Математический анализ 1. Лекция 2.13. Зависимость экстремумов от параметров

14 декабря 2023 г.

Зависимость экстремумов от параметров: мотивация

Математические модели, которые рассматриваются в естественных и социальных науках, как правило, содержат некоторый набор параметров. При фиксированном наборе модель превращается в числовую. Числовая модель позволяет вычислить оптимальные (в том или ином смысле) значения интересующих нас величин. Но как они будут меняться при небольших изменениях параметров?

Пример. Дано бюджетное множество B, заданное условиями

$$\begin{cases} p_1x_1 + \ldots + p_nx_n \leqslant P \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

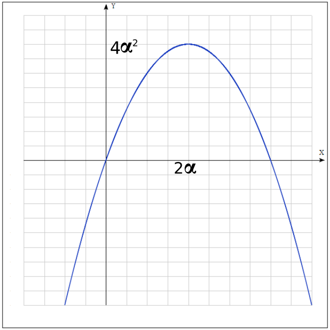
и функция полезности $U(x_1, \ldots, x_n)$, заданная на B.
"Рациональный" потребитель выбирает набор благ

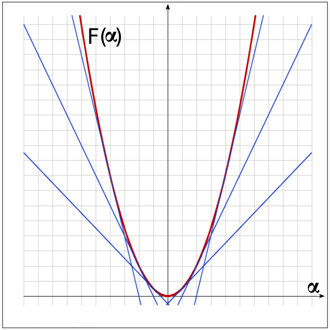
$$(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in B,$$

при котором функция полезности принимает максимальное значение $U_{\max}$ на множестве B. Однако и бюджетное ограничение P, и цены $p_1, \ldots, p_n$ благ могут измениться. Как тогда изменится максимальное значение функции полезности?
Иначе говоря, как себя ведет максимальная полезность $U_{\max}$ как функция переменных-параметров $P, p_1, \ldots, p_n$?

Простой пример.
Рассмотрим функцию $f(x, \alpha) = -x^2 + 4x\alpha$. Зафиксируем параметр α, и рассмотрим функцию $\varphi_\alpha(x) = f(x, \alpha)$. По x эта функция имеет локальный (и глобальный) максимум $F(\alpha) = 4\alpha^2$ в точке $\psi(\alpha) = 2\alpha$.

Перейдем к переменной α. Изобразим на одном рисунке функцию $F(\alpha)$ и функции $\theta_x(\alpha) = f(x, \alpha) = -x^2 + 4x\alpha$, где основной аргумент теперь α, а x – параметр, при нескольких значениях x.





Можно заметить, что:

- Поскольку
$$\theta_x(\alpha) = f(x, \alpha) \leqslant \max_x f(x, \alpha) = F(\alpha),$$
график функции $F(\alpha)$ расположен не ниже каждого из графиков функций $\theta_x(\alpha)$.
- Для $x = \psi(\alpha)$ неравенство переходит в равенство:
$$\theta_{\psi(\alpha)}(\alpha) = f(\psi(\alpha), \alpha) = \max_x f(x, \alpha) = F(\alpha).$$
При этом для каждого x можно подобрать такое α, что выполнится равенство $x = \psi(\alpha)$ (а именно, $\alpha = \frac{x}{2}$). Поэтому графики функций $F(\alpha)$ и $\theta_x(\alpha)$ пересекаются.
- Из двух предыдущих пунктов следует, что точка пересечения $\alpha_0 = \frac{x}{2}$ графиков функций $F(\alpha)$ и $\theta_x(\alpha)$ есть их *точка касания*. Иначе говоря, график функции $F(\alpha)$ есть *огибающая* семейства графиков функций $\theta_x(\alpha)$.

Определение

Кривая γ называется **огибающей** семейства кривых γ_α, зависящих от параметра α, если она в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства и каждым своим отрезком (участком) касается бесконечного множества этих кривых.

Кроме того, в силу изложенного можно получить формулу для вычисления производной функции $F(\alpha)$ (конечно, она не представляет интереса, когда имеется явное простое выражение для функции $F(\alpha)$). При $x = \psi(\alpha)$ выполнено равенство

$$F'(\alpha) = \frac{d\theta_x(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{x=\psi(\alpha)} = f'_\alpha(x, \alpha)|_{x=\psi(\alpha)}.$$

Проверим:

$$F'(\alpha) = (4\alpha^2)' = 8\alpha,$$

$$f'_\alpha(x, \alpha)|_{x=\psi(\alpha)} = 4x|_{x=\psi(\alpha)=2\alpha} = 8\alpha.$$

Теорема (об огибающей для безусловных экстремумов)

