчеркнуть элемент 3 в строке 3 столбца 1

*Шаг 7.* Убрать подчеркивание элемента 3 в строке 3 столбца 3

*Шаг 8.*  $D$  (столбец 2) содержит другие подчеркнутые элементы, поэтому следует вернуться к началу, так как имеются столбцы без подчеркнутых элементов

*Начало*

*Шаг 1.* Перевести столбец 2 в множество  $A$

*Шаг 2.*  $\min(d'_r - v_i) = 12 - 10 = 2$  в строке 4

*Шаг 3.* Увеличить на 2 все элементы в столбце 2

*Шаг 4.* Отметить точками элемент 12 в строке 4 столбца 3

*Шаг 5.*  $C$  (столбец 3) содержит другой подчеркнутый элемент, так что перевести столбец 3 в множество  $A$  и перейти к шагу 2

*Шаг 2.* Множество  $A$  состоит теперь из столбцов 2 и 3 Минимум  $d'_i - v_i$  равен  $10 - 9 = 1$  в строке 5

*Шаг 3.* Увеличить все элементы в столбцах 2 и 3 на 1

*Шаг 4.* Отметить точками элемент 10 в строке 5 столбца 5

*Шаг 5.*  $C$  (столбец 5) не содержит других подчеркнутых элементов, так что перейти к следующему шагу

*Шаг 6.* Полностью подчеркнуть элемент 10 в строке 5 столбца 5

*Шаг 7.* Убрать подчеркивание элемента 10 в строке 5 столбца 2

*Шаг 8.*  $D$  (столбец 2) содержит другие подчеркнутые элементы, так что перейти к началу, так как в столбце 4 нет подчеркнутых элементов

Начало Шаг 1. Столбец 2 содержится в множестве  $A$  10 9 10 18 11  
 Шаг 2. Минимум  $(a'_i - b_i)$  равен  $13-13=0$  13 23 7 12 14  
 Шаг 3. Ничего не меняется 3 6 5 4 5  
 Шаг 4. Отметить точками элемент 13 в строке 4 столбца 3 18 13 13 17 15  
 Шаг 5.  $C$  - это столбец 3; содержит подчеркнутый элемент, перейти к следующему шагу 11 10 15 19 10  
 Шаг 2. Столбец 2 и столбец 3 содержатся в множестве  $A$ ;  $\text{Min}(a'_i - b_i)$  равен  $10-9=1$  10 10 11 18 11  
 Шаг 3. Увеличить столбцы 2 и 3 на 1 13 24 8 12 14  
 Шаг 4. Отметить тремя точками снизу элемент 10 в строке 1 столбца 1 3 7 6 4 5  
 Шаг 5.  $C$  (столбец 1) содержит другой подчеркнутый элемент, так что перейти к следующему шагу 18 14 14 17 15  
 Шаг 2.  $A$  — это столбцы 1, 2 и 3;  $\text{Min}(a'_i - b_i)$  равен  $11-10=4-3=15-14=1$  11 11 16 19 10  
 Шаг 3. Увеличить столбцы 1, 2 и 3 на 1 11 11 12 18 11  
 Шаг 4. Отметить точками элемент 4 в строке 3 столбца 4 14 25 9 12 14  
 Шаг 5.  $C$  (столбец 4) не содержит подчеркнутых элементов, так что перейти к следующему шагу 4 8 7 4 5  
 Шаг 6. Полностью подчеркнуть элемент 4 в строке 3 столбца 4 19 15 15 17 15  
 Шаг 7. Снять подчеркивание 4 в строке 3 столбца 1 12 12 17 19 10  
 Шаг 8.  $D$  (столбец 1) содержит подчеркнутый элемент в строке 1, так что перейти к следующему шагу 11 11 12 18 11  
 Шаг 6. Полностью подчеркнуть элемент 11 в строке 1 столбца 1 14 25 9 12 14  
 Шаг 7. Снять подчеркивание элемента 11 в строке 1 столбца 2 4 8 7 4 5  
 Шаг 8.  $D$  (столбец 2) содержит другой подчеркнутый элемент, новое множество подчеркнутых элементов приведено ниже 19 15 15 17 15  
 12 12 17 19 10  
 Теперь в каждом столбце находится ровно по одному подчеркнутому элементу, так что окончательное решение найдено

Человек № 1 выполняет задание № 1, человек № 2 - задание № 3, человек № 3 - задание № 4, человек № 4 - задание № 2, человек № 5 - задание № 5

В исходном массиве назначения и времена следующие:

<u>10</u>	5	9	18	11
13	19	<u>6</u>	12	14
3	2	4	<u>4</u>	5
18	<u>9</u>	12	17	15
11	6	14	19	<u>10</u>

Минимальное время составляет 39 чел-ч.

## Пример 2

Ежедневно авиалиния, которая принадлежит некоторой компании, осуществляет следующие перелеты между городами  $X$  и  $Y$ :

№ полета	Отправление из города $X$	Прибытие в город $Y$	№ полета	Отправление из города $Y$	Прибытие в город $X$
1	9.00	11.00	11	8.00	10.00
2	10.00	12.00	12	9.00	11.00
3	15.00	17.00	13	14.00	16.00
4	19.00	21.00	14	20.00	22.00
5	20.00	22.00	15	21.00	23.00

Компания хочет организовать полеты "туда" и "обратно" так, чтобы минимизировать время простоя при условии, что каждому самолету требуется по крайней мере 1 ч для заправки. Используйте технику решения задачи выбора.

Напишите расписание полетов, совершаемых каждым из самолетов.

Представьте найденное решение в виде диаграммы. Сколько самолетов требуется для полетов по составленному расписанию? Время простоя в каждом случае приведено в таблице.

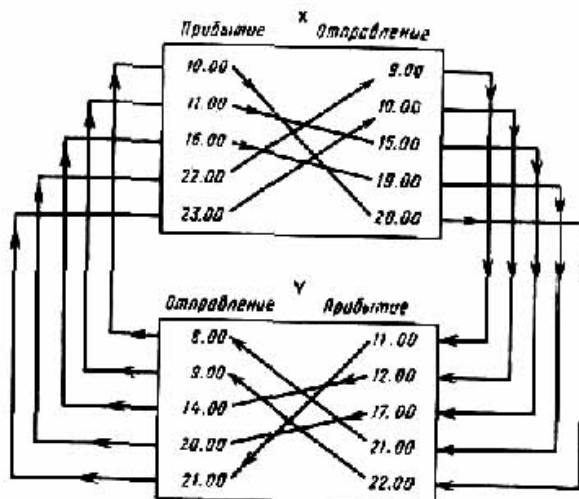
Прибытие/ вылет в X	1	2	3	4	5	Прибытие/ вылет в У	11	12	13	14	15
11	23	24	5	9	10*	1	21	22	3	9	10*
12	22	23	4*	8	9	2	20	21	2*	8	9
13	17	18	23	3*	4	3	15	16	21	3*	4
14	11*	12	17	21	22	4	11*	12	17	23	24
15	10	11*	16	20	21	5	10	11*	16	22	23

Таким образом, имеется две задачи выбора. Методом Мака легко показать, что отмеченные звездочкой элементы образуют решение (хотя имеется и другое решение). Проверьте это.

Расписание полетов в город X: 11→5, 12→3, 13→4, 14→4, 15→2.

Расписание полетов в город Y: 1→15, 2→13, 3→14, 4→11, 5→12. Так что последовательность в целом имеет следующий вид:

1→15→2→13→4→11→5→12→3→14→1 и т. д.



Следовательно, самолет, вылетающий из города X в понедельник в 9.00, заканчивает полеты по расписанию в четверг в 22.00 и может начать полеты снова в 9.00 в пятницу. Для полетов по этому расписанию требуется четыре самолета.

### 5.3. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА МАКА НА ЭВМ

Программа для ЭВМ следует только что описанному итерационному процессу, но, разумеется, не буквально — с помощью ЭВМ нельзя подчеркнуть переменную. Программа нетривиальна и заслуживает внимательного изучения. Она написана так, чтобы по желанию минимизировать или максимизировать функцию. Матрица R сохраняется. Рабочая матрица  $P(= \pm R, + \min., -\max.)$  меняется в процессе вычисления.

В строках 250—310 программы минимальным элементом строки I является IM из столбца L. В строках 320-360 пусть NM(L) - количество минимумов в столбце L, MA(I) - значение минимума в 1-й строке, 1C(L, K) — строка K-го минимума в столбце L, JR(I) — столбец MA(I) из строки I. Началу и шагу I соответствуют строки программы 400-470, где находится столбец с двумя и более минимумами; строки, в которых находятся эти минимумы, запоминаются в переменных 1P(1), 1P(2) и т. д. В строке 480 NC - количество столбцов, в которых производились одновременные увеличения (в начале NC = 1); LR(1), LR(2) и т. д. - список номеров столбцов из множества A, а JK(J) для таких столбцов равна 1; MB(J) - значение, на которое увеличены элементы столбца J.

*Шаг 2* — строки программы 520—640;  $I_Z$  — разность между элементом в строке  $1(=1P(K))$  столбца  $J_D$  и минимумом в строке  $I$ . Столбцы множества  $A$ , для которых  $J_K(J_D) = 1$ , исключаются. Наименьшее значение  $I_Z$  присваивается  $I_V$ , и это - наименьшее значение, нужное для соответствия одному из минимумов по строкам в множестве  $A$ ;  $J_C$  - столбец соответствующего элемента, а  $I_R$  — номер его строки,  $M_B(LR(J_X))$  — общее значение, на которое увеличиваются элементы в столбце  $LR(J_X)$  (строки 650—670). В данный момент на  $I_V$  увеличиваются только значения минимумов в строке  $I_P(K)$ . Это — модифицированный шаг 3 (680—700).

В строке 720 столбец  $J_C$  добавляется к множеству  $A$ , т. е.  $LR(1), LR(2), \dots, LR(NC)$  и  $LR(NC + 1)$  полагаются равными  $J_C$ . В строке 750  $IM(J_C)$  указывает строку минимума в столбце  $J_C$ , а  $J_M(I_R)$  - столбец минимума в строке  $I_R(=IM(J_C))$ . Строка 770: в столбце  $J_C$  имеется  $J_Y$  минимумов. Если в столбце  $J_C$  нет минимумов, минимумы в строке располагаются так, чтобы покрыть один лишний столбец (переход от строки 780 к строке 840). В противном случае эти минимумы прибавляются к  $J_U$  минимумам из предыдущих столбцов,  $J_U$  соответственно увеличивается, а строки минимумов из  $IC(J_C, J_X)$  запоминаются в  $IP(J_U)$ . Это — шаг 5, и в строке программы 520 происходит возвращение к шагу 2.

Если после шага 5 осуществляется переход к строке 840, то необходимо переместить минимум (шаг 6). В строке 850 программы  $LS = LR(J_X)$  представляет собой столбец с номером  $J_X$  матрицы  $A$ . Вновь обнуляем  $J_K$ , т. е. исключаем его из множества  $A$ . Элемент  $M_B(LS)$  является тем значением, на которое был номинально увеличен столбец  $LS$ . Теперь все элементы столбца  $LS$  фактически увеличены на это значение (строка 880 программы).

В строке 910 программы находится один минимум в столбце  $J_C$ . Новый минимум находится в строке  $I_P$  столбца  $J_C$  (шаг 6);  $J_P = J_P(I_R)$  в строке 930 — столбец предыдущего минимума в строке  $I_R$ , так что в строке 940 полагаем  $J_R(I_R) = J_C$ . Количество минимумов в этом столбце  $J_Q = NM(J_P)$ , где  $J_P$  равно исходному значению  $J_R(I_R)$ . В строках 970-1020 программы определяется, какой из минимумов столбца  $J_P$  находится в строке  $J_R$ . Он исключается или заменяется. В строке 1030 программы происходит следующее: если в столбце  $J_P$  находится более одного минимума, перераспределение минимумов закончено,  $NM(J_P)$  приравнивается 1, управление возвращается к строке 400 (старт) для нахождения столбцов с более чем одним минимумом. Если программа дойдет до строки 1040, то в столбце  $J_P$  будет найден всего один минимум;

$IM(J_P)$  - номер его строки, так что новое значение  $J_C$  равно  $J_P$ , а  $J_C(J_P, J_Q)$  (строка одного минимума в столбце  $J_P$ ) и есть новое значение  $I_R$ . Таким образом, процесс повторяется с новым столбцом  $J_P$  в строке 930 программы.

В строку 1500 управление передается из строки 420, где обнаруживается отсутствие столбцов с более чем одним минимумом. Теперь минимумы в строках распределены по столбцам, и оптимальный выбор найден. Строка первого (и единственного) минимума в столбце  $J$  есть  $1C$  (см. строку 1520), так что оптимальные выборы извлекаются из элементов строки  $I$  столбца  $J_V(I)$  (см. строку 1550). Они распечатываются, и оптимальная сумма заносится в  $T$ .

## Пример 1

Для матрицы

93	93	91	94	99	99	90	92
96	93	90	94	98	96	97	91
96	90	91	90	92	90	93	96
93	94	95	96	97	10	92	93
94	93	95	91	90	97	96	92
94	93	96	90	93	89	88	91
94	96	91	90	95	93	92	94
93	94	6	95	91	99	91	96

найдите 1) минимальный; 2) максимальный выбор. Данные в строке 2000 пригодны для случая 1). Распечатка результатов в обоих случаях следующая:

READY.

20 PRINT-РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ МЕТОДОМ МДКЙ

30 READ N:REM N-РАЗМЕРНОСТЬ МАТРИЦЫ

40 REFD MZ:REM ЕСЛИ MZ=+1,ТО В ЗАДАЧЕ ИЩЕТСЯ МАКСИМУМ;

45 REM ЕСЛИ MZ=-1.ТО В ЗАДАЧЕ ИЩЕТСЯ МИНИМУМ

50 REM ЗАДАТЬ МЙССИВЫ.ПОДРОБНОСТИ ОПИСАНЫ В ТЕКСТЕ КНИГИ

70 DIM R(N,N),P(N,N),IC(N,N)

```

80 DIM MA(N), IP(N), MB(N), JV(N), LR(N)
90 DIM JR(N), JU(N), IU(N), JK(N), NM(N)
95 REM ВВЕСТИ МАТРИЦУ В МАССИВ R
100 FOR I=1 TO N:FOR M TO N
110 READ R(I,J)
120 NEXT J:NEXT I
190 REM В ПРОГРАММЕ МИНИМИЗИРУЕТСЯ РАБОЧАЯ МАТРИЦА P
200 FOR I=1 TO N:NM(I)
210 FOR J=1 TO N:P(I,J)=-MZ+R(I,J)
220 NEXT J:NEXT I
230 M-1E10:REM ЗНАЧЕНИЕ M БОДЬЕ ЛЮБОГО ЭЛЕМЕНТА МАТРИЦЫ R
250 FOR I=1 TO N:IM=M
270 FOR J=1 TO N
280 IZ=P(I,J)
290 IF IZ>IM THEN GOTO 310
300 IM=IZ:L=J
310 NEXT J
320 NM(L)=NM(L)+1:K=NM(L)
330 IC(L,K)=I
340 MA(I)-IM
350 JR(I)=L
360 NEXT I
400 J=0
410 J=J+1
420 IF J>N THEN GOTO 1500
430 IF NM(J)<2 THEN GOTO 410
440 JU=NM(J)
450 FOR K=1 TO JU
460 IP(K)=IC(J,K)
470 NEXT K
480 NC=1
490 LR(1)=J
500 JK(J)=1
510 MB(J)=0
520 IV=M
530 FOR K=1 TO JU
540 I=IP(K)
550 FOR JO=1 TO N
560 IF JK(JO)=1 THEN GOTO 630
570 IZ=P(I,JO)-MA(I)
580 IF IZ>IV THEN GOTO 630
590 IV=IZ
600 JC=JO
610 IR=I
630 NEXT JO
640 NEXT K
650 FOR JX=1I TO NC
660 MB(LR(JX))=MB(LR(JX))+IV
670 NEXT JX
680 FOR K=1 TO JW
690 MA(IP(K))=MA(IP(K))+IV
700 NEXT K
710 MB(JC)=0
720 JK(JC)=1
730 NC=NC+1
740 LR(NC)=JC
750 IM(JC)=IR
760 JM(JR)=JC
770 JY=NM(JC)
780 IF JY=0 THEN GOTO 848
790 FOR JX=1 TO JY
800 JU=JU+1
810 IP(JU)=IC(JC,JX)
820 NEXT JX
830 GOTO 520
840 FOR JX=1 TO NC
850 LS=LR(JX)
860 JK(LS)=0
870 FOR I=1 TO N
880 P(I,LS)=P(I,LS)+MB(LS)
890 NEXT I
900 NEXT JX
910 NM(JC)=1
920 IC(JC,1)=IR
930 JP=JR(IR)
940 JR(IR)=JC
950 IW=0
960 JQ=NM(JP)
970 FOR IL=1TO 30

```

```

980 IZ=IC(JP,IL)
990 IF IZ=IR THEN GOTO 1020
1000 IW=IW+1
1010 IC(JP,IW)=IC(JP,IL)
1020 NEXT IL
1030 IF JQ>1 THEN GOTO 1080
1040 IR=IM(JP)
1050 JC=JP
1060 IC(JP,JQ)=IR
1070 GOTO 930
1080 NM(JP)=JQ-1
1090 GOTO 400
1500 T=0:PRINT " I J      R(I,J)"
1510 FOR J=1 TO N
1520 JV(IC(J,1))=J
1530 NEXT J
1540 FOR I=1 TO N
1550 J=JV(I)
1560 T=T+R(I,J)
1570 PRINT I, R(I,J)
1580 NEXT I
1600 IF MZ=1 THEN PRINT "Максимум равен";T
1610 IF MZ=1 THEN PRINT "Минимум равен";T
1700 END 2000 DATA 8,-1
2010 DATA 93,93,91 94,99 99,90,92
2020 DATA 96,93,90 94,98 96,97,91
2030 DATA 96,90,91 90,92 90,93,96
2040 DATA 93,94,95 96,97 10,92,93
2050 DATA 94,93,95 91,90 97,96,92
2060 DATA 94,93,96 90,93 89,88,91
2070 DATA 94,96,91 90,95 93,92,94
2080 DATA 93,94,6,95,91,99,91,96
READY.

