Математический анализ 1. Лекция 2.10 Неявные скалярные и вектор-функции нескольких переменных

4 декабря 2023 г.

Неявные скалярные функции нескольких переменных
Теорема о неявных скалярных функциях нескольких переменных
Пример поиска точек экстремума неявной функции

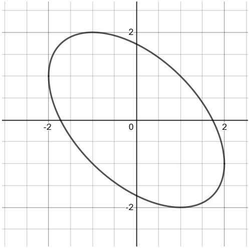
Неявные вектор-функции нескольких переменных
Теорема о неявной вектор-функции нескольких переменных

- Дифференциал неявно заданной функции y можно вычислить (разумеется, при условии ее существования и дифференцируемости), используя инвариантность формы первого дифференциала:

$$\begin{aligned} F(x, y(x)) \equiv 0 \Rightarrow\ & dF(x, y(x)) \equiv 0 \\ \Rightarrow\ & F'_x(x, y(x))dx + F'_y(x, y(x))dy(x) = 0 \\ \Rightarrow\ & dy(x) = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}dx. \end{aligned}$$

- Совокупность изложенных фактов позволяет исследовать неявные функции, в том числе, на экстремумы, выпуклость и т.д.

Пример



Найдем и классифицируем точки экстремума неявной функции, заданной уравнением

$$x^2 + xy + y^2 = 3;$$

фактически речь идет о нескольких неявных функциях.

1. Положим $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3$. Функция y определена в окрестности любой точки $A(x_0, y_0)$ такой, что $F'_y(x_0, y_0) = x_0 + 2y_0 \neq 0$. Для каждой функции y, которую локально задает уравнение $F(x,y) = 0$, выполнено:

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{2x+y}{x+2y}.$$

Стационарные точки каждой функции определяются уравнением $2x + y = 0$, при этом они должны лежать на кривой Γ (удовлетворять уравнению $F(x,y) = 0$). Поэтому для них получаем **систему уравнений**

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Стационарные точки: $A(1,-2)$ и $B(-1,2)$.

2. Для исследования на экстремум вычислим в них вторую производную

$$y'' = -\frac{(2+y')(x+2y) - (2x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2} = \frac{3(xy' - y)}{(x+2y)^2}.$$

Дальнейшие преобразования можно не делать (!), т.к. в стационарных точках $y' = 0$.

Поэтому имеем

$$\text{в точке } A\text{: } y'' > 0 \Rightarrow A \text{ – точка минимума,}$$
$$\text{в точке } B\text{: } y'' < 0 \Rightarrow B \text{ – точка максимума}$$

(**разных функций** y). Геометрически из рисунка эти ответы очевидны.

Рассмотрим более сложное, чем на предыдущей лекции, уравнение

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \tag{1}$$

с аргументами-параметрами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in S$ и искомым аргументом $y \in S_y$, где $S \subset \mathbb{R}^n$ и $S_y \subset \mathbb{R}$ — некоторые множества. Тем самым искомой становится **неявная скаялярная функция нескольких переменных** $y = f(\mathbf{x})$ с $D(f) \subset S$ и $R(f) \subset S_y$.
Часто для нее используют просто обозначение $y = y(\mathbf{x})$, и мы тоже будем так иногда поступать.
Простым примером является уравнение

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 + a_{n+1} y^2 - a_0 = 0, \tag{2}$$

с заданными постоянными $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ и a_0 или более общее уравнение

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j - a_0 = 0,$$

с заданными постоянными a_{ij} и a_0, связанное с поверхностями 2-го порядка, рассматриваемое относительно переменной $y = x_{n+1}$. Здесь $S = \mathbb{R}^n$, $S_y = \mathbb{R}$.
Следующая теорема о локальной однозначной разрешимости уравнения (1) обобщает теорему из предыдущей лекции.

