①

$P(X=1) = \frac{1}{6}$

$P(X=2) = \frac{5}{6}\,\frac{1}{5} = \frac{1}{6}$

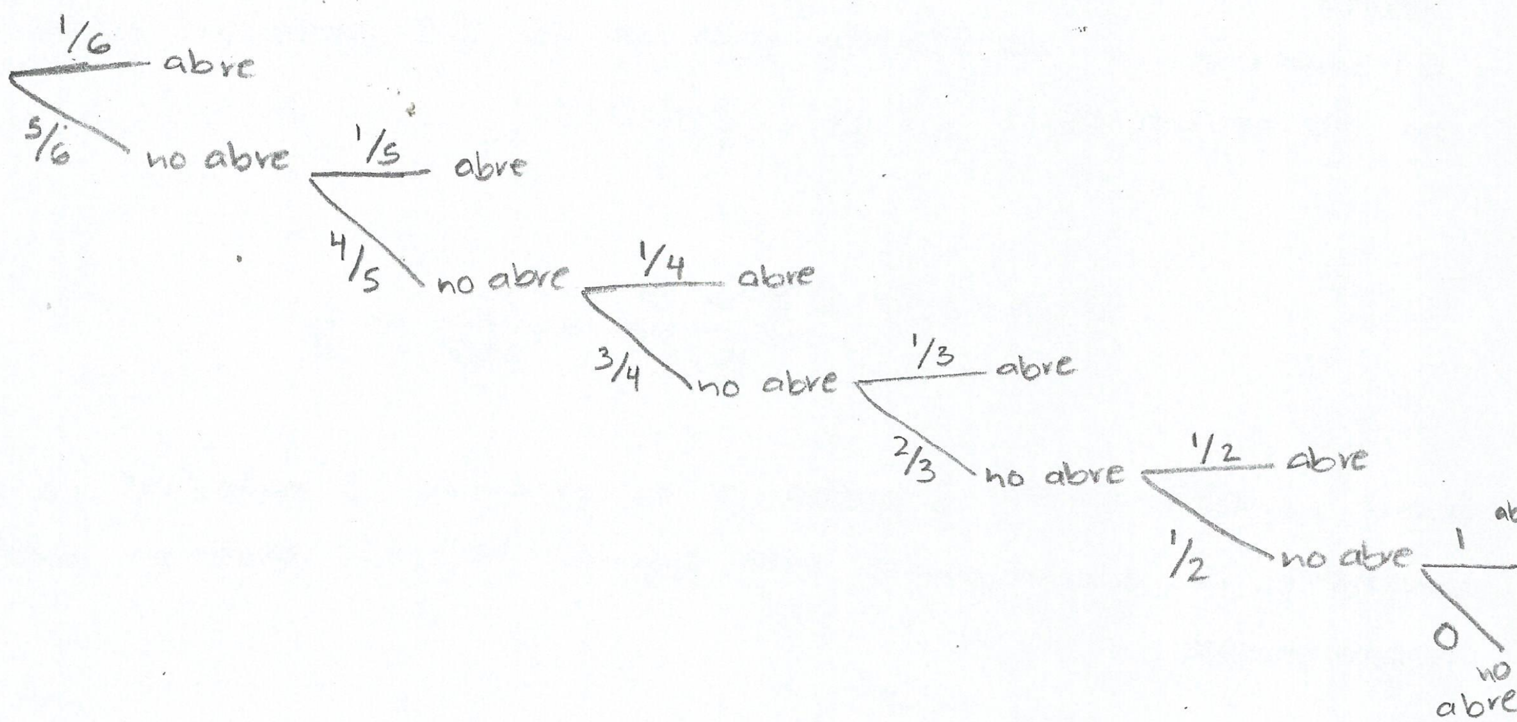
$P(X=3) = \frac{5}{6}\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

$P(X=4) = \frac{5}{6}\,\frac{4}{5}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(X=5) = \frac{5}{6}\,\frac{4}{5}\,\frac{3}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$P(X=6) = \frac{5}{6}\,\frac{4}{5}\,\frac{3}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{1} = \frac{1}{6}$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{para } X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$



② Primero etiquetaremos las pilas del 1 al 5

Si pensamos que la forma en la que colocaremos las pilas es una permutación aleatoria de los números definidos anteriormente (1, 2, 3, 4, 5). Entonces, nuestro espacio muestral tendrá 5! resultados con la misma probabilidad.