```

#### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ МЕТОДОМ МАКА

I J	R(I,J)
1 1	93
2 8	91
3 2	90
4 6	10
5 5	90
6 7	88
7 4	90
8 3	6

#### МИНИМУМ РАВЕН 558 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ МЕТОДОМ МАКА

I 3	R(U)
1 5	99
2 1	96
3 8	96
4 4	96
5 7	96
6 3	96
7 2	96
8 6	99 МАКСИМУМ РАВЕН 774

### 5.4. УПРАЖНЕНИЯ

1) Решите задачи методом минимального выбора:

а)	б)
3 7 6	4 6 9 7
7 4 3	1 1 1 1
4 3 3	9 9 1 1
	1 1 1 1

2) Решите задачи минимального выбора

a)

9	2	6	1	2
3	7	6	4	6
2	1	8	2	3
5	3	1	3	2
3	3	5	2	2

b)

4	7	3	4	3	4
2	2	4	5	8	4
2	3	5	4	3	2
4	5	4	5	4	3
2	3	3	1	3	2
7	2	2	3	3	9

3) В определенный день компания по перевозке грузов должна забрать пять грузов в точках  $A, B, C, D, E$  и доставить их в пункты  $a, b, c, d, e$ . Расстояния (в милях) между точками загрузки и пунктами назначений грузов приведены ниже:

A-a	B-b	C-c	D-d	E-e
60	30	100	50	40

Фирма располагает пятью грузовиками двух типов  $X$  и  $Y$  в точках  $S, T, U, V, W$ ; типы грузовиков:  $X$  в  $S, Y$  в  $T, X$  в  $U, X$  в  $V$  и  $Y$  в  $W$ . Грузовики типа  $X$  новее и экономичнее грузовиков типа  $Y$ , и стоимости перевозки на них ниже. Стоимости пробега одной мили (в центах) для грузовиков обоих типов (включающие горючее, страховку, поддержку оборудования и т. д.) приведены ниже:

	Пустой	Загруженный
$X$	20	40
$Y$	30	60

Как следует группе распределить время (по  $2\frac{1}{2}$  дня) по пяти городам, чтобы максимизировать ожидаемое количество успешных опросов?

6. Авиакомпания связывает три города  $A, B, C$ . Полеты происходят днем семь дней в неделю. Стоимость стоянки самолетов во всех трех аэропортах составляет  $kT^2$ , где  $T$  - время стоянки. Как следует распределить самолеты по линиям для минимизации стоимости? Следует учесть, что самолет не может подняться менее чем через 1 ч после приземления, так как требуется время на технический контроль и заправку.

Вылет		Прибытие	
Город	Время	Город	Время
A	8.00	B	12.00
A	9.00	C	12.00
A	10.00	B	14.00
A	14.00	B	18.00
A	18.00	B	22.00
A	20.00	C	23.00
B	7.00	A	11.00
B	9.00	A	13.00
B	13.00	A	17.00
B	18.00	A	22.00
C	9.00	A	12.00
C	15.00	A	18.00

7. Используйте метод Мака для решения задачи выбора, в которой должно быть минимизировано суммарное время выполнения всех заданий.

Задание	Время, требуемое на выполнение задания, ч						
	1	2	3	4	5	6	7
1	11	15	20	16	13	26	11
2	12	13	22	14	16	29	13
3	14	16	24	22	22	32	16
4	14	12	20	19	20	31	15
5	16	13	22	20	23	34	17
6	13	15	18	14	26	29	18
7	12	11	16	17	17	24	10

8. Компания реализует продукцию в пяти географических областях. Покупательные способности жителей этих областей оцениваются следующим образом:

Область	1	2	3	4	5
Покупательная способность	80000	60000	50000	40000	20000



Профессиональный уровень пяти продавцов различен. Предполагается, что доля реализуемых покупательных способностей составляет:

Продавец	A	B	C	D	E
Доля	0,7	0,6	0,5	0,45	0,4

Как следует распределить продавцов по областям, чтобы максимизировать количество проданной продукции?

9. Решите задачи настоящей главы и задачи, приведенные в упражнениях, используя программу решения транспортной задачи. Заметна ли потеря эффективности по сравнению с методом Мака?

10. Решите задачи настоящей главы и задачи, приведенные в упражнениях, используя программу, реализующую симплекс-метод. Заметна ли потеря эффективности по сравнению с методом Мака?



1. Прежде всего вычисляются коэффициенты небазисных переменных в канонической форме целевой функции в текущем базисе (используем уравнение (3.7)):

$$c'_j = c_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i = c_j + (\pi_1 \pi_2 \dots \pi_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

где  $j = m+1, \dots, n$

В уравнении (6.4) числа  $\pi_i$  - *текущие* симплекс-множители, а коэффициенты  $a_{ij}$  - *исходные* коэффициенты из уравнения (6.3).

Величины  $c'_j$  вычисляются для каждой небазисной переменной. Для базисных переменных они, разумеется, обращаются в 0. Затем, следуя симплекс-методу, находим  $c'_j = c'_s$ . Если  $c'_s < 0$ , то на следующей итерации переменная  $x_s$  войдет в базис. Если  $c'_s \geq 0$ , то минимум функции  $z$  найден.

2. Чтобы определить переменную, которая будет заменена переменной  $x_s$  найдем значение величин  $a_{is}$  (только в этом столбце) в текущей канонической форме. Их можно найти с помощью обращенного базиса. Из уравнения (2.9) получаем

$$a'_s = B^{-1} a_s, \quad (6.5)$$

т.е.

$$a'_{is} = \sum_{k=1}^m \beta_{ik} a_{ks}, \quad (6.6)$$

где

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \dots & \beta_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & & \beta_{mm} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Максимальное значение, которое может принимать переменная  $x_s$  без нарушения условий неотрицательности, задается соотношением (см. уравнение (2.14))

$$\max_s = \min_{a'_{is} \geq 0} \frac{b'_s}{a'_{is}} = \frac{b'_r}{a'_{rs}} \quad (6.8)$$

и это определяет строку базисной переменной, предназначенной для исключения из базиса.

3. Теперь можно вычислить новый базис, его обращение и симплекс-множители.

а) Старый базис  $(x_1, x_2, \dots, x_r, \dots, x_m)$  заменяется на новый  $(x_1, x_2, \dots, x_s, \dots, x_m)$ .

б) Новые значения базисных переменных есть

$$x_s = b_r^+ = \frac{b'_r}{a'_{rs}}, \quad (6.9)$$

$$x_i = b_i^+ = b'_i - a'_{is} b_r^+ \quad (i \neq r) \quad (6.10)$$

в) Обращение нового базиса может быть получено, если вспомнить, что преобразования симплекс-метода для коэффициентов в ограничениях могут быть выполнены умножением текущей канонической формы на матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \overset{\text{г-й столбец}}{\frac{-a'_{1s}}{a'_{rs}}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-a'_{2s}}{a'_{rs}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{a'_{rs}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{-a'_{ms}}{a'_{rs}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{г - я строка} \\ \\ \end{matrix}$$

Следовательно,

$$(\text{новое обращение}) = E * (\text{исходное обращение}) \quad (6.11)$$

(См. упр. 15 гл. 3). Таким образом, если

$$(\text{новое обращение}) = (\beta_{ij}^+), \text{ т}$$

$$\beta_{ij}^+ = \frac{\beta_{rj}}{a'_{rs}}, \quad (6.12)$$

$$\beta_{ij}^+ = \beta_{ij} - \frac{a'_{is}}{a'_{rs}} \beta_{rj} = \beta_{ij} - a'_{is} \beta_{rj}^+ \quad (i \neq r) \quad (6.13)$$

Строка  $r$  нового обращения относится теперь к переменной  $x_s$ . Следует отметить, что преобразования как базисных переменных, так и элементов обратной матрицы происходят

подобно вычислениям симплекс-метода со столбцом  $\begin{pmatrix} a'_{1s} \\ a'_{2s} \\ a'_{rs} \\ a'_{ms} \end{pmatrix}$  в качестве ведущего столбца и  $a'_{rs}$  в качестве ведущего элемента.

г) Для завершения цикла нужны новые симплекс-множители. Из уравнения (3.9) находим исходные значения

$$\pi_i = - \sum_{k=1}^m \beta_{ki} c_k \quad (6.14)$$

Поэтому

$$\pi_i^+ = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^m \beta_{ki}^+ c_k - \beta_{ri}^+ c_s,$$

так как в базис теперь вместо  $x_s$  входит  $x_r$ .

Значит,

$$\begin{aligned} \pi_i^+ &= - \sum_{k=1}^m \left( \beta_{ki} - \frac{a'_{ks}}{a'_{rs}} \beta_{ri} \right) c_k - \frac{\beta_{ri}}{a'_{rs}} c_s = \\ &= - \sum_{k=1}^m \beta_{ki} c_k + \frac{\beta_{ri}}{a'_{rs}} \left( \sum_{k=1}^m a'_{ks} c_k - c_s \right), \end{aligned}$$

поскольку слагаемое при  $k=r$  равно 0. Следовательно,

$$\pi_i^+ = \pi_i + \frac{\beta_{ki}}{a'_{rs}} \left( \sum_{k=1}^m a'_{ks} c_k - c_s \right) \quad (6.15)$$

Однако слагаемое в скобках есть просто  $c'_s$ . Это можно увидеть, предположив, что ограничения записаны в канонической форме в текущем базисе. Чтобы получить целевую функцию в нужном виде, необходимо исключить базисные переменные. Это можно сделать, умножив  $i$ -е ограничение на  $c_i$  и вычтя результат из исходного вида функции  $z$  при  $i = 1, \dots, m$ .

Итак,

$$c'_j = c_j - \sum_{i=1}^m a'_{ij} c_i \quad (j = m+1, \dots, n)$$

(см. также уравнение (2.10) и разд. 3.2). Следовательно,

$$\pi_i^+ = \pi_i - \frac{\beta_{ri}}{a'_{rs}} c'_s = \pi_i - c'_s \beta_{ri}^+$$

Это преобразование может быть рассмотрено так же, как и преобразования для значений и обращений, если присоединить строку величин  $\pi$  к обратной матрице и добавить ведущий

столбец к столбцу  $\begin{pmatrix} a'_{1s} \\ a'_{2s} \\ a'_{ms} \\ c'_s \end{pmatrix}$

Таким образом при переходе от одной итерации к другой вычисления могут быть представлены в виде таблицы

Итерация	Базис	Значение	Обращение базиса				$\pi'_i$
$k$	$x_1$	$b_1'$	$\beta_{11}$	$\beta_{12}$	$\beta_{13}$	$\beta_{1m}$	$\pi'_{1s}$
	$x_2$	$b_2'$	$\beta_{21}$	$\beta_{22}$	$\beta_{23}$	$\beta_{2m}$	$\pi'_{2s}$
	$x_m$	$b_m'$	$\beta_{m1}$	$\beta_{m2}$	$\beta_{m3}$	$\beta_{mm}$	$\pi'_{ms}$
	$-z$	$-z'_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_m$	$\pi'_s$
$k \neq i$	$x_1$	$b_1' - \sigma'_{12} b_2''$	$\beta_{11} - \sigma'_{12} \beta_{21}$			$\beta_{1m} - \sigma'_{12} \beta_{2m}$	
	$x_2$	$b_2'' = \frac{b_2'}{\sigma'_{22}}$	$\beta_{21} = \frac{\beta_{21}}{\sigma'_{22}}$			$\beta_{2m} = \frac{\beta_{2m}}{\sigma'_{22}}$	
	$x_m$	$b_m' - \sigma'_{m2} b_2''$	$\beta_{m1} - \sigma'_{m2} \beta_{21}$			$\beta_{mm} - \sigma'_{m2} \beta_{2m}$	
	$-z$	$-z'_0 - c'_2 b_2''$	$\pi_1 - c'_2 \beta_{21}$			$\pi_m - c'_2 \beta_{2m}$	

### Пример 1

Найти неотрицательные  $x_1, x_2, x_3$ , удовлетворяющие условиям

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 36,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 48,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 22,$$

и минимизировать функцию  $-9x_1 - 10x_2 - 15x_3 = z$ .

Если задача приведена в стандартной форме, ограничения и целевая функция имеют исходный вид

Ограничение	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
1	36	1	2	5	1	0	0
2	48	2	3	3	0	1	0
3	22	1	1	2	0	0	1

целевая функция	$z$	-9	-10	-15	0	0	0
--------------------	-----	----	-----	-----	---	---	---

Эти данные сохраняются в течение всех вычислений. Если задача решается с помощью ЭВМ, они должны быть записаны в память ЭВМ.

Ниже приведена таблица, в которой записываются значения  $c_j$  на различных стадиях вычисления. Она заполняется построчно на каждой итерации:

Итерации	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	
0	-9	-10	-15*	0	0	0	$x_3$ ввести в базис
1	-6*	-4	0	3	0	0	$x_1$ ввести в базис
2	0	-2*	0	-1	0	10	$x_2$ ввести в базис
3	0	0	0	$\frac{1}{-2}$ *	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{2}$	$x_3$ ввести в базис
4	0	0	2	0	1	7	Оптимальное решение найдено

На итерации 0 в базис входят переменные  $x_4, x_5, x_6$  со значениями 36, 48, 22. Обращение базиса есть просто  $I_3$ , а три симплекс-множителя равны 0. Затем вычисление производится в соответствии с только что описанной итеративной процедурой. Последовательность вычислений состоит в том, чтобы записать значения базисных переменных, обращений и симплекс-множителей на итерации 0. Затем вычисляются  $c_j$ , находится отмеченная звездочкой  $s$ -я переменная для включения в базис, вычисляется столбец  $a_{is}$  (ведущий элемент помечен крестиком), вычисляются новые базисные переменные и определяются их значения, новые обращения и симплекс-множители. Затем итеративная процедура возобновляется. Когда все  $c_j$  станут положительными, минимум будет достигнут.