Теорема

Пусть выполнены условия:
1) функция $F(\mathbf{x}, y)$ *определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки* $(\mathbf{x}_0, y_0)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$;
2) точка $(\mathbf{x}_0, y_0)$ *такова, что* $F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$;
3) частная производная $F'_y(\mathbf{x}, y)$ *непрерывна в точке* $(\mathbf{x}_0, y_0)$ *и* $F'_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$.
Тогда для каждого $\mathbf{x}$ *с* $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_0$ *существует единственное решение уравнения*

$$F(\mathbf{x}, y) = 0, \quad |y - y_0| < \varepsilon_0 \tag{3}$$

при достаточно малых $\delta_0 > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$, *которое является неявной функцией* $y = f(\mathbf{x})$ *такой, что* $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$ *и* $f(\mathbf{x})$ *дифференцируема при* $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_0$.

Если функция $F(\mathbf{x}, y)$ *дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $(\mathbf{x}_0, y_0)$, *то* $f(\mathbf{x})$ *дважды непрерывно дифференцируема при* $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_0$.

Снова нетрудно вывести неявные формулы для частных производных функции $f(\mathbf{x})$. Она удовлетворяет тождеству

$$F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \equiv 0 \quad \forall \mathbf{x}: \ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_0. \tag{4}$$

Продифференцируем его по x_i, $i = 1, \ldots, n$ и по формуле для частных производных композиции функций получим

$$F'_{x_i}\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big) + F'_y\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big) f'_{x_i}(\mathbf{x}) \equiv 0, \tag{5}$$

откуда

$$f'_{x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{F'_{x_i}(\mathbf{x}, y)}{F'_y(\mathbf{x}, y)}\bigg|_{y=f(\mathbf{x})}. \tag{6}$$

Опять в силу условия $F'_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$ и непрерывности $F'_y(\mathbf{x}, y)$ в точке $(\mathbf{x}_0, y_0)$ свойство $F'_y(\mathbf{x}, y) \neq 0$ выполнено и в достаточно малой окрестности точки $(\mathbf{x}_0, y_0)$.
Например, для примера (2) это условие имеет вид $2a_{n+1}y_0 \neq 0$, т.е. $a_{n+1} \neq 0$ и $y_0 \neq 0$. Нетрудно понять, что эти условия связаны с существом дела и не могут быть отброшены (почему?).
Обратим внимание на следующее важное обстоятельство, связанное с дифференциалами исходной и искомой функции.

Дифференциал функции $F(\mathbf{x}, y)$ имеет вид

$$dF(\mathbf{x}, y) = F'_{x_1}(\mathbf{x}, y)dx_1 + \ldots F'_{x_n}(\mathbf{x}, y)dx_n + F'_y(\mathbf{x}, y)dy.$$

Согласно свойству инвариантности 1-го дифференциала относительно замены переменных эта формула сохраняет силу и в том случае, когда $y = y(\mathbf{x})$ и поэтому с учетом тождества (4) имеем

$$dF\big(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})\big) = F'_{x_1}\big(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})\big)dx_1 + \ldots F'_{x_n}\big(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})\big)dx_n + \\ + F'_y\big(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})\big)dy(\mathbf{x}) \equiv 0. \tag{7}$$

Отсюда при $F'_y\big(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})\big) \neq 0$ можно выразить дифференциал неявной функции

$$dy(\mathbf{x}) \equiv -\frac{F'_{x_1}(\mathbf{x}, y)}{F'_y(\mathbf{x}, y)}\bigg|_{y=y(\mathbf{x})} dx_1 - \ldots - \frac{F'_{x_n}(\mathbf{x}, y)}{F'_y(\mathbf{x}, y)}\bigg|_{y=y(\mathbf{x})} dx_n. \tag{8}$$

Поскольку также для любой дифференцируемой функции $dy(\mathbf{x}) = y'_{x_1}(\mathbf{x})dx_1 + \ldots + y'_{x_n}(\mathbf{x})dx_n$, то можно выписать формулы для частных производных неявной функции

$$y'_{x_1}(\mathbf{x}) \equiv -\frac{F'_{x_1}(\mathbf{x}, y)}{F'_y(\mathbf{x}, y)}\bigg|_{y=y(\mathbf{x})}, \ \ldots, y'_{x_n}(\mathbf{x}) \equiv -\frac{F'_{x_n}(\mathbf{x}, y)}{F'_y(\mathbf{x}, y)}\bigg|_{y=y(\mathbf{x})},$$

т.е. вторым способом снова получаются формулы (6).

