Линейная алгебра. Лекция 7. Нормальные псевдорешения систем линейных уравнений и псевдообратная матрица

Н. Л. Поляков

Высшая Школа Экономики, Факультет экономических наук, Москва

2022 г.

Нормальные псевдорешения с.л.у.

Нормальные псевдорешения с.л.у.

Как найти “единственное решение” подобных систем линейных уравнений:

Нормальные псевдорешения с.л.у.

Как найти “единственное решение” подобных систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Нормальные псевдорешения с.л.у.

Как найти “единственное решение” подобных систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$$

Нормальные псевдорешения с.л.у.

Как найти “единственное решение” подобных систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$$

Элиаким Гастингс Мур
(1862 – 1932)

Идеи принадлежат Э. Муру и Р. Пенроузу.

Роджер Пенроуз
(род. 1931)

Определение

Определение

Нормальным псевдорешением системы линейных уравнений

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

где $A \in M_{mn}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, называется вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, который удовлетворяет следующим условиям:

Определение

Нормальным псевдорешением системы линейных уравнений

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

где $A \in M_{mn}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, называется вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. $|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}| \leqslant |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

Определение

Нормальным псевдорешением системы линейных уравнений

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

где $A \in M_{mn}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, называется вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. $|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}| \leqslant |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,
2. Длина $|\boldsymbol{u}|$ минимальна среди всех векторов, удовлетворяющих свойству 1.

Определение

Нормальным псевдорешением системы линейных уравнений

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

где $A \in M_{mn}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, называется вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. $|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}| \leqslant |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,
2. Длина $|\boldsymbol{u}|$ минимальна среди всех векторов, удовлетворяющих свойству 1.

Теорема

Каждая система линейных уравнений имеет единственное псевдорешение.

Определение

Нормальным псевдорешением системы линейных уравнений

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

где $A \in M_{mn}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, называется вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. $|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}| \leqslant |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,
2. Длина $|\boldsymbol{u}|$ минимальна среди всех векторов, удовлетворяющих свойству 1.

Теорема

Каждая система линейных уравнений имеет единственное псевдорешение.

Замечание.

Определение

Нормальным псевдорешением системы линейных уравнений

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

где $A \in M_{mn}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, называется вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. $|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}| \leqslant |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,
2. Длина $|\boldsymbol{u}|$ минимальна среди всех векторов, удовлетворяющих свойству 1.

Теорема

Каждая система линейных уравнений имеет единственное псевдорешение.

Замечание.

- Если система линейных уравнений имеет (настоящие) решения, то нормальное псевдорешение лежит среди решений системы.

Определение

Нормальным псевдорешением системы линейных уравнений

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

где $A \in M_{mn}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, называется вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. $|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}| \leqslant |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,
2. Длина $|\boldsymbol{u}|$ минимальна среди всех векторов, удовлетворяющих свойству 1.

Теорема

Каждая система линейных уравнений имеет единственное псевдорешение.

Замечание.

- Если система линейных уравнений имеет (настоящие) решения, то нормальное псевдорешение лежит среди решений системы. В частности, если система имеет единственное (настоящее) решение, то оно является и псевдорешением данной системы.

Определение

Нормальным псевдорешением системы линейных уравнений

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

где $A \in M_{mn}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, называется вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. $|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}| \leqslant |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,
2. Длина $|\boldsymbol{u}|$ минимальна среди всех векторов, удовлетворяющих свойству 1.

Теорема

Каждая система линейных уравнений имеет единственное псевдорешение.

Замечание.

- Если система линейных уравнений имеет (настоящие) решения, то нормальное псевдорешение лежит среди решений системы. В частности, если система имеет единственное (настоящее) решение, то оно является и псевдорешением данной системы.
- Если система линейных уравнений однородна, то ее нормальное псевдорешение – нулевой вектор.

Пример

Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем:

$$|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}| = \left| \begin{pmatrix} x - 1 \\ x - 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2}.$$

Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем:

$$|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}| = \left| \begin{pmatrix} x-1 \\ x-2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2}.$$

Средствами мат. анализа находим точку минимума: $x = \dfrac{3}{2}$.

Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем:

$$|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}| = \left| \begin{pmatrix} x - 1 \\ x - 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2}.$$

Средствами мат. анализа находим точку минимума: $x = \dfrac{3}{2}$.

Это и есть псевдорешение (условие 2 выполняется автоматически).

Еще пример

Еще пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$$

Еще пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1).$$

Еще пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1).$$

Поскольку система разрешима, условие 1 равносильно тому, что $\boldsymbol{u}$ есть решение системы. Находим общее решение:

$$\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \end{pmatrix}.$$

Еще пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1).$$

Поскольку система разрешима, условие 1 равносильно тому, что $\boldsymbol{u}$ есть решение системы. Находим общее решение:

$$\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left| \binom{x}{y} \right| = \sqrt{t^2 + (1-t)^2}.$$

Еще пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1).$$

Поскольку система разрешима, условие 1 равносильно тому, что $\boldsymbol{u}$ есть решение системы. Находим общее решение:

$$\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left| \binom{x}{y} \right| = \sqrt{t^2 + (1 - t)^2}.$$

Средствами мат. анализа находим точку минимума: $t = \dfrac{1}{2}$.

Еще пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1).$$

Поскольку система разрешима, условие 1 равносильно тому, что $\boldsymbol{u}$ есть решение системы. Находим общее решение:

$$\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left| \binom{x}{y} \right| = \sqrt{t^2 + (1 - t)^2}.$$

Средствами мат. анализа находим точку минимума: $t = \dfrac{1}{2}$.

