Университет ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

# Вычислительная математика

Лабораторная работа №5
Вариант – метод Эйлера

Выполнила: Екатерина Машина

Группа Р3210

Преподаватель: Ольга Вячеславовна Перл

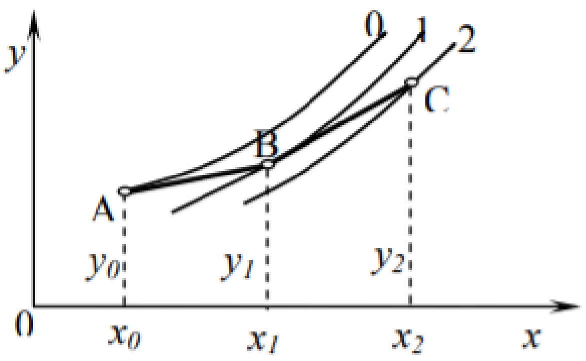
Санкт-Петербург
2020 г.

## Цель работы

Реализовать метод Эйлера для решения задачи Коши.

## Описание использованного метода

Метод Эйлера относится к пошаговым методам. На рисунке представлена геометрическая интерпретация метода:




На рисунке изображены первые два шага, т. е. проиллюстрировано вычисление сеточной функции в узлах $x_1, x_2$ . Интегральные кривые 0, 1, 2 описывают точные решения уравнения. При этом кривая О соответствует точному решению задачи Коши, так как она проходит через начальную точку $A(x_0, y_0)$ Точки B, C получены в результате численного решения задачи Коши методом Эйлера. Их отклонения от кривой 0 характеризуют погрешность метода. При выполнении каждого шага мы фактически попадаем на другую интегральную кривую. Отрезок AB - отрезок касательной к кривой 0 в точке A, ее наклон характеризуется значением производной $y' = f(x_0, y_0)$Касательная BC уже проводится к другой интегральной кривой 1. Таким образом, погрешность метода Эйлера приводит к тому, что на каждом шаге решение переходит на другую интегральную кривую.

Метод работает по следующему алгоритму:

Сначала необходимо заменить значения функции $Y$ в узлах $x_i$значениями сеточной функции $y_i$, тогда задача Коши будет представлено в следующем виде:

$$Y'(x_i) = f\big(x_i, Y(x_i)\big) = f(x_i, y_i).$$

Далее сочтем, что расстояние между узлами постоянно получаем следующее равенство:

$$y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i) + O(h^2), i = 0, 1, \dots$$

где $O(h^2)$ – это погрешность приближённого равенства.

Затем примем $i = 0$ и найдем значение сеточной функции $y_i$ при $x = x_i$:

$$y_1 = y_0 + h * f(x_0, y_0),$$

где $y_0 = Y(x_0) = y_0$.

Аналогично найдем значения сеточной функции в других узлах

$$y_2 = y_1 + h * f(x_1, y_1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n = y_{n-1} + h * f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Таким образом мы можем представить данный алгоритм в виде рекуррентной формулы.

**Рекуррентная формула метода Эйлера:**

$$y_0 = y_0 + h * \ f(x_0, y_0),$$

где $y_0$, стоящее справа от знака равенства – значение сеточной функции в предыдущем узле $x_0$, а $y_0$, стоящее слева от знака равенства – значение сеточной функции в следующем узле $x_0 + h$.

Важно заметить, что если задан отрезок $[x_0, x_k]$ и шаг *h*, то необходимое число интервалов *n* можно вычислить по формуле $n = round(\frac{x_k - x_0}{h})$, далее следует пересчитать длину шага по формуле $h = \frac{x_k - x_0}{n}$.

Погрешность метода Эйлера в точке равна разности между значением сеточной функции $y_i(x_i)$ и точным значением функции $Y(x_i)$: $e_i = y_i(x_i) - Y(x_i)$ называется погрешностью аппроксимации.

