Математический анализ 1. Лекция 2.6 Формула конечных приращений. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций нескольких вещественных переменных

20 ноября 2023 г.

Формула конечных приращений

Частные производные высших порядков

Классы гладкости. Теорема о независимости производных высших порядков гладких функций от порядка дифференцирования

Матрица Гессе и дифференциалы высших порядков

Формула Тейлора

Напоминание. Дифференцируемость функции и ее дифференциал
Пусть дана скалярная функция $f : X \to \mathbb{R}$, где $X = D(f) \subset \mathbb{R}^n$. Если она **дифференцируема** в точке $\mathbf{x} \in D(\mathbf{f})$, то ее приращение в этой точке имеет вид

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = df(\mathbf{h}) + \mathbf{r}(\mathbf{h}) \text{ при } |\mathbf{h}| \leqslant \delta,$$

с дифференциалом

$$df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} h_n = (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h})$$

и остаточным членом $\mathbf{r}(\mathbf{h}) = o(|\mathbf{h}|)$ при $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.
Переменные $h_1, h_2, \ldots, h_n$ часто обозначаются через $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. В этих обозначениях имеем

$$df(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} dx_n.$$

Дифференциальный анализ функций нескольких вещественных переменных часто проводится на языке дифференциалов.

Для дифференциалов скалярных функций верны следующие формулы (их вид одинаков для скалярных функций одной и нескольких переменных):

1. $d(u+v) = du + dv$,
2. $d(uv) = vdu + udv$,
3. $d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$ при $v \neq 0$.

Пример

$$\begin{aligned} d(x\sin(xy)) &= \sin(xy)dx + xd\sin(xy) \\ &= \sin(xy)dx + x\cos(xy)(ydx + xdy) \\ &= (\sin(xy) + xy\cos(xy))dx + x^2\cos(xy)dy \end{aligned}$$

(дополнительные аргументы обозначены не через h_1 и h_2, а через dx и dy, как это часто делается).

Формула конечных приращений для скалярных функций нескольких вещественных переменных

Областью называется открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$.

Теорема (обобщенная формула Лагранжа)

Пусть скалярная функция f дифференцируема в каждой точке выпуклой области $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для любых точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ существует число $\theta = \theta(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in (0, 1)$ такое, что

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x_i - a_i).$$

Вспомним, что множество $\{\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ – это отрезок, соединяющий точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$.
При $n = 1$ получаем формулу Лагранжа (при несколько огрубленных условиях)

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a), \quad \xi = a + \theta(x - a).$$

Следствие. Если функция f дифференцируема в каждой точке области D и $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \equiv 0$ в D, $i = 1, \ldots, n$, то функция $f(\mathbf{x}) \equiv \mathrm{const}$ в D.
Выпуклость D здесь уже не нужна.

Доказательство. Фиксируем $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in D$ и рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$. Она определена и дифференцируема (как композиция дифференцируемых функций) при $t \in [0, 1]$. По (одномерной) теореме Лагранжа имеем:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) \tag{a}$$

для некоторого $\theta \in (0, 1)$. Здесь

$$\varphi(0) = f(\mathbf{a}), \quad \varphi(1) = f(\mathbf{x}). \tag{b}$$

Используя формулу дифференцирования композиции функций, имеем

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}+t(\mathbf{x}-\mathbf{a})) \frac{d}{dt}(a_i+t(x_i-a_i)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}+t(\mathbf{x}-\mathbf{a}))(x_i-a_i). \tag{c}$$

Формула конечных приращений немедленно следует из (*a*), (*b*) и (*c*).

Частные производные высших порядков.

Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$, где $X = D(f) \subset \mathbb{R}^n$, имеет частную производную $g_i(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ *в некоторой окрестности точки* $\mathbf{a}$ при некотором $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда можно поставить вопрос о существовании частных производных 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$$

при $1 \leqslant j \leqslant n$.

Обозначения для вторых частных производных в точке $\mathbf{x}$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$, $\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$, $f''_{x_i x_j}(\mathbf{x})$, а также $\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i^2}$ вместо $\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_i}$. 2-е производные по переменным $x_i \neq x_j$ называются *смешанными*.

Пример. 2-е производные функции $f(x, y) = x^y$, $x > 0$.

