Tarea 4: Complex numbers

1.- Consider the complex numbers $Z_1 = (1,2)$, $Z_2 = (-2,3)$ and $Z_3 = (1,-1)$.
Compute the following:

a) $Z_1 + Z_2 + Z_3$

$$= (1,2) + (-2,3) + (1,-1) = (1 + (-2) + 1,\ 2 + 3 + (-1)) = \boxed{(0,4)}$$

b) $Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1$

$$= \big((1,2)(-2,3)\big) + \big((-2,3)(1,-1)\big) + \big((1,-1)(1,2)\big)$$

$$= (-2-6,\ 3-4) + (-2+3,\ 2+3) + (1+2,\ 2-1)$$

$$= (-8,\ -1) + (1,\ 5) + (3,\ 1)$$

$$= (-8+1+3,\ -1+5+1)$$

$$= \boxed{(-4,5)}$$

c) $Z_1 Z_2 Z_3$

$$= \big((1,2)(-2,3)(1,-1)\big)$$

$$= (-2-6,\ 3-4)(1,-1)$$

$$= (-8,\ -1)(1,-1)$$

$$= (-8-1,\ 8-1)$$

$$= \boxed{(-9,7)}$$

d) $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2$

$= Z_1 Z_1 + Z_2 Z_2 + Z_3 Z_3$

$= \big((1,2)(1,2)\big) + \big((-2,3)(-2,3)\big) + \big((1,-1)(1,-1)\big)$

$= (1-4,\ 2+2) + (4-9,\ -6-6) + (1-1,\ -1-1)$

$= (-3,\ 4) + (-5,\ -12) + (0,\ -2)$

$= (-3-5+0,\ 4-12-2)$

$= \boxed{(-8,\ -10)}$

e) $\dfrac{Z_1}{Z_2} + \dfrac{Z_2}{Z_3} + \dfrac{Z_3}{Z_1}$

$$= \left(\frac{-2+6}{4+9},\ \frac{-3+(-4)}{4+9}\right) + \left(\frac{-2-3}{1+1},\ \frac{-2+3}{1+1}\right) + \left(\frac{1-2}{1+4},\ \frac{-2-1}{1+4}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{13},\ \frac{-7}{13}\right) + \left(\frac{-5}{2},\ \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{5},\ \frac{-3}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{13} - \frac{5}{2} - \frac{1}{5},\ \frac{-7}{13} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right)$$

$$= \boxed{\left(\frac{-311}{130},\ \frac{-83}{130}\right)}$$

f) $\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$

$z_1^2 = (1,2)(1,2) = (1-4,\ 2+2) = (-3,4)$

$z_2^2 = (-2,3)(-2,3) = (4-9,\ -6-6) = (-5,-12)$

$z_3 = (1,-1)(1,-1) = (1-1,\ -1-1) = (0,-2)$

$= \dfrac{(-3,4) + (-5,-12)}{(-5,-12) + (0,-2)} = \dfrac{(-3-5,\ 4-12)}{(-5+0,\ -12-2)}$

$= \dfrac{(-8,-8)}{(-5,-14)} = \left(\dfrac{40+112}{25+196},\ \dfrac{-112+40}{25+196} \right)$

$= \boxed{\left(\dfrac{152}{221},\ \dfrac{-72}{221} \right)}$

2.- let $z = (a,b) \in \mathbb{C}$. compute:

z^2

$= (a,b)(a,b)$

$= (a^2-b^2,\ ab+ab)$

$= \boxed{(a^2-b^2,\ 2ab)}$

z^3

$= (a^2-b^2,\ 2ab)(a,b)$

$= (a(a^2-b^2) - 2ab^2,\ b(a^2-b^2) + 2a^2b)$

$= \boxed{(a^3-ab^2-2ab^2,\ a^2b-b^3+2a^2b)}$

z^4

$= (a^3 - ab^2 - 2ab^2,\ a^2b - b^3 + 2a^2b)(a, b)$

$= \left(a(a^3 - ab^2 - 2ab^2) - b(a^2b - b^3 + 2a^2b),\ b(a^3 - ab^2 - 2ab^2) + a(a^2b - b^3 + 2a^2b)\right)$

$= \left(a^4 - a^2b^2 - 2a^2b^2 - a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2,\ a^3b - ab^3 - 2ab^3 + a^3b - ab^3 + 2a^3b\right)$

$= \boxed{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4,\ 4a^3b - 4ab^3)}$

3.- Prove the identity

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

for all complex numbers z_1, z_2

Usando la propiedad

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})$$

$$= |z_1|^2 + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + |z_2|^2 + |z_1|^2 - z_1 \cdot \overline{z_2} \cdot - z_2 \cdot \overline{z_1} + |z_2|^2$$

$$= \boxed{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)}$$

Tarea 4: Anillos

Miguel Angel Soto Hernandez.

1.- Let I and J be ideals in the ring R

a) Prove that $I \cap J$ is an ideal in R

Sea $a \in I \cap J \rightarrow a \in I \wedge a \in J$, dado que I, J son ideales, tenemos que $a\lambda_1 \in I \cap a\lambda_2 \in J$ con $\lambda_1 \lambda_2 \in R$.

