Математический анализ 1. Направление 38.03.01 Экономика
Тема 2. Функции нескольких переменных
Семинар 2.13. Зависимость экстремумов от параметров

1. В задачах этого пункта $F(\boldsymbol{\alpha})$ обозначает значение функции $f_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$ в точке строгого локального экстремума; если для данного $\boldsymbol{\alpha}$ таких точек несколько, то для каждой точки строгого локального экстремума вводится своя функция $F(\boldsymbol{\alpha})$ (!). Здесь $\boldsymbol{\alpha}$ – параметр α или набор параметров (α, β), а $\mathbf{x}$ – вектор переменных.

   (1) $f_\alpha(x,y) = x^2 + \dfrac{xy}{\alpha} + y^2 - \alpha^2 x - 2\alpha^2 y$. Проверьте выполнение условий теоремы об огибающей для безусловных экстремумов при $\alpha = 1$. Если они выполнены, то с использованием этой теоремы найдите $F'(1)$.

   (2) $f_\alpha(x,y) = x^3 + \alpha y^3 - (\alpha^2 - 4)x - (8+\alpha)y$. Проверьте выполнение условий теоремы об огибающей для безусловных экстремумов при $\alpha = 4$. Если они выполнены, то с использованием этой теоремы найдите $F'(4)$.

   (3) $f_\alpha(x,y) = x^4 + y^4 - 4(\alpha-1)x - (1-\alpha^2)y$. Проверьте выполнение условий теоремы об огибающей для безусловных экстремумов при $\alpha = 1$. Если они выполнены, то с использованием этой теоремы найдите $F'(1)$.

   (4) $f_{\alpha,\beta}(x,y) = 4\alpha x^2 + (\alpha-\beta)xy + \beta y^2 - \alpha^3 x + \beta^3 y$. Проверьте выполнение условий теоремы об огибающей для безусловных экстремумов при $(\alpha,\beta) = (1,2)$. Если они выполнены, то с использованием этой теоремы найдите $\nabla F(1,2)$.

2. В задачах этого пункта $F(\boldsymbol{\alpha})$ обозначает значение функции $f_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$ в точке строгого условного локального экстремума при условии $G_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ либо $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$; если для данного $\boldsymbol{\alpha}$ таких точек несколько, то для каждой точки строгого локального экстремума вводится своя функция $F(\boldsymbol{\alpha})$ (!). Здесь $\boldsymbol{\alpha}$ – параметр α или набор параметров (α, β), а $\mathbf{x}$ – вектор переменных.

   (1) $f_\alpha(x,y) = \alpha x + (2-\alpha)y$, $G_\alpha(x,y) = \alpha x^2 - (1-\alpha)xy + \dfrac{y^2}{\alpha} - 9$. Проверьте выполнение условий теоремы об огибающей для условных экстремумов при $\alpha = 1$. Если они выполнены, то с использованием этой теоремы найдите $F'(1)$.

   (2) $f_\alpha(x,y,z) = (\alpha-1)x + y - z$, $\mathbf{G}_\alpha(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha x^2}{2} + y^2 - 1 \\ y + z + \alpha - 3 \end{pmatrix}$. Проверьте выполнение условий теоремы об огибающей для условных экстремумов при $\alpha = 2$. Если они выполнены, то с использованием этой теоремы найдите $F'(2)$.

   (3) $f_{\alpha,\beta}(x,y) = \alpha x^2 - \beta xy + \dfrac{\alpha-\beta}{2}y^2$, $G_\alpha(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - \alpha^2 - \beta^2$. Проверьте выполнение условий теоремы об огибающей для условных экстремумов при $(\alpha,\beta) = (1,-1)$. Если они выполнены, то с использованием этой теоремы найдите $\nabla F(1,-1)$.

3. В задачах этого пункта $F(\boldsymbol{\alpha})$ обозначает значение функции $f_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$ в точке строгого условного локального экстремума при условии $G_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ либо $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (если для данного $\boldsymbol{\alpha}$ таких точек несколько, то для каждой точки строгого локального экстремума вводится своя функция $F(\boldsymbol{\alpha})$ (!). Здесь $\boldsymbol{\alpha}$ – параметр α или набор параметров (α, β), а $\mathbf{x}$ – вектор переменных.

(1) $f_\alpha(x,y) = 2x^2 + (5-\alpha)xy + 2y^2,\ G_\alpha(x,y) = -\sqrt{\alpha}x + y - \alpha$. Проверьте выполнение условий теоремы об огибающей для условных экстремумов при $\alpha = 1$. Если они выполнены, то с использованием этой теоремы найдите $F'(1)$.

(2) $f_{\alpha,\beta}(x,y,z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \dfrac{\alpha+\beta}{2}z^2,\ G_{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,z) = \sqrt{\alpha\beta}x + y + \beta z + 1$. Проверьте выполнение условий теоремы об огибающей для условных экстремумов при $(\alpha,\beta) = (1,1)$. Если они выполнены, то с использованием этой теоремы найдите $\nabla F(1,1)$.

(3) $f_\alpha(x,y,z) = x^2 + 2\alpha^2 y^2 + 2\alpha^3 z^2$, $\mathbf{G}_\alpha(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - \alpha y - \alpha^5 z + 5 \\ 4x + 4y + (\ln\alpha - 1)z \end{pmatrix}$. Проверьте выполнение условий теоремы об огибающей для условных экстремумов при $\alpha = -1$. Если они выполнены, то с использованием этой теоремы найдите $F'(-1)$.

4. Вернемся к семинару 2.11 и задаче 6: у потребителя имеется k у.е., которые он хочет потратить на 2 товара, первый из которых стоит a у.е. за единицу, а второй — b у.е. за единицу. Пусть полезность, получаемая потребителем от x единиц первого товара и y единиц второго товара, задается функцией полезности Кобба-Дугласа $U(x,y) = x^\alpha y^\beta$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и $\alpha + \beta = 1$. Покажите, что полезность максимальна при $x = \dfrac{k\alpha}{a}$ и $y = \dfrac{k\alpha}{b}$.

   Теперь найдите предельную полезность денег в этой задаче и определите, насколько изменится максимальная полезность, если бюджет потребителя увеличится на 1 у.е.

   Указание. Предельной полезностью денег является множитель Лагранжа в точке строгого условного локального экстремума функции полезности при заданном бюджетном ограничении, взятый с противоположным знаком.

5. Дана функция полезности $u(x,y) = 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ и бюджетное ограничение $px + qy = P$ (здесь (x,y) — вектор приобретенных потребителем благ, p, q – цены этих благ, P – бюджет потребителя). Поведение потребителя рационально: при любом значении параметров p, q, P он выбирает набор благ, обеспечивающий ему максимальную полезность $U(p,q,P)$ в пределах бюджета. Значения параметров в некоторый момент времени составляют $p = 10, q = 30, P = 100$. При каком развитии событий полезность $U(p,q,P)$ увеличится наиболее сильно:

   (1) цена p первого блага уменьшилась на малую величину d;

   (2) цена q второго блага уменьшилась на малую величину d;

   (3) бюджет p увеличился на малую величину $2d$.