Значит, нормальное псевдорешение есть...

Еще пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1).$$

Поскольку система разрешима, условие 1 равносильно тому, что $\boldsymbol{u}$ есть решение системы. Находим общее решение:

$$\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left| \binom{x}{y} \right| = \sqrt{t^2 + (1-t)^2}.$$

Средствами мат. анализа находим точку минимума: $t = \dfrac{1}{2}$.

Значит, нормальное псевдорешение есть... $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Псевдообратная матрица

Псевдообратная матрица

Оказывается, нормальное псевдорешение с.л.у. можно находить с помощью *псевдообратной матрицы* A^+.

Псевдообратная матрица

Оказывается, нормальное псевдорешение с.л.у. можно находить с помощью *псевдообратной матрицы* A^+.

Определение

Псевдообратная матрица

Оказывается, нормальное псевдорешение с.л.у. можно находить с помощью *псевдообратной матрицы* A^+.

Определение

Пусть $A \in M_{mn}$.

Псевдообратная матрица

Оказывается, нормальное псевдорешение с.л.у. можно находить с помощью *псевдообратной матрицы* A^+.

Определение

Пусть $A \in M_{mn}$. Тогда псевдообратная матрица для матрицы A есть матрица A^+ размера $n \times m$, удовлетворяющая условиям:

Псевдообратная матрица

Оказывается, нормальное псевдорешение с.л.у. можно находить с помощью *псевдообратной матрицы* A^+.

Определение

Пусть $A \in M_{mn}$. Тогда псевдообратная матрица для матрицы A есть матрица A^+ размера $n \times m$, удовлетворяющая условиям:

1. $AA^+A = A$,

Псевдообратная матрица

Оказывается, нормальное псевдорешение с.л.у. можно находить с помощью *псевдообратной матрицы* A^+.

Определение

Пусть $A \in M_{mn}$. Тогда псевдообратная матрица для матрицы A есть матрица A^+ размера $n \times m$, удовлетворяющая условиям:

1. $AA^+A = A$,
2. $A^+AA^+ = A^+$,

Псевдообратная матрица

Оказывается, нормальное псевдорешение с.л.у. можно находить с помощью *псевдообратной матрицы* A^+.

Определение

Пусть $A \in M_{mn}$. Тогда псевдообратная матрица для матрицы A есть матрица A^+ размера $n \times m$, удовлетворяющая условиям:

1. $AA^+A = A$,
2. $A^+AA^+ = A^+$,
3. $(AA^+)^T = AA^+$,

Псевдообратная матрица

Оказывается, нормальное псевдорешение с.л.у. можно находить с помощью *псевдообратной матрицы* A^+.

Определение

Пусть $A \in M_{mn}$. Тогда псевдообратная матрица для матрицы A есть матрица A^+ размера $n \times m$, удовлетворяющая условиям:

1. $AA^+A = A$,
2. $A^+AA^+ = A^+$,
3. $(AA^+)^T = AA^+$,
4. $(A^+A)^T = A^+A$.

Псевдообратная матрица

Оказывается, нормальное псевдорешение с.л.у. можно находить с помощью *псевдообратной матрицы* A^+.

Определение

Пусть $A \in M_{mn}$. Тогда псевдообратная матрица для матрицы A есть матрица A^+ размера $n \times m$, удовлетворяющая условиям:

1. $AA^+A = A$,
2. $A^+AA^+ = A^+$,
3. $(AA^+)^T = AA^+$,
4. $(A^+A)^T = A^+A$.

Замечание

Псевдообратная матрица

Оказывается, нормальное псевдорешение с.л.у. можно находить с помощью *псевдообратной матрицы* A^+.

Определение

Пусть $A \in M_{mn}$. Тогда псевдообратная матрица для матрицы A есть матрица A^+ размера $n \times m$, удовлетворяющая условиям:

1. $AA^+A = A$,
2. $A^+AA^+ = A^+$,
3. $(AA^+)^T = AA^+$,
4. $(A^+A)^T = A^+A$.

Замечание

Обратная матрица A^{-1} для матрицы A удовлетворяет всем этим условиям.

Псевдообратная матрица

Оказывается, нормальное псевдорешение с.л.у. можно находить с помощью *псевдообратной матрицы* A^+.

Определение

Пусть $A \in M_{mn}$. Тогда псевдообратная матрица для матрицы A есть матрица A^+ размера $n \times m$, удовлетворяющая условиям:

1. $AA^+A = A$,
2. $A^+AA^+ = A^+$,
3. $(AA^+)^T = AA^+$,
4. $(A^+A)^T = A^+A$.

Замечание

Обратная матрица A^{-1} для матрицы A удовлетворяет всем этим условиям.

Теорема (Мура-Пенроуза)

Для любой матрицы A существует единственная псевдообратная матрица A^+.

Схема доказательства

Схема доказательства

Единственность.

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B =$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB =$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T =$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^T A^T =$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^T A^T = BB^T (ACA)^T =$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^T A^T = BB^T (ACA)^T = B(AB)^T (AC)^T =$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$

$$BABAC =$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$

$$BABAC = BAC =$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$

$$BABAC = BAC = (BA)^TCAC =$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$

$$BABAC = BAC = (BA)^TCAC = (BA)^T(CA)^TC =$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$

$$BABAC = BAC = (BA)^TCAC = (BA)^T(CA)^TC = A^TB^TA^TC^TC =$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$

$$BABAC = BAC = (BA)^TCAC = (BA)^T(CA)^TC = A^TB^TA^TC^TC =$$

$$A^TC^TC =$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$

$$BABAC = BAC = (BA)^TCAC = (BA)^T(CA)^TC = A^TB^TA^TC^TC =$$

$$A^TC^TC = CAC =$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^T A^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$

$$BABAC = BAC = (BA)^T CAC = (BA)^T(CA)^T C = A^T B^T A^T C^T C =$$

$$A^T C^T C = CAC = C.$$

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$

$$BABAC = BAC = (BA)^TCAC = (BA)^T(CA)^TC = A^TB^TA^TC^TC =$$

$$A^TC^TC = CAC = C.$$

Существование.