Пусть скалярная функция $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ определена в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ точки $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ и принадлежит классу $C^l(\mathcal{O})$, $l \geqslant 2$. Пусть также:

1. *$f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0) = \mathbf{0}$ для градиента f по переменным $\mathbf{x}$,*
2. *2-й дифференциал $\mathbf{h}^T D_{\mathbf{xx}} f(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)\mathbf{h}$ по переменным $\mathbf{x}$ есть положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма (поэтому функция $\varphi_{\boldsymbol{\alpha}_0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_0)$ имеет строгий локальный минимум (соответственно, максимум) в точке $\mathbf{x}_0$).*

Тогда существуют окрестность $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ точки $\boldsymbol{\alpha}_0$, окрестность $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ точки $\mathbf{x}_0$ и вектор-функция

$$\boldsymbol{\psi} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$$

класса $C^{l-1}(\mathcal{U})$ такие, что $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset \mathcal{O}$, и для каждого $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}$ точка $\psi(\boldsymbol{\alpha})$ есть единственная в окрестности $\mathcal{V}$ точка локального минимума (соответственно, максимума) по $\mathbf{x}$ функции

$$\varphi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}).$$

Теорема (продолжение)

При этом при всех $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}$ *определена функция*

$$F(\boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$$

$$(\textit{соответственно}, \quad F(\boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})),$$

она принадлежит классу $C^{l-1}(\mathcal{U})$ *и*

$$\nabla F(\boldsymbol{\alpha}) = (f'_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}))|_{\mathbf{x} = \psi(\boldsymbol{\alpha})}$$

для всех $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}$, *в частности,*

$$\nabla F(\boldsymbol{\alpha}_0) = f'_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0).$$

Замечание. Важно: эта теорема позволяет вычислять $\nabla F(\boldsymbol{\alpha}_0)$ минуя непосредственное вычисление самой функции $F(\boldsymbol{\alpha})$.

Пример

Пусть $F(\alpha, \beta)$ – значение строгого локального минимума функции

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x, y) = f(x, y, \alpha, \beta) = \beta^2 x^2 + \alpha\beta xy + \alpha y^2 - \alpha x - \beta y$$

по переменным x, y; здесь α, β – параметры.
Найдем частные производные функции F в точке $(\alpha, \beta) = (3, 2)$.

1. Проверяем условия применимости теоремы об огибающей для безусловных экстремумов (и корректность задачи), заодно вычисляем точку строгого локального минимума функции $\varphi_{3,2}(x, y)$.
   1.1 Находим градиент функции $\varphi_{3,2}(x, y) = f(x, y, 3, 2) = 4x^2 + 6xy + 3y^2 - 3x - 2y$:

   $$\nabla\varphi_{3,2}(x, y) = f'_{\mathbf{x}}(x, y, 3, 2) = (8x + 6y - 3, 6x + 6y - 2).$$

   1.2 Приравниваем его к нулевому вектору:

   $$\begin{cases} 8x + 6y - 3 = 0 \\ 6x + 6y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{6}. \end{cases}$$

   1.3 Находим второй дифференциал функции $\varphi_{3,2}(x, y) = f(x, y, 3, 2)$:

   $$d^2\varphi_{3,2}(x, y) = D_{\mathbf{xx}} f(x, y, 3, 2) = 8dx^2 + 12dxdy + 6dy^2.$$

По критерию Сильвестра это положительно определенная форма (при любых x, y – от них она не зависит).
Следовательно, во-первых, найденная точка $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ есть точка строгого локального минимума функции $\varphi_{3,2}(x, y)$,
во-вторых, все условия теоремы об огибающей для безусловных экстремумов выполнены.

2. Применяем теорему:

$$F'_\alpha(3,2) = f'_\alpha\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, 3, 2\right) =$$

$$= \left(\beta xy + y^2 - x\right)\Big|_{(x,y,\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{6},3,2\right)} = -\frac{23}{36},$$

$$F'_\beta(3,2) = f'_\beta\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, 3, 2\right) =$$

$$= \left(2\beta x^2 + \alpha xy - y\right)\Big|_{(x,y,\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{6},3,2\right)} = \frac{11}{12}.$$

Экономический пример: лемма Хоттелинга

Модель:

- $f(x_1, \ldots, x_n)$ – производственная функция, выражающая количество произведенной продукции в зависимости от факторов производства $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$,
- p – цена единицы продукции,
- $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{v}, \mathbf{x}) = v_1 x_1 + \ldots + v_n x_n$ – функция затрат (издержек).

Все параметры положительные.