Podemos notar que $a\lambda_1 + a\lambda_2 = a(\lambda_1 + \lambda_2)$, haciendo $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 \in R$

Tenemos que $a\lambda_3 \in I \wedge a\lambda_3 \in J$, dado que I, J son cerrados bajo la suma:

$$a\lambda_3 \in I \cap J \quad \text{para} \quad \lambda_3 \in R$$

Por lo tanto $I \cap J$ es ideal en R

b) Prove that $I+J = \{a+b \mid a \in I, b \in J\}$ is an ideal in R

Sea $(a+b) \in I+J \rightarrow a \in I \wedge b \in J$. Sea $\lambda \in R$ dado que $I \cap J$ son ideales de R, tenemos que $a\lambda \in I \wedge b\lambda \in J$

$$a\lambda + b\lambda = (a+b)\lambda \in I+J \quad \text{para} \quad \lambda \in R$$

Por lo tanto, $I+J$ es ideal en R

c) Prove that $IJ = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \geq 1, a_i \in I, b_i \in J\}$ is an ideal in R.

Sea $x \in IJ \rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ con $a_i \in I$, $b_i \in J$ y $n \geq 1$

Dado que I, J son ideales en R, por definición tenemos que:

$$a_i\lambda_i \in I, \quad b_i\lambda_i \in J \quad \text{para } \lambda_i \in R$$

$$a_i\lambda_i (b_i\lambda_i) = a_i b_i \lambda_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \lambda_i^2 \in IJ$$ dado que es cerrado bajo la suma con $\lambda_i \in R$

Por lo tanto es ideal

2.- Let R be a ring. Prove that $0 \cdot x = 0$ and $-x = (-1)x \ \forall x \in R$

Sea R un anillo.

Sea $a = 0 \cdot x$ para $a \in R$.

$$a = 0 \cdot x = (0+0)x = 0x + 0x = a + a \quad \ldots \ (1)$$

Ahora, si sumamos $-a$ a ambos lados de (1):

$$a = a + a \rightarrow a - a = a + a - a \rightarrow 0 = a \rightarrow 0 = 0x$$

Sea $y = (-1) \cdot x$, demostremos que es el inverso aditivo de $1 \cdot x$, es decir $y + (1)x = 0$

$$y + 1x = -1x + 1x = (-1+1)x = 0x = 0$$

Por lo tanto, $-1x$ es inverso a $1x$ con $-1x = -x$

3.- Show that a zero divisor cannot be a unit.

Sea $(R, +, \circ)$ un anillo cuya unidad es 1_R y cuyo zero es 0_R

Sea x la unidad de $(R, +, \circ)$

Ahora, con el objetivo de una contradicción, supongamos que x es tal que:

$$x \circ y = 0_R, \ y \neq 0_R$$

Entonces:

$$(x^{-1} \circ x) \circ y = 0_R$$

$1_R \circ y = 0_R$ Definición del elemento inverso

$1_R = 0_R$ como $y \neq 0_R$

De esta contradicción deducimos que x no puede tener esta propiedad. Por lo que, por prueba de contradicción x no es un divisor de 0

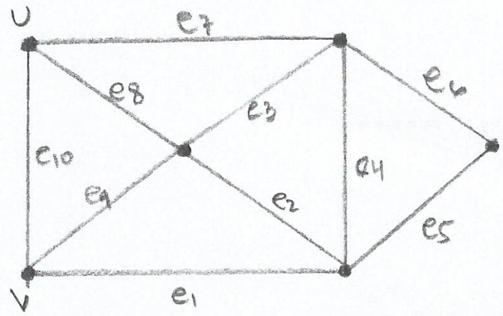
Tarea 4: Graph Teory

Miguel Angel Soto Hernandez

Eulerian graphs

1.- Which of the following graphs have Eulerian trail and Eulerian circuit.

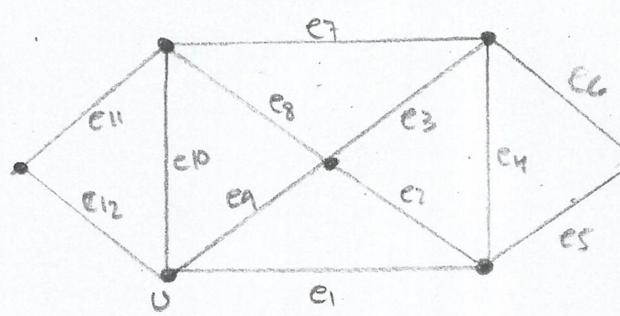
G_1



G_1 tiene un camino euleriano de v a u,. ya que cumple las condiciones que si hay 2 vertices con grado impar, es necesario que empiece y termine en estos. Por lo tanto el camino euleriano esta dado por la secuencia:

$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}$

G_2

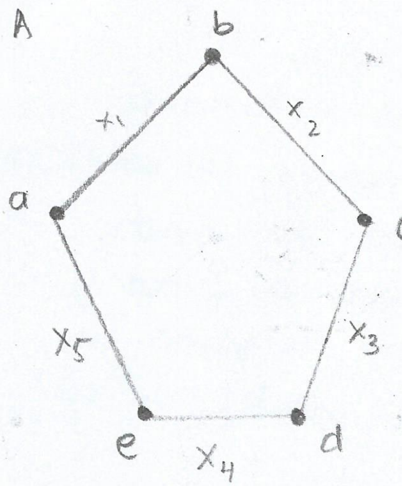


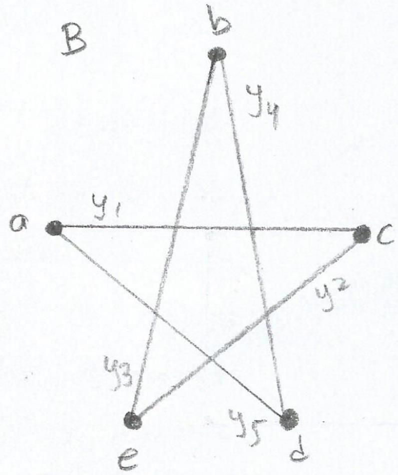
G_2 tiene el ciclo euleriano, ya que todos sus vertices son grado par, entonces para el ciclo de u, en este caso la ruta seria dada por:

$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}$

Graphs isomorphism

2.- Show that the following graphs are isomorphic:





a	b	c	d	e
b	a	b	c	a
e	c	d	e	d

a	b	c	d	e
c	d	a	a	c
d	e	e	b	d

$A = \{2, 2, 2, 2, 2\}$

$B = \{2, 2, 2, 2, 2\}$

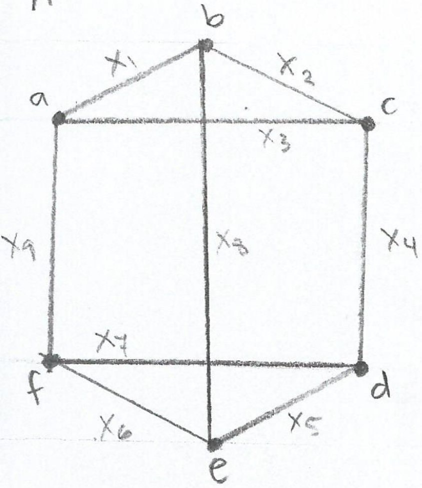
$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

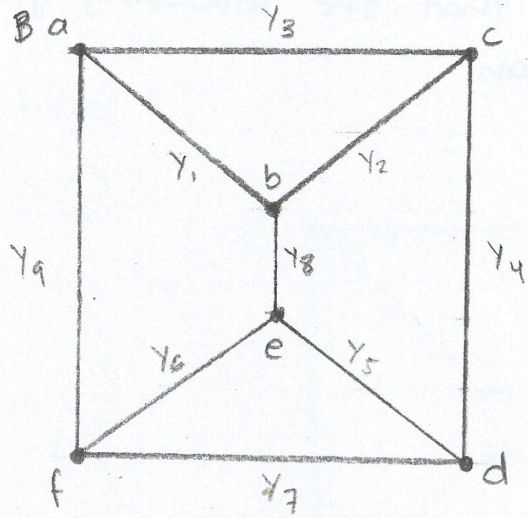
$$B = \begin{array}{c} a \\ c \\ e \\ b \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A y B son isomórficos

A



B



a	b	c	d	e	f
b	a	a	c	b	a
c	c	b	e	d	d
f	e	d	f	f	e

a	b	c	d	e	f
b	a	a	c	b	a
c	c	b	e	d	d
f	e	d	f	f	e

$A = \{3, 3, 3, 3, 3, 3\}$

$B = \{3, 3, 3, 3, 3, 3\}$

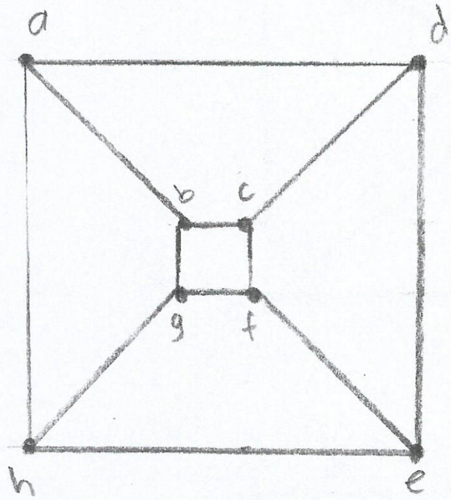
$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A y B son isomórficos

$$B = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 \end{array} \end{array}$$