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$

$$BABAC = BAC = (BA)^TCAC = (BA)^T(CA)^TC = A^TB^TA^TC^TC =$$

$$A^TC^TC = CAC = C.$$

Существование.

Вспомогательное утверждение:

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$

$$BABAC = BAC = (BA)^TCAC = (BA)^T(CA)^TC = A^TB^TA^TC^TC =$$

$$A^TC^TC = CAC = C.$$

Существование.

Вспомогательное утверждение:

- Если A^TA обратима, то $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ (**упражнение**).

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$

$$BABAC = BAC = (BA)^TCAC = (BA)^T(CA)^TC = A^TB^TA^TC^TC =$$

$$A^TC^TC = CAC = C.$$

Существование.

Вспомогательное утверждение:

- Если A^TA обратима, то $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ (**упражнение**).
- Если AA^T обратима, то $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$(**упражнение**).

Схема доказательства

Единственность. Пусть B и C – псевдообратные матрицы для матрицы A. Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$

$$BABAC = BAC = (BA)^TCAC = (BA)^T(CA)^TC = A^TB^TA^TC^TC =$$

$$A^TC^TC = CAC = C.$$

Существование.

Вспомогательное утверждение:

- Если A^TA обратима, то $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ (**упражнение**).
- Если AA^T обратима, то $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$(**упражнение**).
- Если $A = FG$, где F^TF и GG^T обратимы, то

  $$A^+ = G^+F^+ = G^T(GG^T)^{-1}(F^TF)^{-1}F^T$$

  (**упражнение**).

Еще одно вспомогательное утверждение:

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то $A^T A$ обратима.

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то $A^T A$ обратима.

  На примере матриц 3×2:

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то $A^T A$ обратима.

  На примере матриц 3×2: пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Тогда

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то $A^T A$ обратима.

  На примере матриц 3×2: пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^T A =$$

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то A^TA обратима.

  На примере матриц 3×2: пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^TA = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} =$$

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то $A^T A$ обратима.

  На примере матриц 3×2: пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix}.$$

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то $A^T A$ обратима.

  На примере матриц 3×2: пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix}.$$

  Надо показать: $\det A^T A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A < 2$.

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то $A^T A$ обратима.

  На примере матриц 3×2: пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix}.$$

  Надо показать: $\det A^T A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A < 2$.
  Если один из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ нулевой, сразу имеем $\operatorname{rang} A < 2$. Иначе:

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то $A^T A$ обратима.

  На примере матриц 3×2: пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix}.$$

  Надо показать: $\det A^T A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A < 2$.
  Если один из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ нулевой, сразу имеем $\operatorname{rang} A < 2$. Иначе:

$$\det (A^T A) =$$

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то $A^T A$ обратима.

  На примере матриц 3×2: пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix}.$$

  Надо показать: $\det A^T A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A < 2$.
  Если один из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ нулевой, сразу имеем $\operatorname{rang} A < 2$. Иначе:

$$\det (A^T A) = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 =$$

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то $A^T A$ обратима.

  На примере матриц 3×2: пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix}.$$

  Надо показать: $\det A^T A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A < 2$.
  Если один из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ нулевой, сразу имеем $\operatorname{rang} A < 2$. Иначе:

$$\det \left(A^T A\right) = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 \left(1 - \cos^2 \left(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}\right)\right)$$

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то $A^T A$ обратима.

  На примере матриц 3×2: пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix}.$$

  Надо показать: $\det A^T A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A < 2$.
  Если один из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ нулевой, сразу имеем $\operatorname{rang} A < 2$. Иначе:

$$\det\left(A^T A\right) = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 \left(1 - \cos^2\left(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}\right)\right)$$

$$\det\left(A^T A\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A < 2.$$

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то $A^T A$ обратима.

  На примере матриц 3×2: пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix}.$$

  Надо показать: $\det A^T A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A < 2$.
  Если один из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ нулевой, сразу имеем $\operatorname{rang} A < 2$. Иначе:

$$\det (A^T A) = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 \left(1 - \cos^2 \left(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}\right)\right)$$

$$\det (A^T A) = 0 \Leftrightarrow \cos \left(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A < 2.$$

- Если A полного строчного ранга (т.е. если строки матрицы линейно независимы), то $A A^T$ обратима.

Еще одно вспомогательное утверждение:

- Если A полного стобцового ранга (т.е. если столбцы матрицы линейно независимы), то $A^T A$ обратима.

  На примере матриц 3×2: пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix}.$$

  Надо показать: $\det A^T A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A < 2$.
  Если один из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ нулевой, сразу имеем $\operatorname{rang} A < 2$. Иначе:

$$\det\left(A^T A\right) = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 \left(1 - \cos^2\left(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}\right)\right)$$

$$\det\left(A^T A\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A < 2.$$

- Если A полного строчного ранга (т.е. если строки матрицы линейно независимы), то AA^T обратима. Действительно, если A полного строчного ранга, то A^T полного столбцового ранга. По предыдущему пункту $(A^T)^T A^T = AA^T$ обратима.

