Математический анализ 1. Лекция 12.
Элементы выпуклого анализа (одномерный случай).
Исследование функций и их графики
Информация к контрольной работе

12 октября 2023 г.

Выпуклость и вогнутость и касательные

Теорема (альтернативное геометрическое определение выпуклости и вогнутости)

Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема на интервале X. Тогда

1. *f выпукла тогда и только тогда, когда график f лежит не ниже всякой касательной к ее графику.* ★
2. *f строго выпукла тогда и только тогда, когда график f лежит выше всякой касательной к ее графику за исключением точки касания.*
3. *f вогнута тогда и только тогда, когда график f лежит не выше всякой касательной к ее графику.*
4. *f строго вогнута тогда и только тогда, когда график f лежит ниже всякой касательной к ее графику за исключением точки касания.*

Доказательство. Уравнение касательной $l_a(x)$ к графику функции f в точке с абсциссой a имеет вид $l_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.
По формуле конечных приращений Лагранжа

$$f(x) - l_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = f'(c)(x-a) - f'(a)(x-a) =$$
$$= (f'(c) - f'(a))(x-a),$$

где c лежит между a и x. Значит, если функция f – выпуклая, то f' не убывает и поэтому $f(x) - l_a(x) \geqslant 0$ как при $x > a$, так и при $x < a$.

Обратно, пусть $f(x) - l_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \geqslant 0$, при всех $x, a \in X$, эквивалентно, $f(a) - f(x) - f'(a)(a-x) \leqslant 0$, откуда

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant f'(a) \text{ при } x < a \text{ и } f'(a) \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ при } x > a.$$

Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. В первом неравенстве выберем $x = x_1 < a$, во втором неравенстве $x = x_2 > a$ и затем в обоих неравенствах заменим a на $x \in (x_1, x_2)$. Тогда при всех $x_1 < x < x_2$ получим

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant f'(x), \quad f'(x) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

и тем самым

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

а это – одно из эквивалентных определений выпуклости. Поэтому функция f – выпуклая.

Если исходным было строгое неравенство $f(x) - l_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) > 0$ при всех $x, a \in X$, $x \neq a$, то это рассуждение приводит к тому, что функция f – строго выпуклая.

Пример. Функция $f(x) = 0$ при $|x| \leqslant 1$, $f(x) = (|x|-1)^2$ при $|x| > 1$ – дифференцируемая и выпуклая, но не строго выпуклая на $\mathbb{R}$.

Следующий результат имеет многочисленные приложения для доказательства различных неравенств.

Теорема (неравенство Йенсена)

Пусть $x_1, \ldots, x_n \in X$*, где* X *– промежуток и* $n \geqslant 2$*, а* $\alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ *таковы, что* $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$*.*
Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ *выпукла на* X*, то*

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ *вогнута на* X*, то*

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)).$$

Если, более того, f *строго выпукла (или строго вогнута), среди точек* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *есть различные и* $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$*, то эти неравенства являются строгими (их левая и правая части не могут совпадать).*

При указанных в теореме $\alpha_1 \ \ldots, \alpha_n$ число $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ называется *выпуклой линейной комбинацией* $x_1, \ldots, x_n$.

Доказательство (случай выпуклости). Воспользуемся методом математической индукции по n.

При $n = 2$ неравенство Йенсена совпадает с определением выпуклости.

Пусть $n = k > 2$ и утверждение верно при $n = k - 1$. Пусть даны $x_1, \ldots, x_k \in X$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in [0, 1]$ такие, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$. Положим

$$\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}.$$

Можно считать, что $\alpha > 0$ (иначе результат сводится к случаю $n = 2$); положим также

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant k-1} x_i \leqslant x = \frac{\alpha_1}{\alpha} x_1 + \ldots + \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha} x_{k-1} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant k-1} x_i \;\Rightarrow\; x \in X.$$

