Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

1. Эквивалентные формулировки задачи линейного программирования

1.1 Формулировка задачи линейного программирования. Напомним, что математически задача ЛП — это задача нахождения наибольшего (наименьшего) значения линейной функции многих переменных при линейных ограничениях типа равенств (неравенств), когда на переменные задачи есть (нет) ограничений на знак. В общем случае формально это означает задачу (для задачи максимизации):

$$
\begin{aligned}
&(1): \max z = \max(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) \\
&(2): a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \le b_i, i = \overline{1, m_1} \\
&(3): a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i, i = \overline{m_1, m} \\
&(4): x_j \ge 0, j = \overline{1, n_1}, \\
&(5): x_j \gtrless 0, j = \overline{n_1, n}.
\end{aligned}
$$

Аналогично можно написать общую постановку для задачи минимизации

Однако решаются такие задачи, когда они записаны в одном из специальных видов. Для задачи максимизации имеется 4 специальных вида задачи ЛП: стандартная и каноническая формы.

1.2. Стандартная форма задачи ЛП максимизации:

$$
\begin{aligned}
&(1): \max z = \max(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) \\
&(2): a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \le b_i, i = \overline{1, m} \\
&(3): x_j \ge 0, j = \overline{1, n}
\end{aligned}
$$

В матричном и векторном виде эта задача может быть записана так

$$
\begin{array}{lcl}
\max z = \max CX & & \max z = \max CX \\
AX \le B & \Leftrightarrow & A_i X \le b_i, i = \overline{1, m} \\
X \ge 0 & & X \ge 0
\end{array}
$$

1.3. Каноническая форма задачи ЛП максимизации:

$$
\begin{aligned}
&(1): \max z = \max(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) \\
&(2): a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i, i = \overline{1, m} \\
&(3): x_j \ge 0, j = \overline{1, n}
\end{aligned}
$$

В матричном и векторном виде эта задача может быть записана так

$$\begin{aligned} &\max z = \max CX \\ &AX = B \\ &X \ge 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &\max z = \max CX \\ &A_i X = b_i, i = \overline{1,m} \\ &X \ge 0 \end{aligned}$$

2. Алгебраические основы симплекс-метода

2.1. Множество допустимых решений для канонической задачи

Рассмотрим каноническую задачу ЛП максимизации

$$\begin{aligned} &\max z = \max CX \\ &AX = B \\ &X \ge 0 \end{aligned}$$

Множество допустимых решений задачи имеет вид

$$M = \{X \mid AX = B, X \ge 0\}$$

называется многогранным и является выпуклым и замкнутым.

2.2. Понятие решения для системы линейных уравнений (СЛУ), зависящего от множества индексов

Пусть $S \subset \{1,2,\cdots,n\}$ - множество индексов (подмножество множества номеров столбцов матрицы) и пусть дана система линейных уравнений

$$AX = B \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A^j x_j = B$$

Говорят, что решение $X = (x_1,\cdots,x_n)$ СЛУ зависит от множества индексов *S*, если

$$x_j = 0,\ j \notin S\ .$$

2.3. Понятие базисного решения СЛУ.

Говорят, что решение $X = (x_1,\cdots,x_n)$ СЛУ базисное, если оно зависит от такого множества индексов *S*, что векторы $\{A^j\}_{j\in S}$ - образуют столбцовый базис матрицы *A*.

2.4. Понятие допустимого базисного решения

Говорят, что решение $X = (x_1,\cdots,x_n)$ СЛУ является базисным допустимым, если оно базисное для СЛУ и $X \ge 0$, т.е. оно базисное и допустимое для задачи ЛП в канонической форме.

2.5. Совместность и неизбыточность СЛУ

Напомним, что СЛУ

$$AX = B \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A^j x_j = B$$

совместна и неизбыточна, если

$$rank(A) = rank([A, B]) = m, m \le n$$

Если СЛУ удовлетворяет данному условию, то допустимое базисное решение существует и совпадает с экстремальной (угловой, крайней) точкой множества допустимых решений задачи ЛП в канонической форме.

2.6. Нахождение базисного решения

Предположим, что СЛУ находится в условиях п. 2.5.

- Рассматриваем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Для нахождения базисного решения, зависящего от множества индексов $S = \{1, \cdots, m\}$ надо привести данную систему к диагональной форме по базисным переменным $x_1, \cdots, x_m$ (используя метод Гаусса). Получим:

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + \overline{a}_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + \overline{a}_{1n}x_n = \overline{b}_1, \\ \cdots\cdots \\ x_m + \overline{a}_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + \overline{a}_{mn}x_n = \overline{b}_m. \end{cases}$$

- Полагая переменные, не вошедшие в диагональную форму (небазисные переменные) равными нулю: $x_j = 0, j = \overline{m+1, n},$ получаем $x_j = \overline{b}_j, j = \overline{1, m}$ - значения для базисных переменных.

3. Процедура симплекс-метода

3.1. Понятие базисного решения – основа симплекс-метода

Оказывается, что для нахождения оптимального решения достаточно ограничиться рассмотрением только базисных (допустимых базисных) решений в силу справедливости следующих утверждений (теорем).

1. Если у системы линейных уравнений (СЛУ) существует решение (СЛУ - совместна), то существует и базисное решение этой СЛУ.

2. Если задача ЛП в канонической форме имеет допустимое решение, то она имеет и допустимое базисное решение

3. Если задача ЛП имеет оптимальное решение, то она имеет и оптимальное базисное решение.

В силу справедливости последнего утверждения, вычислительный алгоритм линейного программирования (симплекс-метод) основан на нахождении именно оптимального базисного решения и оперирует только с допустимыми базисными решениями.