Итерация	базис	Значение	Обращение			$a_{is}$	
0	$x_4$	36	1	0	0	5 <sup>+</sup>	$x_4$ исключить
	$x_5$	48	0	1	0	3	
	$x_6$	22	0	0	1	2	
	-z	0	0	0	0	-15	
1	$x_3$	$\frac{36}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$x_6$ исключить
	$x_5$	$\frac{132}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{7}{5}$	
	$x_6$	$\frac{38}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$ +	
	-z	108	3	0	0	-6	
2	$x_3$	$\frac{14}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$x_5$ исключить
	$x_5$	$\frac{26}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$ +	
	$x_1$	$\frac{38}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	
	-z	184	-1	0	10	-2	
3	$x_3$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ +	$x_3$ исключить
	$x_2$	$\frac{13}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	
	$x_1$	$\frac{21}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$	
	-z	197	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
4	$x_4$	10	1	-1	1		
	$x_2$	4	0	1	-2		
	$x_1$	18	0	-1	3		
	-z	202	0	1	7		

На итерации 4 получаем оптимальное решение, в котором

$$x_1 = 18, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 10, x_5 = 0, x_6 = 0$$

и  $z$  достигает минимального значения, равного 202. Легко проверить, что матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет обратную матрицу, состоящую из столбцов исходного вида, соответствующих  $x_4, x_2, x_1$  в таком порядке:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что симплекс-множители, соответствующие оптимальному базису, суть  $\pi_1 = 0, \pi_2 = 1$  и  $\pi_3 = 7$ .

Следует отметить, что вычисления производились в матрице размерностью 4\*4 (состоящей из значений переменных, обработанных элементов и симплекс-множителей). При использовании симплекс-метода вычисления производились бы в матрице значений и коэффициентов размерностью 4\*7.

## 6.2. ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

В общем случае, когда в ограничениях смешаны знаки  $\geq, =$  и  $\leq$ , первое базисное допустимое решение и обратная матрица не очевидны. Мы вынуждены принять стратегию, обсуждавшуюся в разд. 2.3. В ограничениях со знаками  $\geq$  и  $=$  вводятся искусственные переменные. Они добавляются к новым переменным для ограничений со знаками  $\geq$  и  $\leq$ . Первый базис из модифицированных ограничений состоит из этих искусственных переменных и новых переменных при ограничениях со знаком  $\leq$ . Первое обращение базиса - единичная матрица  $I_m$  в случае, когда имеют место все  $m$  ограничений.

Первая задача (этап 1) состоит в минимизации искусственной целевой функции  $w$ , являющейся суммой искусственных переменных. Получаем набор симплекс-множителей  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  для функции  $w$ , добавленных к симплекс-множителям  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$  для функции  $z$  - настоящей целевой функции.

Коэффициенты при небазисных переменных в канонической форме для функции  $w$  будут обозначаться  $d'_j$ .

В соответствии с уравнением (6.4) получаем

$$d'_j = d_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} \sigma_i, \quad (6.17)$$

где исходные коэффициенты  $d_j$  равны 0 для всех коэффициентов  $d_j$ , кроме искусственных. Для искусственных переменных коэффициенты равны 1, поскольку  $w$  - сумма этих переменных.

Таким образом, ясно, что для исключения базисных переменных из выражения для функции  $w$  на этом этапе симплекс-множители  $\sigma_i$  должны равняться -1 для индексов, соответствующих ограничениям со знаками  $\geq$  и  $=$ , и 0 для ограничений, соответствующих ограничениям со знаком  $\leq$ .

Величины  $\pi_i$  как и прежде, равны 0. В фазе 1 вычислений величины  $\pi_i$  и  $\sigma_i$  преобразуются в соответствии с уравнением (6.16), использующим  $c'_S$  для  $\pi_i$  и  $d'_S$  для  $\sigma_i$ . Величины  $c'_j$  и  $d'_j$  вычисляются из уравнений (6.4) и (6.17) соответственно. Следовательно, как только этап 1 завершится, а функция  $w$  обратится в 0 (если этого не произойдет, ограничения не имеют

допустимого решения), можно продолжить минимизацию функции  $z$  без особых затруднений.

### Пример 1

Найти такие  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ , что

$$3x_1 + 4x_2 \geq 19,$$

$$3x_1 + x_2 \geq 7,$$

$$x_1 + x_2 \leq 15$$

и минимизировать функцию  $10x_1 + 5x_2 = z$ .

Задача в стандартной форме с новыми и искусственными переменными имеет вид

Ограничение	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	19	3	4	-1	0	0	1	0
2	7	3	1	0	-1	0	0	1
3	15	1	1	0	0	1	0	0
Целевая функция	$z$	10	5	0	0	0	0	0
Искусственная функция	$w$	0	0	0	0	0	1	1

Итерация	$c'_1$ или $d'_1$	$c'_2$ или $d'_2$	$c'_3$ или $d'_3$	$c'_4$ или $d'_4$	$c'_5$ или $d'_5$	$c'_6$ или $d'_6$	$c'_7$ или $d'_7$
0	-6*	-5	1	1	0	0	0
1	0	-3*	1	-1	0	0	2
2	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	$\frac{5}{9}$	$\frac{25}{9}$	0		

Этап I: ввести  $x_1$  в базис

Этап I: ввести  $x_2$  в базис

Этап I закончен, все коэффициенты функции  $z$  положительны

Этап II закончен, так как все коэффициенты функции  $z$  положительны

Итерация	Базис	Значение	Обращение			$a'_{is}$
0	$x_6$	19	1	0	0	3
	$x_7$	7	0	1	0	$3^+$
	$x_5$	15	0	0	1	1
	- $z$	0	0	0	0	10
1	- $w$	-26	-1	-1	0	-6
	$x_6$	12	1	-1	0	$3^+$
	$x_1$	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	$x_5$	$\frac{38}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
2	- $z$	$-\frac{70}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
	- $w$	-12	-1	1	0	-3
	$x_2$	4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	
	$x_1$	1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	0	
2	$x_5$	10	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	1	
	- $z$	-30	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{25}{9}$	0	
	- $w$	0	0	0	0	

На итерации 2  $w$  обращается в 0. Если воспользоваться уравнением (6.4) и подходящими симплекс-множителями для функции  $z$  ( $-\frac{5}{9}$ ,  $-\frac{25}{9}$ , 0), то ясно, что функция оптимизируется также и этим базисным допустимым решением, в котором  $x_1=1$ ,  $x_2=4$ , и



минимальное значение функции  $z$  равно 30. Поскольку  $x_5=10$ , третье ограничение превращается в строгое неравенство.

### 6.3. ЕЩЕ РАЗ О ВЫРОЖДЕННОСТИ

В разд. 2.5 было указано, что если задача линейного программирования вырождена, то может получиться так, что итерации симплекс-метода заикнутся и вернуться к предыдущему базису. Действительно, наша программа для ЭВМ при решении задачи Била продемонстрировала такую возможность. К счастью, нам удалось обойти возникшую трудность простым упорядочиванием ограничений. Однако программа для ЭВМ должна быть настолько мощной, чтобы работать во всех случаях. Для преодоления этой трудности, рассмотрим задачу снова.

В разд. 2.5 было показано, что вырожденность возникает от того, что две или более вершины допустимой области совпадают. Разумеется, наличие вырожденности само по себе не ведет автоматически к заикливанию, однако, чтобы вырожденность возникла на определенном шаге, необходимо, на предыдущем шаге выбрать переменную для исключения из базиса. Данциг показал, что на этом шаге подходящий выбор гарантирует от заикливания и тем самым обеспечивает сходимость метода. Данциг пришел к своему выбору, рассматривая возмущенную задачу. Как было указано в разд. 2.5, используя метод возмущения задачи, можно избежать совпадения вершин и, следовательно, вырожденности.

Итак, вместо следующей задачи:

найти  $x_i \geq 0$ , удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (6.18)$$

и минимизировать функцию

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = z$$

рассматривается другая задача (получаемая из исходной некоторым специальным возмущением):

найти  $x_j > 0$ , удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i + \varepsilon^i \quad (i=1, \dots, m) \quad (6.19)$$

и минимизирующие функцию

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = z$$

Здесь  $\varepsilon$  — произвольная неотрицательная величина. Обычно она мала. Действительно, после решения задачи все значения будут функциями  $\varepsilon$ , и остается устремить  $\varepsilon$  к 0, чтобы получить решение исходной задачи. С помощью величины  $\varepsilon$  ликвидируют вырожденность.

На  $k$ -й итерации получим, например, базис  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  и его обращение, матрицу с элементами  $\beta_{ij}$ . Тогда из уравнения (2.8) ясно, что значения базисных переменных возмущенной задачи имеют вид

$$x_i(\varepsilon) = \sum_{k=1}^m \beta_{ik} (b_i + \varepsilon^k) = b'_i + \sum_{k=1}^m \beta_{ik} \varepsilon^k, \quad (6.20)$$

где  $b'_i$  — значения исходной задачи.

Разумеется, выбор  $\varepsilon$  произволен лишь потому, что базис остается допустимым. Если  $b'_i > 0$ , то в силу ограниченности элементов  $\beta_{ik}$ , можно быть уверенными, что  $x_i(\varepsilon) \geq 0$  при достаточно малом  $\varepsilon$ . Если  $b'_i = 0$ , то мы должны быть уверены в том, что первое ненулевое  $\beta_{ik}$  положительно, так как  $\varepsilon > 0$ .

Пусть теперь  $x_s$  — переменная, которая должна быть включена в базис. Чтобы найти переменную для исключения из базиса, находим минимальное значение отношения

$$\frac{b'_i + \sum_{k=1}^m \beta_{ik} \varepsilon^k}{a'_{is}} \quad (6.21)$$

для  $a'_{is} \geq 0$ .

Теперь вырожденность исходной задачи означает, что здесь может встретиться неоднозначность минимизации

$$\frac{b'_i}{a'_{is}} \quad (6.22)$$

для  $a'_{is} \geq 0$ .

Если минимум  $b'_i/a'_{is}$  для  $a'_{is} > 0$  единствен и равен  $b'_r/a'_{rs}$ , то при достаточно малом  $\varepsilon$  минимум (6.21) будет достигаться для одного и того же значения  $r$ . Значения базисных переменных на следующей итерации можно вычислить, используя соотношения (6.9) и (6.10):

$$x_s^+ = \frac{1}{a'_{rs}} \left( b'_r + \sum_{k=1}^m \beta_{rk} \varepsilon^k \right); \quad (6.23)$$

$$x_i^+ = b'_i - \frac{a'_{is}}{a'_{rs}} b'_r + \sum_{k=1}^m \left( \beta_{ik} - \frac{a'_{is}}{a'_{rs}} \beta_{rk} \right) \varepsilon^k, \quad (6.24)$$

и в силу способа, которым определялось  $r$ , слагаемое, не зависящее от  $\varepsilon$ , в уравнении (6.24), строго положительно, так что решение допустимо.

Если в (6.22) возникают неопределенности, следует в (6.21) рассмотреть члены первого порядка по  $\varepsilon$ .

Таким образом ищется минимум

$$\frac{b'_i + \beta_{i1} \varepsilon}{a'_{is}} \quad (6.25)$$

среди значений  $i$ , связанных с неопределенностью (6.22).

Итак,  $r$  находится из соотношения

$$\min \frac{\beta_{i1}}{a'_{is}} = \frac{\beta_{r1}}{a'_{rs}}. \quad (6.26)$$

Если этот минимум единствен, значения переменных на следующей итерации будут задаваться формулами

$$x_s^+ = \frac{1}{a'_{rs}} \left( b'_r + \sum_{k=1}^m \beta_{rk} \varepsilon^k \right);$$

$$x_i^{++} = \sum_{k=1}^m \left( \beta_{ik} - \frac{a'_{is}}{a'_{rs}} \beta_{rk} \right) \varepsilon^k \quad (6.27)$$

для тех  $i$ , в которых происходило вырождение на предыдущей стадии, а для остальных значений  $i$  — как прежде, согласно уравнению (6.24).

Далее в силу соотношения (6.26) коэффициент при  $\varepsilon$  в уравнении (6.27) будет строго положителен — именно это обеспечивает допустимость базиса. Если неопределенности

возникают в (6.22), а затем в (6.26), необходимо учесть также слагаемое с  $\varepsilon^2$  и определить  $r$  из соотношения

$$\min \frac{\beta_{i2}}{a'_{is}} = \frac{\beta_{r2}}{a'_{rs}}. \quad (6.28)$$

где минимум берется по тем  $i$ , по которым неопределенности возникали раньше.

Продолжим эту процедуру, работая со столбцами обращения в неопределенных строках, пока неопределенности не разрешатся. Это должно рано или поздно произойти, так как иначе две строки обращения оказались бы идентичны, а это невозможно.

Таким образом, видно, что процедура нахождения переменной для исключения из базиса заключается сначала в рассмотрении частных в (6.22), затем (если неопределенности имеются) в переходе к уравнению (6.26), далее (если они повторяются) в переходе к уравнению (6.28), и т. д. по столбцам обращения. Итак, разрешить возникшие трудности можно и без явного введения  $\varepsilon$  в задачу. Достаточно того, чтобы значение  $\varepsilon$ , удовлетворяющее всем требованиям, могло быть найдено. Искать его необязательно.

Новое значение функции  $z$

$$z_0^+ = z_0' + c_s' x_s^+, \quad (6.29)$$

а поскольку  $c_s' < 0$  и  $x_s^* > 0$  (из уравнения (6.23)), функция  $z$  убывает и никогда в дальнейшем не примет предыдущего значения. Таким образом, можно быть уверенным, что предыдущий базис не встретится снова. и процедура должна закончиться самое большее за  $\binom{n}{m}$  шагов (см. разд. 2.5).

### Пример 1

Найти неотрицательные  $x_1, x_2, x_3$  удовлетворяющие условиям

$$x_1 - 2x_2 \leq 2,$$

$$2x_1 - x_2 \leq 4,$$

$$x_1 + x_2 \leq 5,$$

минимизировать функцию  $-3x_1 + x_2 = z$ .

Ограничение	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	2	1	-2	1	0	0
2	4	2	-1	0	1	0
3	5	1	1	0	0	1
Целевая Функция	$z$	-3	1	0	0	0

Итерация	$c_1'$	$c_2'$	$c_3'$	$c_4'$	$c_5'$	
0	-3*	1	0	0	0	$x_1$ ввести в базис
1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	$x_2$ ввести в базис
2	0	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	Оптимальное решение найдено

Итерация	базис	Значение	Обращение				$a'_{is}$	
0	$x_3$	2	1	0	0	1	1	$x_4$ исключить из базиса
	$x_4$	4	0	1	0	2 <sup>+</sup>	2 <sup>+</sup>	
	$x_5$	5	0	0	1	1	1	
	$-z$	0	0	0	0	-3	-3	
1	$x_3$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$x_5$ исключить из базиса
	$x_1$	2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	

	$x_5$	3	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
	-z	6	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
2	$x_3$	3	1	-1	0	
	$x_1$	3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
	$x_2$	2	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
	-z	7	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	

Оптимум для функции  $z$  равен -7 при  $x_1 = 3$  и  $x_2 = 2$ . На итерации 0 неопределенность между  $x_3$  и  $x_4$  (в смысле какую из этих переменных исключить из базиса) разрешается нахождением наименьшего из отношений

$$\frac{2 + \varepsilon + 0\varepsilon^2}{1} \text{ и } \frac{4 + 0\varepsilon + \varepsilon^2}{2}.$$

Поскольку  $\varepsilon$  мало, ясно, что это второе отношение. Неопределенность в "значениях"  $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$  разрешается в первом столбце обращения:  $\frac{1}{1} > \frac{0}{2}$ .

#### 6.4. ПРОГРАММА ДЛЯ УЛУЧШЕННОГО СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Представленная ниже программа реализует идеи настоящей главы. Она похожа на программу гл. 2. Исходная матрица коэффициентов заносится в память как матрица  $A$ , правые части ограничений заносятся в столбец 0. Таким образом, в матрицу входят  $M + 2$  строк,  $M$  ограничений, целевая функция и искусственная целевая функция. Она имеет  $P$  строк помимо строки 0, которые содержат исходные, новые и искусственные переменные. Матрица  $B$  состоит из столбцов значений переменных и значений целевой функции, матрицы обращения размерностью  $m \times m$ , двух строк симплекс-множителей и последнего столбца, в котором все элементы, кроме последних двух, равны 0, а последние два равны -1:

$$B = \begin{pmatrix} b'_1 & \beta_{11} & \beta_{1m} & 0 \\ b'_2 & \beta_{21} & \beta_{2m} & 0 \\ b'_m & \beta_{m1} & \beta_{mm} & 0 \\ -z'_0 & \pi_1 & \pi_m & 1 \\ -\omega'_0 & \sigma_1 & \sigma_m & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицам  $A$  и  $B$  присваиваются значения в строке 60 и строках 100-500.