Тогда $\alpha, \alpha_k \in [0, 1]$, $\alpha + \alpha_k = 1$, $x, x_k \in X$. Поскольку функция f выпукла, то

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) = f(\alpha x + \alpha_k x_k) \leqslant \alpha f(x) + \alpha_k f(x_k).$$

По предположению индукции

$$f(x) = f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha} x_1 + \ldots + \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha} x_{k-1}\right) \leqslant \frac{\alpha_1}{\alpha} f(x_1) + \ldots + \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha} f(x_{k-1}).$$

После подстановки этого неравенства в предыдущее имеем

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) \leqslant \alpha \Big(\frac{\alpha_1}{\alpha} f(x_1) + \ldots + \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha} f(x_{k-1}) \Big) + \alpha_k f(x_k) =$$

$$= \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_k f(x_k).$$

Шаг индукции выполнен.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$. Она вогнутая на $(0, +\infty)$. Тогда по неравенству Йенсена при всех $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ и всех $\alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ с условием $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$ имеем

$$\ln(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \geqslant \alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_n \ln x_n$$

и после потенцирования

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \geqslant e^{\alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_n \ln x_n} = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

В частности, при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ получаем классическое неравенство

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

– среднее арифметическое положительных чисел больше или равно их среднего геометрического.
Более того, функция $f(x) = \ln x$ – строго вогнутая, поэтому если среди точек $x_1, \ldots, x_n \in X$ есть различные, то последнее неравенство является строгим.

Основные свойства выпуклых функций

1. *Функция f выпукла (строго выпукла) на промежутке X $\Leftrightarrow$ функция $-f$ вогнута (строго вогнута) на X.*

   Это уже обсуждалось на прошлой лекции и непосредственно следует из определения.

   Пример. Функция $f(x) = \sin x$ строго выпукла на сегменте $[\pi, 2\pi]$. Эквивалентно, функция $f(x) = -\sin x$ строго вогнута на $[\pi, 2\pi]$.

2. *Если функции f и g выпуклы (вогнуты), то любая их линейная комбинация $af + bg$ с коэффициентами $a > 0$ и $b > 0$ также выпукла (соответственно вогнута).*

   Это также непосредственно следует из определения.

   Пример. Функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = -\ln x$ выпуклы на интервале $(0, +\infty)$. Значит, функция $h(x) = 4x^2 - 7\ln x$ выпукла на $(0, +\infty)$.

3. *Если функции f и g: а) выпуклы; б) положительны; в) не убывают на промежутке X, то произведение fg имеет те же свойства на X.*

   Для случая дважды дифференцируемых функций f и g на интервале X имеем: $f'(x) \geqslant 0$ и $g'(x) \geqslant 0$, $f''(x) \geqslant 0$ и $g''(x) \geqslant 0$, поэтому $(fg)''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \geqslant 0$, следовательно, fg выпукла на X.

   Пример. Функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = e^x$ положительны, возрастают и выпуклы на полупрямой $(0, +\infty)$. Значит, функция–произведение $h(x) = x^2 e^x$ также выпукла на $(0, +\infty)$.

4. *а) Если функция g выпукла на интервале X, а функция f является выпуклой и неубывающей на интервале $g(X)$, то их композиция $f \circ g$ будет также выпуклой на X.*

   б) Если функция g вогнута на интервале X, а функция f является выпуклой и невозрастающей на интервале $g(X)$, то их композиция $f \circ g$ будет выпуклой на X.

   Для случая дважды дифференцируемых выпуклых функций f и g на интервале X имеем: $f'(x) \geqslant 0$, $f''(x) \geqslant 0$ и $g''(x) \geqslant 0$, поэтому $(f \circ g)''(x) = (f'(g(x))g'(x))' = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x) \geqslant 0$.

   Пример. Функция $g(x) = x^2$ – выпуклая на $\mathbb{R}$, функция $f(x) = e^x$ – выпуклая и возрастающая на $\mathbb{R}$. Значит, функция–композиция $h(x) = e^{x^2}$ выпукла на $\mathbb{R}$.

