Математический анализ 1. Лекция 6.
Непрерывные функции и их свойства.

21 сентября 2023 г.

Односторонние пределы

1. Пусть b и c – действительные числа, а f – функция, определенная в $(b, b+\delta_0)$, где $\delta_0 > 0$. Говорят, что существует **предел f в точке b справа** $\lim\limits_{x\to b+0} f(x) = c$, если для каждой ε-окрестности $O_\varepsilon(c)$ найдется интервал $(b, b+\delta)$ с $0 < \delta \leqslant \delta_0$ такой, что $f(x) \in O_\varepsilon(c)$ для всех $x \in (b, b+\delta)$.

   Примеры. $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} \sqrt{x} = 0$.

2. Пусть b и c – действительные числа, а f – функция, определенная в $(b-\delta_0, b)$, где $\delta_0 > 0$. Говорят, что существует **предел f в точке b слева** $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = c$, если для каждой окрестности $O_\varepsilon(c)$ найдется интервал $(b-\delta, b)$ с $0 < \delta \leqslant \delta_0$ такой, что $f(x) \in O_\varepsilon(c)$ для всех $x \in (b-\delta, b)$.

   Пример. $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to -0} \dfrac{x}{-x} = -1$,

3. Если допустить также значения $c = \infty, +\infty, -\infty$, то будут определены бесконечно большие функции такие, что

   $$\lim_{x\to b+0} f(x) = \infty, +\infty, -\infty \text{ и } \lim_{x\to b-0} f(x) = \infty, +\infty, -\infty.$$

   Надо помнить, что пределы в этих случаях не существуют.

   Примеры. $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +0} \ln x = -\infty$.

Основные свойства.

1. Нетрудно дать эквивалентные определения односторонних пределов через последовательности по Гейне. В отличие от определения предела при $x \to b$ надо брать последовательности (a_n) такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ и
   $b < a_n < b + \delta_0$ при $x \to b + 0$ либо $b - \delta_0 < a_n < b$ при $x \to b - 0$.
2. Предел $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют оба предела $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b+0} f(x)$ и они равны между собой. В этом случае $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \lim\limits_{x\to b+0} f(x)$.

   Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ не существует.
3. В целом односторонние пределы имеют те же свойства, что и обычные пределы.

   В том числе верны теорема о пределах арифметических действиях над функциями, о предельных переходах в неравенствах и т.д.

С помощью замен переменной $t = \dfrac{1}{x-b}$ или $t = \dfrac{1}{b-x}$ односторонние пределы можно свести к пределам при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$ и наоборот:

$$\lim_{x\to b+0} f(x) = \lim_{t\to+\infty} f\left(b+\frac{1}{t}\right),$$

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = \lim_{t\to-\infty} f\left(b+\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right).$$

Примеры.

- $\displaystyle \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t+1} = 0,$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{e^t+1} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^{-y}+1} = 1$

– результаты разные.

Непрерывные функции

Определение

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки b. Она называется **непрерывной в точке** $b \in \mathbb{R}$, если существует

$$\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$$

(во-первых, этот предел существует, во-вторых, он равен именно $f(b)$). Положив $x = b + h$, это свойство можно переписать в виде

$$f(b+h) = f(b) + o(1) \text{ при } h \to 0.$$

Эквивалентное определение (по Гейне): функция f **непрерывна в точке** b, если для любой последовательности a_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\big) = f(b)$.

Определение

Если функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки b и не является непрерывной в этой точке, то говорят, что функция f **разрывна** в точке b, а b называется **точкой разрыва** функции f.

Примеры

Простейшие элементарные функции – это $f(x) =$
$x^a, a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x.$
Элементарные функции строятся из простейших с помощью арифметических операций и операций композиции.

1. Пусть функция f элементарна и определена в некоторой окрестности точки b. Тогда функция f непрерывна в точке b.
2. Функция $\operatorname{sgn} x$ разрывна при $x = 0$.
3. Функция Дирихле (характеристическая функция множества рациональных чисел)

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   определена при всех $x \in \mathbb{R}$ и разрывна **в каждой точке** $x \in \mathbb{R}$ (!).