Величины  $c'_j$  из уравнения (6.4) или  $d'_j$  из уравнения (6.17) вычисляются в строках 530 и 540. В силу указанного выше вида матрицы  $B$ ,  $d'_{is}$  вычисляются в строках 760—780 и запоминаются как  $v_i$ . Правила предыдущего раздела для разрешения неопределенности реализуются в строках программы 790-1000. Рекомендуем внимательно сравнить этот раздел программы со строками 740—810 программы разд. 2.4.

В качестве иллюстраций работы программы и формата вывода результатов решаются примеры разд. 6.1 — 6.3. Сравните распечатку результатов с приведенными ранее вычислениями. Наконец, решается задача Била. Зацикливание исключается. Проверьте это, переставив ограничения (зацикливания все равно не произойдет).

Сделаем несколько замечаний относительно преимуществ и недостатков улучшенного симплекс-метода и симплекс-метода. При использовании улучшенного симплекс-метода исходная матрица ограничений запоминается. В симплекс-методе ее элементы меняются при прохождении итераций. Таким образом, поскольку в улучшенном симплекс-методе нужны также обращение базиса и симплекс-множители, недостатком улучшенного симплекс-метода является большая потребность в машинной памяти.

Большим преимуществом улучшенного симплекс-метода является уменьшение количества вычисления. Симплекс-метод работает с матрицей  $A$ , имеющей  $M + 2$  строки и  $M + N + GC + 1$  столбцов. Улучшенный симплекс-метод работает с матрицей  $B$ , имеющей  $M + 2$  строк и  $M + 1$  столбцов. Таким образом, количество вычислений в задаче линейного программирования

напрямую связано скорее с количеством ограничений, чем с количеством переменных, которое в общем случае значительно больше.

Улучшенный симплекс-метод непосредственно вычисляет обращение базиса и симплекс-множители. Эти величины не надо извлекать из окончательной таблицы. Это может помочь при последующем анализе устойчивости решения.

```

READY.
10 PRINT "РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ"
12 PRINT "МОДИФИЦИРОВАННЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ"
15 READ ZZ
18 REM ПРИ ZZ=+1 ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ТАБЛИЦА ВЫВОДИТСЯ НА
19 REM ПЕЧАТЬ; ПРИ ZZ=-1 НЕ ВЫВОДИТСЯ
20 REM ВВЕСТИ КОЛИЧЕСТВО ВИДОВ ОГРАНИЧЕНИЙ И КОЛИЧЕСТВО
22 REM ПЕРЕМЕННЫХ
25 READ GC, EC, LC, N
30 MM=GC+E: M=MM+LC: MK=GC+LC: N1=MK+N
40 P=N1+MM: M1=M+1: M2=M+2: N0=N1
50 DIM A(M2,P), B(M2,M1), BS(M), V(M2), NB(P), SL(P), C(P)
55 REM ВВЕСТИ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕНИЙ И ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ
60 FOR I=1 TO M1: FOR J=1 TO N: READ A(I,J): NEXT J: NEXT I
90 REM ЗАДАТЬ ОСЛАБЛЕННЫЕ, ИСКУССТВЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ,
95 REM ПОМЕТИТЬ БАЗИС И ПРОЧИСТЬ ПЕРЕМЕННЫЕ В НУЛЕВОЙ
98 REM СТОЛБЕЦ
100 IF GC = 0 THEN GOTO 150
110 FOR I=1 TO GC
120 A(I,N+1)=-1: A(I,N1+1)=1: B(M2,I)=-1
130 B(I,I)=1: A(M2,N1+1)=1: BS(I)=N1+1
140 READ A(I,0): B(I,0)=A(I,0): NEXT I
150 IF EC=0 THEN GOTO 200
160 FOR I=GC+1 TO MM
170 A(I,N+1)=1: B(I,I)=1: A(M2,N1+1)=1
180 BS(I)=N1+1: B(M2,I)=-1: READ A(I,0)
190 B(I,0)=A(I,0): NEXT I
200 IF LC=0 THEN GOTO 235
210 FOR I=MM+1 TO M
220 A(I,N+1-EC)=1: B(I,I)=1: BS(I)=N+1-EC: READ A(I,0)
230 B(I,0)=A(I,0): NEXT I
240 IF MM=0 THEN PRINT "ОТСУТСТВУЕТ ЭТАП 1 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ"
250 REM ЗАДАТЬ ИСКУССТВЕННУЮ ФУНКЦИЮ ДЛЯ ЭТАПА 1
260 L=1: REM N0 ЯВЛЯЕТСЯ НОМЕРОМ НУЖНОГО СТОЛБЦА
270 FOR I=1 TO MM
280 B(M2,0)=B(M2,0)-B(I,0)
290 NEXT I
300 ML=M1+L: REM ML=M+2 ДЛЯ ЭТАПА 1; ML=M+1 ДЛЯ ЭТАПА 2
320 IF ZZ>=0 THEN PRINT "ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА: GOSUB 3000
330 REM ПОМЕТИТЬ НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ; NB(J)=0 ЕСЛИ
335 REM J-НЕБАЗИСНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ
350 FOR I=1 TO M: NB(BS(I))=1: NEXT I
400 ZERO=1E-08: NIL=1E-20
490 REM НАЙТИ НАИМЕНЬШИЙ КОЭФФИЦИЕНТ В СТРОКЕ ЦЕЛЕВОЙ
495 ФУНКЦИИ, Т.Е. СТРОКУ ML
500 MIN=-ZERO: PV=0: ML=M1+L
510 FOR J=1 TO N0: C(J)=0
520 IF NB(J)=1 THEN GOTO 570
525 REM ВЫЧИСЛИТЬ C'J
530 FOR I=1 TO M: C(J)=C(J)+B(ML,I)*A(I,J): NEXT I
540 C(J)=C(J)+A(ML,J)
550 IF C(J)>=MIN THEN GOTO 570
560 MIN=C(J): S=J
570 NEXT J
580 REM ЕСЛИ S=0, ТО ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ И
585 REM МИНИМУМ НАЙДЕН
590 IF S=0 THEN GOTO 1900
740 REM НАЙТИ СТРОКУ ПЕРЕМЕННЫХ, КОТОРУЮ СЛЕДУЕТ
745 REM ИСКЛЮЧИТЬ ИЗ БАЗИСА ПО УСЛОВИЮ МИНИМУМА B/A'(IS)
750 MIN=1E20: R=0
755 REM ВЫЧИСЛИТЬ A'(IS) И ПОМЕСТИТЬ В СТОЛБЕЦ V
760 FOR I=1 TO M1: V(I)=0
770 FOR K=1 TO M1: V(I)=V(I)+B(I,K)*A(K,S): NEXT K: NEXT I
780 V(ML)=C(S)
790 FOR I=1 TO M
800 IF V(I)<=ZERO THEN GOTO 1000
810 K=0
820 RT=B(I,K)/V(I)
830 DF=RT-MIN
840 IF DF>=0 THEN GOTO 870
850 R=I: MIN=B(I,0)/V(I)
860 GOTO 1000

```

```

870 IF DF<>0 THEN GOTO 1000
880 K=K+1
890 MIN=B(R,K)/V(R)
900 GOTO 820
1000 NEXT I
1010 REM ЕСЛИ R=0, ТО ИМЕЕТ МЕСТО РЕШЕНИЕ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ
1020 IF R=0 THEN GOTO 1800
1050 IF ZZ>=0 THEN GOSUB 3500
1100 REM ОБНОВИТЬ ОБРАТНЫЙ И СИМПЛЕКС- МНОЖИТЕЛИ
1120 PV=V(R)
1130 FOR J=0 TO M1:B(R,J)=B(RJ)/PV:NEXT J
1180 REM ПЕРЕНАЗНАЧИТЬ В ПОВТОРНО ПОМЕТИТЬ БАЗИСНЫЕ
1185 REM И НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
1190 NB(BS(R))=0:NB(S)=1:BS(R)=S:NI=NI+1
1200 GOTO 500
1800 PRINT "ПЕРЕМЕННАЯ "S" НЕ ИМЕЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ
1810 GOSUB 3500:STOP
1820 GOTO 2500
1900 IF L=0 THEN GOTO 2000
1905 REM ДЛЯ ЭТАПА 2 ЭТА ТОЧКА ЯВЛЯЕТСЯ ТОЧКОЙ МИНИМУМА. ЕСЛИ
1908 REM МЫ НАХОДИМСЯ НА ЭТАПЕ 1, ТО ПЕРЕЙТИ К ЭТАПУ 2
1910 REM ПРОВЕРИТЬ, ЧТО W СТАЛО РАВНО 0
1920 IF ABS(B(ML,0))>=1E-08 THEN GOTO 1960
1930 PRINT "ЭТАП 1 УСПЕШНО ЗАВЕРШЕН"
1940 L=0:N0=N1:REM ЗАДАТЬ L И НОМЕР СТОЛБЦА ДЛЯ ЭТАПА 2
1950 GOTO 500
1960 PRINT "ОГРАНИЧЕНИЯ НЕ ИМЕЮТ ДОПУСТИМОГО РЕШЕНИЯ"
1970 PRINT "СУММА ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ РАВНА";:PRINT -B(ML,0)
1980 GOSUB 3500:STOP
2000 PRINT"ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ"
2010 PRINT "ОГРАНИЧЕНИЕ БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ"
2020 PB=144
2030 FOR I=1 TO M:SL(BS(I))=B(I,0)
2040 PRINT " ",I," ";BS(I);
2050 PA=B(I,0):GOSUB 9000:PRINT ""
2060 NEXT I
2090 PRINT "МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РФВЕН ";-B(M1,0)
2100 PRINT "ОГРАНИЧЕНИЕ СОСТОЯНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ"
2120 FOR I=1 TO M
2130 PRINT " ";I, " ";
2140 IF I<=GC OR I>MM THEN GOTO 2160
2150 PRINT "УРАВНЕНИЕ НЕ РЕШЕНО":GOTO 2180
2160 IF NB(N+I)=1 THEN PRINT "ДОПОЛ.ПЕРЕМ";
2165 PA=SL(N+I):GOSUB 9000:PRINT " ":GOTO 2180
2170 PRINT "ОГРАНИЧЕНИЕ 0"
2180 NEXT I
2300 SS=1:GOSUB 3500
2500 END
3000 PRINT "БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ";
3010 FOR J=1 TO N:PRINT " X J ";:NEXT J
3020 PRINT ""
3030 PB=122
3040 FOR I=1 TO ML
3050 IF I=M1 THEN PRINT "ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ";: GOTO 3080
3060 IF I=M2 THEN PRINT "ИСКУССТ.ФУНКЦИЯ";: GOTO 3080
3070 PRINT I:;PA=A(I,0):GOSUB9000
3080 FOR J=0 TO N0
3090 PA=A(I,J):GOSUB 9000
3100 NEXT J
3110 PRINT ""
3120 NEXT I:PRINT " "
3200 RETURN
3500 IF L=1 THEN PRINT "ПЕРВЫЙ ЭТАП ВСЕ ЕЩЕ ПРОДОЛЖАЕТСЯ"
3510 PB=122
3520 FOR J=1 TO N0:PRINT " C"J" ";:NEXT J
3530 PRINT " "
3540 FOR J=1 TO N0:PA=C(J):GOSUB 9000:NEXT J: PRINT " "
3550 IF SS=1 THEN GOTO 3600
3560 PRINT "X";S; "ВВОДИТ В,Х",BS(R);"В УСЛОВИИ";R;"ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА"
3600 PRINT "БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА";:IF SS=1 THEN PRINT " "
3605 GOTO 3620
3610 PRINT " A' IS"
3620 FOR I=1 TO ML
3630 IF I=M1 THEN PRINT "РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ";: GOTO 3670
3640 IF I=M2 THEN PRINT "РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИСКУССТ.ФУНКЦИИ";:GOTO 3670
3650 PRINT BS(I);
3670 FOR J=0 TO M 3680 PA=B(I,J):GOSUB 9000
3690 NEXT J
3700 IF SS=1 THEN GOTO 3720

```

```

3710 PA=V(I):GOSUB 9000
3720 PRINT""
3730 NEXT I:PRINT" "
3750 RETURN
4000 DATA 1
4010 DATA 0,0,3,4
4020 DATA 0.25,-8,-1,9,0.5,-12,-0.5,3,0,0,1,0,-0.75,20,-0.5,6
4030 DATA 0,0,1
9000 PC=INT(PB/100)
9010 P$=""
9020 IF PC=0 THEN PRINT"":GOTO 9040
9030 PRINT LEFT$(P$,PC);
9040 PC=PB-100*PC
9050 P0=INT(PC/10):PC=PC-10*PD
9060 IF PD=0 THEN PD=1
9070 IF PA<0 THEN P$=P$+"-."
9080 PE=ABS(PA)
9090 PE=PE+5*10^(-1-PC)
9100 IF PE>=10^PD THEN PRINT PA::RETURN
9110 P$=P$+MID$(STR$(INT(PE)),2,PD)
9120 PRINT RIGHT$(P$,PD+1)
9130 IF PC=0 THEN RETURN
9140 PRINT" ";
9150 PE=INT((PE-INT(PE))*10^PC)
9160 P$=" 000000000"
9170 P$=P$+MID$(STR$(PE),2,PC)
9180 PRINT RIGHT$(P$,PC)::RETURN
READY.

```

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ  
МОДИФИЦИРОВАННЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ  
ОТСУТСТВУЕТ ЭТАП 1 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА**

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X2	X3	X 4	X5	X6
1	36.00	1.00	2.00	5.00	1.00	0.00	0.00
2	48.00	2.00	3.00	3.00	0.00	1.00	0.00
3	22.00	1.00	1.00	2.00	0.00	0.00	1.00
ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ		-9.00	-10.00	-15.00	0.00	0.00	0.00

C1	C2	C3	C4	C5	C6
-9.00	-10.00	-15.00	0.00	0.00	0.00

**X3 ВХОДИТ В, X4 В УСЛОВИИ 1 ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА**

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА	A'IS
4	36.00	1.00 0.00 0.00	5.00
5	48.00	0.00 1.00 0.00	3.00
6	22.00	0.00 0.00 1.00	2.00
РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ		0.00 0.00 0.00	0.00 -15.00

C1	C2	C3	C4	C5	C6
-6.00	-4.00	0.00	3.00	0.00	0.00

**X1 ВХОДИТ В X6 В УСЛОВИИ 3 ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА**

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА	A'IS
3	7.20	0.20 0.00 0.00	0.20
5	26.40	-0.60 1.00 0.00	1.40
6	7.60	-0.40 0.00 1.00	0.60
РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ		108 3.00 0.00	0.00 -6.00

C1	C2	C3	C4	C5	C6
0.00	-2.00	0.00	-1.00	0.00	10.00

**X2 ВХОДИТ В X5 В УСЛОВИИ 2 ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА**

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА	A'IS
3	4.67	0.25 -0.25 0.25	0.25

5	8.67	0.25	0.75	-1.75	0.25		
1	12.67	-0.75	-0.25	2.25	-0.75		
РЕШЕНИЕ	ДЛЯ	ЦЕЛЕВОЙ	184	-1.00	0.00	10.00	-2.00
ФУНКЦИИ							
C1	C2	C3	C4	C5	C6		
0.00	0.00	0.00	-0.50	1.50	6.50		

#### Х4 ВХОДИТ В Х3 В УСЛОВИИ 1 ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА			A'IS		
3	2.50	0.33	0.00	-0.33	0.33		
2	6.50	0.33	1.00	-2.33	1.33		
1	10.50	-0.67	0.00	1.67	0.33		
РЕШЕНИЕ	ДЛЯ	ЦЕЛЕВОЙ	197	-0.50	1.50	6.50	-0.50
ФУНКЦИИ							

#### ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Ограничение	Базис	Значение
1	1	10.0000
2	6	4.0000
3	3	8.0000

#### МИНИМУМ ФУНКЦИИ РАВЕН -202

Ограничение	Состояние	Дополнительные переменные
1	ДОПОЛ.ПЕРЕМ	10.0000
2	ОГРАНИЧЕНИЕ	0
3	ОГРАНИЧЕНИЕ	0

C1	C2	C3	C4	C5	C6
0.00	0.00	2.00	0.00	1.00	7.00

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА				
4	10.00	1.00	-1.00	1.00		
2	4.00	0.00	1.00	-2.00		
1	18.00	0.00	-1.00	3.00		
РЕШЕНИЕ	ДЛЯ	ЦЕЛЕВОЙ	202	0.00	1.00	7.00
ФУНКЦИИ						

## 6.5. УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя улучшенный симплекс-метод, решите следующую задачу: найти такие  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ , что

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1700,$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1600$$

и функция  $-2x_1 - 4x_2 = z$  принимает минимальное значение.