Более общее определение. Пусть дана функция $f : X \to \mathbb{R}$, где $X = D(f) \subset \mathbb{R}^n$, и упорядоченный набор (не обязательно различных) переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$, где $k \geqslant 2$. **Частная производная k-го порядка** функции f в точке $\mathbf{x} \in X$ по этому набору переменных определяется рекуррентно

$$\frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f(\mathbf{x})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}}\right).$$

Пример

Пусть $f(x,y,z) = xy^2z^3$. Тогда

$$f'_x = y^2z^3, \qquad f'_y = 2xyz^3, \qquad f'_z = 3xy^2z^2, \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&f''_{xx} = 0, && f''_{xy} = 2yz^3, && f''_{xz} = 3y^2z^2,\\
&f''_{yx} = 2yz^3, && f''_{yy} = 2xz^3, && f''_{yz} = 6xyz^2,\\
&f''_{zx} = 3y^2z^2, && f''_{zy} = 6xyz^2, && f''_{zz} = 6xy^2z.
\end{aligned}$$

Если существуют все частные производные до некоторого порядка k скалярной функции f от n вещественных переменных в точке $\mathbf{x} \in D(f)$, то

- первых производных – n,
- вторых производных – n^2, …,
- k-х производных – n^k.

При этом некоторые из частных производных могут совпадать.

В примере $f''_{xy} = f''_{yx}$, $f''_{xz} = f''_{zx}$ и $f''_{yz} = f''_{zy}$. Случайно это или нет?

Классы гладкости

Определение

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$.
Класс $C^0(D)$ состоит из всех скалярных функций, непрерывных в D, т.е. в каждой точке области D.
Класс $C^k(D)$, $k \geqslant 1$ состоит из всех скалярных функций, определенных и имеющих любые непрерывные частные производные до порядка k включительно в D, т.е. в каждой точке D.

При этом

$$\ldots \subset C^3(D) \subset C^2(D) \subset C^1(D) \subset C^0(D).$$

Все включения собственные, т.е. отличны от $=$.

Класс $C^k(D)$ с обычными операциями сложения функций и умножения их на вещественное число становится **линейным пространством**, причем **бесконечномерным** (т.е. не являющимся конечномерным) (почему?).

Утверждение

Если элементарная функция f (от n вещественных переменных) имеет все частные производные всех порядков до k включительно в каждой точке некоторой области D, то $f \in C^k(D)$.

Теорема (о независимости производных высших порядков гладких функций от порядка дифференцирования)

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, f – функция из класса $C^s(D)$, $s \geqslant 2$, а $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ – упорядоченный набор переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $2 \leqslant k \leqslant s$, Пусть $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ – любой упорядоченный набор переменных, полученный из $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ с помощью некоторой их перестановки. Тогда

$$\frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}} = \frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}.$$

Здесь среди переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ могут быть и одинаковые, и при $k > n$ это заведомо так.

В частности, при $k = 2$ имеем

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{при любых } i, j \text{ от } 1, \ldots, n.$$

В том числе при $n = 2$ и $k = 2$ это сводится к одному равенству

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

Замечание. Количество **различных** частных производных k-го порядка скалярной функции $f \in C^k(D)$ от n вещественных переменных в точке $\mathbf{x} \in D$ не превосходит числа целых неотрицательных решений уравнения

$$k_1 + \ldots + k_n = k,$$

где $k_1 \geqslant 0, \ldots, k_n \geqslant 0$ – это количества дифференцирований по переменным $x_1, \ldots, x_n$ при взятии частной производной k-го порядка.

Из комбинаторных соображений следует, что это число равно

$$C_{k+n-1}^{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

Например, скалярная функция $f \in C^3(D)$ трех вещественных переменных x, y, z имеет не более

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

различных частных производных 3-го порядка из общего их количества 27.

Матрица Гессе

Пусть скалярная функция f имеет все частные производные 2-го порядка в точке $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$. Из них можно составить квадратную матрицу n-го порядка

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_1x_2}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{x_1x_n}(\mathbf{x}) \\ f''_{x_2x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_2x_2}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{x_2x_n}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_nx_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_nx_2}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{x_nx_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \{f''_{x_ix_j}(\mathbf{x})\}_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant n},$$

часто называемую **матрицей Гессе** функции f в точке $\mathbf{x}$.