Предположения:

- Производство рационально (оптимально), т.е. реализует максимум прибыли

$$\Pi(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}) - (\mathbf{v}, \mathbf{x})$$

  в естественной области $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$.
- Максимум прибыли достигается в одной и только одной из внутренних точек $\mathbf{x}_0$ естественной области; в этой точке условия теоремы об огибающей для функции Π выполнены.

Пусть $\mathbf{x}_0 = \psi(p, \mathbf{v})$. **Функцией прибыли** называется функция

$$\pi(p, \mathbf{v}) = \Pi(\psi(p, \mathbf{v})) = pf(\psi(p, \mathbf{v})) - (\mathbf{v}, \psi(p, \mathbf{v})).$$

По теореме об огибающей

$$\frac{\partial \pi(p, \mathbf{v})}{\partial p} = (pf(\mathbf{x}) - (\mathbf{v}, \mathbf{x}))'_p \Bigg|_{\mathbf{x}=\psi(p,\mathbf{v})} = f(\psi(p, \mathbf{v}))$$

или просто

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = f(\mathbf{x}_0),$$

т.е. **скорость роста прибыли в зависимости от роста цен примерно пропорциональна объему производства.**

Замечание. Лемму Хоттелинга можно вывести непосредственно, без ссылки на теорему об огибающей. Однако такой вывод, по существу лишь воспроизводит доказательство общего случая с небольшими упрощениями.

Доказательство теоремы об огибающей для безусловных экстремумов

Рассмотрим условие
$$f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}.$$

Задает ли оно локально некоторую гладкую зависимость $\mathbf{x}$ от $\boldsymbol{\alpha}$ в окрестности точки $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$?

Поскольку $f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0) = \mathbf{0}$, то для этого достаточно рассмотреть матрицу
$$(f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}))'_{\mathbf{x}}$$
в точке $\mathbf{x}_0$: если определитель этой матрицы не равен нулю, то такая зависимость есть по теореме о неявной функции.

Но эта матрица есть ни что иное, как (частичная) матрица Гессе $D_{\mathbf{xx}} f(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$ функции f по переменным $\mathbf{x}$. А значит,
$$\det D_{\mathbf{xx}} f(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0) \neq 0,$$
поскольку квадратичная форма $\mathbf{h}^T D_{\mathbf{xx}} f(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)\mathbf{h}$ положительно определена.

Сформулируем более точно то, что нам дает теорема о неявной функции в этом случае: существует окрестность $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ точки $\boldsymbol{\alpha}_0$, окрестность $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ точки $\mathbf{x}_0$ и функция $\psi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ класса $C^{k-1}(\mathcal{U})$ (гарантированная гладкость понижается на единицу, т.к., вообще говоря, если функция f принадлежит классу C^l, то f' принадлежит классу C^{l-1}) такие, что $\mathcal{V} \times \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$, и для каждого $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}$

$$f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}),$$

т.е. точка $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha})$ есть единственная стационарная точка функции $\varphi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$.

Далее, поскольку миноры матрицы $D_{\mathbf{xx}} f(\psi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha})$ непрерывно зависят от $\boldsymbol{\alpha}$ в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{\alpha}_0$, то в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{\alpha}_0$ (которую без ограничения общности можно считать той же окрестностью $\mathcal{U}$) они того же знака, что и соответствующие миноры матрицы $D_{\mathbf{xx}} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}_0), \boldsymbol{\alpha}_0) = D_{\mathbf{xx}} f(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$.

Поэтому квадратичная форма

$$\mathbf{h}^T D_{\mathbf{xx}} f(\psi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha})\mathbf{h}$$

также положительно (соответственно, отрицательно) определенная квадратичная форма, а точка $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha})$ есть точка минимума (соответственно, максимума) функции $\varphi_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Для вывода формулы для ∇F воспользуемся формулой производной композиции функций:

$$\nabla F(\boldsymbol{\alpha}) = \nabla(f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha})) = f'_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\psi}'(\boldsymbol{\alpha}) + f'_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) =$$

$$= f'_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha})$$

в силу необходимого условия экстремума, где ψ' – матрица Якоби вектор-функции $\boldsymbol{\psi}$.
Результат доказан.

Замечание

Условие 2 теоремы существенно: одного только существования в точке $\mathbf{x}_0$ строгого экстремума функции $\varphi_{\boldsymbol{\alpha}_0}(\mathbf{x})$ не достаточно.