2. Используя улучшенный симплекс-метод, решите следующую задачу: найти такие  $x_i \geq 0$ , где  $i = 1, 2$ , что

$$x_1 \geq 10,$$

$$x_2 \geq 5,$$

$$x_1 + x_2 \leq 20,$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 20$$

и функция  $3x_1 + 4x_2 = z$  принимает максимальное значение.

3. Используя улучшенный симплекс-метод, решите следующую задачу:



найти такие  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ , что

$$x_1 + 3x_2 \geq 8,$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 19,$$

$$3x_1 + x_2 \geq 7$$

и функция  $50x_1 + 25x_2 = z$  принимает минимальное значение.

4. Используя улучшенный симплекс-метод, решите следующую задачу:

найти такие  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ , что

$$y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 50,$$

$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 25$$

и функция  $8y_1 + 19y_2 + 7y_3 = w$  принимает максимальное значение.

5. Воспользуйтесь улучшенным симплекс-методом для решения задачи Биля:

найти такие  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$  что

$$1/4x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0,$$

$$1/2x_1 - 12x_2 - 1/2x_3 + 3x_4 \leq 0$$

и функция  $-3/4x_1 + 20x_2 - 1/2x_3 + 6x_4 = z \leq 1$  принимает минимальное значение.

Проверьте, что описанные выше правила предотвращают заикливание, в каком бы порядке ни расположить ограничения.

6. Компания производит различные виды мебели для кабинетов. Она производит столы трех типов (1, 2 и 3). Объем работы, необходимой для каждой операции, приводится в таблице

Операция	Объем работы, чел.-ч.		
	1	2	3
Изготовление частей	2	3	2
Сборка	1	2	3
Полировка и проверка	1	1	2

Максимум объема работ в неделю составляет 360 чел.-ч. на изготовление частей стола, 240 чел.-ч. на сборку и 180 чел.-ч. на полировку. Рынок сбыта расширяется, но он недолговечен, а возможности хранения ограничивают производство 170 столами в неделю.

Прибыль от продажи столов типов 1, 2 3 составляет соответственно 15, 22 и 19 дол. Покажите, что задача составления оптимального плана производства может быть поставлена в следующем виде:

найти такие  $x_i \geq 0$ , что

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 360$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 240$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 180$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 170$$

и функция  $\omega = -15x_1 - 22x_2 - 19x_3$  принимает минимальное значение.

Объясните физический смысл всех переменных модели и, используя улучшенный симплекс-метод, произведите вычисления, необходимые для получения решения.

Решение задачи на ЭВМ было выдано в виде таблицы

Ограничение	базис	Значение	Обращение базиса				Симплекс - множители
1	$x_1$	100	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	6

2	$x_2$	40	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -4 \\ 3 \end{smallmatrix}$	0	1
3	$x_3$	20	$\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}$	0	2
4	$x_7$	10	$\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \end{smallmatrix}$	1	0
Целевая	$w$	-2760					

Используйте этот результат, чтобы построить полную симплекс-таблицу, соответствующую оптимальному решению.

Стоимость сверхурочных работ на каждом этапе производства составляет 4 дол. на 1 чел.-ч.

1. В каких производственных процессах целесообразно использовать сверхурочные работы?

2. В течение некоторого времени для удовлетворения потребностей ценного клиента необходимо увеличить выпуск столов типа 3 по крайней мере до 30 столов в неделю. Как это повлияет на оптимальный план производства?

7. Компания производит сверлильные станки трех видов  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ . Каждый вид приносит соответственно 10, 10 и 30 дол. прибыли. Количество станков, которое может быть произведено в течение недели/ограничено поставками комплектующих изделий  $F_1$ ,  $F_2$ ; и  $F_3$  где для  $D_1$  требуется 1 штука  $F_1$ , 4 штуки  $F_2$  и 2 штуки  $F_3$ ; для  $D_2$  - 2 штуки  $F_1$  3 штуки  $F_2$  и 3 штуки  $F_3$ , а для  $D_3$  - 10 штук  $F_1$ , 10 штук  $F_2$  и 8 штук  $F_3$ . Каждую неделю количество доступных изделий  $F_1$ ,  $F_2$ ; и  $F_3$  составляет соответственно 650, 850 и 650 штук. Определите максимальную прибыль, которую можно получать каждую неделю, и покажите, что выгоднее всего производить одинаковое количество станков  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ . Компания обращается в комиссию по ценам за разрешением повысить цены до такой степени, чтобы они давали 20 %-ное увеличение прибылей от всех моделей. Рассмотрев вопрос, комиссия разрешает увеличение цен на станки  $D_1$  и  $D_2$ , но настаивает на таком ограничении цены на станок  $D_3$ , при котором прибыль от продажи станка  $D_3$  уменьшилась бы на 10 %. Покажите, что оптимальный план производства, основанный на этих данных о прибыли, приведет к 20 %-ному увеличению общей прибыли.

Руководство компании связано соглашением, которое обеспечивает занятость 300 рабочих. Если возможности производства позволяют одному рабочему в течении недели произвести 1 станок  $D_1$  или один станок  $D_2$ , а пяти рабочим - один станок  $D_3$  то как это соглашение повлияет на новое решение? Покажите, что максимальное увеличение прибыли составляет 11 % от исходной прибыли. 8. Была предложена следующая простая модель сельскохозяйственного производства на Нарвских островах для внешнего рынка. Имеется три основные культуры, растущие в этом климате, и выращиваться они могут на одном из двух типов пахотных земель. В настоящее время для обработки пригодны 14 \* 10 акров земли типа I и 12 \* 10 акров земли типа II. Разные типы культур по-разному растут на разных землях, и подсчитано, что чистый урожай культуры  $i$  с земли типа  $j$  составляет  $R_{ij}$ .

$i$	$R_{ij}$	
	$j=I$	$j=II$
1	6	6
2	8	5
3	4	5

Все культуры требуют дополнительного орошения (ирригационного). Имеющаяся ирригационная система обеспечивает 56 \* 10 м<sup>3</sup> воды в год. Для одного акра культуры  $i$ , выращенной на земле типа  $j$ , требуется  $W_{ij}$  м<sup>3</sup> воды в год:

$i$	$W_{ij}$	
	$j=I$	$j=II$
1	2	3
2	3	3
3	3	2

Население, занятое в сельском хозяйстве, составляет  $7 \cdot 10$  человек. Чтобы получить урожаи 1, 2, 3 с каждых 10 акров земли, для выполнения различных работ по выращиванию культур в течение 1 года требуется соответственно 2, 1, 3 человека. Описанная модель приводит к следующей задаче линейного программирования:

пусть все переменные неотрицательны и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + u &= 14, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + v &= 12, \\ 2x_{11} + 3x_{21} + 3x_{31} + 3x_{12} + 3x_{22} + 2x_{32} + w &= 56, \\ 2x_{11} + x_{21} + 3x_{31} + 2x_{12} + x_{22} + 3x_{32} + z &= 70. \end{aligned}$$

Минимизируйте функцию  $R = -6x_{11} - 8x_{21} - 4x_{31} - 6x_{12} - 5x_{22} - 5x_{32}$

Объясните физический смысл всех переменных, входящих в задачу. Найдите базис, обращение базиса, симплекс-множители этого базиса, решите эту задачу улучшенным симплекс-методом.

Задача была решена на ЭВМ; решение было выдано в виде таблицы

Базис	Значение	Обращение			
$x_{21}$	4	-2	-2	1	0
$x_{11}$	10	3	2	-1	0
$x_{32}$	12	0	1	0	0
$Z$	10	-4	-5	1	1
Симплекс-множители		2	1	2	0

Значение целевой функции равно 152.

а) Прокомментируйте это решение.

б) Рассматриваются план вырубki лесов, реализация которого даст дополнительные земли типа I, и пути принципиального улучшения ирригационной системы. Каково значение этих перемен с точки зрения экономики сельского хозяйства?

в) Предложена четвертая культура, которая может выращиваться только на земле типа II. Для нее требуются  $2 \text{ м}^3$  воды на 1 акр и весьма большие затраты труда — 4 человека на 10 акров. В текущих единицах на мировом рынке она принесла бы 6 единиц чистого урожая с 1 акра. Стоит ли ее выращивать? 9. Компания импортирует красные вина трех марок:

Марка красного вина	Цена 1 бутылки, фунты стерлингов	Количество импортируемых бутылок в год
Французское	1,08	100000
Французское бордо	0,96	130000
Испанское красное	0,50	150 000

Красные вина смешиваются для получения столовых вин трех марок:

Марка столового вина	Содержание красного вина, %	Максимальное количество продаваемых бутылок в год	Цена 1 бутылки, фунты стерлингов
----------------------	-----------------------------	---	----------------------------------

	Не менее	Не более		
Божеле	30 (бургундское)	50 (испанское красное)	200 000	1,96
Нюи-Сент-Жорж	30 (бургундское)	30 (испанское красное)	Не ограничено	2,46
Сент-Эмильон	60 (бордо)	30 (испанское красное)	180000	2,08

Сформулируйте задачу как задачу линейного программирования и решите ее улучшенным симплекс-методом. Считайте, что прибыль - единственное, что интересует компанию.

10. На  $k$ -й итерации в решении задачи линейного программирования с использованием улучшенного симплекс-метода одна базисная переменная  $x_p$  обратилась в 0. Она дает неопределенность вместе с переменной  $x_r$  предназначенной для исключения из базиса на предыдущей итерации. Покажите, что это базисное допустимое решение не может снова встретиться при прохождении циклов.

11. Используйте улучшенный симплекс-метод для решения некоторых транспортных задач гл. 4. Как он связан со специализированной программой для этих задач?

12. Используйте улучшенный симплекс-метод для решения нескольких задач выбора гл. 5. Как он связан с программой, основанной на методе Мака?

# ГЛАВА 7. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

## 7.1. ПРЯМАЯ И ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧИ

Многие из полученных результатов легче объяснить, введя понятие двойственности. Мы увидим, что каждой задаче линейного программирования соответствует другая (двойственная) задача. Если понять взаимосвязь между этими задачами, то можно получить решение обеих, когда известно решение любой из них. Введем новые понятия.

**Прямая задача:**

найти такие  $x_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), что

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (7.1)$$

и функция  $\sum_{j=1}^n c_j x_j = z$  имеет максимальное значение.

Ей соответствует двойственная задача:

найти такие  $y_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), что

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.2)$$

и функция  $\sum_{i=1}^m b_i y_i = w$  имеет минимальное значение.

На самом деле нам уже встречались прямая и двойственная задачи в упр. 5, 6 гл. 2 и в упр. 3, 4 гл. 6.

**Исходная задача:**

найти такие  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ , что

$$x_1 + 3x_2 \geq 8$$

$$3x_2 + 4x_2 \geq 19$$

$$3x_1 + x_2 \geq 7$$

и функция  $50x_1 + 25x_2 = z$  имеет минимальное значение.

**Соответствующая двойственная задача:**

найти такие  $y_1 \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ ,  $y_3 \geq 0$ , что

$$y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 50$$

$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 25$$

и функция  $8y_1 + 19y_2 + 7y_3 = w$  имеет максимальное значение.

Прямая задача имеет ограничения в виде неравенства со знаком  $\geq$ , а двойственная - со знаком  $\leq$ . Количество переменных в прямой задаче совпадает с количеством переменных в двойственной задаче. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи является транспонированной матрицей коэффициентов прямой задачи. Коэффициенты целевой функции двойственной задачи являются значениями правых частей ограничений прямой задачи, и наоборот.

В матричной записи прямая задача имеет следующий вид:

найти такой  $x \geq 0$ , что

$$Ax \geq b$$

и функция

$$c^T x = z \quad (7.3)$$

имеет минимальное значение.

Двойственная задача в матричном виде записывается следующим образом:

найти такой  $y \geq 0$ , что

$$A^T y \leq c$$

и функция  $b^T y = w$

(7.4)

имеет максимальное значение.

Хотя прямая задача была поставлена при неотрицательных переменных для минимизации целевой функции, удовлетворяющих ограничениям со знаком  $\geq$  (а не в стандартной форме задач линейного программирования), потери общности при этом не происходит. Любую задачу линейного программирования можно привести к такому виду.

### Пример 1

Привести к стандартной форме прямую задачу

найти такие  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ , что

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$x_3 \leq 4$$

и функция  $x_1 - 4x_2 - 3x_3 = z'$  имеет максимальное значение.

Сформулировать двойственную задачу.

Максимизация функции  $z'$  равносильна минимизации, например, функции  $-z' = z$ .

Ограничение  $x_3 \leq 4$  умножением на -1 преобразуется в ограничение  $-x_3 \geq -4$ .

Ограничение

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

равносильно двум ограничениям

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

т. е.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$

$$-x_2 - 2x_2 - x_3 \geq -6$$

Таким образом, задача может быть переписана следующим-образом:

найти такие  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ , что

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -6$$

$$-x_3 \geq -4$$

и функция  $-x_1 + 4x_2 + 3x_3 = z$  имеет минимальное значение.

Это - стандартная форма прямой задачи.

Двойственная задача имеет следующий вид:

найти такие  $y_1 \geq 0, y'_2 \geq 0, y''_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

(смысл этих обозначений скоро станет ясен), что

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2' - y_2'' + 0y_3 &\leq -1 \\ 4y_1 + 2y_2' - 2y_2'' + 0y_3 &\leq 4 \\ y_1 + y_2' - y_2'' - y_3 &\leq 3 \end{aligned}$$

и функция  $7y_1 + 6y_2' - 6y_2'' - 4y_3 = w$  имеет максимальное значение.

Это стандартная двойственная задача. Видно, что  $y_2 = y_2' - y_2''$  может считаться единственной переменной из-за вида коэффициентов (вот в чем смысл обозначений), и задача может быть переписана так:

найти такие  $y_1 \geq 0$ ,  $y_2$  (знак  $y_2$  неопределен),  $y_3 \geq 0$ , что

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2 &\leq -1 \\ 4y_1 + 2y_2 &\leq 4 \\ y_1 + y_2 - y_3 &\leq 3 \end{aligned}$$

и функция  $7y_1 + 6y_2 - 4y_3 = w$  имеет максимальное значение.

## Пример 2

Найти двойственную задачу для задачи

найти такие  $x_1 \geq 0$  и  $x_2$  неопределенного знака, что

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &\geq 10 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

и функция  $6x_1 + 10x_2$  имеет минимальное значение.

Если мы выразим  $x_2$  через  $x_2' - x_2''$ , где  $x_2'$  и  $x_2'' \geq 0$ , задача примет стандартную форму для прямой задачи:

найти такие  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2' \geq 0$ ,  $x_2'' \geq 0$ , что

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2' - 3x_2'' &\geq 10 \\ -x_1 + x_2' - x_2'' &\geq -4 \end{aligned}$$

и функция  $6x_1 + 10x_2' - 10x_2'' = z$  имеет минимальное значение.

Соответствующая двойственная задача имеет вид

найти такие  $y_1 \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ , что

$$\begin{aligned} 5y_1 - y_2 &\leq 6 \\ 3y_1 + y_2 &\leq 10 \\ -3y_1 - y_2 &\leq -10 \end{aligned}$$

и функция  $10y_1 - 4y_2$  имеет максимальное значение.

Двойственная задача приведена в стандартной форме. Однако два последних ограничения

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2 &\leq 10 \\ 3y_1 + y_2 &\geq 10 \end{aligned}$$

равносильны, так что двойственная задача может быть представлена в следующем виде:

найти такие  $y_1 \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ , что

$$\begin{aligned} 5y_1 - y_2 &\leq 6 \\ 3y_1 + y_2 &= 10 \end{aligned}$$

и функция  $10y_1 - 4y_2 = w$  имеет максимальное значение.

