

计算机图形学

上机作业八

刘国瑞 PB21000145 id: 64

2023 年 5 月 13 日

问题描述

实现 Bezier 曲线和 Bezier-spline 曲线绘制

Bezier 曲线实现原理

使用 Bernstein 基函数代数方法（直接把系数算出来代入计算，应该是这个方法）。设用户选定的点为 p_0, p_1, p_n ，通过对每个点的坐标乘下图系数的方式得到每个时间 t 对应的坐标，这些坐标连成的曲线即为 Bezier 曲线

Bernstein Basis

• Let's examine the Bernstein basis: $B = \{B_0^{(n)}, B_1^{(n)}, \dots, B_n^{(n)}\}$

• Bernstein basis of degree n :

$$B_i^{(n)}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = B_{i\text{-th basis function}}^{(\text{degree})}$$

where the binomial coefficients are given by:

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-i)!i!} & \text{for } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

图 1.

由此原理，我们可以直接构造一个系数矩阵 A ，其中

$$A_{ij} = C_n^j (1 - t_i)^{(n-j)} * t_i^j$$

故 $A * P$ (P 即为用户选定点组成向量) 就是曲线关于时间 t 的表示。

Bezier-spline 曲线实现原理

实现曲线插值思路如下，设用户给定点为 $k_0, k_1 \dots k_n$ ，我们在每个点中间再添加两个点，使得每个 k_i, k_{i+1} 和这两个添加的点形成的 n 个小段 Bezier 曲线可以拼接成 C^2 曲线。

为了让 n 个 Bezier 曲线拼接成 C^2 曲线，需要使添加的点满足条件，加上原来用户给定的点，我们设最后得到的 $3n + 1$ 个点为 $B_1, B_2, \dots, B_{3n+1}$ 满足方程：

$$B_{3i+1} = K_i$$

$$B_{3i} - B_{3i+1} = B_{3i+1} - B_{3i+2}$$

$$B_{3i-1} - 2B_{3i} + B_{3i+1} = B_{3i+1} - 2B_{3i+2} + B_{3i+3}$$

$$B_1 - 2B_2 + B_3 = B_{3n-1} - 2B_{3n} + B_{3n+1} = 0$$

恰好 $3n+1$ 组方程。其中第二第三行方程分别让 Bezier 曲线拼接后是 C^1 和 C^2 曲线，解方程即可得到满足要求的点。

实验结果

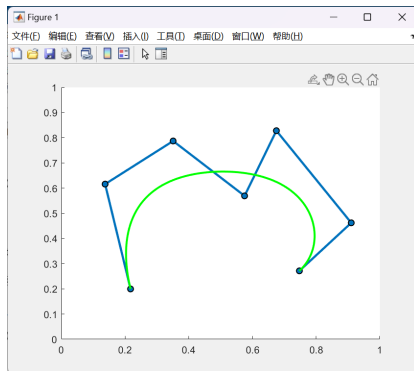


图 3.

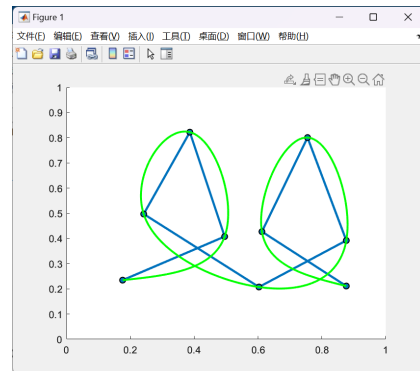


图 4.

结果分析

实验结果良好，无问题

代码说明

看 Bezier 曲线运行 Bezier.m，看 Bezier-spline 运行 Bezier-spline.m 文件。

致谢

感谢助教的辛苦付出！