3.2. Прямой симплекс-метод решения ЛП задачи (вспомогательные построения)

- Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме

$$\begin{aligned}
&(1): \max z = \max(\bar{c}_1 x_1 + \cdots + \bar{c}_n x_n)\\
&(2): \bar{a}_{i1} x_1 + \cdots + \bar{a}_{in} x_n = \bar{b}_i, i = \overline{1,m}\\
&(3): x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}
\end{aligned}$$

- По этой задаче ЛП запишем систему линейных уравнений, соответствующую этой задаче:

$$\begin{aligned}
&(4): z - \bar{c}_1 x_1 - \cdots - \bar{c}_n x_n = 0,\\
&(5): \bar{a}_{i1} x_1 + \cdots + \bar{a}_{in} x_n = \bar{b}_i, i = \overline{1,m}
\end{aligned}$$

- Приведем данную систему к диагональной форме по переменным $z, x_1, \cdots, x_m$:

$$\begin{cases}
z + \cdots + c_{m+1} x_{m+1} + \cdots + c_n x_n = z^0,\\
x_1 + \cdots + a_{1m+1} x_{m+1} + \cdots + a_{1n} x_n = b_1,\\
\ldots\ldots\\
x_m + a_{mm+1} x_{m+1} + \cdots + a_{mn} x_n = b_m.
\end{cases}$$

- Составим таблицу коэффициентов данной диагональной формы (симплексная таблица, сокращенно С-Т):

	z	x_1	…	x_r	…	x_m	x_{m+1}	…	x_s	…	x_n
z	z^0	0	…	0	…	0	c_{m+1}	…	c_s	…	c_n
x_1	b_1	1		0		0	a_{1m+1}		a_{1s}		a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_r	b_r	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rs}	…	a_{rn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	b_m	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{ms}	…	a_{mn}

Симплексная таблица – основной элемент вычислительной процедуры симплекс-метода.

3.5. Классификация симплексных таблиц.

- Симплексная таблица называется *прямо допустимой*, если $b_i \ge 0, i = \overline{1,m}$. Прямо-допустимая С-Т соответствует допустимому базисному решению.
- Симплексная таблица называется *двойственно допустимой*, если $c_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$.

- Симплексная таблица называется *оптимальной*, если она одновременно и прямо допустимая, и двойственно допустимая. Оптимальная С-Т соответствует оптимальному базисному решению.

3.6. Алгоритм прямого симплекс-метода (максимизации).

0. Начать вычисления с прямо-допустимой симплексной таблицы.

Вычисления по алгоритму состоят в выполнении следующих однотипных итераций. Каждая такая итерация состоит из трех последовательно выполняемых шагов.

ИТЕРАЦИЯ

1. Проверка оптимальности или нахождение ведущего столбца С-Т.

- Если все коэффициенты в выделенной строке при небазисных переменных неотрицательны (коэффициенты в z-уравнении), то текущее базисное решение является оптимальным.
- В противном случае на следующей итерации в число базисных переменных вводим небазисную переменную x_s, номер которой находится по правилу:

$$c_s = \min_{c_j<0} c_j .$$

Столбец под номером s называется *ведущим столбцом* симплексной таблицы.

2. Проверка условия неограниченности решения задачи ЛП и нахождение ведущей строки (ведущего элемента) С-Т.

- Если в ведущем столбце симплексной таблицы s нет положительных коэффициентов, то значение задачи ЛП неограниченно (нет оптимального решения)
- В противном случае (в ведущем столбце имеются положительные элементы) в качестве базисной переменной, которая исключается из числа базисных, выбирается та переменная x_r, для которой

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_{a_{is}>0} \frac{b_i}{a_{is}} .$$

Строка под номером r называется *ведущей строкой С-Т*, а элемент $a_{rs}>0$ – *ведущим элементом С-Т.*

3. Преобразование симплексной таблицы.

- Используя эквивалентные преобразования таблицы (процедуру Гаусса) пересчитываем таблицу так, чтобы ведущий элемент новой С-Т стал равным 1, а все остальные элементы ведущего столбца – равными 0.

Обозначим верхним индексом 1 элементы новой симплексной таблицы. Тогда формулы пересчета коэффициентов примут вид:

$$a_{rj}^1 = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}, \; j = \overline{1,n},$$

$$b_r^1 = \frac{b_r}{a_{rs}},$$

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} a_{is}, i \neq r, \; j = \overline{1,n},$$

$$b_i^1 = b_i - \frac{b_r}{a_{rs}} a_{is}, i \neq r,$$

$$c_j^1 = c_j - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} c_s, \; j = \overline{1,n},$$

$$z^1 = z^0 - \frac{b_r}{a_{rs}} c_s.$$

- **Перейти к исследованию новой симплексной таблицы (новая итерация).**

3.7. Пример расчетов по алгоритму прямого симплекс-метода.

$$\begin{aligned} &\max z = \max(5x_1 + 3x_2) \\ &x_1 + x_2 \le 4, \\ &5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} z - 5x_1 - 3x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 + s_1 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + s_2 = 10. \end{cases}$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2
z	0	-5	-3	0	0
s_1	4	1	1	1	0
s_2	10	5	2	0	1

	z	x_1	x_2	s_1	s_2
z	10	0	-1	0	1
s_1	2	0	3/5	1	-1/5
x_1	2	1	2/5	0	1/5

	z	x_1	x_2	s_1	s_2
z	40/3	0	0	5/3	2/3
x_2	10/3	0	1	5/3	-1/3
x_1	2/3	1	0	-2/3	1/3

Ответ задачи будет:

$$z^* = 40/3, x_1^* = 2/3, x_2^* = 10/3, s_1^* = 0, s_2^* = 0.$$