Para encontrar las dos baterias que están agotadas necesitamos al menos 2 pruebas pero no mas de 4.

Necesitaremos 2 pruebas si las primeras 2 baterias se encuentran vacías.

El número de resultados para que las dos baterías esten en las posiciones 1 y 2 es $2(1)(3!)$

$$P(X=2) = \frac{2 \times 1 \times 3!}{5!} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

Ahora, necesitaremos 3 prueba si las primeras 3 baterías no están vacías o si encontramos una segunda batería vacía en nuestra tercera prueba

$$P(X=3) = \frac{(3)(2)(1)(2!) + (2)(3)(1)(2!) + (3)(2)(1)(2!)}{5!}$$

$$P(X=3) = \frac{12 + 12 + 12}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

$P(X=4)$ la podemos deducir $P(X=4) = 1 - P(X=2) - P(X=3)$, y esto nos da de resultado $6/10$.

La función de masa de probabilidad de X podemos obtenerla con las probabilidades condicionales

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{20} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

$$P(X=2) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{6}{60} + \frac{6}{60} + \frac{6}{60} = \frac{18}{60} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{para } x=2 \\ \frac{3}{10} & \text{para } x=3 \\ \frac{6}{10} & \text{para } x=4 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

(3) Definamos

$R = \{$bola roja seleccionada$\}$

$U_1 = \{$urna 1 elegida$\}$

$U_2 = \{$urna 2 elegida$\}$

Entonces, tenemos que:

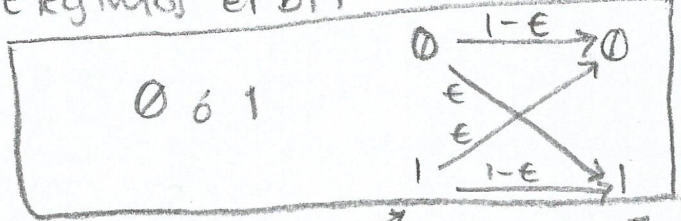
$$P[R] = P[R|U_1]P[U_1] + P[R|U_2]P[U_2]$$

$$= p_1\left(\tfrac{1}{2}\right) + p_2\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)(p_1 + p_2)$$

④ Tenemos que aunque conozcamos que bit se transmitió no conocemos el bit que nos llegó.

$$P[0] = P[1] = 1/2$$

Elegimos el bit



columna de bit transmitido

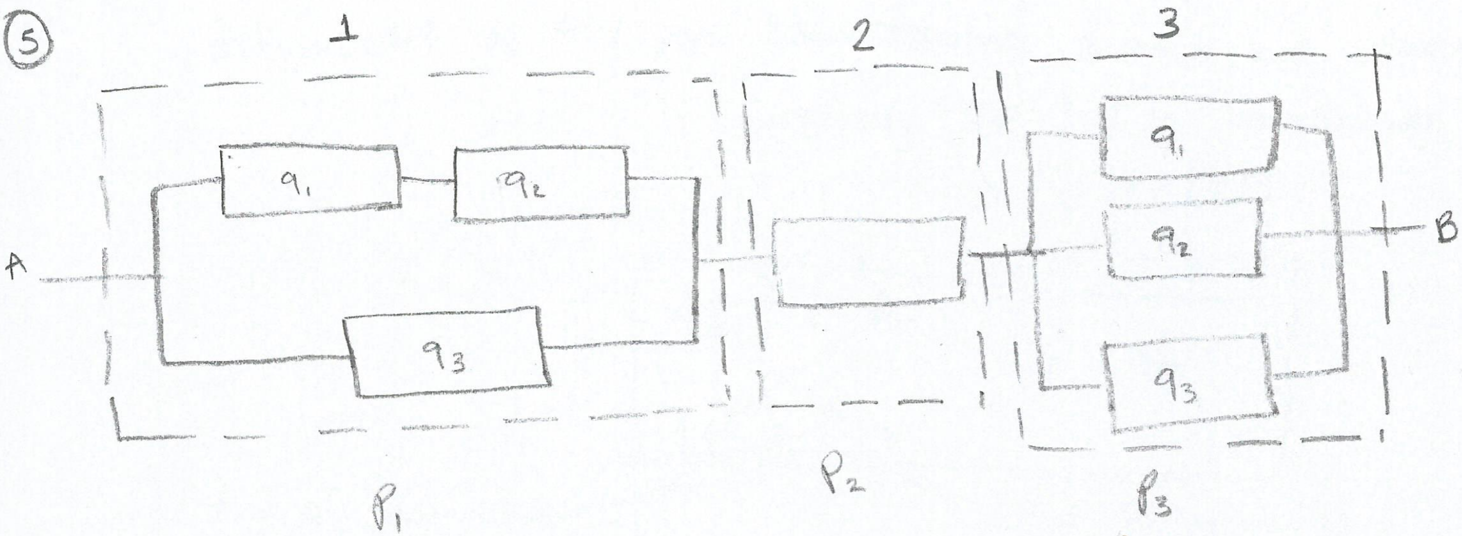
columna de bit recibido.