И еще одно вспомогательное утверждение.

И еще одно вспомогательное утверждение.

- Для каждой матрицы A существуют такие матрицы F и G, что
  1. F полного столбцового ранга,
  2. G полного строчного ранга,
  3. $A = FG$

  (**скелетное разложение**).

И еще одно вспомогательное утверждение.

- Для каждой матрицы A существуют такие матрицы F и G, что
  1. F полного столбцового ранга,
  2. G полного строчного ранга,
  3. $A = FG$

  (**скелетное разложение**).

Для нахождения скелетного разложения $A = FG$ матрицы A размера $m \times n$ и ранга r можно применить следующий алгоритм.

И еще одно вспомогательное утверждение.

- Для каждой матрицы A существуют такие матрицы F и G, что
  1. F полного столбцового ранга,
  2. G полного строчного ранга,
  3. $A = FG$

  (**скелетное разложение**).

Для нахождения скелетного разложения $A = FG$ матрицы A размера $m \times n$ и ранга r можно применить следующий алгоритм.

- Выбираем r линейно независимых столбцов матрицы A и составляем из них (в том же порядке) новую матрицу. Эту матрицу и можно принять за F.

И еще одно вспомогательное утверждение.

- Для каждой матрицы A существуют такие матрицы F и G, что
  1. F полного столбцового ранга,
  2. G полного строчного ранга,
  3. $A = FG$

  (**скелетное разложение**).

Для нахождения скелетного разложения $A = FG$ матрицы A размера $m \times n$ и ранга r можно применить следующий алгоритм.

- Выбираем r линейно независимых столбцов матрицы A и составляем из них (в том же порядке) новую матрицу. Эту матрицу и можно принять за F. Заметим, что она будет размера $m \times r$.

И еще одно вспомогательное утверждение.

- Для каждой матрицы A существуют такие матрицы F и G, что

  1. F полного столбцового ранга,
  2. G полного строчного ранга,
  3. $A = FG$

  (**скелетное разложение**).

Для нахождения скелетного разложения $A = FG$ матрицы A размера $m \times n$ и ранга r можно применить следующий алгоритм.

- Выбираем r линейно независимых столбцов матрицы A и составляем из них (в том же порядке) новую матрицу. Эту матрицу и можно принять за F. Заметим, что она будет размера $m \times r$.
- Для нахождения матрицы G заметим, что она должна быть размера $r \times n$ (чтобы размер матрицы FG совпадал с размером матрицы A).

И еще одно вспомогательное утверждение.

- Для каждой матрицы A существуют такие матрицы F и G, что
  1. F полного столбцового ранга,
  2. G полного строчного ранга,
  3. $A = FG$

  (**скелетное разложение**).

Для нахождения скелетного разложения $A = FG$ матрицы A размера $m \times n$ и ранга r можно применить следующий алгоритм.

- Выбираем r линейно независимых столбцов матрицы A и составляем из них (в том же порядке) новую матрицу. Эту матрицу и можно принять за F. Заметим, что она будет размера $m \times r$.
- Для нахождения матрицы G заметим, что она должна быть размера $r \times n$ (чтобы размер матрицы FG совпадал с размером матрицы A). Вместо тех столбцов, которые мы выбрали для матрицы F в матрице G записываем столбцы единичной матрицы $r \times r$ в естественном порядке.

И еще одно вспомогательное утверждение.

- Для каждой матрицы A существуют такие матрицы F и G, что
  1. F полного столбцового ранга,
  2. G полного строчного ранга,
  3. $A = FG$

  (**скелетное разложение**).

Для нахождения скелетного разложения $A = FG$ матрицы A размера $m \times n$ и ранга r можно применить следующий алгоритм.

- Выбираем r линейно независимых столбцов матрицы A и составляем из них (в том же порядке) новую матрицу. Эту матрицу и можно принять за F. Заметим, что она будет размера $m \times r$.
- Для нахождения матрицы G заметим, что она должна быть размера $r \times n$ (чтобы размер матрицы FG совпадал с размером матрицы A). Вместо тех столбцов, которые мы выбрали для матрицы F в матрице G записываем столбцы единичной матрицы $r \times r$ в естественном порядке. Вместо остальных компонент матрицы G записываем неопределенные коэффициенты (неизвестные).

И еще одно вспомогательное утверждение.

- Для каждой матрицы A существуют такие матрицы F и G, что
  1. F полного столбцового ранга,
  2. G полного строчного ранга,
  3. $A = FG$

  (**скелетное разложение**).

Для нахождения скелетного разложения $A = FG$ матрицы A размера $m \times n$ и ранга r можно применить следующий алгоритм.

- Выбираем r линейно независимых столбцов матрицы A и составляем из них (в том же порядке) новую матрицу. Эту матрицу и можно принять за F. Заметим, что она будет размера $m \times r$.
- Для нахождения матрицы G заметим, что она должна быть размера $r \times n$ (чтобы размер матрицы FG совпадал с размером матрицы A). Вместо тех столбцов, которые мы выбрали для матрицы F в матрице G записываем столбцы единичной матрицы $r \times r$ в естественном порядке. Вместо остальных компонент матрицы G записываем неопределенные коэффициенты (неизвестные).
- Для нахождения этих коэффициентов расписываем равенство $FG = A$ покомпонентно.

И еще одно вспомогательное утверждение.

- Для каждой матрицы A существуют такие матрицы F и G, что
    1. F полного столбцового ранга,
    2. G полного строчного ранга,
    3. $A = FG$

  (**скелетное разложение**).

Для нахождения скелетного разложения $A = FG$ матрицы A размера $m \times n$ и ранга r можно применить следующий алгоритм.

