

Математический анализ 1.
Направление 38.03.01 Экономика
Семинар 5. Эквивалентность функций и их порядки малости

1. Используя таблицы эквивалентностей, вычислите пределы:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \ln(1 + 3\sqrt[3]{x}) \cdot \sqrt[6]{\sqrt{1 + 128x^{10}} - 1}}{(1 - \cos(x^2)) \cdot (2^x - 1)}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2) \ln(x^2 - 3)}{\sin(x-2) \sin(\pi x)};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - \cos(3x)}{x[\sin(4x) - \sin(2x)]}.$$

2. Найдите такие числа A и α , что

$$\sqrt{4x^3 + 20x^2 + x - 1} - \sqrt{4x^3 - 6x^2 + 3x + 6} \sim Ax^\alpha \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

3. Чему равен предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^3}$?

4. Можно ли вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3}$?

5. Упростите выражение $1 - 2x + x^2 + x^3 - x^6 + o(x^2)$:

(1) при $x \rightarrow 0$; (2) при $x \rightarrow \infty$.

6. При $x \rightarrow 0$ упростите выражение:

$$(1) [1+x+o(x^2)][1+2x^2+o(x^2)][1+3x^2+o(x^2)]; \quad (2) [1+x+x^2+o(x^2)][2+2x+3x^2+o(x^2)].$$

7. Используя эквивалентности и порядки малости, вычислите пределы:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - \ln(1 + 3x)}{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt[3]{1 + 4x}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(2x) \cos(4x) - 1}{\sin(x) \sin(3x)}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3}}{\ln(1+x) - \ln(1+x^2)}.$$

8. С помощью техники o -малых решите задачи:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + nx)^m - (1 + mx)^n}{x}, \quad m, n \in \mathbb{N}; \quad (2) \text{ задачу 2.}$$

9. Используя эквивалентности и порядки малости, вычислите пределы:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + ax} \sqrt[n]{1 + bx} - 1}{x}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad m, n \in \mathbb{N};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \cos(3x)}{1 - \cos x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$$

10. Покажите, что $f(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow 0$ функция, и найдите такую функцию $g(x)$ вида Ax^n , что $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow 0$:

$$(1) f(x) = 3 \sin^2 x^2 - 5x^5; \quad (2) f(x) = \sqrt{4 - x^4} + x^2 - 2; \quad (3) f(x) = \sin(\sqrt{x^2 + 9} - 3).$$

11. Покажите, что $f(x)$ – бесконечно большая при $x \rightarrow x_0$ функция, и найдите такую функцию $g(x)$ вида Ax^n , что $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow x_0$:

$$(1) f(x) = \frac{x^5}{2x^2 + x + 1}, \quad x_0 = \infty; \quad (2) f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}, \quad x_0 = \infty;$$

$$(3) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}, \quad x_0 = +\infty.$$

12. Для каждого из следующих выражений определите (с обоснованием), является ли оно верным или нет:

- (1) $x^2 = o(x)$ при $x \rightarrow 0$; (2) $x^2 = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$;
(3) $x = o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$; (4) $x = o(x^2)$ при $x \rightarrow \infty$;
(5) $\sqrt{x^2 + x} - x = o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$; (6) $\sqrt{x^2 + x} - x = o(1)$ при $x \rightarrow -\infty$;
(7) $\ln(1 + e^x) = o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$; (8) $\ln(1 + e^x) = o(1)$ при $x \rightarrow -\infty$.

13. Найдите функцию $g(x)$ вида Ax^n такую, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow x_0$:

- (1) $f(x) = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^5 + x^2 + 1}$, $x_0 = 0$, $x_0 = +\infty$;
(2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$.

14. Используя технику замены на эквивалентные величины, найдите пределы:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x) \ln(1 - \sin(2x))}{(1 - \cos(4x))(2^x - 1)}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3 + x} - 2) \sin(\pi x)}{(\log_2(x) - 1)(2^x - 2)}$.

15. Используя технику порядков малости, найдите пределы:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - \cos x + 1}{x(\sqrt{1 + 4x} - \ln(1 + 3x) - 1)}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[4]{1 + 4x} - \sqrt[3]{1 + 6x})(e^{x^3} - 1)}{\sqrt{1 + x^4} - \cos^2(x^2)}$;
(3) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - \sqrt[3]{x + 3}}{\log_5(x) - 1}$; (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 + x^2} + x^3 - 1}{\ln \cos x}$;
(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x - 2 \operatorname{tg} x)^2 + (1 - \cos 2x)^3}{\operatorname{tg}^7 6x + \sin^6 x}$.