5. Функция f, выпуклая (вогнутая) на *интервале* X, непрерывна на X и имеет левую и правую производные в каждой точке $x \in X$, при этом $f'(x-0) \leqslant f'(x+0)$ (соответственно $f'(x-0) \geqslant f'(x+0)$).

   Более того, f дифференцируема в каждой точке $x \in X$, за исключением не более чем счетного множества точек.

   Пример. Функция $f(x) = |x|$ – выпуклая на $\mathbb{R}$, $f'(-0) = -1 < f'(x+0) = 1$.

Выпуклость и экстремумы

1. *Если функция f – выпуклая на промежутке X, то ее локальный минимум на X является также ее глобальным минимумом на нем.*

   Если функция f – вогнутая на промежутке X, то ее локальный максимум на X является также ее глобальным максимумом на нем.

Пример. Найдем

$$\min_{(0,5)} (x^2 - 8\ln x),$$

если он существует. Функция $f(x) = x^2 - 8\ln x$ – выпуклая на интервале $(0,5)$ (почему?). Кроме того, $f'(x) \equiv 2x - \frac{8}{x} = 0$ при $x = 2$, $f''(x) = 2 + \frac{8}{x^2} > 0$ и поэтому $x = 2$ есть точка *локального минимума* функции $f(x)$ на $(0,5)$. Значит, точка $x = 2$ есть точка и *глобального минимума* функции $f(x)$ на интервале $(0,5)$, и

$$\min_{(0,5)}(x^2 - 8\ln(x)) = f(2) = 4 - 8\ln 2.$$

Стационарная точка функции f – это точка, в которой $f'(x) = 0$.

2. *Любая стационарная точка $x_0 \in X$ функции f, выпуклой или вогнутой на промежутке X, будет ее точкой глобального минимума (соответственно, максимума).* Это утверждение очевидно в силу альтернативного геометрического определения выпуклости и вогнутости.

   Примеры. 1. В решении предыдущей задачи достаточно было установить, что $f'(2) = 0$.

   2. Стационарных точек у дифференцируемой выпуклой (вогнутой) функции может и не быть, например, это так для $f(x) = e^x$ на $\mathbb{R}$. Эта функция не имеет точек глобального экстремума на $\mathbb{R}$.

3. *Максимальное значение выпуклой и минимальное значение вогнутой функции f на сегменте $[a, b]$ достигаются в концах сегмента $[a, b]$.* Для выпуклой дифференцируемой на (a, b) функции f это понятно: если $x_0 \in (a, b)$ – точка локального экстремума, то по теореме Ферма в ней $f'(x_0) = 0$. Но по предыдущему свойству x_0 – точка минимума, поэтому ее максимальное значение f достигается в концах сегмента $[a, b]$.

   Пример. Найдем $\max\limits_{[-1,5]} e^{x^2}$. На сегменте $[-1, 5]$ функция $f(x) = e^{x^2}$ – выпуклая (см. выше). Поэтому

$$\max_{[-1,5]} e^{x^2} = \max\left\{e^{(-1)^2}, e^{5^2}\right\} = e^{25}.$$

Исследование функций

План основного исследования функции одной вещественной переменной

1. Область определения. Корни функции.
2. Свойства четности/нечетности (относительно некоторой точки x_0), периодичности и т.п.
3. Промежутки непрерывности. Точки разрыва и их классификация.
4. Асимптоты (вертикальные и наклонные) и поведение на бесконечности. Поведение функции слева и справа от точек разрыва, а также в концах промежутков области определения.
5. Промежутки возрастания/убывания. Локальные экстремумы и их тип.
6. Интервалы выпуклости/вогнутости и точки перегиба.
7. Отдельные точки для уточнения построения графика.
8. Глобальные экстремумы и их тип. Область значений.

Замечание

Конечно, в исследование функции можно включить и иные характерные свойства, например, левые и правые касательные (если они есть) в особых точках и т.п.