Таким образом, из примеров настоящего раздела видно, что каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, а каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение двойственной задачи. Если ограничение в прямой задаче

задано в виде равенства, то соответствующая переменная двойственной задачи не ограничена знаком (пример 1); если переменная прямой задачи не ограничена знаком, соответствующее двойственное ограничение является равенством (пример 2).

## 7.2. ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

**Теорема 1.** Двойственная задача к двойственной есть прямая задача.

С помощью уравнений (7.4) двойственная задача может быть записана (исходя из прямой в стандартной форме) следующим образом: найти такой  $y \geq 0$ , что

$$-A^T y \geq -c$$

и функция  $-b^T y = w'$  имеет минимальное значение. Ее двойственная задача имеет вид найти такой  $x \geq 0$ , что

$$-Ax = b$$

и функция  $-c^T x = z'$  имеет максимальное значение.

Но она равносильна задаче

найти такой  $x \geq 0$ , что

$$Ax \geq b$$

и функция  $c^T x = z$  имеет минимальное значение, а это и есть прямая задача.

**Теорема 2.** Значение функции  $z$ , соответствующее любому допустимому решению прямой задачи, не меньше значения функции  $w$ , соответствующего допустимому решению двойственной задачи.

Пусть  $X$  и  $Y$  - допустимые решения соответственно прямого и двойственного ограничения. Пусть соответствующие значения целевой функции

$$Z = c^T X \text{ и } W = b^T Y.$$

Из уравнения (7.3)  $AX \geq b$ .

Поскольку  $Y \geq 0$ , то

$$Y^T AX \geq Y^T b = b^T Y = W.$$

Далее из уравнения (7.4)  $A^T Y \leq c$ , и поскольку  $X \geq 0$ , то

$$X^T A^T Y \leq X^T c = c^T X = Z.$$

Однако  $X^T A^T Y$  - скалярная величина, поэтому равна своей транспозиции  $Y^T AX$ , следовательно,

$$Z = c^T X \geq Y^T AX \geq b^T Y = W,$$

т.е.  $Z \geq W$ . (7.5)

Из этого результата следует, что если имеется допустимое значение функции  $z$ , равное допустимому значению функции  $w$ , то это должно быть минимальное значение функции  $z$  и максимальное значение функции  $w$ . Ниоткуда не следует, что такие значения существуют.

**Теорема 3.** Если прямая задача имеет конечное решение  $z = z_{\min}$ , то двойственная задача имеет конечное решение  $w = w_{\max} = z_{\min}$ . При этом симплекс-множители оптимального решения прямой задачи являются значениями переменных в оптимальном решении двойственной задачи, взятыми с противоположным знаком.

Если в ограничения прямой задачи вводятся новые переменные, прямая задача принимает вид

найти такие  $x_j \geq 0$ , ( $j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m$ ), что



$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - x_{n+2} &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - x_{n+m} &= b_m
\end{aligned}$$

и функция  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = z$  имеет минимальное значение.

Если  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$  - симплекс-множители оптимального решения, то после умножения ограничений на  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$  и прибавления к выражению для функции  $z$  получаем уравнение

$$\begin{aligned}
x_1 \left( c_1 + \sum_{i=1}^m a_{i1}\pi_i \right) + x_2 \left( c_2 + \sum_{i=1}^m a_{i2}\pi_i \right) + \dots + x_n \left( c_n + \sum_{i=1}^m a_{in}\pi_i \right) - \\
- x_{n+1}\pi_1 - x_{n+2}\pi_2 - \dots - x_{n+m}\pi_m = z + \sum_{i=1}^m \pi_i b_i
\end{aligned} \quad (7.6)$$

Далее если уравнение (7.6) - оптимальная каноническая форма для функции  $z$ , то все коэффициенты левой части неотрицательны. Следовательно,

$$\begin{aligned}
-\pi_i &\geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\
c_j + \sum_{i=1}^m a_{ij}\pi_i &\geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)
\end{aligned} \quad (7.7)$$

Эти ограничения равносильны ограничениям

$$\begin{aligned}
-\pi_i &\geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\
\sum a_{ij} (-\pi_i) &\leq c_j \quad (j = 1, \dots, n)
\end{aligned} \quad (7.8)$$

так что значения  $-\pi_i$  удовлетворяют свойственным ограничениям.

Разумеется, в уравнении (7.6) коэффициенты при базисных переменных обратятся в 0; сами базисные переменные также равны 0, так что левая часть равна 0 и

$$z_{\min} = - \sum_{i=1}^m b_i \pi_i = \sum_{i=1}^m b_i (-\pi_i). \quad (7.9)$$

Таким образом,  $z_{\min} = \sum_{i=1}^m b_i (-\pi_i)$ . Но это - значение функции  $w$ , соответствующее допустимому решению ограничений двойственной задачи, задаваемому равенствами  $y_i = -\pi_i$ .

Таким образом, в силу замечаний после уравнения (7.5) эта величина является максимальным значением функции  $w$ . Следовательно,

$$w_{\max} = z_{\min} \quad (7.10)$$

**Теорема 4.** Если двойственная задача имеет конечное решение  $w = w_{\max}$ , то прямая задача имеет конечное решение  $z_{\min} = w_{\max}$ . Значения симплекс-множителей оптимального решения двойственной задачи являются значениями переменных в оптимальном решении прямой задачи.

Это может быть выведено из теорем 1 и 2; но полезно также получить прямое доказательство в *матричных обозначениях*, аналогичное доказательству теоремы 3.

Двойственная задача с ограничениями в виде равенства может быть записана как

максимизировать функцию  $b^T y = w$

при ограничениях  $A^T y + y_s = c$ ,

где

$$y_s = \begin{pmatrix} y_{m+1} \\ y_{m+n} \end{pmatrix} \geq 0$$

- вектор новых переменных.

Если  $\rho^T = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$  - симплекс-множители оптимального решения двойственной задачи, то следовательно

$$\begin{aligned} \rho^T A^T y + \rho^T y_s &= \rho^T c = c^T \rho, \\ (b^T + \rho^T A^T) y + \rho^T y_s &= w + c^T \rho. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Далее, поскольку функция  $w$  максимизируется (а не минимизируется, как обычно), коэффициенты при  $y$  и  $y_s$  в левой части уравнения (7.11) не должны быть положительными, следовательно,

$$\begin{aligned} \rho^T &\leq (0, \dots, 0) \\ b^T + \rho^T A^T &\leq (0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (7.12)$$

т. е.

$$\begin{aligned} -\rho &\geq 0 \\ b + A\rho &\leq 0 \end{aligned}$$

что можно записать в виде

$$\begin{aligned} -\rho &\geq 0 \\ A(-\rho) &\geq b \end{aligned} \quad (7.13)$$

Так что значения  $-\rho$  удовлетворяют ограничениям прямой задачи. То же рассуждение показывает, что

$$w_{\max} = c^T (-\rho) = z_{\min} \quad (7.14)$$

Следствием теорем 3 и 4 является то, что при встрече с задачей линейного программирования мы вольны выбирать, решать ли задачу в том виде, как она поставлена, или решать двойственную задачу. Если применяется улучшенный симплекс-метод (что настоятельно рекомендуется), то будут получены и значения переменных, и симплекс-множители. Это позволит определить также симплекс-множители и значения переменных другой задачи. Таким образом можно сильно сэкономить время вычислений. Как было указано в разд. 6.4, объем вычислений в задаче линейного программирования связан скорее с количеством ограничений, чем с количеством переменных.

Значит, если в прямую задачу входят 7 ограничений на 3 переменные, преобразования будут производиться в матрице размерностью 9 X 8 на этапе I и в матрице размерностью 8 X 8 на этапе II. В двойственную задачу входят 3 ограничения на 7 переменных, и она независима от этапа I; преобразования будут производиться в матрице размерностью 4X4. Таким образом, из каждой итерации объем вычислений сокращается по меньшей мере в четыре раза.

В качестве иллюстраций к теоремам 3 и 4 рассмотрим задачу найти такие  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ , что

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\geq 10, \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 19, \\ x_1 + 2x_2 &\geq 9 \end{aligned}$$

и функция  $7x_1 + 10x_2 = z$  имеет минимальное значение.

Ее двойственная задача имеет вид

найти такие  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ , что

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 7,$$

$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 10$$

и функция  $10y_1 + 19y_2 + 9y_3 = w$  имеет максимальное значение.

Решение первой задачи на ЭВМ показывает, что в оптимальном решении  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$ ,  $\pi_1 = 0$ ,  $\pi_2 = -2$ ,  $\pi_3 = -1$  (из нижней строки) и  $z_{\min} = 47$ . Таким образом, для другой задачи решением является  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 2$ ,  $y_3 = 3$ , где  $\rho_1 = -1$ ,  $\rho_2 = -4$  и  $w_{\max} = 47$ .

Это подтверждается решением двойственной задачи на ЭВМ. Здесь требуется некоторое внимание. При решении на ЭВМ, используя линейное программирование, мы минимизировали функцию

$$w' = 10y_1 - 19y_2 - 9y_3$$

(знаки целевой функции и симплекс-множителей здесь обращены).

#### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

##### МОДИФИЦИРОВАННЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

##### ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7	X 8
1	10.00	2.00	3.00	-1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
2	19.00	3.00	4.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	1.00	0.00
3	9.00	1.00	2.00	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	1.00
ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ	7.00	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ИСКУССТ.ФУНКЦИЯ	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00

##### ПЕРВЫЙ ЭТАП ВСЕ ЕЩЕ ПРОДОЛЖАЕТСЯ

C 1	C 2	C 3	C 4	C 5	C 6	C 7	C 8
-6.00	-9.00	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00

X 2 ВХОДИТ В, X 6 В УСЛОВИИ 1 ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА

##### БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА

	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ	БАЗИСА	A' IS	
6	10.00	1.00	0.00	0.00	3.00
7	19.00	0.00	1.00	0.00	4.00
8	9.00	0.00	0.00	1.00	2.00

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ 0.00 0.00 0.00 0.00 10.00

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИСКУССТ.ФУНКЦИИ -38.00 -1.00 -1.00 -1.00 -9.00

##### ПЕРВЫЙ ЭТАП ВСЕ ЕЩЕ ПРОДОЛЖАЕТСЯ

C 1	C 2	C 3	C 4	C 5	C 6	C 7	C 8
0.00	0.00	-2.00	1.00	1.00	3.00	0.00	0.00

X 3 ВХОДИТ В, X 8 В УСЛОВИИ 3 ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА

##### БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА

ИЗМЕН	СРЕДНЕЕ	ОБРАЩЕНИЕ	БАЗИСА	A' IS	
2	3.33	0.33	0.00	0.00	-0.33
7	5.67	-1.33	1.00	0.00	1.33
8	2.33	-0.67	0.00	1.00	0.67

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ -33.33 -3.33 0.00 0.00 3.33

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИСКУССТ.ФУНКЦИИ -8.00 2.00 -1.00 -1.00 -2.00

##### ПЕРВЫЙ ЭТАП ВСЕ ЕЩЕ ПРОДОЛЖАЕТСЯ

C 1	C 2	C 3	C 4	C 5	C 6	C 7	C 8
-1.00	0.00	0.00	1.00	-2.00	1.00	0.00	3.00

X 5 ВХОДИТ В, X 7 В УСЛОВИИ 2 ВЪВЕДЕН ИЗ БАЗИСА

##### БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ	БАЗИС	A' IS	
2	4.50	0.00	0.00	0.50	-0.50
7	1.00	0.00	1.00	-2.00	2.00
3	3.50	-1.00	0.00	1.50	-1.50

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ	-45.00	0.00	0.00	-5.00	5.00
РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИСКУССТ.ФУНКЦИИ	-1.00	0.00	-1.00	2.00	-2.00

ЭТАП 1 УСПЕШНО ЗАВЕРЕН

С 1	С 2	С 3	С 4	С 5
-0.50	0.00	0.00	2.50	0.00

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ	БАЗИСА	A'IS
-------	----------	-----------	--------	------

2	4.75	0.00	0.25	0.00	0.75
---	------	------	------	------	------

5	0.50	0.00	0.50	-1.00	0.50
---	------	------	------	-------	------

3	4.25	-1.00	0.75	0.00	0.25
---	------	-------	------	------	------

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ	-47.50	0.00	-2.50	0.00	-0.50
-----------------------------	--------	------	-------	------	-------

ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

ОГРАНИЧЕНИЕ	БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ
-------------	-------	----------

1	2	4.0000
---	---	--------

2	1	1.0000
---	---	--------

3	3	4.0000
---	---	--------

МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН 47

ОГРАНИЧЕНИЕ	СОСТОЯНИЕ	ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
-------------	-----------	---------------------------

3	ДОПОЛ.ПЕРЕМ.	4.0000
---	--------------	--------

1	ОГРАНИЧЕНИЕ	0
---	-------------	---

2	ОГРАНИЧЕНИЕ	0
---	-------------	---

С 1	С 2	С 3	С 4	С 5
0.00	0.00	0.00	2.00	1.00

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ	БАЗИСА
-------	----------	-----------	--------

2	4.00	0.00	-0.50	1.50
---	------	------	-------	------

1	1.00	0.00	1.00	-2.00
---	------	------	------	-------

4	10.00	-1.00	0.50	0.50
---	-------	-------	------	------

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ	-47.00	0.00	-2.00	-1.00
-----------------------------	--------	------	-------	-------

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

МОДИФИЦИРОВАННЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

ОТСУТСТВУЕТ ЭТАП 1 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5
-------	----------	-----	-----	-----	-----	-----

1	7.00	2.00	3.00	1.00	1.00	0.00
---	------	------	------	------	------	------

2	10.00	3.00	4.00	2.00	0.00	1.00
---	-------	------	------	------	------	------

ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ	-10.00	-19.00	-9.00	0.00	0.00
-----------------	--------	--------	-------	------	------

С 1	С 2	С 3	С 4	С 5
-10.00	-19.00	-9.00	0.00	0.00

X 2 ВХОДИТ В, X 4 В УСЛОВИИ 1 ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ	БАЗИСА	A'IS
-------	----------	-----------	--------	------

4	7.00	1.00	0.00	3.00
---	------	------	------	------

5	10.00	0.00	1.00	4.00
---	-------	------	------	------

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ	0.00	0.00	0.00	-19.00
-----------------------------	------	------	------	--------

С 1	С 2	С 3	С 4	С 5
2.67	0.00	-2.67	6.33	0.00

X 3 ВХОДИТ В, X 5 В УСЛОВИИ 2 ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ	БАЗИСА	A'IS
-------	----------	-----------	--------	------

2	2.33	0.33	0.00	0.33
---	------	------	------	------

5	0.67	-1.33	1.00	0.67
---	------	-------	------	------

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ	44.33	6.33	0.00	-2.67
-----------------------------	-------	------	------	-------

ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

ОГРАНИЧЕНИЕ	БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ
-------------	-------	----------

1	2	2.0000
---	---	--------

2                      3                      1.0000  
МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН -47  
ОГРАНИЧЕНИЕ    СОСТОЯНИЕ           ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ  
1                      ОГРАНИЧЕНИЕ                      0  
2                      ОГРАНИЧЕНИЕ                      0

С 1        С 2        С 3        С 4        С 5  
4.00      8.00      0.00      1.00      4.00  
БАЗИС    ЗНАЧЕНИЕ    ОБРАЩЕНИЕ    БАЗИСА  
2        2.00                      1.00    -0.50  
3        1.00                      -2.00    1.50  
РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ 47.00      1.00      4.00

Уместно еще одно замечание. Из уравнения (7.6) видно, что в оптимальном решении прямой задачи

$$\pi_i x_{n+i} = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (7.15)$$

Из уравнения (7.11) видно, что в оптимальном решении двойственной задачи

$$\rho_j y_{m+j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (7.16)$$

Таким образом, по крайней мере один из  $\pi_i$  и  $x_{n+i}$  равен 0 и по крайней мере один из  $\rho_j$  и  $y_{m+j}$  равен 0. Эти результаты можно сформулировать следующим образом.

Пусть в оптимальном решении прямой задачи  $k$ -е ограничение, не связывающее ( $x_{n+k} > 0$ ), тогда значение  $k$ -й двойственной переменной ( $-\pi_k$ ) равно 0. Если  $k$ -я двойственная переменная положительна, то  $k$ -е ограничение прямой задачи связывающее. Эти результаты иногда называют принципом комплементарности дополнительных переменных.