Если функции $F(\mathbf{x}, y)$ и $f(\mathbf{x})$ дважды дифференцируемы, то полученное тождество (5) с $f'_{x_i}(\mathbf{x})$ можно еще раз продифференцировать по x_j и получить из него неявную формулу для $f''_{x_i x_j}(x)$ (выпишите ее самостоятельно; при каком условии на $F(\mathbf{x}, y)$ эта формула корректна? см. также пример ниже).

Кроме того, из тождества (9) с $dF\big(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})\big)$ (или формулы (8) с $dy(\mathbf{x})$) можно найти $d^2y(\mathbf{x})$ (см. пример ниже).

Возможность нахождения 1-х и 2-х частных производных неявных функций, пусть и в неявном виде, **позволяет исследовать такие функции на экстремум** по-прежнему на основе тех же теорем, что и для обычных «явных» функций.

В том числе в силу необходимых условий экстремума $f'_{x_i}(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, n$ тождества (5) и (4) в совокупности порождают систему уравнений для точек возможного экстремума $(\mathbf{x}, y)$

$$\begin{cases} F'_{x_1}(\mathbf{x}, y) = 0 \\ \vdots \\ F'_{x_n}(\mathbf{x}, y) = 0 \\ F(\mathbf{x}, y) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Это **система из** $n+1$ **нелинейных уравнений для** $n+1$ **неизвестных** $(x_1, \ldots, x_n, y)$. (Обратите внимание на то, что выписанная выше формула для $f'_{x_i}(\mathbf{x})$ непосредственно не использовалась).

Первые n уравнений системы следуют также из формулы (8), поскольку в точке возможного экстремума $dy(\mathbf{x}) = 0$.

Пример. Исследуем на экстремум неявную функцию $z = z(x, y)$ — решение уравнения

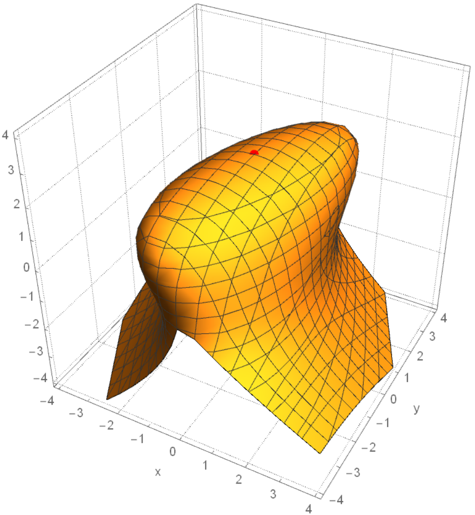
$$F(x, y, z) \equiv 4x^2 - xyz + y^2 + z^3 - 16 = 0, \tag{10}$$

где вместо (x_1, x_2, y) используется другое более стандартное в $\mathbb{R}^3$ обозначение переменных (x, y, z).

Отметим, что $F(x, y, z)$ — кубический многочлен относительно z. Следовательно, для любых x, y существует значение $z = z(x, y)$, являющееся решением уравнения (10) такое, что

$$4x^2 - xyz(x, y) + y^2 + z^3(x, y) - 16 \equiv 0, \qquad (11)$$

однако оно может быть не единственным при некоторых (x, y).