Замечание. Исследование функции на четность/нечетность и периодичность может быть нетривиальным. Так, рассмотрим функцию

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \text{ на } \mathbb{R}.$$

На первый взгляд может показаться, что она не обладает свойством четности или нечетности. Но поскольку $(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1}) = 1$, то имеет место равенство

$$f(-x) = \ln(-x+\sqrt{x^2+1}) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = -f(x),$$

т.е. эта функция **нечетная**.

Пример. Проведем полное исследование функции

$$f(x) = x\sqrt[3]{\ln^2 x}$$

и построим ее график.

1. **Область определения. Корни функции.** $D(f) = (0, +\infty)$. Уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение $x = 1$.
2. **Особенности (четность/нечетность, периодичность и т.п.)** Четности и нечетности, очевидно, нет (точки $-x$ не принадлежат $D(f)$ при $x \in D(f)$). Периодичности нет.

3. **Промежутки непрерывности, точки разрыва.** Это элементарная функция, ее область определения – интервал $(0, +\infty)$, и поэтому она непрерывна в каждой точке $x \in (0, +\infty)$.
4. **Асимптоты (вертикальные и наклонные) и поведение на бесконечности. Поведение в точках разрыва и в окрестности концов промежутков, составляющих область определения. Типы каждой точки разрыва.** Во всех точках, кроме, быть может, точки 0 вертикальных асимптот нет ввиду непрерывности $f(x)$ на всей области определения. Ставить вопрос о наклонной асимптоте можно только при $x \to +\infty$. Вычисляем предел

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{2}{3}} = +\infty.$$

   Значит, наклонной асимптоты нет. Кроме того, отсюда следует, что функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$.

   Остается рассмотреть точку 0 (левую границу области определения). Вычисляем

   $$\lim_{x\to0+0} f(x) = \lim_{x\to0+0} \left(x(\ln x)^{\frac{2}{3}} \right) = 0.$$

   Значит, в нуле тоже нет вертикальной асимптоты.

5. **Промежутки возрастания/убывания и экстремумы.**

- Находим производную: она существует при $x > 0$, $x \neq 1$

$$f'(x) = \left(x(\ln x)^{\frac{2}{3}}\right)' = (\ln x)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(\ln x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3\ln x + 2}{3(\ln x)^{\frac{1}{3}}}.$$

- Находим критические точки: $x = e^{-\frac{2}{3}}$ (где $f'(x) = 0$) и $x = 1$ (где $f'(x)$ не определена).
- Подставляя в $f'(x)$ точки из интервалов

$$\left(0, e^{-\frac{2}{3}}\right), \ \left(e^{-\frac{2}{3}}, 1\right) \text{ и } (1, +\infty),$$

находим знак производной на этих интервалах и, вместе с тем, промежутки возрастания/убывания и экстремумы:

x	$\left(0, e^{-\frac{2}{3}}\right)$	$\left(e^{-\frac{2}{3}}, 1\right)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Значит, $x = e^{-\frac{2}{3}}$ – точка строгого локального максимума, а $x = 1$ – точка строгого локального минимума.

6. **Области выпуклости/вогнутости и точки перегиба.**

- Находим вторую производную: она существует при $x > 0$, $x \neq 1$

$$f''(x) = \left((\ln x)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(\ln x)^{-\frac{1}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\frac{(\ln x - \frac{1}{3})}{x(\ln x)^{\frac{4}{3}}}.$$

- Находим критические точки $f'(x)$: $x = \sqrt[3]{e}$, где $f''(x) = 0$, и $x = 1$, где $f''(x)$ не существует.
- Подставляя в функцию $f''(x)$ точки из интервалов

$$(0,1),\ (1, \sqrt[3]{e}),\ (\sqrt[3]{e}, +\infty)\,,$$

  находим знак $f''(x)$ на них и вместе с тем интервалы выпуклости/вогнутости и точки перегиба

x	$(0,1)$	$(1, \sqrt[3]{e})$	$(\sqrt[3]{e}, +\infty)$
$\operatorname{sgn} f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	строго вогнута	строго вогнута	строго выпукла

Значит, $x = \sqrt[3]{e}$ – точка перегиба.