### 7.3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Понятие двойственности помогает лучше осознать некоторые полученные выше результаты линейного программирования.

Алгоритм двойственного симплекс-метода (см. разд. 3.3) был выведен без обращения к двойственности. Однако двойственность позволяет взглянуть на процедуру по-другому.

Рассмотрим задачу

найти такие  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ , что

$$x_1 + 3x_3 \geq 3$$

$$x_2 + 2x_3 \geq 5$$

и функция  $4x_1 + 6x_2 + 18x_3 = z$  имеет минимальное значение.

Поскольку коэффициенты в выражении для функции  $z$  положительны, можно избежать введения искусственных переменных и решить задачу с использованием двойственного симплекс-метода. Приведем таблицу последовательных вычислений:

Итерация	Базис	Значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	$x_4$	-3	-1	0	-3	1	.
	$x_5$	-5	0	-1*	-2	.	1
	$-z$	0	4	6	18	.	.
1	$x_4$	-3	-1	.	-3*	1	0
	$x_2$	5	0	1	2	.	-1
	$-z$	-30	4	.	6	.	6

2	$x_3$	1	1/3	.	1	-1/3	0
	$x_2$	3	-2/3	1	.	2/3	-1
	$-z$	-36	2	.	.	2	6

Таким образом, в оптимальном решении и  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 1$  и  $z_{\min} = 36$ .

Симплекс-множители (коэффициенты при новых переменных  $x_4$  и  $x_5$  в окончательном виде для функции  $z$ ) равны  $\pi_1 = 2$  и  $\pi_2 = 6$ .

Рассмотрим двойственную задачу

найти такие  $y_1 \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ , что

$$y_1 \leq 4$$

$$y_2 \leq 6$$

$$3y_1 + 2y_2 \leq 18$$

и функция  $3y_1 + 5y_2 = w$  имеет максимальное значение.

При обычном подходе к задаче мы минимизируем функцию

$$w' = -3y_1 - 5y_2.$$

Приведем таблицу последовательных вычислений:

Итерация	Базис	Значение	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
0	$y_3$	4	1	0	1	.	.
	$y_4$	6	0	1*	.	1	.
	$y_5$	18	3	2	.	.	1
	$-w'$	0	-3	-5	.	.	.
1	$y_3$	4	1	.	1	0	.
	$y_2$	6	0	1	.	1	.
	$y_5$	6	3*	.	.	-2	1
	$-w'$	30	-3	.	.	5	.
2	$y_3$	2	.	.	1	2/3	-1/3
	$y_2$	6	.	1	.	1	0
	$y_1$	2	1	.	.	-2/3	1/3
	$-w'$	36	.	.	.	5	1

Симплекс-множители (для целевой функции  $w'$ ) суть  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = 3$ ,  $\rho_3 = 1$  (коэффициенты при новых переменных  $y_3$ ,  $y_4$  и  $y_5$ ). Они дают значения переменных прямой задачи. Двойственные переменные  $y_1 = 2$  и  $y_2 = 6$  являются симплекс-множителями прямой задачи. В проведенных вычислениях двойственный симплекс-метод для решения прямой задачи и симплекс-метод для решения обратной задачи, по существу, идентичны.

Алгоритм последовательного улучшения для решения транспортной задачи представляет пример ситуации, когда мы предпочли решение двойственной задачи решению исходной.

Транспортная задача может быть сформулирована в следующем виде:

найти такие  $x_{ij} \geq 0$ , что

$$\begin{array}{rccccccc}
x_{11} & + & x_{12} & + & \dots & + & x_{1n} & & & = & a_1 \\
& & & & & & & x_{21} & + & & x_{2n} & = & a_2 \\
& & & & & & & & & \dots & & & \\
& & & & & & & & & & x_{m1} & + & \dots & + & x_{mn} & = & a_m \\
x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & + & x_{m1} & & & & = & b_1 \\
& x_{12} & & & & & & + & x_{22} & & & & + & x_{m2} & & = & b_2 \\
& & & & & & & & & \dots & & & & & & \\
& & & & & & x_{1n} & & & + & x_{2n} & & & & + & x_{mn} & = & b_m
\end{array}$$

и функция  $c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{mn}x_{mn} = z$  принимает минимальные значения (см. уравнение (4.2)).

Для решения двойственной задачи необходимо найти такие  $u_i$  и  $v_j$  (знаки которых не определены, поскольку ограничения исходной задачи являются равенствами), что

$$\begin{array}{rccccccc}
u_1 & & & + & v_1 & & \leq & c_{11} \\
u_1 & & & + & v_2 & & \leq & c_{12} \\
& u_i & & + & v_j & & \leq & c_{ij} \\
& & u_m & & + & v_n & \leq & c_{mn}
\end{array}$$

и функция  $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m + b_1v_1 + \dots + b_nv_n = w$  принимает максимальное значение.

Попытаемся выполнить ограничения двойственной задачи  $u_i + v_j \leq c_{ij}$ . Это не слишком трудно, поскольку в каждое ограничение входит всего две переменные. На самом деле в  $m+n-1$  клетке (каждая из которых соответствует базисной переменной прямой задачи) достигается равенство в двойственных ограничениях (свойство комплементарности дополнительных переменных). Когда ограничения двойственной задачи выполнены как неравенства, в других клетках получим решения обеих задач.

Дело в том, что умножение в прямой задаче  $i$ -и строки и  $j$ -го столбца на  $u_i$  и  $v_j$  с последующим прибавлением к выражению для функции  $z$  дает соотношение

$$z - \sum_{i=1}^n a_i u_i - \sum_{j=1}^n b_j v_j = \sum_i \sum_j (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} = z - w$$

(см. уравнение (4.7)).

Выберем  $u_i$  и  $v_j$  так, чтобы  $u_i + v_j = c_{ij}$  для ненулевых  $x_{ij}$ . Так обеспечивается равенство  $z = w$  на каждом шагу.

Когда для небазисных переменных  $x_{ij}c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ , мы имеем решение для ограничений двойственной задачи с равными значениями функций  $z$  и  $w$ . Таким образом, это должно давать оптимальное решение обеих задач.

Читатель может поинтересоваться, что произойдет, если рассмотреть прямую задачу (или, на самом деле, любую задачу линейного программирования) с точки зрения общей теории (теоремы Куна-Такера) оптимизации с ограничениями. Для читателя, незнакомого с этими идеями, изложим начальные понятия теории применительно к нашим задачам.

Рассмотрим задачу минимизировать функцию

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \tag{7.17}$$

$$\text{при ограничениях } x_j \geq d_j \quad (j = 1, \dots, n) \tag{7.18}$$

$$\text{и } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (7.19)$$

Обычно  $d_j = 0$ , но здесь, пренебрегая этим, имеет смысл сформулировать задачу в общем виде. Запишем ограничения (7.18) и (7.19) в виде

$$x_j - u_j^2 - d_j = 0 \quad (7.20)$$

и

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - v_i^2 - b_i = 0 \quad (7.21)$$

и определим функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} F(x, \pi, \sigma, u, v) = & \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \pi_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - v_i^2 - b_i \right) + \\ & + \sum_{j=1}^n \sigma_j (x_j - u_j^2 - d_j) \end{aligned} \quad (7.22)$$

где  $\pi_i$  и  $\sigma_j$  - так называемые множители Лагранжа.

Условный минимум, определенный уравнением (7.17), задается безусловным минимумом, определенным уравнением (7.22), необходимые условия которого задаются уравнениями

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \text{ т.е. } c_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i + \sigma_j = 0, (j = 1, \dots, n) \quad (7.23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \pi_i} = 0, \text{ т.е. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - v_i^2 - b_i = 0, (i = 1, \dots, m) \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_j} = 0, \text{ т.е. } x_j - u_j^2 - d_j = 0, (j = 1, \dots, n) \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_i} = 0, \text{ т.е. } \pi_i v_i = 0$$

$$\text{откуда } \pi_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, (i = 1, \dots, m) \quad (7.26)$$

$$\text{следовательно, } \sigma (x_j - d_j) = 0, (j = 1, \dots, n) \quad (7.27)$$

Видно, что уравнения (7.24) и (7.25) равносильны уравнениям (7.18) и (7.19). Уравнения (7.26) и (7.27) отражают свойство комплементарности дополнительных переменных. Множители Лагранжа  $\pi_i$  эквивалентны симплекс-множителям.

Значения переменных удовлетворяют ограничениям

$$F(\dots) = f(\bullet)$$

и

$$F_{\min} = f_{\min} \quad (7.28)$$

Далее из уравнения (7.22) получаем уравнения

$$\frac{\partial F_{\min}}{\partial b_i} = \pi_i \text{ и } \frac{\partial F_{\min}}{\partial d_j} = -\sigma_j. \quad (7.29)$$

Сравните их с уравнением (3.17).

Теперь при увеличении  $b_i$  и  $d_j$  - область ограничений уменьшается, так что  $F_{\min}$  не может уменьшаться, значит,



$$-\pi_i \geq 0 \text{ и } -\sigma_j \geq 0 \quad (7.30)$$

Сравните с уравнениями (7.7). Таким образом, из уравнения (7.23) имеем

$$c_i + \sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i = -\sigma_j \geq 0,$$

следовательно,

$$-\pi_i \geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^m a_{ij} (-\pi_i) \leq c_i,$$

так что значения  $-\pi_i$  удовлетворяют двойственным ограничениям.

Далее для значения  $F_{\min}$ , соответствующего значениям  $x$ ,  $\pi$  и т. д., удовлетворяющим необходимым условиям минимума,

$$\begin{aligned} F_{\min} &= \sum c_i x_i = \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \left( c_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i \right) - \sum \pi_i b_i = \\ &= - \sum_{j=1}^n x_j \sigma_j + \sum b_i (-\pi_i) = \sum b_i (-\pi_i) \end{aligned}$$

в силу уравнений (7.27) при  $d_j = 0$ .

Для этих значений

$$\sum c_j x_j = \sum b_i (-\pi_i), \quad (7.31)$$

т. е.  $z_{\min} = w_{\max}$  в обозначениях прямой и двойственной задач.

Итак, теория условной оптимизации Куна-Такера утверждает, что необходимые условия решения прямой задачи равносильны нахождению решений двойственной задачи. Сама по себе теория не дает процедуры практического решения ни одной из этих задач. Для этого нужен симплекс-метод или улучшенный симплекс-метод.

## 7.4. УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите задачу, двойственную задаче найти такие  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ , что

$$3x_1 + 5x_2 \geq 18$$

$$x_1 + 9x_2 \geq 30$$

$$2x_1 + 7x_2 \geq 27$$

и функция  $11x_1 + 44x_2$  имеет минимальное значение.

2. Напишите задачу, двойственную задаче найти такие  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$  и  $x_3$ , не ограниченный в знаке, что

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 22$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 18$$

и функция  $5x_1 + 7x_2 + 13x_3$  имеет минимальное значение.

3. Покажите, что если  $k$ -я переменная в прямой задаче не ограничена в знаке, то  $k$ -е ограничение в двойственной задаче есть ограничение в виде равенства.

4. Покажите, что если  $k$ -е ограничение в прямой задаче есть ограничение в виде равенства, то  $k$ -я переменная в двойственной задаче не ограничена в знаке.

5. Найдите такие  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ , что

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 7 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\geq 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 14 \end{aligned}$$

и функция  $11x_1 + 14x_2 + 15x_3 = z$  имеет минимальное значение.

Решите двойственную задачу и подтвердите правильность теорем 3 и 4 этой главы.

6. Для задачи

найти такие  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ , что

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 1 \\ -x_2 &\geq -2 \end{aligned}$$

и функция  $-x_1 - x_2 = z$  имеет минимальное значение (пример 3 разд. 1.2), выпишите двойственную задачу и покажите, что допустимого решения не существует.

7. Покажите, что если прямая (двойственная) задача имеет неограниченное решение с неограниченным значением  $z(w)$ , то двойственная (прямая) задача не имеет допустимого решения.

8. Покажите, что утверждение, обратное сформулированному в упр. 7, неверно. Постройте контрпример.

9. Проверьте теоремы 3 и 4 для задачи

найти такие  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ , что

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 &\geq 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\geq 14 \end{aligned}$$

и функция  $7x_1 + 4x_2 + 11x_3 = z$  имеет минимальное значение.

10. Пекарня продает быстропортящиеся пироги, которые должны быть проданы в день выпечки. Известны вероятности спроса  $p_0 = 1/8, p_1 = 1/8, p_2 = 1/4, p_3 = 1/2$ , где  $p_j$  - вероятность того, что  $j$  - дневной спрос. Стоимость выпечки  $j$  пирогов в день составляет  $C_j$ , где  $C$  - константа. Покажите, что задача удовлетворения спроса в среднем, по крайней мере в один день из четырех, с минимизацией выпечки является задачей линейного программирования.

С помощью постановки двойственной задачи, которая может быть решена графически, покажите, что минимальная гарантированная стоимость достигается выпечкой трех пирогов в 7 дней.

## РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО ЧТЕНИЯ

Читателей может заинтересовать обращение к оригинальным работам, упоминавшимся в книге. Упоминаются также несколько других монографий, посвященных методам и приложениям линейного программирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beale, E.M.L. Cycling in the Dual Simplex Algorithm, *Nav. Res. Logistics Quart.*, 2, 269-276, 1955.
2. Dantzig, G.B. 'Maximisation of a linear function of variables subject to linear inequalities', in *Activity Analysis of Production and Allocation* (Edited by T. C. Koopmans), Wiley, New York, 1951.
3. Dantzig, G.B. *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, New Jersey, 1963.
4. Dantzig, G.B. 'The Simplex Method', *Rand Corp. Rept.*, P-891, 1956.
5. Dantzig, G.B. and Orchard-Hays, W. 'Alternate Algorithm for the Revised Simplex Method Using Product Form for the Inverse', *Rand Corp. Rept.*, RM-1268, 1953.
6. Ford, L.R., Jr. and Fulkerson, D.R. Solving the Transportation Problem, *Man. Sc.*, 3, 24-32, 1956.
7. Gale, D. *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill, New York, 1960.
8. Garvin, W.W. *Introduction to Linear Programming*, McGraw-Hill, New York, 1960.
9. Gass, S.I. *Linear Programming: Methods and Applications*, McGraw-Hill, 3rd Ed., New York, 1969.
10. Glover, F., Karney, D., Klingman, D. and Napier, A. A Computation Study on Start Procedures, Basis Change Criteria and Solution Algorithms for Transportation Problems, *Man. Sc.*, 20, 793-813, 1974.
11. Hadley, G. *Linear Programming*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1962.
12. Hitchcock, F.L. The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities, *J. Math. Phys.*, 20, 224-230, 1941.
13. Hoffman, A.J. Cycling in the Simplex Algorithm, *Nat. Bur. Standards Rept.*, 2974, 1953.
14. Kuhn, H.W. The Hungarian Method for the Assignment Problem, *Nav. Res. Logistics Quart.*, 2, 83-97, 1955.
15. Mack, C. The Bradford Method for the Assignment Problem, *The New J. of Stats, and Op. Res.*, 1, Part 1, 17-29, 1969.
16. Orchard-Hays, W. *Advanced Linear Programming Computing Techniques*, McGraw-Hill, New York, 1968.
17. Wagner, H.M. A Comparison of the Original and Revised Simplex Methods, *Op. Res.*, 5, 361-369, 1957.
18. Walsh, G.R. *An Introduction to Linear Programming*, Holt, Rinehart and Winston, 1971.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведенная ниже процедура была разработана доктором Скратоном из университета г. Брайфорда; она используется для форматирования численных результатов некоторых из программ. Это достигается тем, что числа рассматриваются как строки.

Для использования процедуры сделайте следующие три шага:

1. PA - число, которое должно быть напечатано.
2. PB - код форматирования (см. ниже).
3. GOSUB 9000.

PB - двух-трехзначное число,  $PB = 100 * A + 10 * B + C$ , где A, B, C - цифры от 0 до 9 включительно.