Анализ на экстремум состоит из двух этапов.
1-й этап — необходимые условия экстремума. В предположении дифференцируемости функции $z(x, y)$ продифференцируем тождество (11) по x и y:

$$8x - yz(x, y) - xyz'_x(x, y) + 3z^2(x, y)z'_x(x, y) \equiv 0, \tag{12}$$

$$-xz(x, y) - xyz'_y(x, y) + 2y + 3z^2(x, y)z'_y(x, y) \equiv 0. \tag{13}$$

В точках возможного экстремума $z'_x(x, y) = 0$, $z'_y(x, y) = 0$, что приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} z'_x(x, y) = 0 \\ z'_y(x, y) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - yz = 0 \\ -xz + 2y = 0 \\ 4x^2 - xyz + y^2 + z^3 - 16 = 0 \end{cases}. \tag{14}$$

Получена система из трех нелинейных уравнений для трех координат точки возможного экстремума (x_0, y_0, z_0). Разумеется, мы просто повторили в данном примере вывод системы (9) для конкретного уравнения, и можно было бы сразу ей воспользоваться.
Однако тождества (12), (13) потребуются также ниже на 2-м этапе.

Из 1-го и 2-го уравнений последовательно имеем

$$x = \frac{yz}{8}, \quad y = \frac{xz}{2} \ \Rightarrow \ x = \frac{xz^2}{16} \ \Leftrightarrow \ x\left(1 - \frac{z^2}{16}\right) = 0.$$

1. Если $x = 0$, то и $y = 0$, а 3-е уравнение принимает вид $z^3 = 16$. Отсюда $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 2\sqrt[3]{2})$.
2.Если же $1 - \frac{z^2}{16} = 0$, то $z = \pm 4$.
При $z = 4$ из предыдущих формул имеем $y = 2x$ и $F(x, 2x, 4) = 4^3 - 16 = 48 \neq 0$. Поэтому 3-е уравнение системы не выполнено. При $z = -4$ ситуация аналогичная.

Таким образом, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 2\sqrt[3]{2})$ — единственная точка возможного экстремума.

Вычислим $F'_z(x, y, z) = -xy + 3z^2$ и обратим внимание на то, что $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 3z_0^2 \neq 0$. Проверка этого условия существенна, т.к. в силу теоремы 1 оно обеспечивает не только существование, но и единственность решения уравнения (10) в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) и тем самым корректность рассмотрения неявной функции $z(x, y)$.

Дополнительно заметим, что по правилам арифметических операций над дифференциалами имеем

$$dF(x,y,z) = 8xdx - (yzdx + xzdy + xydz) + 2ydy + 3z^2dz =$$

$$= (8x - yz)dx + (2y - xz)dy + (3z^2 - xy)dz,$$

поэтому

$$\left[(8x - yz)dx + (2y - xz)dy + (3z^2 - xy)dz\right]\Big|_{z=z(x,y)} \equiv 0. \tag{15}$$

При $3z^2 - xy \neq 0$ находим выражение для 1-го дифференциала неявной функции

$$dz(x,y) \equiv \left(-\frac{8x - yz}{3z^2 - xy}dx - \frac{2y - xz}{3z^2 - xy}dy\right)\Big|_{z=z(x,y)}. \tag{16}$$

Отсюда также непосредственно следуют первые два уравнения системы (14).

2 этап — достаточные условия экстремума. Чтобы проверить достаточные условия экстремума, найдем 2-е частные производные функции $z(x, y)$ в точке возможного экстремума (для наглядности в предположении, что $z(x, y)$ дважды дифференцируема в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0)); напомним, что $z_0 = z(x_0, y_0)$. Продифференцируем тождество (12) по x:

$$8 - 2yz'_x(x, y) - y(zz'_x)(x, y) - xyz''_{xx}(x, y) + 6\big(z(z'_x)^2\big)(x, y) + 3(z^2 z''_{xx})(x, y) \equiv 0.$$

Отсюда можно найти $z''_{xx}(x, y)$, но для решения поставленной задачи это не нужно. В точке возможного экстремума это тождество **радикально упрощается** и поэтому найти только $z''_{xx}(x_0, y_0)$ намного проще:

$$8 + 3z_0^2 z''_{xx}(x_0, y_0) = 0 \;\Rightarrow\; z''_{xx}(x_0, y_0) = -\frac{8}{3z_0^2}.$$

(Значение z_0 мы явно не подставляем во избежание громоздких выражений; более того, здесь в этом нет необходимости).