7. **Отдельные точки для построения графика.**

x	$e^{-\frac{2}{3}} \approx 0,51$	1	$\sqrt[3]{e} \approx 1,40$	$e \approx 2,72$
$f(x)$	$\left(\dfrac{2}{3e}\right)^{2/3} \approx 0,39$	0	$\left(\dfrac{e}{9}\right)^{1/3} \approx 0,67$	$e \approx 2,72$

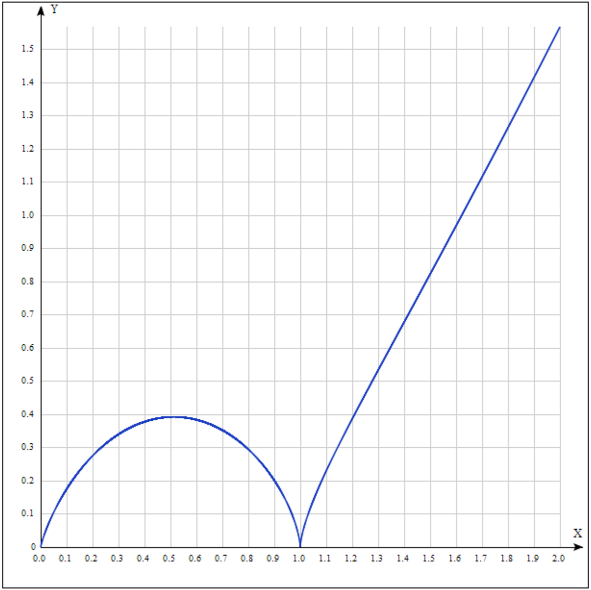
8. **Область значений.** Очевидно, что $f(x) \geqslant 0$. Кроме того, $f(1) = 0$ и поэтому $x = 1$ – точка глобального минимума, а $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, значит, $f(x)$ принимает сколь угодно большие значения и глобального максимума нет. Поскольку $f(x)$ непрерывна, она принимает и все промежуточные значения. Следовательно, $R(f) = [0, +\infty)$.

Дополнительные наблюдения.

$$\lim_{x\to 0+0} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1-0} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} f'(x) = +\infty.$$

Это показывает, что в точках 0 и 1 график функции $f(x)$ образует с осью Ox угол $\frac{\pi}{2}$.

Построение графика



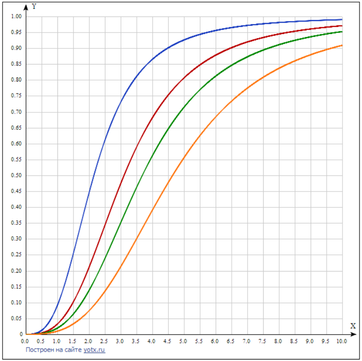
Замечание

В математическом моделировании бывает нужно решать задачу обратного типа: по известным свойствам подобрать (несложную) аналитическую формулу для функции.

Пример

Подобрать функцию такую, что:

1. ее график гладко выходит из нуля $(f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 0)$,
2. монотонно возрастает,
3. ее график имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ при $x \to +\infty$,
4. ее график имеет перегиб в точке c (регулируемый параметр).



Ответ.

Например, $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 + a}$, $a = \sqrt[3]{\dfrac{c}{2}}$.

Вопросы по лекциям к контрольной работе

Каждое определение, **каждое** свойство **и каждый** пункт теоремы должны сопровождаться содержательными примерами. Примеры могут быть взяты из лекций, но это не обязательно; в тех очень редких случаях, когда примера в лекциях не было, приведите свой пример. Доказательства свойств и теорем приводить **не требуется**. Материал лекций 1-3 и много материала из остальных лекций в этот список вопросов не включены.