4. Функция

$$r(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{если } x = \dfrac{p}{q}, \text{ где } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ и дробь } \dfrac{p}{q} \text{ несократима} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   определена при всех $x \in \mathbb{R}$, разрывна в каждой точке $b \in \mathbb{Q}$ и непрерывна в каждой точке $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Классификация точек разрыва.

1. Если существует $\lim\limits_{x\to b} f(x)=c$ (эквивалентно, существуют $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\lim\limits_{x\to b+0} f(x)$), но в точке b либо функция f не определена, либо $c\neq f(b)$, то b — точка устранимого разрыва.
   Если доопределить (переопределить) $f(b):=c$, то функция станет непрерывной в точке b.
   Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \ \Rightarrow x=0$ – точка устранимого разрыва.
   2. Если $f(x)$ – рациональная дробь и b – корень числителя кратности k и корень знаменателя кратности $l\leqslant k$, то b – точка устранимого разрыва.
2. Если существуют $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b+0} f(x)$, но **они не равны друг другу**, то b называется **точкой разрыва 1-го рода**.
   Примеры. 1. У функции $\operatorname{sgn} x$ в точке $x=0$ разрыв 1-го рода.
   2. $\lim\limits_{x\to -0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim\limits_{t\to -\infty}\operatorname{arctg} t=-\frac{\pi}{2}$,
   $\lim\limits_{x\to +0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim\limits_{u\to +\infty}\operatorname{arctg} u=\frac{\pi}{2} \ \Rightarrow x=0$ – точка разрыва 1-го рода.
3. Все другие точки разрыва - где не существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b+0} f(x)$ (в том числе если один или оба из них бесконечны) - называются **точками разрыва 2-го рода**.
   Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty \ \Rightarrow x=0$ – точка разрыва 2-го рода.

Пример. Найдите и исследуйте все точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{3}{x}}, \text{ если } x \in (-\infty, 0), \\ \dfrac{x}{x-3}, \text{ если } x \in [0, 4), \\ \dfrac{x}{x-2}, \text{ если } x \in [4, +\infty). \end{cases}$$

Точками разрыва могут быть только точки $b = 0, 3, 4$.
В точке $b = 0$ разрыва нет:

$$\lim_{x \to -0} e^{\frac{3}{x}} = 0, \quad \lim_{x \to +0} \frac{x}{x-3} = \frac{x}{x-3}\Big|_{x=0} = 0.$$

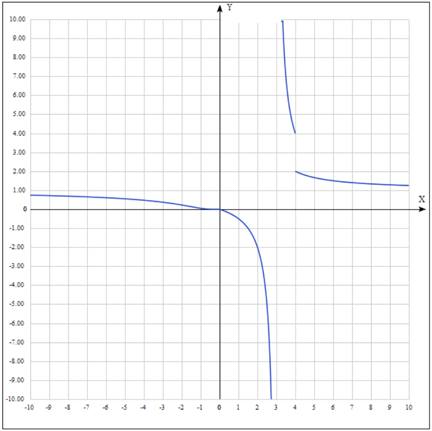
В точке $b = 3$ разрыв 2-го рода: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x}{x-3} = \infty$ не существует.
В точке $b = 4$ разрыв 1-го рода:

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{x}{x-3} = 4, \quad \lim_{x \to 4+0} \frac{x}{x-2} = 2.$$

Ответ. В точке $x = 3$ разрыв 2-го рода, в точке $x = 4$ разрыв 1-го рода.

График функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{3}{x}}, & \text{если } x \in (-\infty, 0), \\ \dfrac{x}{x-3}, & \text{если } x \in [0, 4), \\ \dfrac{x}{x-2}, & \text{если } x \in [4, +\infty) \end{cases}$$



Локальные свойства непрерывных функций

1. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки b и непрерывна в точке b. Тогда:
   1.1 функция f ограничена в некоторой окрестности точки b.
   1.2 если $f(b) \neq 0$, то для всех x из некоторой окрестности точки b значение $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f(b)$, т.е. $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(b)$.
2. Пусть функции f и g определены в некоторой окрестности точки b и непрерывны в точке b. Тогда в точке b непрерывны функции
$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}$$
(в последнем случае если $g(b) \neq 0 \; \Rightarrow g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки b).
3. Пусть функция g непрерывна в точке c, а функция f непрерывна в точке $b = g(c)$. Тогда функция $f \circ g$ непрерывна в точке c (в том числе определена в окрестности точки c): $\lim\limits_{t \to c} f(g(t)) = f(g(c)) = f(b)$.