Продифференцируем тождество (13) по y, рассмотрим результат в точке возможного экстремума и найдем $z''_{yy}(x_0, y_0)$:

$$-2xz'_y(x,y) - xyz''_{yy}(x,y) + 2 + 6\big(z(z'_y)^2\big)(x,y) + 3(z^2 z''_{yy})(x,y) \equiv 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2 + 3z_0^2 z''_{yy}(x_0,y_0) = 0 \;\Rightarrow\; z''_{yy}(x_0,y_0) = -\frac{2}{3z_0^2}.$$

Продифференцируем тождество (12) также по y, рассмотрим результат в точке возможного экстремума и найдем $z''_{xy}(x_0, y_0)$:

$$-z(x,y) - yz'_y(x,y) - xz'_x(x,y) - xyz''_{xy}(x,y) + 6(zz'_y z'_x)(x,y) +$$

$$+3(z^2 z''_{xy})(x,y) \equiv 0 \;\Rightarrow\; -z_0 + 3z_0^2 z''_{xy}(x_0,y_0) = 0 \;\Rightarrow\; z''_{xy}(x_0,y_0) = \frac{z_0}{3z_0^2}.$$

Для той же цели можно было с равным успехом продифференцировать и тождество (13) по x (если сложность подобных двух тождеств разная, то можно выбирать более простое). Составим матрицу Гессе неявной функции $z(x,y)$ в точке (x_0, y_0):

$$A = \begin{pmatrix} z''_{xx}(x_0,y_0) & z''_{xy}(x_0,y_0) \\ z''_{xy}(x_0,y_0) & z''_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \frac{1}{3z_0^2}\begin{pmatrix} -8 & z_0 \\ z_0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\det A = \frac{1}{9z_0^4}(16 - z_0^2) = \frac{1}{9z_0^4}(z_0^3 - z_0^2) > 0$ (т.к. $z_0 > 1$). Поэтому по теореме о дост. условиях экстремума в точке (x_0, y_0) имеется строгий локальный экстремум, а т.к. $a_{11} = \frac{1}{3z_0^2}(-8) < 0$, то это точка строгого локального максимума.
Дополнительно заметим, что взятие дифференциала обеих частей тождества (15) по правилам арифметических операций над дифференциалами влечет тождество для $d^2z = d(dz)$:

$$[d(8x - yz)]\,dx + [d(2y - xz)]\,dy + [d(3z^2 - xy)]\,dz + [(3z^2 - xy)]d^2z \equiv 0$$

при $z = z(x, y)$. С помощью формул $d(8x - yz) = 8dx - zdy - ydz$,

$$d(2y - xz) = 2dy - zdx - xdz, \quad d(3z^2 - xy) = 6zdz - ydx - xdy$$

и формулы (16) для dz отсюда можно найти $d^2z(x, y)$, т.е. записать этот 2-й дифференциал как квадратичную форму относительно dx и dy (выпишите эту формулу самостоятельно).
При этом в точке возможного экстремума (x_0, y_0) выкладки **радикально упрощаются**: т.к. $x_0 = y_0 = 0$ и $dz(x_0, y_0) = 0$, то

$$(8dx - z_0dy)dx + (2dy - z_0dx)dy + 3z_0^2 d^2z(x_0, y_0) = 0 \;\Rightarrow$$

$$d^2z(x_0, y_0) = \frac{1}{3z_0^2}(-8dx^2 + 2z_0dxdy - 2dy^2).$$

Это квадратичная форма с выписанной выше матрицей A. Отметим, что подход к анализу условий экстремума, основанный на 1-м и 2-м дифференциалах неявной функции без явного вычисления ее частных производных, быстрее приводит к цели.