3: Show that the following graphs are Hamiltonian but no Eulerian

Vertices = $n = 8$

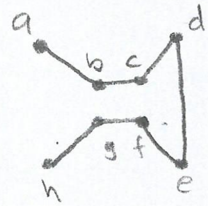


Camino Hamiltoniano

$grado(a) + grado(e) \leq n-1$

$3+3 \leq 8-1$

$6 \leq 7$ ∴ cumple

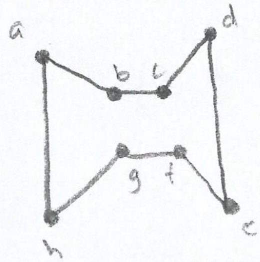


$V_i = a$

$V_f = h$

Ciclo Hamiltoniano

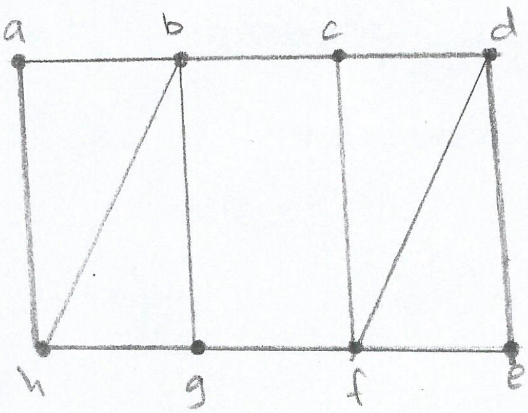
$V_1 = V_f = a$



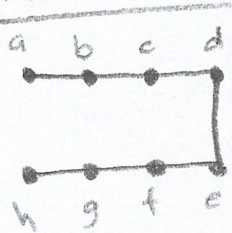
Cumple, ya que pasa por todos los vértices una sola vez.

Es Hamiltoniano, ya que cumple con la condición de tener tanto camino como ciclo Hamiltoniano
No es euleriano, ya que rompe la regla de no tener más de 2 vertices de grado impar.

$n = 8$



Camino Hamiltoniano



$V_1 = a$

$V_f = h$

$grado(b) + grado(d) \leq n-1$

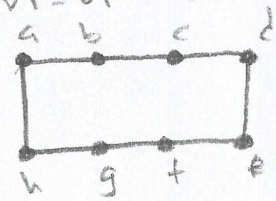
$4+3 \leq 8-1$

$7 \leq 7$

∴ cumple

Ciclo Hamiltoniano

$V_1 = V_f = a$



Cumple, ya que pasa por todos los vertices una sola vez.

El grafo es Hamiltoniano, ya que cumple con las condiciones de tener camino y ciclo Hamiltoniano
No es Euleriano, ya que rompe la regla de no tener mas de 2 vertices de grado impar

Tarea#1: Groups

Miguel Angel Soto Hernandez.

1.- Write down the subgroups of $\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$

Si tenemos que:

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\}$$

Entonces

$$\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$$

2.- Let G be a group and $H \subseteq G$ a non-empty subset. Prove that H is a subgroup, if and only if $xy^{-1} \in H$ for all $x, y \in H$

Sea G un grupo y sea $H \subseteq G$ con $H \neq 0$

$\rightarrow$) Ahora supongamos que H es un subgrupo de G, por definición tenemos $e \in H$, $x^{-1} \in H$ $\forall x \in H$ y $xy \in H$ $\forall x, y \in H$.

Sea $x, y \in H \rightarrow y^{-1} \in H$ por definición, $xy^{-1} \in H$ dado de H es un subgrupo

Por lo tanto H es un subgrupo de G

$\leftarrow$) Supongamos $xy^{-1} \in H$ $\forall x, y \in H$

Dado que $xy^{-1} \in H \rightarrow y^{-1} \in H$ $\forall y \in H$

Además $yy^{-1} = e \in H$

Finalmente: $xy \in H$ $\forall x, y \in H$

Por lo tanto H es un subgrupo de G

3.- Show that every subgroup of an abelian group is normal

Sea G un grupo abeliano, y sea $H \leq G$ subgrupo de G

Además, $g, h \in G$ y $h \in H$:

$gh = hg$ dado que G es abeliano

$ghg^{-1} = hgg^{-1} \rightarrow ghg^{-1} = he = h$

$ghg^{-1} \in H$, es decir, H es normal.

Entonces:

Dado que H fue un subgrupo arbitrario de G,

tenemos que:

Para todo subgrupo de G,

tendremos que será normal.

Tarea 4: Discrete Random Variables and Expectation

Miguel Angel Soto Hernandez

1.- A monkey types on a 26-letter keyboard that has lower case letters only. Each letter is chosen independently and uniformly at random from the alphabet. If the monkey types 1,000,000 letters, what is the expected number of times the sequence "proof" appears?

Definamos $X_i = 1$ como $i^{esima} - (i+4)^{esima}$ letras escritas como "proof" y $X_i = 0$ en caso contrario.

$X_i = 1$ ocurre con probabilidad $\frac{1}{26^5}$.

Entonces el total el total de ocurrencias de "proof" es:

$$E\left[\sum_{i=1}^{10^6-4} X_i\right] = \sum_{i=1}^{10^6-4} E(X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{10^6-4} P(X_i = 1)$$

$$= \frac{10^6-4}{26^5} = \frac{999996}{11881376}$$

$$\approx \boxed{0.084165}$$

2- Suppose that we independently roll two standard six-sided dice. Let X_1 be the number that showns on the first dice, X_2 the number on the second die, and X the sum of the number on the two dice

a) What is $E[X \mid X_1 \text{ is even}]$

Usando la linealidad expectiva:

$$E[X \mid X_1 \text{ es par}] = E[X_1 + X_2 \mid X_1 \text{ es par}]$$
$$= E[X_1 \mid X_1 \text{ es par}] + E[X_2 \mid X_1 \text{ es par}]$$
$$= E[X_1 \mid X_1 \text{ es par}] + E[X_2]$$
$$= \left(2\left(\tfrac{1}{3}\right) + 4\left(\tfrac{1}{3}\right) + 6\left(\tfrac{1}{3}\right)\right) + \left(1\left(\tfrac{1}{6}\right) + 2\left(\tfrac{1}{6}\right) + 3\left(\tfrac{1}{6}\right) + 4\left(\tfrac{1}{6}\right) + 5\left(\tfrac{1}{6}\right) + 6\left(\tfrac{1}{6}\right)\right)$$
$$= 4 + 3\left(\tfrac{1}{2}\right) = \boxed{7\tfrac{1}{2}}$$

b) What is $E[X \mid X_1 = X_2]$?