В варианты контрольной работы войдут 2 вопроса только из выделенных жирным шрифтом.

Лекция 4.

1. Второй замечательный предел и экономический смысл числа Эйлера.

2. Геометрическое и аналитическое определения предела функции по Коши в вещественных точках и на бесконечности. Определение предела функции по Гейне.

3. Ограниченная, бесконечно малая и бесконечно большая функции. Бесконечно большие положительная и отрицательная функции.

4. Четыре свойства ограниченных, бесконечно малых и бесконечно больших функций.

5. Теорема о пределах алгебраических операций над функциями.

6. Теорема о пределах функций и неравенствах (четыре пункта).

7. Семь базовых пределов для решения первых задач о пределах.

Лекция 5.

8. Определение свойства эквивалентности функций. Шесть его свойств.

9. Отношение о малое между функциями. Семь его свойств.

10. Теорема о записи свойства эквивалентности как формулы с символом о малое и семь формул – следствий для элементарных функций.

Лекция 6.

11. Свойство непрерывности функции. Точка разрыва функции. Классификация точек разрыва (три типа точек разрыва).

12. Три локальных свойства непрерывных функций.

13. Глобальные свойства непрерывных функций: теоремы Вейерштрасса и Коши и теорема, их объединяющая.

14. Вертикальные и наклонные асимптоты. Формулы для коэффициентов наклонной асимптоты.

Лекция 7.

15. Производная функции (две формулы). Дифференцируемость функции, дифференциал. Теорема о связи между этими понятиями.

16. Производные основных элементарных функций (шесть формул).

17. Четыре правила вычисления производных.

18. Логарифмическая производная и три ее свойства.

19. Эластичность, ее экономический смысл и три ее свойства.

Лекция 8.

20. Промежутки. Четыре типа функций, монотонных или нестрого монотонных на промежутке.

21. Теорема о критериях и достаточных условиях нестрогой монотонности и монотонности функций на промежутке (четыре пункта).
22. Четыре типа точек локального экстремума. Теорема Ферма о необходимом условии экстремума.
23. Достаточные условия локального экстремума: схема исследования функции на локальные экстремумы на интервале.
24. Схема нахождения глобальных экстремумов и области значений функции на сегменте.
25. Теорема Ролля, теоремы Лагранжа и Коши о конечных приращениях.
Лекция 9.
26. Производные высших порядков и три их основных свойства.
27. Формулы для высших производных некоторых элементарных функций (шесть формул).
28. Многочлен Тейлора. Теоремы о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.
29. Формулы Маклорена для пяти элементарных функций с записью их остаточных членов в форме Пеано.
Лекция 10.
30. Теорема о правиле Лопиталя. Примеры применения в вещественной точке и на бесконечности.
31. Теорема о втором достаточном условии экстремума (три пункта).
Лекция 11.
32. Односторонняя непрерывность. Односторонние производные, дифференцируемость и касательные.
33. Выпуклые и вогнутые функции. Геометрическое определение выпуклости и вогнутости, его аналитическая запись. Связь между определениями.
34. Теорема о критериях выпуклости и вогнутости дифференцируемой функции (четыре пункта).
35. **Теорема о свойствах выпуклости и вогнутости дважды дифференцируемой функции (четыре пункта).**
36. **Точка перегиба. Теорема о точках перегиба (три пункта). Теорема о втором достаточном условии перегиба.**
Лекция 12.
37. Основные свойства выпуклых функций (пять свойств).

Тематика задач к контрольной работе (4 задачи в каждом варианте).

1. Нахождение и классификация точек разрыва функции.
2. Нахождение асимптот функции.
3. Вычисление производных функции.
4. Нахождение промежутков монотонности и экстремумов функции.
5. Вычисление производных высшего порядка (разными способами).
6. Вычисление пределов функций (разными способами, в том числе с использованием соотношений эквивалентности и формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).
7. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости функций и точек перегиба.