Дальнейшим и более важным для приложений обобщением уравнения (1) является **система k нелинейных уравнений**

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = 0 \\ \vdots \\ F_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = 0 \end{cases}$$

с аргументами-параметрами $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in S$ и искомыми аргументами $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in S_y$, где $S \subset \mathbb{R}^n$ и $S_y \subset \mathbb{R}^k$ — некоторые множества. Тем самым искомыми становятся k неявных функций многих переменных $y_1 = y_1(\mathbf{x}), \ldots, y_k = y_k(\mathbf{x})$ с $D(y_1) \subset S, \ldots, D(y_k) \subset S$ и $R(y_1) \times \ldots \times R(y_k) \subset S_y$. В более компактной записи с аргументами-векторами указанная система принимает вид

$$F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \ldots, F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S, \quad \mathbf{y} \in S_y. \tag{17}$$

Какое условие (или условия) должно обобщать условие $F'_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$ из последней теоремы?

Пусть функции $F_1(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ldots,F_k(\mathbf{x},\mathbf{y})$ определены в некоторой окрестности точки $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k$, где точка $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ такова, что $F_1(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=0,\ldots,F_k(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=0$. Пусть указанная система имеет решение $y_1(\mathbf{x}),\ldots,y_k(\mathbf{x})$ в окрестности точки $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$. Тогда в окрестности точки $\mathbf{x}_0$ выполнены тождества

$$\begin{cases} F_1\big(\mathbf{x},y_1(\mathbf{x}),\ldots,y_k(\mathbf{x})\big)\equiv 0\\ \vdots\\ F_k\big(\mathbf{x},y_1(\mathbf{x}),\ldots,y_k(\mathbf{x})\big)\equiv 0\end{cases}.$$

Пусть функции $F_1(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ldots,F_k(\mathbf{x},\mathbf{y})$ дифференцируемы в окрестности точки $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$, а функции $y_1(\mathbf{x}),\ldots,y_k(\mathbf{x})$ дифференцируемы в окрестности точки $\mathbf{x}_0$. Продифференцируем указанные тождества по x_i (где $i=1,\ldots,n$) с использованием формул для частных производных композиции функций:

$$\begin{cases} F'_{1,x_i}\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)+F'_{1,y_1}\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)y'_{1,x_i}(\mathbf{x})+\ldots+F'_{1,y_k}\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)y'_{k,x_i}(\mathbf{x})\equiv 0\\ \vdots\\ F'_{k,x_i}\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)+F'_{k,y_1}\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)y'_{1,x_i}(\mathbf{x})+\ldots+F'_{k,y_k}\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)y'_{k,x_i}(\mathbf{x})\equiv 0\end{cases} \tag{18}$$

Здесь, например, в 1-й строке стоят частные производные функции $F_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ по $x_i, y_1, \dots, y_k$ в точке $\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)$ и частные производные функций $y_1(\mathbf{x}), \dots, y_k(\mathbf{x})$ по x_i. Кроме того, для компактности записи введена *вектор-функция* $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \big(y_1(\mathbf{x}), \dots, y_k(\mathbf{x})\big)$: у нее не только аргумент $\mathbf{x}$ является m-мерным вектором, но и значение $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ является k-мерным вектором.

Эти тождества при фиксированном $\mathbf{x}$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $y'_{1,x_i}(\mathbf{x})$,..., $y'_{k,x_i}(\mathbf{x})$. Ее компактный матричный вид следующий.