$$E[X \mid X_1 = X_2] = \sum_{x=2}^{12} x \cdot P_r(X = x \mid X_1 = X_2) = \sum_{n=1}^{6} 2n\left(\tfrac{1}{6}\right) = \boxed{7}$$

c) What is $E[X_1 \mid X = 9]$?

$$E[X_1 \mid X = 9] = \sum_{x=1}^{6} x \cdot P_r(X_1 = x \mid X = 9)$$
$$= \sum_{x=1}^{6} x \frac{P_r(X_1 = x \cap X = 9)}{P_r(X = 9)}$$
$$= \sum_{x=1}^{6} x \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{4}(3 + 4 + 5 + 6) = \boxed{4\tfrac{1}{2}}$$

d) What is $E[X_1 - X_2 \mid X = k]$ for k ~~range~~ in the range $[2, 12]$?

Usando la linearidad expectativa y el hecho que X_1 y X_2 tienen la misma distribución

$$E[X_1 - X_2 \mid X = k] = E[X_1 \mid X = k] - E[X_2 \mid X = k]$$

$$= \boxed{0}$$

3.- A permutation $\pi : [1, n] \to [1, n]$ can be represented as a set of cycles as follows. Let ~~there~~ there be one vertex for each number i, $i = 1, \dots,$ n. If the permutation maps the number i to the number $\pi(i)$, then a directed arc is drawn from vertex i to vertex $\pi(i)$. This leads to a graph that is a set of disjoint cycles. Notice that some of the cycles could be self-loops. What is the expected number of cycles in a random permutation of n numbers?

Definamos X_i^k como una variable indicadora que es 1 si el vértice i pertenece a un ciclo de longitud k. Sea $Y_k = X_1^k + X_2^k + \dots + X_n^k$ el número total de nodos que pertenecen a un ciclo-k y sea N_k el número de ciclos-k en el gráfico.

Por definición debemos tener $N_k = \frac{Y_k}{k}$. Finalmente, sea N el número total de ciclos en el gráfico, el cual es $N = \sum_{k=1}^{n} N_k$.

Cuántas permutaciones π tales que $X_i^k = 1$ hay? Si el vértice i pertenece a un ciclo-k, entonces el siguiente vértice $j = \pi(i)$ puede no ser el vértice i, el vértice $\pi(j)$ puede ser o no i o j, y así sucesivamente, hasta que $k^{\text{ésimo}}$ vértice es nuevamente i. Por lo tanto, podemos elegir los $k-1$ vértices consecutivos del mismo ciclo de $(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ maneras. Los vertices $n-k$ restantes pueden estar en cualquier orden de π, por lo que el número de posibilidades es $(n-k)(n-k-1)\cdots 2 \cdot 1$

El número total de permutaciones tal que $X_i^k = 1$ es por lo tanto $(n-1)!$

Como hay $n!$ permutaciones en total, la probabilidad de tal evento es $Pr(X_i^k = 1) = (n-1)! / n! = 1/n$

Ahora, usando la linealidad de las expectativas dos veces, podemos obtener el número de "esperas" o ciclos:

$$E[N] = \sum_{k=1}^{n} E[N_k] = \sum_{k=1}^{n} - E[Y_k] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} E[X_i^k]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H(n)$$

Tarea 4: Events and Probability

Miguel Angel Soto Hernandez.

1. We flip a fair coin ten times. Find the probability of the following events:

a) The number of heads and the number of tails are equal.

De 10 tiros posibles, elegimos 5 caras y hay un total de 2^{10} posibles formas de que caiga la moneda. Por lo tanto, la probabilidad es:

$$\frac{\binom{10}{5}}{2^{10}} = \frac{\frac{10!}{5!5!}}{1024} = \frac{252}{1024} = \boxed{0.2460}$$

b) There are more heads than tails

Definamos X_i como el número de caras

$$P(\text{más caras que cruces}) = \sum_{i=6}^{10} P(x_i)$$

$$= \frac{1}{2^{10}} \sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i}$$

$$= \frac{386}{1024} = \boxed{0.3769}$$

c) The ith flip and the (11-i)th flip are the same for $i=1,\ldots,5$

En este caso, tenemos 2^5 de opciones de los primeros 5 tiros, que son repetidos, de acuerdo con el patrón en los siguientes 5 tiros.