- Выбираем r линейно независимых столбцов матрицы A и составляем из них (в том же порядке) новую матрицу. Эту матрицу и можно принять за F. Заметим, что она будет размера $m \times r$.
- Для нахождения матрицы G заметим, что она должна быть размера $r \times n$ (чтобы размер матрицы FG совпадал с размером матрицы A). Вместо тех столбцов, которые мы выбрали для матрицы F в матрице G записываем столбцы единичной матрицы $r \times r$ в естественном порядке. Вместо остальных компонент матрицы G записываем неопределенные коэффициенты (неизвестные).
- Для нахождения этих коэффициентов расписываем равенство $FG = A$ покомпонентно. Это приводит к системе линеных уравнений на неопределенные коэффициенты.

И еще одно вспомогательное утверждение.

- Для каждой матрицы A существуют такие матрицы F и G, что
  1. F полного столбцового ранга,
  2. G полного строчного ранга,
  3. $A = FG$

  (**скелетное разложение**).

Для нахождения скелетного разложения $A = FG$ матрицы A размера $m \times n$ и ранга r можно применить следующий алгоритм.

- Выбираем r линейно независимых столбцов матрицы A и составляем из них (в том же порядке) новую матрицу. Эту матрицу и можно принять за F. Заметим, что она будет размера $m \times r$.
- Для нахождения матрицы G заметим, что она должна быть размера $r \times n$ (чтобы размер матрицы FG совпадал с размером матрицы A). Вместо тех столбцов, которые мы выбрали для матрицы F в матрице G записываем столбцы единичной матрицы $r \times r$ в естественном порядке. Вместо остальных компонент матрицы G записываем неопределенные коэффициенты (неизвестные).
- Для нахождения этих коэффициентов расписываем равенство $FG = A$ покомпонентно. Это приводит к системе линеных уравнений на неопределенные коэффициенты. Решаем эту систему, находим матрицу G.

Пример.

Пример.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пример.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Это матрица ранга 2, и первые два ее столбца линейно независимы.

Пример.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Это матрица ранга 2, и первые два ее столбца линейно независимы.

Положим

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Пример.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Это матрица ранга 2, и первые два ее столбца линейно независимы.

Положим

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Будем искать G в виде

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{pmatrix}.$$

Пример.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Это матрица ранга 2, и первые два ее столбца линейно независимы.

Положим

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Будем искать G в виде

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{pmatrix}.$$

Находим произведение FG и приравниваем к A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x+2y \\ 4 & 5 & 4x+5y \\ 7 & 8 & 7x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Решаем систему

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \\ 7x + 8y = 9 \end{cases}$$

Решаем систему

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \\ 7x + 8y = 9 \end{cases}$$

Решение должно найтись, поскольку третий столбец линейно выражается через два первых.

Решаем систему

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \\ 7x + 8y = 9 \end{cases}$$

Решение должно найтись, поскольку третий столбец линейно выражается через два первых. Действительно, решение:

$$x = -1, \quad y = 2.$$

Решаем систему

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \\ 7x + 8y = 9 \end{cases}$$

Решение должно найтись, поскольку третий столбец линейно выражается через два первых. Действительно, решение:

$$x = -1, \quad y = 2.$$

Итак, скелетное разложение получено:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решаем систему

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \\ 7x + 8y = 9 \end{cases}$$

Решение должно найтись, поскольку третий столбец линейно выражается через два первых. Действительно, решение:

$$x = -1, \quad y = 2.$$

Итак, скелетное разложение получено:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Схема доказательства завершена.

Алгоритм вычисления псевдообратной матрицы

Алгоритм вычисления псевдообратной матрицы

Схема доказательства дает следующий алгоритм вычисления псевдообратной матрицы A^+ для матрицы A:

Алгоритм вычисления псевдообратной матрицы

Схема доказательства дает следующий алгоритм вычисления псевдообратной матрицы A^+ для матрицы A:

- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного столбцового ранга.

Алгоритм вычисления псевдообратной матрицы

Схема доказательства дает следующий алгоритм вычисления псевдообратной матрицы A^+ для матрицы A:

- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного столбцового ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.

Алгоритм вычисления псевдообратной матрицы

Схема доказательства дает следующий алгоритм вычисления псевдообратной матрицы A^+ для матрицы A:

- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного столбцового ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.
- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного строчного ранга.

Алгоритм вычисления псевдообратной матрицы

Схема доказательства дает следующий алгоритм вычисления псевдообратной матрицы A^+ для матрицы A:

- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного столбцового ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.
- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного строчного ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$.

Алгоритм вычисления псевдообратной матрицы

Схема доказательства дает следующий алгоритм вычисления псевдообратной матрицы A^+ для матрицы A:

- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного столбцового ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.
- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного строчного ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$.
- Если матрица A не является матрицей ни полного столбцового, ни полного строчного ранга, находим скелетное разложение $A = FG$ матрицы A (где F – матрица полного столбцового, а G – матрица полного строчного ранга).

Алгоритм вычисления псевдообратной матрицы

Схема доказательства дает следующий алгоритм вычисления псевдообратной матрицы A^+ для матрицы A:

- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного столбцового ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.
- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного строчного ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$.
- Если матрица A не является матрицей ни полного столбцового, ни полного строчного ранга, находим скелетное разложение $A = FG$ матрицы A (где F – матрица полного столбцового, а G – матрица полного строчного ранга). Для этого используем уже изложенный алгоритм.