Введем *матрицу Якоби* k-го порядка функций $F_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$,..., $F_k(\mathbf{x},\mathbf{y})$ по переменным $y_1, \dots, y_k$, строки которой составлены из первых частных производных этих функций по $y_1, \dots, y_k$:

$$J(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \big\{F'_{i,y_j}(\mathbf{x},\mathbf{y})\big\}_{i,j=1}^{k} = \begin{pmatrix} F'_{1,y_1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \dots & F'_{1,y_k}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F'_{k,y_1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \dots & F'_{k,y_k}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{pmatrix}.$$

Величину $\det J(\mathbf{x},\mathbf{y})$ называют *якобианом*.

Введем также k-мерные векторы-столбцы

$$\mathbf{y}'_{x_i}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y'_{1,x_i}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ y'_{k,x_i}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}'_{x_i}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} F'_{1,x_i}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ \vdots \\ F'_{k,x_i}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{pmatrix}.$$

Тогда тождества (18) можно переписать в виде
$J\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(x)\big)\mathbf{y}'_{x_i}(\mathbf{x}) \equiv -\mathbf{F}'_{x_i}\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)$ при $i = 1,\ldots,m$, или подробнее

$$J\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(x)\big)\mathbf{y}'_{x_1}(\mathbf{x}) \equiv -\mathbf{F}'_{x_1}\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big),\ldots,J\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(x)\big)\mathbf{y}'_{x_n}(\mathbf{x}) \equiv -\mathbf{F}'_{x_n}\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big).$$

Таким образом, для нахождения векторов частных производных $\mathbf{y}'_{x_1}(\mathbf{x}),\ldots,\mathbf{y}'_{x_n}(\mathbf{x})$ неявных функций по каждой переменной $x_1,\ldots,x_n$ надо решить системы линейных алгебраических уравнений с одной и той же матрицей $J\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(x)\big)$ и правыми частями $-\mathbf{F}'_{x_1}\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big),\ldots,-\mathbf{F}'_{x_n}\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big)$ соответственно.
Если выполнено известное алгебраическое условие $\det J\big(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})\big) \neq 0$, то эти системы имеют единственное решение.

Тем самым аналогом (обобщением) условия $F'_y(\mathbf{x}_0,y_0) \neq 0$ из предыдущей теоремы служит одно (!) условие $\det J(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) \neq 0$.

В математическом анализе по сравнению с линейной алгеброй: элементы матрицы и компоненты правых частей и решений возникающих систем линейных алгебраических уравнений являются **функциями**, а не постоянными.

Теорема

Пусть выполнены условия:
1) функции $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \ldots, F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$*;*
2) точка $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *такова, что* $F_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0, \ldots, F_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$*;*
3) элементы матрицы Якоби $J(\mathbf{x}, \mathbf{y})$*, введенной в* (21)*, непрерывны в точке* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *и* $\det J(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$*.*
Тогда для каждого $\mathbf{x}$ *с* $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_0$ *существует единственное решение системы уравнений*

$$F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \ldots, F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| < \varepsilon_0$$

при достаточно малых $\delta_0 > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$*, которое является набором неявных функций* $y_1 = y_1(\mathbf{x})$*,...,* $y_k = y_k(\mathbf{x})$ *таких, что* $\mathbf{y}_0 = (y_1(\mathbf{x}_0), \ldots, y_k(\mathbf{x}_0))$ *и* $y_1(\mathbf{x})$*,...,* $y_k(\mathbf{x})$ *непрерывно дифференцируемы при* $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_0$*.*

Как уже было выведено выше, частные производные функций $y_1(\mathbf{x}), \ldots, y_k(\mathbf{x})$ по $x_1, \ldots, x_n$ можно найти, решив выписанные выше системы уравнений.

Если функции $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \ldots, F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $y_1(\mathbf{x}), \ldots, y_k(\mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, то и функции $y_1(\mathbf{x}), \ldots, y_k(\mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируемы при $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_0$.