Por lo tanto, la probabilidad es:

$$\frac{2^5}{2^{10}} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} = \boxed{0.0312}$$

d) We flip at least four consecutive heads.

$$P(\text{tirar} \geq 4 \text{ caras consecutivas}) = 1 - P(\text{tirar} < 4 \text{ caras consecutivas})$$

Hay que notar que hay 4 secuencias que no conducen a 4 caras seguidas:

$$P(T) = \frac{1}{2}$$

$$P(HT) = \frac{1}{2^2}$$

$$P(HHT) = \frac{1}{2^3}$$

$$P(HHHT) = \frac{1}{2^4}$$

Sin embargo, podemos definir una recursión para k tiros donde P_k es la probabalidad. Hay que notar que $P_0 = P_1 = P_2 = P_3 = 1$, para poder aceptar secuencias que terminen en caras. Entonces, tenemos que:

$$P_k = \frac{1}{2} P_{k-1} + \frac{1}{4} P_{k-2} + \frac{1}{8} P_{k-3} + \frac{1}{16} P_{k-4}$$

$$\boxed{P_{10} = 0.245}$$

2.- Consider the following balls-and-bin game. We start with one black ball and one white ball in a bin. We repeatedly do the following: choose one ball from the bin uniformly at random, and then put the ball black in the bin with another ball of the same color. We repeat until there are n balls in the bin. Show that the number of white balls is equaly to be any number between 1 and n-1.

Definamos W_n como el número de bolas blancas después de haber agregado la enésima bola, la proposisión es:

para $n=2$ suponga que se cumple para $n=k$

$$P(W_k = i) = \frac{1}{k-1} \qquad i = 1, \dots, k-1$$

Entonces, agregando la bola $k+1$,

$$P(W_{k+1}=i) = P[W_k = i-1]\, P[\text{seleccionar blanca} \mid W_k = i-1] + P[W_k = i]\, P[\text{seleccionar negra} \mid W_k = i]$$

$$= \left(\frac{1}{k-1}\right)\left(\frac{i-1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k-1}\right)\left(\frac{k-i}{k}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{k} \qquad \forall_i = 1, \ldots, k}$$

3. A medical company touts its new test for a certain genetic disorder. The false negative rate is small: if you have the disorder, the probability that the test returns a positive result is 0.999. The false positive rate is also small: if you do not have the disorder, the probability that the test returns a positive result is only 0.005. Assume that 2% of the population has the disorder. If a person chosen uniformly at random from the population is tested and the result comes back positive, what is the probability that the person has the disorder?

Definamos D como el evento de que una persona tenga el desorden y T como el evento que sea positivo.

Entonces:

$$P(D \mid T) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{P(T \mid D)\, P(D)}{P(T \mid D)\, P(D) + P(T \mid D^c)\, P(D^c)}$$

$$= \frac{(0.999)(0.02)}{(0.999)(0.02) + (0.005)(0.98)}$$

$$= \boxed{0.8030}$$

Tarea 4: Linear transformations and linear systems Miguel Angel Soto Hernandez

1.- Solve the following system of equations using the Gaussian elimination procedure:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = -L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = -L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Now use these row operations to create an LU decomposition. It is possible to perform an LU decomposition of this matrix without the use of a permutation matrix?

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad LU = A$$

Para realizar LU, es necesario, en este caso el uso de una permutación matricial, tal que $R_1 \leftrightarrow R_2$. Esto debido a que en el sistema de ecuaciones principal tenemos $\emptyset$ en la posición 1,1.

2.- Consider the 5x5 matrices A, B and C with ranks 5, 2 and 4 respectively. What is the minimum and maximum possible rank of (A+B)C

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$a=5$ $\qquad$ $b=2$ $\qquad$ $c=4$

(A+B)

$5+2=7$

7 es el rango máximo posible, pero como las matrices son 5x5 el valor máximo que puede tomar es 5. Por lo tanto, consideraremos 5.

(A-B)

$|5-2|=3$

3 es el rango mínimo posible

(A+B) C

$$\left.\begin{array}{l}\min\{5,4\}=4\\ \min\{3,4\}=3\end{array}\right\}\text{ valores a lo más}$$

$$\left.\begin{array}{l}5+4-5=4\\ 3-4-5=2\end{array}\right\}\text{ valores a lo menos}$$

∴ el valor máximo que puede tomar es 4 y el mínimo es 2.

3.- If we have a square matrix A that satisfies $A^2 = I$, it is alway the case that $A = \pm I$. Either prove the statement or provide a counterexample.

Definamos $A = I$, entonces:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^2 = I$$

Cumple que es la identidad tanto en A como en A^2

Ahora definamos $A = -I$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^2 = I$$

Cumple que es la identidad tanto en A como en A^2.

Un contraejemplo, podría ser:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^2 = I$$

En A no es ni la identidad positiva ni negativa, pero en A^2 si cumple.

$\therefore A \neq \pm I$

Existen casos en los que a pesar de que A^2 cumpla, A no va a cumplir.