Пример. Рассмотрим функцию

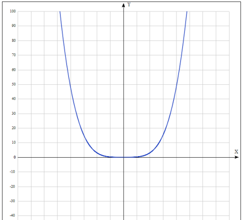
$$f(x,\alpha) = 3x^4 + 4\alpha x^3 - 12\alpha^2 x^2.$$

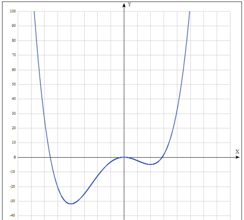
При $\alpha = 0$ функция $\varphi_0(\mathbf{x}) = f(x,0) = 3x^4$ имеет в точке $x_0 = 0$ строгий локальный минимум, равный нулю. Но здесь $f''_{xx}(x,0) = 3 \cdot 4 \cdot 3x^2$ обращается в 0 при $x_0 = 0$.

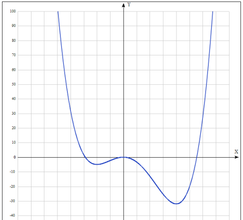
При $\alpha \neq 0$ имеем

$$f'_x(x,\alpha) = 12x(x^2 + \alpha x - 2\alpha^2),$$

и точка $x_0 = 0$ разделяется на две $x_1(\alpha) = \alpha$ и $x_2(\alpha) = -2\alpha$, со значениями локальных минимумов $-5\alpha^4$ и $-32\alpha^4$ соответственно, а в самой точке $x_0 = 0$ образуется локальный максимум.







Теорема (об огибающей для условных экстремумов)

Пусть числовая функция $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ *и вектор-функция* $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = (G_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), G_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \ldots, G_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}))$, *где* $k < n$, *определены в некоторой окрестности* $\mathcal{O}$ *точки* $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ *и принадлежат классу* $C^l(\mathcal{O})$, $l \geqslant 2$. *Пусть также:*

1. *матрица Якоби* $\mathbf{G}'(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$ *– матрица полного ранга* k,
2. *вектор* $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ *с* $\boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_{10}, \ldots, \lambda_{k0})$ *– стационарная точка функции Лагранжа задачи с фиксированным* $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0$:

$$L^{(0)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i G_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_0),$$

3. *пусть* $H_{L_0}(\mathbf{x})$ *– матрица Гессе функции* $L_0(\mathbf{x}) = L^{(0)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_0)$, E *– подпространство в* $\mathbb{R}^n$, *состоящее из множества решений однородной системы линейных уравнений* $\mathbf{G}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$, *а* $Q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T H_{L_0}(\mathbf{x}_0)\, \mathbf{h}$ *– квадратичная форма на подпространстве векторов* $\mathbf{h} \in E$ *– положительно (отрицательно) определена (и поэтому функция* $\varphi_{\boldsymbol{\alpha}_0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_0)$ *имеет условный минимум (соответственно, максимум) в точке* $\mathbf{x}_0$ *при условии* $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0) = \mathbf{0}$*).*

Теорема (продолжение)

Тогда существуют окрестность $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ *точки* $\boldsymbol{\alpha}_0$*, окрестность* $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ *точки* $\mathbf{x}_0$*, окрестность* $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^k$ *точки* $\boldsymbol{\lambda}_0$ *и вектор-функции*

$$\boldsymbol{\psi} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, \quad \boldsymbol{\chi} : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$$

класса $C^{l-1}(\mathcal{U})$ *такие, что* $\mathcal{V} \times \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$*, и для каждого* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}$ *точка* $(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\alpha}))$ *есть единственная в окрестности* $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ *стационарная точка функции Лагранжа с параметром* $\boldsymbol{\alpha}$*:*

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i G_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$$

и точка $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha})$ *есть точка локального условного минимума (соответственно, максимума) функции* $\varphi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ *при условии* $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$*.*

Теорема

При этом функция

$$F(\boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}:\, \mathbf{G}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$$

$$(\text{соответственно } F(\boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}:\, \mathbf{G}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}))$$

принадлежит классу $C^{l-1}(\mathcal{U})$, *и имеет градиент*

$$\nabla F(\boldsymbol{\alpha}) = (L'_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}))\big|_{\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\alpha})}$$

при всех $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}$, *в частности,*

$$\nabla F(\boldsymbol{\alpha}_0) = (L'_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}))\big|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0} = (L'_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\alpha}))\big|_{\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0}.$$

Пример

Решается задача на экстремум функции
$\varphi_a(x,y) = f(x,y,a) = x^2 + (y-a)^2$
при условии $G_a(x,y) = a^3x + \dfrac{y}{a} - 3a = 0$, где a – параметр.
Пусть $F(a)$ – значение функции $\varphi_a(x,y)$ в точке условного локального экстремума. Найдем $F'(1)$.