**Порядок точности метода Эйлера:**

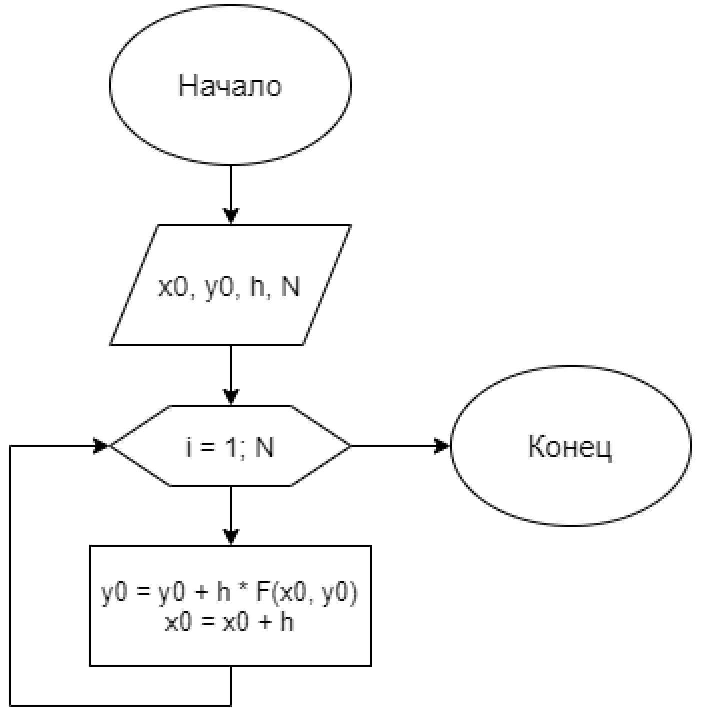
Говорят, что метод имеет p-й порядок точности, если существует такое число p ($p > 0$), что $|\ e_i\ | = O(h^p)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ при $h \to 0$.

При нахождении решения в точке $x_n$, стоящей на конечном расстоянии $X$ от точки $x_0$, то погрешность суммируется. Соответственно суммарная погрешность равна $n * O(h^2)$.

Таким образом учитывая, что $nO(h^2) = \frac{X}{h} O(h^2) = O(h)$.

Таким образом порядок точности метода Эйлера равняется единице.