Tarea 4: Linear algebra and optimization Soto Hernández Miguel Ange

1.- For any two vectors $\bar{x}$ and $\bar{y}$, which are each of lenght a, show that

a) $\bar{x}-\bar{y}$ is orthogonal to $\bar{x}+\bar{y}$

$|y|=|x|=a$

$\bar{x}=(a\cos\alpha, a\,sen\,\alpha)$

$\bar{y}=(a\cos\beta, a\,sen\,\beta)$

$\bar{x}+\bar{y}=(a\cos\alpha+a\cos\beta, a\,sen\,\alpha+a\,sen\,\beta)$

$\bar{x}-\bar{y}=(a\cos\alpha-a\cos\beta, a\,sen\,\alpha-a\,sen\,\beta)$

$$(\bar{x}+\bar{y})\cdot(\bar{x}-\bar{y}) = a^2\cos^2\alpha - a^2\cos^2\beta + a^2 sen^2\alpha - a^2 sen^2\beta$$

$$= a^2[\cos^2\alpha - \cos^2\beta + sen^2\alpha - sen^2\beta]$$

$$= a^2[(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) - (\cos^2\beta + sen^2\beta)]$$

$$= a^2[1-1]$$

$$= a^2(0) = \emptyset$$ $\therefore$ es ortogonal

b) the dot product of $\bar{x}-3\bar{y}$ y $\bar{x}+3\bar{y}$ es negativo

$$(\bar{x}-3\bar{y})\cdot(\bar{x}+3\bar{y}) = \bar{x}\cdot\bar{x}+3\bar{y}\cdot\bar{x}-3\bar{y}\cdot\bar{x}-9\bar{y}\cdot\bar{y}$$

$$= a^2-9a^2$$

$$= -8a^2$$ $-8a^2<0$ $\therefore$ es negativo

2.- Show that if a matrix A satisfies $A = -A^T$, then all the diagonal elements of the matrix are $\emptyset$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad -A^T = \begin{bmatrix} -a^{11} & -a^{21} & -a^{31} \\ -a^{12} & -a^{22} & -a^{32} \\ -a^{13} & -a^{23} & -a^{33} \end{bmatrix}$$

Cuando $a_{ij} = 0$ y $-a_{ji} = \emptyset$ para todo $i = j$, tenemos que:

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

Para que la igualdad dada por el problema $(A = -A^T)$ se cumpla:

$$tr(A) = -tr(A^T)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = -\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

La condición $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$ se cumple si y solo si

$a_{ii} = \emptyset$

3.- Show that the matrix product AB remains unchanged if we scale the ith column of A and the ith row of B by respective factors that are inverses of each other

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$R_{11} = 2 + 20 = 22$

$R_{12} = 6 + 28 = 34$

$R_{21} = 6 + 40 = 46$

$R_{22} = 18 + 56 = 84$

$$AB = \begin{bmatrix} 22 & 34 \\ 36 & 84 \end{bmatrix}$$

Escalando A multiplicando su segunda columna por 3

$$A_s = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 6 & 24 \end{bmatrix}$$

Escalando B multiplicando su segunda fila por 1/3

$$B_s = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5/3 & 7/3 \end{bmatrix}$$

$R_{11} = 2 + \frac{60}{3} = 22$

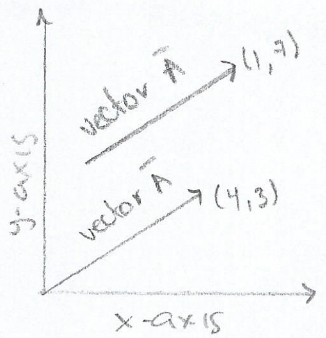
$R_{12} \quad 6 + \frac{84}{3} = 34$

$R_{21} = 6 + \frac{120}{3} = 46$

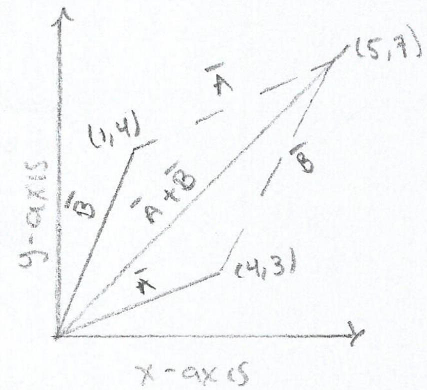
$R_{22} = 18 + \frac{168}{3} = 84$

$$A_sB_s = \begin{bmatrix} 22 & 34 \\ 46 & 84 \end{bmatrix}$$

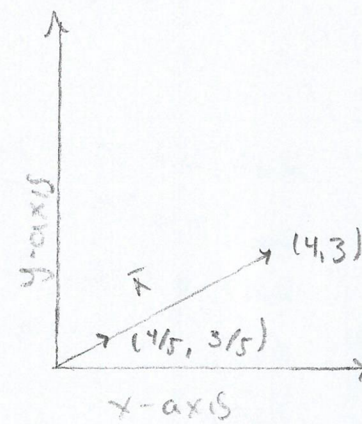
4. Parallelogram law: The parallelogram law states that the sum of the squares of the sides of a parallelogram is equal to the sum of the squares of its diagonals. Write this law as a vector identity in terms of vectors $\bar{A}$ and $\bar{B}$ of figure 1.1. Now use vector algebra to show why this vector identity must hold



non-origin vectors (not allowed)



vector addition



vector normalization

$$2(a^2+b^2) = D_1^2 + D_2^2$$

Si $D_1^2 = D_2^2$, entonces

$$2(a^2+b^2) = 2D_1^2$$

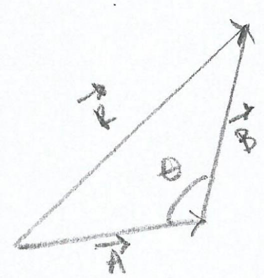
$a = \|\vec{A}\|$

$b = \|\vec{B}\|$

$D_1 = \|\vec{R}\|$

$$\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 = \|\vec{R}\|^2$$

Si $D_1 \neq D_2$



Teorema coseno

$$\|\vec{R}\|^2 = \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\| - 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\Theta$$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\| - 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\Theta}$$