Por lo tanto, nuestra probabilidad de error es:

$$P[\text{error}] = P[\text{error} \mid \text{transmitimos } 0]\, P[\text{transmitimos } 0] + P[\text{error} \mid \text{transmitimos } 1]\, P[\text{transmitimos } 1]$$

$$= \epsilon \frac{1}{2} + \epsilon \frac{1}{2} = \boxed{\epsilon}$$

(5)



La probabilidad de que el sistema sea operable es:

$P_1P_2P_3$ $\quad q_1 = q_2 = q_3 = p$

$P_2 = p$

$P_3 = 1-(1-q_1)(1-q_2)(1-q_3)$
$= 1-(1-p)^3$

$q_1q_2 = p^2$

$P_1 = 1-(1-p^2)(1-p)$

$$\boxed{P_1P_2P_3 = [1-(1-p^2)(1-p)][p][1-(1-p)^3]}$$

⑥ Para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ definamos:

A_i = el i-ésimo speaker está activo

El número de speakers activos entonces es el número de aciertos en ocho ensayos Bernoulli con $p = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, la probabilidad de que haya seis speakers activos es:

$$P[K=7 \cup K=8] = P_8(7) + P_8(8)$$

$$P[K=7 \cup K=8] = \binom{8}{7} (p)^7 (1-p)^1 + \binom{8}{8} (p)^8 (1-p)^0$$

$$P[K=7 \cup K=8] = 8\left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{17}{3^8} = \frac{17}{6561}$$

$$= \boxed{0.002591}$$

⑦ Para cada x hay 3 y

Por lo tanto hay 21 posibilidades

Por lo tanto la distribución conjunta es:

$$P_{xy}(xy) = \begin{array}{c|c} y & \\ \begin{array}{c} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{array} & \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ & \begin{array}{ccccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ & x \end{array}$$

$$P_y(y) = \begin{array}{c} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{array} \left(\begin{array}{c} \frac{1}{21} \\ \frac{2}{21} \\ \frac{3}{21} \\ \frac{3}{21} \\ \frac{3}{21} \\ \frac{3}{21} \\ \frac{3}{21} \\ \frac{2}{21} \\ \frac{1}{21} \end{array}\right)$$

$$P_x(x) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc} \frac{3}{21} & \frac{3}{21} & \frac{3}{21} & \frac{3}{21} & \frac{3}{21} & \frac{3}{21} & \frac{3}{21} \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array}$$

$$E[x] = -2\left(\frac{3}{21}\right) - 1\left(\frac{3}{21}\right) + 0\left(\frac{3}{21}\right) + 1\left(\frac{3}{21}\right) + 2\left(\frac{3}{21}\right) + 3\left(\frac{3}{21}\right) + 4\left(\frac{3}{21}\right)$$

$$E[x] = \frac{-6-3+0+3+6+9+12}{21} = \frac{21}{21} = \boxed{1}$$

$$E[y] = 5\left(\frac{1}{21}\right) + 4\left(\frac{2}{21}\right) + 3\left(\frac{3}{21}\right) + 2\left(\frac{3}{21}\right) + 1\left(\frac{3}{21}\right) + 0\left(\frac{3}{21}\right) - 1\left(\frac{3}{21}\right) - 2\left(\frac{2}{21}\right) - 3\left(\frac{1}{21}\right)$$

$$E[y] = \frac{5+8+9+6+3-3-4-3}{21} = \frac{21}{21} = \boxed{1}$$

El beneficio es:

$$E[100x + 200y] = 100\,E[x] + 200\,E[y] = 300 \text{ units}$$

⑧ $X = \{$ producto de tirar 2 veces un dado $\}$

6	6	12	18	24	30	36
5	5	10	15	20	25	30
4	4	8	12	16	20	24
3	3	6	9	12	15	18
2	2	4	6	8	10	12
1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6