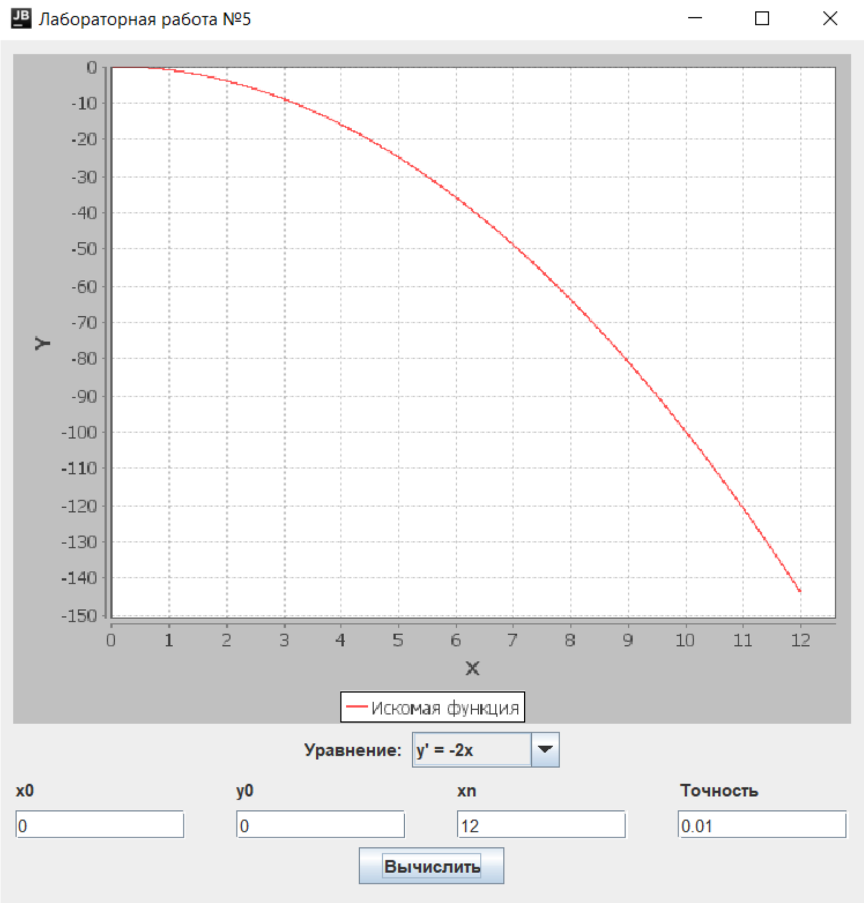
## Блок-схема

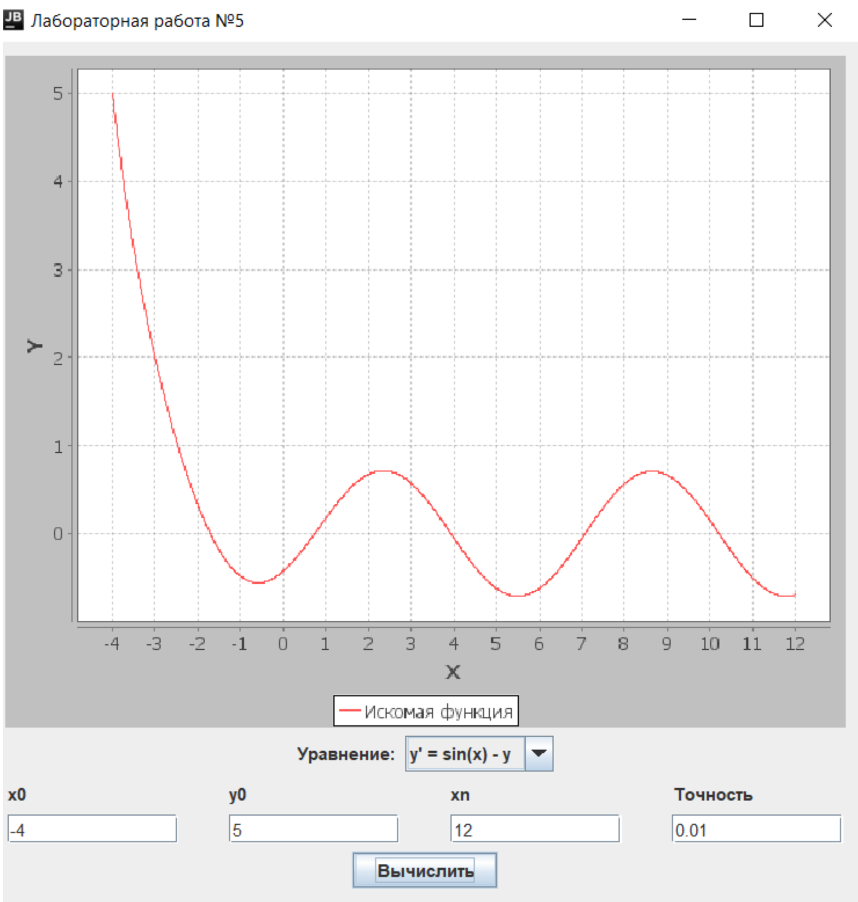


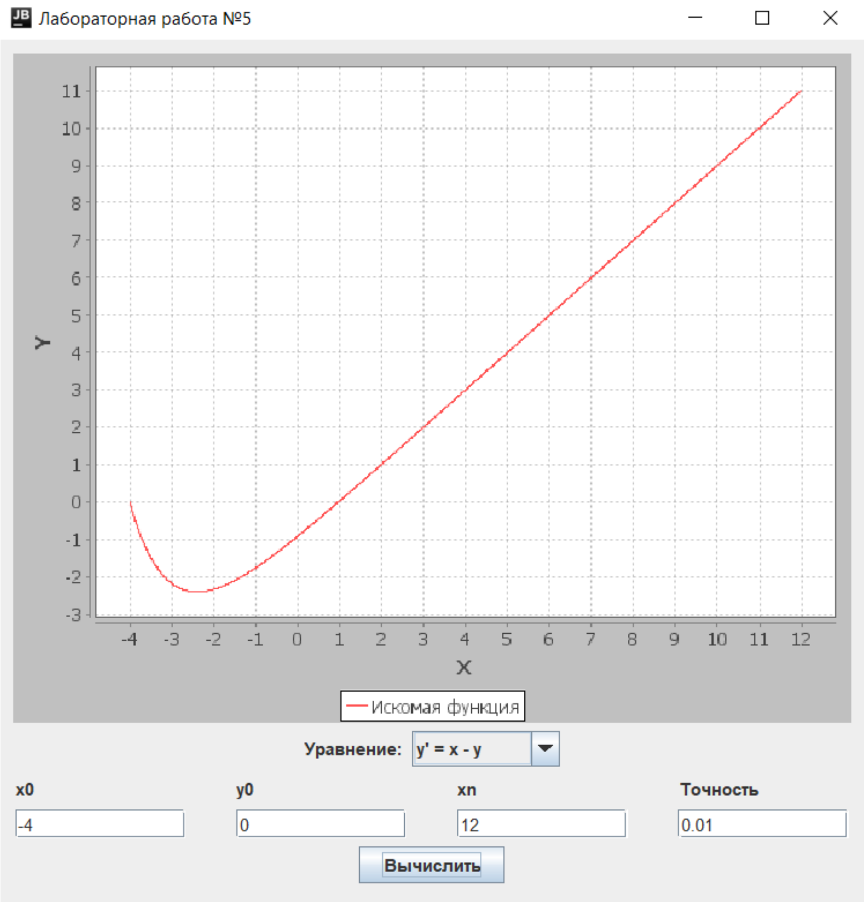

## Листинг численного метода

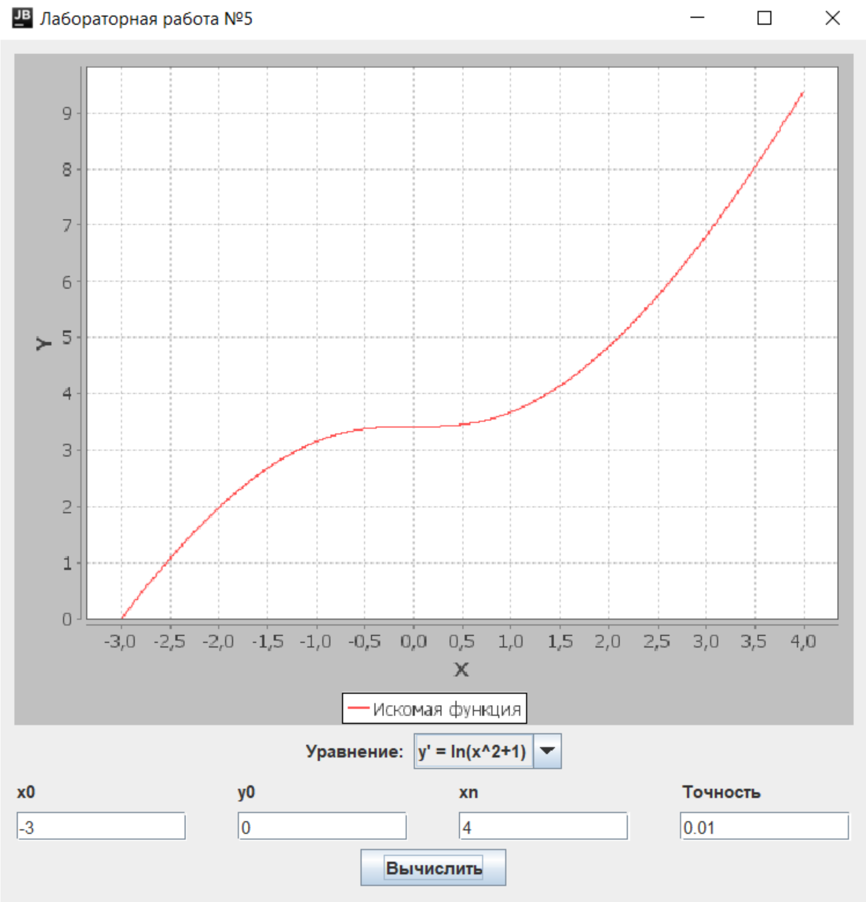
```
public static List<Point> calculateByEulerMethod(double x0, double y0, double lastX, double
precision) {
        List<Point> points = new ArrayList<>();

        int amountOfNodes = (int) ((lastX - x0) / precision);

        double[] X = new double[amountOfNodes];
        double[] Y = new double[amountOfNodes];

        X[0] = x0;
        Y[0] = y0;
        points.add(new Point(X[0], Y[0]));
        for (int i = 1; i < amountOfNodes; i++) {
            X[i] = x0 + i * precision;
            Y[i] = Y[i - 1] + precision * calculateFunction(X[i - 1], Y[i - 1]);
            points.add(new Point(X[i], Y[i]));
        }
        return points;
    }
```