5.- Write the first four terms of the taylor expansion of the following univariate functions above $x=a$

a) $\log_e(x) = \ln(x)$

b) $\sin(x)$

c) $1/x$

d) $\exp(x)$

a) $f(a) = \ln(a)$

$f'(a) = \frac{1}{a}$

$f''(a) = \frac{-1}{a^2}$

$f'''(a) = \frac{2a}{a^4} = \frac{2}{a^3}$

$$f_3(x) \simeq \ln(a) + \frac{(x-a)}{a} + \frac{(x-a)^2}{2!\,a^2} + \frac{2(x-a)^3}{3!\,a^3}$$

b) $\operatorname{sen}(x)$

$f(a) = \operatorname{sen}(a)$

$f'(a) = \cos(a)$

$f''(a) = -\operatorname{sen}(a)$

$f'''(a) = -\cos(a)$

$$f_3(x) = \operatorname{sen}(a) + (x-a)\cos(a) - \frac{(x-a)^2\operatorname{sen}(a)}{2!} - \frac{(x-a)^3\cos(a)}{3!}$$

c) $\frac{1}{x}$

$f(a) = \frac{1}{a}$

$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

$f''(a) = \frac{2}{a^3}$

$f'''(a) = \frac{-6a^2}{a^6} = \frac{-6}{a^4}$

$$f_3(x) = \frac{1}{a} - \frac{(x-a)}{a} + \frac{2(x-a)^2}{2!} - \frac{6(x-a)^3}{3!\,a^2}$$

d) e^x

$f(a) = e^a$

$f'(a) = e^a$

$$f_3(x) = e^a + (x-a)e^a + \frac{(x-a)^2 e^a}{2!} + \frac{(x-a)^3 e^a}{3!}$$

$f''(a) = e^a$

$f'''(a) = e^a$

Tarea 4: Eigenvectors and Diagonizable Matrices

Miguel Angel Soto Hernandez

1.- Show that if a matrix P satisfies $P^2=P$, then all its eigenvalues must be 1 o 0.

$\bar{x} \mapsto Px$

Aquí estamos mapeando un subespacio en el rango de P.

Una proyección deja puntos del subespacio solos. Entonces:

sea m un punto tal que

$m \in$ rango (P), m se puede expresar como:

$m = P\bar{x}$ para cualquier $\bar{x}$

$Pm = m$

$P^2\bar{x} = P\bar{x} \rightarrow P^2 = P$

Dada esta definición, entonces podemos decir que P es una matriz idempotente

los eigenvalores se calculan por medio de los determinantes de una matriz, entonces tenemos que:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

Entonces, para el caso de nuestro problema, $P^2 = P$:

$$\det(P^2) = (\det(P))^2$$
$$(\det(P))^2 = \det(P)$$
$$(\det(P))^2 - \det(P) = 0$$
$$\det(P)[\det(P) - 1] = 0$$

$\det(P) = 0$

ó

$\det(P) = 1$

2: Show that if a matrix A satisfies $A^2 = 4I$, then all eigenvalues of A are 2 and -2.

Sea $A^2 = 4I$, entonces $A = \pm 2I$

$A = 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad$ $A = -2I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} (\lambda-2) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2) \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda-2)[(\lambda-2)^2 - 0] + 0 + 0$$
$$= (\lambda-2)(\lambda-2)^2 = (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-2)$$

$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{matrix}\right\}$ eigenvalores de A para $A = 2I$

Visto de otra manera

$\lambda I \pm A = \lambda I \pm 2I = I(\lambda \pm 2)$

donde $\lambda = \pm 2$ para toda A de tamaño $n \times n$ que satisface $A^2 = 4I$

$(\det(A))^2 = 4^n \det(I)$

$(\det(A))^2 = 4^n$

$\det(A) = \sqrt{4^n}$

$\det(A) = \sqrt{4}^n$

$4^n = (4_1 \cdot 4_2 \cdot \dots \cdot 4_n)$

$\sqrt{4^n} = \sqrt{4_1} \cdot \sqrt{4_2} \cdot \sqrt{4_3} \cdot \sqrt{4_4}$

3.- Consider a $d \times d$ matrix A such that $A = -A^T$. Use the properties of determinants to show that if d, is odd then the matrix is singular.

$$A = -A^T$$

$$\det(A) = -1^d \det(A^T)$$

Si d es par, entonces:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

$$\det(A) = \det(A)$$

Una matriz es singular si:

-Su determinante es 0

Si d es impar

$$\det(A) = -\det(A^T)$$

$$\det(A) = -\det(A)$$

$$\det(A) + \det(A) = 0$$

$$2\det(A) = 0$$

$$\det(A) = 0$$

Entonces es singular.