$P(x=1) = \frac{1}{36}$
$P(x=2) = \frac{2}{36}$
$P(x=3) = \frac{2}{36}$
$P(x=4) = \frac{3}{36}$
$P(x=5) = \frac{2}{36}$

$P(x=6) = \frac{4}{36}$
$P(x=8) = \frac{2}{36}$
$P(x=9) = \frac{1}{36}$
$P(x=10) = \frac{2}{36}$
$P(x=12) = \frac{4}{36}$

$P(x=15) = \frac{2}{36}$
$P(x=16) = \frac{1}{36}$
$P(x=18) = \frac{2}{36}$
$P(x=20) = \frac{2}{36}$
$P(x=24) = \frac{2}{36}$
$P(x=25) = \frac{1}{36}$

$P(x=30) = \frac{2}{36}$
$P(x=36) = \frac{1}{36}$

$$P_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{para } x = \{1,9,16,25,36\} \\ \frac{2}{36} & \text{para } x = \{2,3,5,8,10,15,18,20,24,30\} \\ \frac{3}{36} & \text{para } x = \{4\} \\ \frac{4}{36} & \text{para } x = \{6,12\} \\ 0 & \text{cualqier otro caso} \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} i \times j = \left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i\right)\left(\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} j\right) = \left(\frac{1}{6}(21)\right)\left(\frac{1}{6}(21)\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4}$$

$$E(x^2) = \left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i^2\right)\left(\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} j^2\right) = \left(\frac{1}{6}(91)\right)\left(\frac{1}{6}(91)\right) = \left(\frac{91}{6}\right)\left(\frac{91}{6}\right) = \frac{8281}{36}$$

$$Var(x) = \sigma_x^2 = E[x - \mu(x)^2] = E[x^2] - E[x]^2 = \sqrt{\frac{8281}{36} - \left(\frac{49}{4}\right)^2} = 8.94$$

⑨ Sea X el número de amobeas al cabo de un minuto, entonces por definición de valor esperado:

$$E[x] = (0)(P(X=0)) + (1)(P(X=1)) + (2)(P(X=2))$$

$$= 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{1}$$

Para calcular la varianza, primero hay que evaluar el segundo momento $E[X^2]$:(

$$E[X^2] = E[X] = (0)(P(X=0)) + (1)(P(X=1)) + (4)(P(X=2))$$

$$= 0 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

Por lo tanto:

$$Var[x] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{5}{3} - 1 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

10

a) El escalar debe satisfacer que:

$$1 = \sum_{x} p_X(x) = \frac{1}{a} \sum_{x=-3}^{3} x^2$$

entonces:

$$a = \sum_{x=-3}^{3} x^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = \underline{28}$$

b) Si $z \in \{1,4,9\}$, entonces:

$$p_Z(z) = p_X(\sqrt{z}) + p_X(-\sqrt{z}) = \frac{z}{28} + \frac{z}{28} = \underline{\frac{z}{14}}$$

De lo contrario tenemos que:
$p_Z(z) = 0$

c) $$\mathrm{var}(X) = E[Z] = \sum_{z} z\, p_Z(z) = \sum_{z \in \{1,4,9\}} \frac{z^2}{14} = \underline{7}$$

d) Tenemos que

$$\mathrm{var}(X) = \sum_{x} (x - E[X])^2 p_X(x)$$

$$= (1^2)(p_X(-1) + p_X(1)) + (2^2)(p_X(-2) + p_X(2)) + (3^2)(p_X(-3) + p_X(3))$$

$$= (2)\left(\frac{1}{28}\right) + (8)\left(\frac{4}{28}\right) + (18)\left(\frac{9}{28}\right)$$

$$= \underline{7}$$