Замечание

Из последней теоремы следует, что если функция f принадлежит классу $C^2(D)$ в некоторой окрестности D точки $\mathbf{x}$, то ее матрица Гессе в этой точке **симметрична**:
$H_f^T = H_f$, т.к. $f''_{x_ix_j}(\mathbf{x}) = f''_{x_jx_i}(\mathbf{x})$ при всех $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Пример. Выше найдены все частные производные 2-го порядка функции $f(x,y,z) = xy^2z^3$. Ее матрицы Гессе в любой точке (x,y,z) и конкретной точке $(1,1,1)$ таковы

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Дифференциалы высших порядков

Определение. Для скалярной функции $f \in C^k(D)$ от n вещественных переменных **дифференциалом** k-го порядка функции f в точке $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ называется величина

$$d^k f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \ldots h_{i_k},$$

где $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ – вектор дополнительных аргументов (которые также часто обозначаются через $dx_1, \ldots, dx_n$). Аргументы $\mathbf{x}$ и/или $\mathbf{h}$ для краткости могут быть опущены. Ранее рассмотрен случай $k = 1$.

В частности, **дифференциал 2-го порядка** функции $f \in C^2(D)$ в точке $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ – это **квадратичная форма**

$$d^2 f(\mathbf{h}) = (H_f(\mathbf{x})\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

с симметричной матрицей Гессе $H_f(\mathbf{x})$. Ее можно записать также в виде

$$d^2 f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T H_f \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \ldots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

В развернутом виде **дифференциал 2-го порядка функции** $f \in C^2(D)$ **двух переменных** имеет вид

$$d^2 f(x,y)(dx,dy) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Роль дифференциалов k-го порядка функций из класса $C^k(D)$ раскрывает **формула Тейлора для функций нескольких вещественных переменных** (см. далее).

Дифференциал k-го порядка $d^k f(\mathbf{x})(\mathbf{h})$ – многочлен k-го порядка по совокупности переменных $h_1, \ldots, h_n$ (исключая вырожденный случай, когда все частные производные k-го порядка в точке $\mathbf{x}$ обращаются в 0). Его коэффициентами служат всевозможные частные производные k-го порядка функции f в точке $\mathbf{x}$.

Для функций f, которые не принадлежат классу гладкости $C^k(D)$, дифференциалы k-го порядка в точках $\mathbf{x} \in D$ обычно не определяются, даже если все частные производные k-го порядка функции f определены в точке $\mathbf{x}$.

Пример. Найдем дифференциал 2-го порядка функции $f(x, y, z) = xy^2z^3$ в точке $(1, 1, 1)$. Ранее была найдена матрица Гессе функции f в точке $(1, 1, 1)$:

$$H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Значит, искомый дифференциал равен

$$(H_f(1,1,1)\mathbf{h}, \mathbf{h}) =$$

$$= 2(dy)^2 + 6(dz)^2 + \mathbf{4}dx\,dy + \mathbf{6}dx\,dz + \mathbf{12}dy\,dz, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

Дифференциал 3-го порядка функции $f(x,y,z) \in C^3(D)$ есть, вообще говоря, сумма из 27 слагаемых, которая упрощается до суммы из 10 слагаемых. У нас дифференциалы порядка три и выше будут возникать редко. Если все-таки возникает необходимость записать дифференциал высокого порядка, то лучше начинать с предварительных рассуждений.

Пример. Найдем дифференциал 3-го порядка функции $f(x,y,z) = x^4 + yz^2 + 5xyz$ в точке $(1,1,1)$. Легко заметить, что все частные производные 3-го порядка f'''_{uvw} функции-многочлена f тождественно равны нулю, кроме следующих случаев:

1. $u = v = w = x$. Это несмешанная частная производная 3-го порядка $f'''_{xxx} = 24x$.
2. Среди переменных u, v, w переменная y встречается один раз, а переменная z встречается два раза. Таких смешанных частных производных 3-го порядка всего три, они совпадают: $f'''_{yzz} = f'''_{zyz} = f'''_{zzy}$ и в данном случае тождественно равны 2.
3. Все переменные u, v, w различны. Таких частных производных 3-го порядка всего шесть (почему?), все они совпадают и в данном случае тождественно равны 5.