Если  $A = 0$ , число печатается на новой строчке. Если  $A > 0$ , число печатается на той же строчке, что и предыдущее, после  $A$  пробелов. При выводе на печать оно содержит  $B$  знаков до десятичной запятой и  $C$  знаков после. Знак печатается, если число отрицательно. Если оно слишком велико для форматирующего кода, то печатается обычным образом.

```
9000 PC=INT(PB/100)
9010 P$=""
9020 IF PC=0 THEN PRINT":GOTO 9040
9030 PRINT LEFT$(P$,PC);
9040 PC=PB-100*PC
9050 PD=INT(PC/10):PC=PC-10*PD
9060 IF PD=0 THEN PD=1
9070 IF PA<0 THEN P$=P$+"- "
9080 PE=ABS(PA)
9090 PE=PE+5*10^(-1-PC)
9100 IF PE>=10^PD THEN PRINT PA;:RETURN
9110 P$=P$+MID$(STR$(INT(PE)),2,PD)
9120 PRINT RIGHT$(P$,PD+1)
9130 IF PC=0 THEN RETURN
9140 PRINT". ";
9150 PE=INT((PE-INT(PE))*10^PC)
9160 P$="000000000"
9170 P$=P$+MID$(STR$(PE),2,PC)
9180 PRINT RIGHT$(P$,PC);:RETURN
READY.
```

## ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

### 1.6. УПРАЖНЕНИЯ

1.  $x_1 = A$ ,  $x_2 = B$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

Максимизировать функцию  $z = 5x_1 + 3x_2$  при ограничениях

$$0,5x_1 + 0,25x_2 \leq 40$$

$$0,4x_1 + 0,3x_2 \leq 36$$

$$0,2x_1 + 0,4x_2 \leq 36$$

Оптимальное решение получено при  $x_1 = 60$ ,  $x_2 = 40$ ,  $z = 420$  дол. в неделю.

2. Максимум функции равен 10 при  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ .

4. Минимум функции равен -10 при  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 2$ .

5. а) Минимум функции равен -13 при  $x_1 = 3\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 2\frac{1}{2}$ .

б) Минимум функции равен -9 при

$$x_1 = \frac{25-13\Theta}{10}, x_2 = \frac{15+39\Theta}{10}; 0 \leq \Theta \leq 1$$

в) Решение не ограничено.

6. Нет решения, так как ограничения противоречивы.

7. Максимум функции равен 12/5 при  $x_1 = 2/5$ ,  $x_2 = 1/5$ ,  $x_3 = 0$ .

8.  $x_1 = 1/12$ ,  $x_2 = 4/12$ ,  $x_3 = 7/12$ ,  $C = 38\frac{3}{4}$  дол. за 1 т.

9.  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  - проценты содержания сортов А, В, С. Минимизировать функцию  $70x_1 + 50x_2 + 10x_3$  при ограничениях

$$90x_1 + 65x_2 + 45x_3 \geq 60$$

$$30x_1 + 85x_2 + 70x_3 \geq 60$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Оптимальное решение найдено при  $x_1 = 17/59$ ,  $x_2 = 6/59$ ,  $x_3 = 36/59$ .

10. Максимизировать функцию  $12(26x_1 + 45x_2)/5$  при ограничениях  $0 \leq x_1 \leq 30$ ,  $0 \leq x_2 \leq 20$ ,  $3x_1 + 3x_2 \leq 100$ . Оптимальное решение найдено при  $x_1 = 40/3$ ,  $x_2 = 20$ .

12. Пункт А получает 1, 4, 0 автобусов из гаражей  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  соответственно; пункт В получает 2, 0, 5 автобусов из гаражей  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  соответственно. Покрывается общее расстояние 25 миль.

13.  $x_A = 450$ ,  $x_B = 100$ .

14. 367 моделей "Каприз", 683 модели "Фиаско".

15. Пусть  $x$  т перевозятся из Лидса в Манчестер,  $y$  т - из Лидса в Бирмингем.

а) Оптимальное решение достигается при  $x = 400$ ,  $y = 400$ ;

б)  $x = 400$ ,  $y = 100$ .

### 2.6. УПРАЖНЕНИЯ

1. 2, 4:  $x_1 = 0,4$ ,  $x_2 = 0,2$ ,  $x_3 = 0$ .

2. 0, 8:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0,2$ ,  $x_3 = 0,3$ .

3.  $x_A = 13,125$ ,  $x_B = 2,625$  прибыль равна 55,125 дол.

4. 40 000 пол-литровых бутылок и 20 000 литровых бутылок выпустить

на машине А, 10 000 литровых бутылок - на В.

5.  $z = 150, x_1 = 1, x_2 = 4$ .

6.  $w = 150, y_1 = 0, y_2 = 25/9, y_3 = 125/9$

7.  $x_i$  - количество радиаторов каждой модели,  $x_A = 400, x_B = 0, x_C = 150, x_D = 0$ ; прибыль равна 3875 дол.

8.  $x_A = 2000, x_B = 7000$ ; прибыль равна 10 350 дол.

9.  $x_1 = 50/7, x_2 = 0, x_3 = 55/7, z = -695/7$ .

10. 200 000 дол. - на телевизоры, 100 000 дол. - на радио, 100 000 дол. - на газеты, 100 000 дол. - на афиши.

11.  $z = -2, x_1 = 2, x_2 = 0$ .

12. Минимальная цена - 150 (условных единиц); 5/6кг сушеной рыбы,

5 кг фруктов,  $3\frac{1}{3}$  л молока.

13. Использовать 9000 галлонов W в А, 81 000 галлонов Y в А, 15 000 галлонов W в В, 85 000 галлонов Y в В, 24 000 галлонов X в С, 60 000 галлонов Y в С, 36 000 галлонов Z в С.

14. Минимальное число ткачей 26: 4 ткача начинают в первую смену; 10 - во вторую; 8 - в четвертую; 4 - в пятую или 4 начинают в первую смену; 4 - во вторую; 6 - в третью, 1 - в четвертую, 11 - в пятую.

15. Допустимых решений нет.

### 3.4. УПРАЖНЕНИЯ

1. а) 5500 т сырья типа А, 4500 т сырья типа В; б) 100 дол.

2.  $x_1 = 160/11, x_2 = 60/11, x_3 = x_4 = 0; z = -460$ .

3.  $x_1 = 10, x_2 = 5, x_3 = x_4 = 0, z = -455$ .

4.  $x_1 = 4$ , . За сырье А следует заплатить 0,6 (условных единиц); за сырье В - 1,2 (условных единиц).

5.  $x_A = 18/5, x_B = 3/5, x_C = 0$ . Оптимальный план  $P = 19\frac{4}{5}$ .

Дополнительные часы работы составляют на машине 1: 7/5; 11: 1/5.

6. Лесопилка - 0; сборочный цех - 1 дол.; отделочный цех - 7 дол;  $x_1 = 150, x_2 = 50, x_3 = 10$

7. 2700 студентов своей страны, 2150 иностранных. Да, это выгодно.

8. 1)  $3/5, 1/5$ ; 2)  $\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$ ; 3) да,  $x_1 = 4, x_4 = 24$ ; 4)  $66\frac{2}{3} \leq P \leq 100$ ,

где  $P$  - цена сырья; 5)  $x_1 = 11\frac{1}{4}, x_2 = 6\frac{1}{4}, x_3 = 15$ .

9.  $x_1 = 1, x_2 = 4, z = 150$ .

10. Допустимых решений нет.

12.  $x_1 = 22/7, x_2 = 20/7, z = -144/7, x_1 = 0, x_2 = 4, z = -20$ .

14.  $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 2, z = 4$ .

15.  $E$  получается удалением из  $F$  последних строки и столбца.

### 4.5. УПРАЖНЕНИЯ

1.  $x_{13} = 8, x_{21} = 2, x_{22} = 9, x_{31} = 2, x_{33} = 1, x_{34} = 13; C = 103$ .

2.  $x_{13} = 9, x_{22} = 4, x_{26} = 10, x_{31} = 6, x_{33} = 1, x_{34} = 2, x_{35} = 7, x_{44} = 11, x_{46} = 0, C = 144$

3.  $x_{ij}$  - количество стали (тыс. т), поставляемое потребителю  $C_i$  - из  $x_{11} = 7$ ,  $x_{41} = 36$ ,  $x_{32} = 25$ ,  $x_{13} = 5$ ,  $x_{23} = 15$ .

4.  $x_{ij}$  - количество должностей в группе  $P_i$ , заполненных персоналом из группы  $S_j$ .  
Оптимальное решение  $x_{12} = 5$ ,  $x_{14} = 1$ ,  $x_{15} = 2$ ,  $x_{25} = 3$ ,  $x_{31} = 3$ ,  $x_{34} = 4$ ,  $x_{43} = 1$  с 23 удовлетворительными назначениями и двумя неудовлетворительными назначениями в группе  $s_5$ .

5.  $x_{ij}$  - количество изделий, тыс., произведенных фабрикой  $F_i$ , которые посылаются заказчику  $C_j$ ;  $x_{11} = 10$ ,  $x_{14} = 30$ ,  $x_{23} = 20$ ,  $x_{31} = 5$ ,  $x_{32} = 20$ .

6. 10 000 изделий фабрики  $F_1$ , потребителю  $C_1$ , 6000 -  $C_2$ ; 7000 изделий фабрики  $F_2$  потребителю  $C_2$ , 7000 -  $C_3$ , 2000 изделий из последних 7000 производятся сверхурочно.

7. Авиалинии: I-10 полетов в Бейрут, 10 - в Даллас; II - 10 полетов в Сидней, 10 - Калькутту, 10 - в Бейрут; III - 5 полетов в Калькутту, 15 - в Сан-Паулу. Минимальная цена равна 86 000 (условных единиц).

8. Заводы посылают потребителям стали: I - 500 т С, 450 т Е; II - 300 т D; III - 1000 т В, 350 т D, IV - 250 т А, 200 т С.

9. Завод I посылает в августе 420 единиц продукта потребителю 1, 50 единиц продукта пользователю и сохраняет 30 единиц продукта для отправки потребителю в сентябре. Завод II посылает в августе 300 единиц продукта пользователю 2. Завод I посылает в сентябре 520 единиц продукта пользователю 1 вдобавок к 30, сохранившимся с августа. Завод II посылает в сентябре 480 единиц продукта пользователю 2.

10. А: 1500 в W, 2500 в Y;

В: 2500 в X, 200 в Y, 300 в Z;

С: 3000 в Z.

#### 5.4. УПРАЖНЕНИЯ

1. а)  $x_{11} = 1$ ,  $x_{23} = 1$ ,  $x_{32} = 1$ ; **Min** = 9. б)  $x_{11} = 1$ ,  $x_{23} = 1$ ,  $x_{32} = 1$ ,  $x_{44} = 1$ ; **Min** = 37.

2. а)  $x_{14} = 1$ ,  $x_{21} = 1$ ,  $x_{32} = 1$ ,  $x_{43} = 1$ ,  $x_{55} = 1$ ; **Min** = 100. б)  $x_{15} = 1$ ,  $x_{22} = 1$ ,  $x_{31} = 1$ ,  $x_{43} = 1$ ,  $x_{54} = 1$ ,  $x_{66} = 1$ ; **Min** = 158.

3. Оптимальные маршруты грузовиков:

$S \rightarrow D \rightarrow d$ ;

$T \rightarrow B \rightarrow b$  или  $T \rightarrow E \rightarrow e$ ;

$U \rightarrow C \rightarrow c$ ;

$V \rightarrow A \rightarrow a$ ;

$W \rightarrow E \rightarrow e$  или  $W \rightarrow B \rightarrow b$ .

4. Соответствие отметок самолетам: P1-A2, P2-A2, P3-A4, P4-A1.

5. Среда до полудня - в А, среда после полудня - в D, четверг до полудня - в С, четверг после полудня - в В, пятница до полудня - в Е.

6. Оптимальное соответствие номеров самолетов и авиалиний:

для города С: 2-12,6-11;

для города В: 1-9, 3-10,4-7, 5-8;

для города А: 7-4,11-5, 8-6,9-1,12-2,10-3.

7. Оптимальное распределение заданий по рабочим: задание 1 - для 5-го рабочего; задание 2 - для 4-го; задание 3 - для 1-го; задание 4 - для 7-го; задание 5 - для 2-го; задание 6 - для 3-го; задание 7 - для 6-го рабочего. Общее время 111ч.

8. Направить: А в область 1, В в область 2, С в область 3, D в область 6, Е в область 5.

## 6.5. УПРАЖНЕНИЯ

1.  $x_1 = 300, x_2 = 200, z = -1400$ .

2.  $x_1 = 12, x_2 = 8, z = 68$ .

3.  $x_1 = 1, x_2 = 4, z = 150$ .

4.  $y_1 = 0, y_2 = 25/9, y_3 = 125/9, w = 150$ .

5.  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, z = -1,25$

6. а) В выпуске деталей; б) Новое расписание:  $x_1 = 90, x_2 = 30, x_3 = 30$ .

7.  $x_1 = 50, x_2 = 50, x_3 = 50$ ; прибыль равна 2500 дол.

$x_1 = 100, x_2 = 150, x_3 = 0$ ; прибыль равна 3000 дол.

$x_1 = 75, x_2 = 100, x_3 = 25$ ; прибыль равна 2775 дол.

8. а) Занять  $10 \times 10^5$  акров культуры 1 на земле типа I,  $4 \times 10^5$  акров культуры 2 на земле типа I,  $12 \times 10^5$  акров культуры 3 на земле типа II. Все земельные и водные ресурсы используются полностью, однако остаются не занятыми  $10^5$  человек, более 14 % доступной рабочей силы.

б) Каждые  $10^5$  акров земли типа I дают 2 дополнительные единицы дохода. Каждые  $10^5$  единиц воды дают 2 дополнительные единицы дохода.

в) Да. Это увеличивает доход на  $11\frac{1}{3}$  единиц (с 152 до  $163\frac{1}{3}$ ). В новом решении выращивается -  $\frac{28}{3} \times 10^5$  акров культуры 1 на земле типа I,  $\frac{14}{3}$  акров культуры 2 на земле типа I и  $\frac{35}{3}$  акров новой культуры на земле типа II. Теперь рабочая сила используется полностью, а земля типа II - не полностью.

9.

Марка красного вина	Количество бутылок столового вина, тыс. бутылок		
	Боже	Нюи-Сент-Жорж	Сент-Эмильон
Французское бургундское	54	46	
Французское бордо	36	$7\frac{1}{3}$	$86\frac{1}{3}$
Испанское красное	90	23	37

Прибыль равна 490 133, 33 фунтов стерлингов.

## 7.4. УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ , такие, что

$$3y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 11$$

$$5y_1 + 9y_2 + 7y_3 \leq 44$$

и функция  $18y_1 + 30y_2 + 27y_3$  имеет максимальное значение.

2. Найти  $y_1, y_2, y_3$ , где  $y_1 \geq 0, y_3 \geq 0$  и  $y_2$  не ограничен в знаке, такие, что

$$2y_1 + y_2 + y_3 \leq 5$$

$$y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 7$$

$$4y_1 + y_2 + 3y_3 = 13$$

и функция  $22y_1 + 9y_2 - 18y_3$  имеет максимальное значение.

5.  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$  и  $z_{\min} = 84; \pi_1 = -3, \pi_2 = -2, \pi_3 = -1$ .

Для двойственной задачи: найти такие  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ , что



$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 11$$

$$3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 14$$

$$y_1 + 5y_2 + 2y_3 \leq 15$$

и функция  $11y_1 + 20y_2 + 11y_3 = w$  должна быть максимальна.

$y_1 = 3, y_2 = 2, y_3 = 1$  и  $w_{\max} = 84; \rho_1 = -1, \rho_2 = -2, \rho_3 = -3$ .

6. Двойственная задача: найти такие  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ , что

$$y_1 \leq -1$$

$$-y_1 - y_2 \leq -1$$

и функция  $y_1 - 2y_2$  имеет максимальное значение; допустимого решения нет.

8. Прямая задача: найти такие  $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$ , что

$$-5x_1 + 5x_2 \geq -4$$

$$x_1 - x_2 \geq 2$$

и функция  $-7x_1 + 3x_2$  имеет минимальное значение; допустимого решения нет.

Двойственная задача: найти такие  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ , что

$$-5y_1 + y_2 \leq -7$$

$$5y_1 - y_2 \leq 3$$

и функция  $-4y_1 + 2y_2$  имеет максимальное значение; допустимого решения нет.

9.  $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 0; z = 32; \pi_1 = 0, \pi_2 = -2, \pi_3 = -1$ .