## Примеры работы программы




Лабораторная работа №5
Y
X
Искомая функция
Уравнение:
y' = x - y
x0
y0
xn
Точность
-4
0
12
0.01
Вычислить


Лабораторная работа №5
Y
X
Искомая функция
Уравнение:
y' = ln(x^2+1)
x0
y0
xn
Точность
-3
0
4
0.01
Вычислить

# Вывод

Задача Коши — одна из основных задач теории дифференциальных уравнений. Основное отличие от решения обыкновенного дифференциального уравнения состоит в нахождении ОДНОГО конкретного решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным условиям.

**Метод Эйлера** основан на получении каждого следующего значения y из предыдущего:

$y_i + 1 = y_i + h \cdot f(x_i ; y_i)$.

Данный метод имеет большую погрешность, которая, к тому же, накапливается на каждом шаге. Порядок точности данного метода - первый.

**Усовершенствованный метод Эйлера** отличается от обычного тем, что значение правой части уравнения берется равным среднему арифметическому между $f(x_i ; y_i)$ и $f(x_i + 1; y_i + 1)$, то есть

$$y_i + 1 = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f(x_i ; y_i) + f(x_i + 1; y_i + 1)),$$

затем вычисляется первое приближение $\widetilde{y_i} + 1 = y_i + h \cdot f(x_i , y_i)$, затем подставляем значение в формулу выше и находим уточненное значение

$$y_i + 1 = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f(x_i ; y_i) + f(x_i + 1; \widetilde{y_i} + 1)).$$

Данный метод точнее метода Эйлера и имеет второй порядок точности.

**Метод Рунге-Кутта** имеет несколько разновидностей, различающихся порядком точности.

В этих методах допускается вычисление правых частей не только в точках сетки, но и в некоторых промежуточных точках.

Рассмотрим **метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности**. В данном методе вводятся 4 вспомогательные величины $(k_0, k_1, k_2, k_3)$ и вычисление координат очередной точки сетки происходит исходя из известных координат предыдущей точки:

$$y_i + 1 = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_0 + 2 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + k_3), i = 0, 1, \ldots$$

(формулы вычисления вспомогательных величин $k_0, k_1, k_2, k_3$ опущены). Таким образом, данный метод требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнения.

Метод Рунге-Кутта требует большого объема вычислений, но имеет повышенную точность, что позволяет проводить вычисления с большим шагом.

При одинаковом шаге метод Эйлера и усовершенствованный метод Эйлера менее точные, в отличие от метода Рунге-Кутта четвёртого порядка.

Далее сравним многошаговые методы:

**Метод Милна** относится к многошаговым методам и представляет один из методов прогноза и коррекции, как и **метод Адамса**. Разница между методами Адамса и Милна заключается в использовании разных формул прогноза и коррекции: в методе Милна в качестве интерполяционного полинома используется полином Ньютона, в методе Адамса - полином Лагранжа.

Оба этих метода имеют четвертый порядок точности. Поскольку методы являются многошаговыми, для вычисления значения нам необходимо знать результаты нескольких предыдущих шагов (необходимо предварительно получить одношаговыми методами первые три точки).

Кроме того, методы прогноза и коррекции требуют дополнительного расхода памяти - поскольку для них требуются данные о предыдущих точках.