Следовательно, искомый дифференциал 3-го порядка таков

$$d^3 f(x,y,z)(dx,dy,dz) = 24(dx)^3 + 3 \cdot 2 \cdot dy\,(dz)^2 + 6 \cdot 5 \cdot dx\,dy\,dz =$$

$$= 24(dx)^3 + 6dy\,(dz)^2 + 30dx\,dy\,dz.$$

Замечание

Дифференциалы высшего порядка иногда удобно вычислять, используя следующее рекуррентное правило:

$$d^k f(\mathbf{x}) = d\left(d^{k-1} f(\mathbf{x})\right).$$

Здесь при вычислении дифференциала от $d^{k-1} f(\mathbf{x})$ мы рассматриваем $d^{k-1} f(\mathbf{x})$ как функцию исходных переменных $x_1, \ldots, x_n$ функции f, а аргументы $h_1, \ldots, h_n$ выступают в качестве параметров. Например:

$$d^2 f(x,y) = d(df(x,y)) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)h_2\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h_1\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)h_2\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)h_1 + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)h_2 =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)h_2\right)h_1 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)h_2\right)h_2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)h_2^2;$$

здесь предполагается, что $f \in C^2(D)$ и $(x,y) \in D$.

Формула Тейлора для функции многих переменных

Теорема

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^k(D)$ и отрезок $\mathbf{x} + t\mathbf{h}$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, лежит в D. Тогда верны:

1. *формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) + \frac{1}{2!}d^2 f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) + \ldots + \frac{1}{k!}d^k f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) + o(|\mathbf{h}|^k),$$

2. *формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) + \frac{1}{2!}d^2 f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}d^{k-1} f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) +$$

$$+ r_k(\mathbf{x}, \mathbf{h}), \text{ где } r_k(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \frac{1}{k!}d^k f(\mathbf{x} + \theta\mathbf{h})(\mathbf{h}), \text{ а } \theta = \theta(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \in (0, 1) .$$

С ростом k функция f всё точнее приближается **многочленом Тейлора нескольких переменных** степени не выше k.

Развернутая запись при $n = 2$, $k = 2$. Пусть D – область в $\mathbb{R}^2$, $f \in C^2(D)$ и все точки $(x + th_1, y + \theta h_2)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, лежат в D. Тогда, во-первых,

$$f(x + h_1, y + h_2) =$$

$$= f(x, y) +$$

Значение функции в точке (x, y)

$$+\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2 +$$

Линейная по h_1, h_2 часть приращения

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)h_2^2\right) +$$

Квадратичная по h_1, h_2 часть приращения

$$+o(h_1^2 + h_2^2),$$

Остаточный член в форме Пеано

или, в другой форме записи,

$$f(x + h_1, y + h_2) =$$

$$= f(x, y) + \nabla f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \cdot H_f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(h_1^2 + h_2^2).$$

Во-вторых,

$$f(x+h_1,y+h_2)=$$

$$=f(x,y)+$$ Значение функции в точке (x,y)

$$+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)h_2+$$ Линейная по h_1,h_2 часть приращения

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x+\theta h_1,y+\theta h_2)h_1^2+\right.$$ Остаточный квадратичный по h_1,h_2 член в форме Лагранжа

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x+\theta h_1,y+\theta h_2)h_1h_2+$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+\theta h_1,y+\theta h_2)h_2^2\right),$$

или, в другой форме записи,

$$f(x+h_1,y+h_2)=$$

$$=f(x,y)+\nabla f(x,y)\cdot\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h_1 & h_2\end{pmatrix}\cdot H_f(x+\theta h_1,y+\theta h_2)\cdot\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix},$$

где $\theta\in(0,1)$.

Пример. Выпишем формулы Тейлора для функции $f(x,y) = \dfrac{2x}{x+y}$ в точке $(1,1)$:
(а) 2-го порядка с остаточным членом в форме Пеано,
(б) 1-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$f(1,1) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{(x+y)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x}{(x+y)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x+y)^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = \frac{1}{2}$$

- Многочлен Тейлора 2-го порядка функции f в точке $(1,1)$ с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(1+h_1,1+h_2)=1+\frac{1}{2}h_1-\frac{1}{2}h_2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}h_1^2+\frac{1}{2}h_2^2\right)+o(h_1^2+h_2^2).$$

- Формула Тейлора 1-го порядка функции f в точке $(1,1)$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(1+h_1,1+h_2)=1+\frac{1}{2}h_1-\frac{1}{2}h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{4(1+\theta h_2)}{(2+\theta(h_1+h_2))^3}h_1^2+2\cdot\frac{2\theta(h_1-h_2)}{(2+\theta(h_1+h_2))^3}h_1h_2+\frac{4(1+\theta h_1)}{(2+\theta(h_1+h_2))^3}h_2^2\right),$$

где $\theta\in(0,1)$.

Конечно, эти формы записи можно несколько упростить засчет вынесения общих множителей.