Алгоритм вычисления псевдообратной матрицы

Схема доказательства дает следующий алгоритм вычисления псевдообратной матрицы A^+ для матрицы A:

- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного столбцового ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.
- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного строчного ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$.
- Если матрица A не является матрицей ни полного столбцового, ни полного строчного ранга, находим скелетное разложение $A = FG$ матрицы A (где F – матрица полного столбцового, а G – матрица полного строчного ранга). Для этого используем уже изложенный алгоритм. Затем находим псевдообратные матрицы F^+ и G^+ для матриц F и G:

Алгоритм вычисления псевдобратной матрицы

Схема доказательства дает следующий алгоритм вычисления псевдообратной матрицы A^+ для матрицы A:

- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного столбцового ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.
- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного строчного ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$.
- Если матрица A не является матрицей ни полного столбцового, ни полного строчного ранга, находим скелетное разложение $A = FG$ матрицы A (где F – матрица полного столбцового, а G – матрица полного строчного ранга). Для этого используем уже изложенный алгоритм. Затем находим псевдообратные матрицы F^+ и G^+ для матриц F и G:

$$F^+ = (F^T F)^{-1} F^T$$

Алгоритм вычисления псевдообратной матрицы

Схема доказательства дает следующий алгоритм вычисления псевдообратной матрицы A^+ для матрицы A:

- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного столбцового ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.
- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного строчного ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$.
- Если матрица A не является матрицей ни полного столбцового, ни полного строчного ранга, находим скелетное разложение $A = FG$ матрицы A (где F – матрица полного столбцового, а G – матрица полного строчного ранга). Для этого используем уже изложенный алгоритм. Затем находим псевдообратные матрицы F^+ и G^+ для матриц F и G:

$$F^+ = (F^T F)^{-1} F^T$$

$$G^+ = G^T (G G^T)^{-1}.$$

Алгоритм вычисления псевдообратной матрицы

Схема доказательства дает следующий алгоритм вычисления псевдообратной матрицы A^+ для матрицы A:

- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного столбцового ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.
- Проверяем, является ли матрица A матрицей полного строчного ранга. Если да, вычисляем: $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$.
- Если матрица A не является матрицей ни полного столбцового, ни полного строчного ранга, находим скелетное разложение $A = FG$ матрицы A (где F – матрица полного столбцового, а G – матрица полного строчного ранга). Для этого используем уже изложенный алгоритм. Затем находим псевдообратные матрицы F^+ и G^+ для матриц F и G:

$$F^+ = (F^T F)^{-1} F^T$$
$$G^+ = G^T (G G^T)^{-1}.$$

Наконец, вычисляем псевдообратную матрицу:

$$A^+ = G^+ F^+.$$

Пример.

Пример. Завершим псевдообращение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пример. Завершим псевдообращение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Она не является ни матрицей полного строчного, ни матрицей полного столбцового ранга, а ее скелетное разложение уже найдено:

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример. Завершим псевдообращение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Она не является ни матрицей полного строчного, ни матрицей полного столбцового ранга, а ее скелетное разложение уже найдено:

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Псевдообращаем матрицу $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Пример. Завершим псевдообращение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Она не является ни матрицей полного строчного, ни матрицей полного столбцового ранга, а ее скелетное разложение уже найдено:

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Псевдообращаем матрицу $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

$$F^T F =$$

Пример. Завершим псевдообращение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Она не является ни матрицей полного строчного, ни матрицей полного столбцового ранга, а ее скелетное разложение уже найдено:

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Псевдообращаем матрицу $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

$$F^T F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} =$$

Пример. Завершим псевдообращение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Она не является ни матрицей полного строчного, ни матрицей полного столбцового ранга, а ее скелетное разложение уже найдено:

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Псевдообращаем матрицу $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

$$F^T F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{pmatrix}$$

Пример. Завершим псевдообращение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Она не является ни матрицей полного строчного, ни матрицей полного столбцового ранга, а ее скелетное разложение уже найдено:

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Псевдообращаем матрицу $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

$$F^T F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{pmatrix}$$

$$F^+ =$$

Пример. Завершим псевдообращение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Она не является ни матрицей полного строчного, ни матрицей полного столбцового ранга, а ее скелетное разложение уже найдено:

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Псевдообращаем матрицу $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

$$F^T F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{pmatrix}$$

$$F^+ = (F^T F)^{-1} F^T =$$

Пример. Завершим псевдообращение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Она не является ни матрицей полного строчного, ни матрицей полного столбцового ранга, а ее скелетное разложение уже найдено:

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Псевдообращаем матрицу $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

$$F^T F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{pmatrix}$$

$$F^+ = (F^T F)^{-1} F^T = \begin{pmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} =$$

Пример. Завершим псевдообращение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Она не является ни матрицей полного строчного, ни матрицей полного столбцового ранга, а ее скелетное разложение уже найдено:

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Псевдообращаем матрицу $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

$$F^T F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{pmatrix}$$

$$F^+ = (F^T F)^{-1} F^T = \begin{pmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Псевдообращаем матрицу $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Псевдообращаем матрицу $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$GG^T =$$

Псевдообращаем матрицу $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$GG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

Псевдообращаем матрицу $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$GG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Псевдообращаем матрицу $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$GG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G^+ =$$

Псевдообращаем матрицу $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$GG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G^+ = G^T(GG^T)^{-1} =$$

Псевдообращаем матрицу $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$GG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G^+ = G^T(GG^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} =$$

Псевдообращаем матрицу $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$GG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G^+ = G^T(GG^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Псевдообращаем матрицу $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$GG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G^+ = G^T(GG^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить A^+:

Псевдообращаем матрицу $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$GG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G^+ = G^T(GG^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить A^+:

$$A^+ =$$

Псевдообращаем матрицу $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$GG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G^+ = G^T(GG^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить A^+:

$$A^+ = G^+ F^+ =$$

Псевдообращаем матрицу $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$GG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G^+ = G^T(GG^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить A^+:

$$A^+ = G^+ F^+ = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

Псевдообращаем матрицу $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$GG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G^+ = G^T(GG^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить A^+:

$$A^+ = G^+F^+ = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 47 & -6 & 11 \\ 26 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Псевдообратная матрица и нормальные псевдорешения

Псевдообратная матрица и нормальные псевдорешения

Теорема

Пусть дана с. л. у. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$*, и пусть* $\boldsymbol{u}$ *есть ее нормальное псевдорешение.*
Тогда $\boldsymbol{u} = A^{+}\boldsymbol{b}$.

Псевдообратная матрица и нормальные псевдорешения

Теорема

Пусть дана с. л. у. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *и пусть* $\boldsymbol{u}$ *есть ее нормальное псевдорешение. Тогда* $\boldsymbol{u} = A^{+}\boldsymbol{b}$.

Доказательство. Например, средствами мат. анализа.

Псевдообратная матрица и нормальные псевдорешения

Теорема

Пусть дана с. л. у. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *и пусть* $\boldsymbol{u}$ *есть ее нормальное псевдорешение. Тогда* $\boldsymbol{u} = A^{+}\boldsymbol{b}$.

Доказательство. Например, средствами мат. анализа.

Пример

Псевдообратная матрица и нормальные псевдорешения

Теорема

Пусть дана с. л. у. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *и пусть* $\boldsymbol{u}$ *есть ее нормальное псевдорешение. Тогда* $\boldsymbol{u} = A^{+}\boldsymbol{b}$.

Доказательство. Например, средствами мат. анализа.

Пример

Найдите нормальное псевдорешение $\boldsymbol{u}$ с. л. у. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Псевдообратная матрица и нормальные псевдорешения

Теорема

Пусть дана с. л. у. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *и пусть* $\boldsymbol{u}$ *есть ее нормальное псевдорешение. Тогда* $\boldsymbol{u} = A^{+}\boldsymbol{b}$.

Доказательство. Например, средствами мат. анализа.

Пример

Найдите нормальное псевдорешение $\boldsymbol{u}$ с. л. у. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Система в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Псевдообратная матрица и нормальные псевдорешения

Теорема

Пусть дана с. л. у. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, и пусть $\boldsymbol{u}$ есть ее нормальное псевдорешение. Тогда $\boldsymbol{u} = A^{+}\boldsymbol{b}$.

Доказательство. Например, средствами мат. анализа.

Пример

Найдите нормальное псевдорешение $\boldsymbol{u}$ с. л. у. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Система в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

Псевдообратная матрица и нормальные псевдорешения

Теорема

Пусть дана с. л. у. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, и пусть $\boldsymbol{u}$ есть ее нормальное псевдорешение. Тогда $\boldsymbol{u} = A^+\boldsymbol{b}$.

Доказательство. Например, средствами мат. анализа.

Пример

Найдите нормальное псевдорешение $\boldsymbol{u}$ с. л. у. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Система в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Псевдообратная матрица и нормальные псевдорешения

Теорема

Пусть дана с. л. у. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, и пусть $\boldsymbol{u}$ есть ее нормальное псевдорешение. Тогда $\boldsymbol{u} = A^{+}\boldsymbol{b}$.

Доказательство. Например, средствами мат. анализа.

Пример

Найдите нормальное псевдорешение $\boldsymbol{u}$ с. л. у. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Система в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{+} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Псевдообратная матрица и нормальные псевдорешения

Теорема

Пусть дана с. л. у. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, и пусть $\boldsymbol{u}$ есть ее нормальное псевдорешение. Тогда $\boldsymbol{u} = A^{+}\boldsymbol{b}$.

Доказательство. Например, средствами мат. анализа.

Пример

Найдите нормальное псевдорешение $\boldsymbol{u}$ с. л. у. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Система в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{+} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Псевдообратная матрица и метод наименьших квадратов

Псевдообратная матрица и метод наименьших квадратов

Пусть получена эмпирическая зависимость параметра y от параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, иначе говоря, таблица

x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1n}	y_1
x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2n}	y_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_{m1}	x_{m2}	$\ldots$	x_{mn}	y_m

Псевдообратная матрица и метод наименьших квадратов

Пусть получена эмпирическая зависимость параметра y от параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, иначе говоря, таблица

x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1n}	y_1
x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2n}	y_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_{m1}	x_{m2}	$\ldots$	x_{mn}	y_m

Требуется найти такую линейную функцию

$$y(\boldsymbol{x}) = p_0 + p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n,$$

что

$$\sum_{i=1}^{m} (y(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}) - y_i)^2 \to \min$$

Псевдообратная матрица и метод наименьших квадратов

Пусть получена эмпирическая зависимость параметра y от параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, иначе говоря, таблица

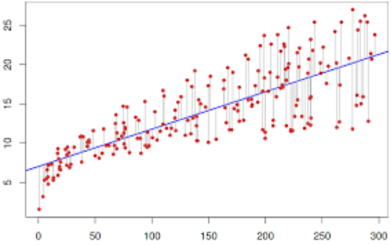
x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1n}	y_1
x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2n}	y_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_{m1}	x_{m2}	$\ldots$	x_{mn}	y_m