Продифференцировав системы уравнений для частных производных функций $y_1(\mathbf{x}), \ldots, y_k(\mathbf{x})$ по $x_1, \ldots, x_n$, можно получить системы уравнений для $y''_{1x_ix_j}(\mathbf{x}), \ldots, y''_{kx_ix_j}(\mathbf{x})$ (выпишите их самостоятельно).

Пример. Найдем $z'(x)$, $z''(x)$, $dz(x)$, $d^2z(x)$ и точки локального экстремума неявной функции $z = z(x)$, которая вместе с $y = y(x)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$F_1(x, y, z) \equiv x + y + z = 0, \quad F_2(x, y, z)^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0.$$

Хотя y легко выражается через x, z, для иллюстрации общности подхода этой связью пользоваться не будем. Подставим в заданные уравнения искомые функции

$$x + y(x) + z(x) \equiv 0, \quad x^2 + y^2(x) + z^2(x) - 6 \equiv 0$$

и продифференцируем возникшие тождества:

$$1 + y'(x) + z'(x) \equiv 0, \quad 2x + 2y(x)y'(x) + 2z(x)z'(x) \equiv 0.$$

Они представляют собой систему линейных алгебраических уравнений для $y'(x)$ и $z'(x)$

$$y'(x) + z'(x) \equiv -1, \quad y(x)y'(x) + z(x)z'(x) \equiv -x.$$

Матрица этой системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y(x) & z(x) \end{pmatrix}$$

невырождена при $z(x) - y(x) \neq 0$.

При выполнении этого условия имеем

$$y'(x) = -1 - z'(x) \;\Rightarrow\; -y(x)(1 + z'(x)) + z(x)z'(x) = -x$$

$$\Rightarrow\; z'(x) = \frac{y(x) - x}{z(x) - y(x)} \;\Rightarrow\; y'(x) = \frac{x - z(x)}{z(x) - y(x)}$$

Если сюда подставить $y(x) = -x - z(x)$, то можно выразить $z'(x)$ только через x, $z(x)$.
Необходимое условие экстремума $z'(x) = 0$ в совокупности с заданными уравнениями приводит к системе уравнений

$$y - x = 0, \quad x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0$$

Она легко решается

$$y = x \;\Rightarrow\; z = -2x \;\Rightarrow\; 6x^2 - 6 = 0 \;\Rightarrow\; (x, y, z) = (1, 1, -2),\ (-1, -1, 2).$$

Условие $z - y \neq 0$ в найденных точках выполнено, и они являются точками возможного экстремума.
Чтобы найти 2-е производные, продифференцируем возникшие выше тождества с производными еще раз:

$$y''(x) + z''(x) \equiv 0, \quad 1 + (y'(x))^2 + y(x)y''(x) + (z'(x))^2 + z(x)z''(x) \equiv 0$$

Это снова система уравнений

$$y''(x) + z''(x) \equiv 0, \quad y(x)y''(x) + z(x)z''(x) \equiv -1 - (y'(x))^2 - (z'(x))^2$$

с той же самой матрицей (это общий факт). Имеем

$$y''(x) = -z''(x) \;\Rightarrow\; z''(x) = \frac{-1 - (y'(x))^2 - (z'(x))^2}{z(x) - y(x)}.$$

Поскольку $y(x)$, $y'(x)$, $z'(x)$ можно выразить через x, $z(x)$, то это возможно и для $z''(x)$. Для функций одной переменной

$$dz(x) = z'(x)dx, \quad d^2z(x) = z''(x)dx^2.$$

Учитывая, что $z'(\pm 1) = 0$, вычисляем

$$y'(-1) = -1, \quad z''(-1) = -\frac{2}{3} < 0; \quad y'(1) = -1, \quad z''(1) = \frac{2}{3} > 0.$$

Поэтому $x = -1$ — точка строгого локального максимума $z(x)$, а точка $x = 1$ — точка строгого локального минимума $z(x)$.