Схема решения

1. Полагаем $a = 1$ и решаем частную задачу на условный экстремум методом Лагранжа

   $\varphi_1(x,y) = x^2 + (y-1)^2 \to \text{extremum}$ при условии $G_1(x,y) = x+y-3 = 0$

   Условия применимости: упражнение.

   Функция Лагранжа:

   $$L(x,y,\lambda) = x^2 + (y-1)^2 + \lambda(x+y-3)$$

Ищем стационарные точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) \equiv 2x + \lambda = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) \equiv 2(y-1) + \lambda = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) \equiv x + y - 3 = 0. \end{cases}$$

Решение: $x = 1$, $y = 2$, $\lambda = -2$.
Функция $L_0(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 2(x+y-3)$. Ее второй дифференциал

$$d^2 L_0(x,y) = 2dx^2 + 2dy^2$$

положительно определен при любых dx, dy, в том числе $dy = -dx$ из условия связи, и не зависит от x, y.

Вывод. Точка $(1,2)$ есть точка условного минимума функции $\varphi_1(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ при условии $G_1(x,y) = x + y - 3 = 0$.

Одновременно проверены условия теоремы о гладкой зависимости условных экстремумов от параметров.

2. Составляем функцию Лагранжа для задачи о нахождении условного экстремума функции
$\varphi_a(x, y) = f(x, y, a) = x^2 + (y - a)^2$
при условии $G_a(x, y) = a^3 x + \dfrac{y}{a} - 3a = 0$.
Подставляем в нее найденные значения $x = 1$, $y = 2$, $\lambda = -2$.
Вычисляем производную по a в точке 1.

Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L}_a(x, y, \lambda) = x^2 + (y - a)^2 + \lambda \left(a^3 x + \frac{y}{a} - 3a \right)$$

Подстановка:

$$\theta(a) = \mathcal{L}_a(1, 2, -2) = 1 + (2 - a)^2 - 2 \left(a^3 + \frac{2}{a} - 3a \right).$$

Производная:

$$\theta'(a) = 2 + 2a - 6a^2 + \frac{4}{a^2} \;\Rightarrow\; \theta'(1) = 2.$$

Ответ: 2.

Экономический смысл множителей Лагранжа в задаче на условный экстремум

Пусть решается задача нахождения оптимального плана производства, максимизирующего прибыль $f(\mathbf{x})$ при условиях ограниченности ресурсов:

$$\begin{cases} G_1(\mathbf{x}) \leqslant b_1 \\ \dots \\ G_k(\mathbf{x}) \leqslant b_k \\ x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Пусть для простоты оптимальный план позволяет использовать **все ресурсы полностью**, т.е. ограничения выполнены в форме равенств:

$$\begin{cases} b_1 - G_1(\mathbf{x}) = 0 \\ \dots \\ b_k - G_k(\mathbf{x}) = 0. \end{cases}$$

Пусть $\mathbf{x}_0$ – оптимальный план. Тогда существует единственный вектор $\boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_{10}, \dots, \lambda_{k0})$ такой, что $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ есть стационарная точка функции Лагранжа

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (b_i - G_i(\mathbf{x})).$$

Сейчас мы проинтерпретируем множители Лагранжа $(\lambda_{10}, \dots, \lambda_{k0})$.

Предположим, что запасы ресурсов увеличены на вектор $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Новая задача об оптимальном плане выглядит так:

$$f(\mathbf{x}) \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} b_1 + \alpha_1 - G_1(\mathbf{x}) = 0 \\ \dots \\ b_k + \alpha_k - G_k(\mathbf{x}) = 0. \end{cases}$$

Пусть $F(\alpha)$ есть максимальная возможная прибыль. Тогда по теореме об огибающей для условных экстремумов

$$F'(\boldsymbol{\alpha}) = (L_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0))'_{\boldsymbol{\alpha}},$$

где

$$L_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (b_i + \alpha_i - G_i(\mathbf{x})).$$

Отсюда при всех $1 \leqslant i \leqslant k$ имеем

$$F'_{\alpha_i}(\mathbf{0}) = \lambda_{i0},$$

поэтому увеличение максимально возможной прибыли таково

$$\Delta F \approx \lambda_{i0} \alpha_i$$

при увеличении запаса i-го ресурса и неизменных запасах остальных ресурсов. Если понимать λ_{i0} как некоторую виртуальную цену единицы i-го ресурса, то приближенное равенство устанавливает важный факт: именно при такой цене лишние затраты будут компенсированы дополнительной прибылью.
Итак, λ_{i0} можно воспринимать как «теневую цену» i-го ресурса.