Требуется найти такую линейную функцию

$$y(\boldsymbol{x}) = p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n,$$

что

$$\sum_{i=1}^{m} (y(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}) - y_i)^2 \to \min$$



Очевидно, такая функция определяется вектором $\boldsymbol{p} = (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Очевидно, такая функция определяется вектором $\boldsymbol{p} = (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Таким образом нам надо решить задачу

$$\sum_{i=1}^{m} (p_0 + x_{i1}p_1 + x_{i2}p_2 + \ldots + x_{in}p_n - y_i)^2 \to \min$$

Очевидно, такая функция определяется вектором $\boldsymbol{p} = (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Таким образом нам надо решить задачу

$$\sum_{i=1}^{m} (p_0 + x_{i1}p_1 + x_{i2}p_2 + \ldots + x_{in}p_n - y_i)^2 \to \min$$

Легко заметить, что в скобках стоят разности произведений строк матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$ на стобец $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \ldots \\ p_n \end{pmatrix}$ и компонент вектора $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix}$, т.е. квадрат длины вектора

$$A\boldsymbol{p} - \boldsymbol{y}.$$

Очевидно, такая функция определяется вектором $\boldsymbol{p} = (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Таким образом нам надо решить задачу

$$\sum_{i=1}^{m} (p_0 + x_{i1}p_1 + x_{i2}p_2 + \ldots + x_{in}p_n - y_i)^2 \to \min$$

Легко заметить, что в скобках стоят разности произведений строк матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$ на стобец $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \ldots \\ p_n \end{pmatrix}$ и компонент вектора $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix}$, т.е. квадрат длины вектора

$$A\boldsymbol{p} - \boldsymbol{y}.$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{p}$ коэффициентов искомой функции $y(x)$ это нормальное псевдорешение системы

$$A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{y}.$$

Пример

Пример

Цена за 1 кг яблок «Гольден» в сети магазинов «$***$» в первой половине октября менялась согласно следующей таблице:

Дни (x)	12 октября	14 октября	16 октября	19 октября	23 октября
Цена (y)	140 руб	145 руб	142 руб	130 руб	?

Пример

Цена за 1 кг яблок «Гольден» в сети магазинов «$***$» в первой половине октября менялась согласно следующей таблице:

Дни (x)	12 октября	14 октября	16 октября	19 октября	23 октября
Цена (y)	140 руб	145 руб	142 руб	130 руб	?

Используя метод наименьших квадратов при аппроксимации функции цены y килограмма яблок «Гольден» в зависимости от даты x вида

$$y = p_0 + p_1 x,$$

сделайте прогноз цены килограмма яблок «Гольден» на 23 октября.

Пример

Цена за 1 кг яблок «Гольден» в сети магазинов «$***$» в первой половине октября менялась согласно следующей таблице:

Дни (x)	12 октября	14 октября	16 октября	19 октября	23 октября
Цена (y)	140 руб	145 руб	142 руб	130 руб	?

Используя метод наименьших квадратов при аппроксимации функции цены y килограмма яблок «Гольден» в зависимости от даты x вида

$$y = p_0 + p_1 x,$$

сделайте прогноз цены килограмма яблок «Гольден» на 23 октября.

Решение.

Пример

Цена за 1 кг яблок «Гольден» в сети магазинов «$***$» в первой половине октября менялась согласно следующей таблице:

Дни (x)	12 октября	14 октября	16 октября	19 октября	23 октября
Цена (y)	140 руб	145 руб	142 руб	130 руб	?

Используя метод наименьших квадратов при аппроксимации функции цены y килограмма яблок «Гольден» в зависимости от даты x вида

$$y = p_0 + p_1 x,$$

сделайте прогноз цены килограмма яблок «Гольден» на 23 октября.

Решение. Вектор коэффициентов линейной аппроксимации находится как псевдорешение системы

$$A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{y}$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 14 \\ 1 & 16 \\ 1 & 19 \end{pmatrix}$ и стобцом $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 140 \\ 145 \\ 142 \\ 130 \end{pmatrix}$.

Находим его:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 14 \\ 1 & 16 \\ 1 & 19 \end{pmatrix}^{+} \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 145 \\ 142 \\ 130 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 163,34 \\ -1,58 \end{pmatrix}$$

Находим его:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 14 \\ 1 & 16 \\ 1 & 19 \end{pmatrix}^{+} \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 145 \\ 142 \\ 130 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 163,34 \\ -1,58 \end{pmatrix}$$

Линейная аппроксимация:

$$y(x) = 163,34 - 1,58x.$$

Находим его:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 14 \\ 1 & 16 \\ 1 & 19 \end{pmatrix}^{+} \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 145 \\ 142 \\ 130 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 163,34 \\ -1,58 \end{pmatrix}$$

Линейная аппроксимация:

$$y(x) = 163,34 - 1,58x.$$

Прогноз на 23 октября:

$$y(23) = 163,34 - 1,58 \cdot 23 = 127 \text{ руб}$$

Находим его:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 14 \\ 1 & 16 \\ 1 & 19 \end{pmatrix}^{+} \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 145 \\ 142 \\ 130 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 163,34 \\ -1,58 \end{pmatrix}$$

Линейная аппроксимация:

$$y(x) = 163,34 - 1,58x.$$

Прогноз на 23 октября:

$$y(23) = 163,34 - 1,58 \cdot 23 = 127 \text{ руб}$$

Замечание

Существуют и другие методы решения задач этого типа.

Спасибо за внимание!

- Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г. Линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебник для вузов, 2010.
- Fuad Aleskerov, Hasan Ersel, Dmitri Piontkovski. Linear Algebra for Economists. Springer (2011).