Глобальные свойства непрерывных функций

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на **сегменте** $[a,b]$ (где $a<b$). Это означает, что она непрерывна в каждой точке (a,b), непрерывна справа в точке a: существует $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, и непрерывна слева в точке b: существует $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$.

1. **Первая теорема Вейерштрасса**. Функция f ограничена на сегменте $[a,b]$, т.е. для некоторого $C>0$

$$|f(x)|\leqslant C \quad \text{при} \quad x\in[a,b].$$

2. **Вторая теорема Вейерштрасса**. Функция f достигает на сегменте $[a,b]$ свои точную верхнюю и точную нижнюю грани, а поэтому и максимальное и минимальное значения, т.е. существуют такие $c,d\in[a,b]$, что

$$f(c)=\sup_{x\in[a,b]} f(x)=\max_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(d)=\inf_{x\in[a,b]} f(x)=\min_{x\in[a,b]} f(x).$$

3. **Теорема Коши о промежуточных значениях**. Функция f принимает все промежуточные значения, т.е. для любого числа p такого, что

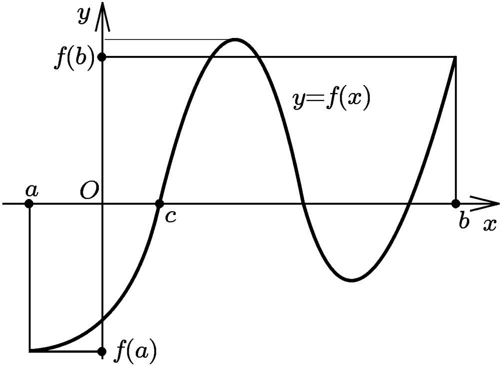
$$\min_{x\in[a,b]} f(x)\leqslant p\leqslant \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

существует точка $q\in[a,b]$, в которой $f(q)=p$.

Объединяя все три свойства в одно, получаем следующую теорему.

Теорема

Пусть функция f определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда ее область значений $R(f) = f([a, b])$ также является сегментом; более точно, $f([a, b]) = [\min\limits_{x\in[a,b]} f(x), \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)]$.



Теорема (об обращении монотонной непрерывной функции)

1. Пусть функция f непрерывна и возрастает на сегменте $[a, b]$. Тогда на сегменте $[f(a), f(b)]$ определена обратная функция $f^{(-1)}$, причем она непрерывна и возрастает.

2. Пусть функция f непрерывна и убывает на сегменте $[a, b]$. Тогда на сегменте $[f(b), f(a)]$ определена обратная функция $f^{(-1)}$, причем она непрерывна и убывает.

Пример. На каждом сегменте $[0, b]$, где $b > 0$, функция $f(x) = x^2$ возрастает и непрерывна. Значит, на любом сегменте $[0, b^2]$, а поэтому и на полупрямой $[0, +\infty)$, обратная функция $f^{(-1)}(x) = \sqrt{x}$ определена, непрерывна, возрастает и ее область значений есть $[0, +\infty)$.

Аналогично, на полупрямой $[0, +\infty)$ определена вторая обратная функция $\tilde{f}^{(-1)}(x) = -\sqrt{x}$; она непрерывна и убывает и ее область значений есть $(-\infty, 0]$ (другая!).

Асимптоты

1. **Вертикальные асимптоты.** Пусть $b \in \mathbb{R}$. Прямая $x = b$ называется вертикальной асимптотой функции f, если
   $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$ или $-\infty$ **или** $\lim\limits_{x \to b+0} f(x) = +\infty$ или $-\infty$.
   Замечание. Функция может иметь любое (в том числе бесконечное) количество вертикальных асимптот: $\operatorname{tg} x$ имеет их во всех точках $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. **Наклонные асимптоты.** Пусть $b = -\infty$ или $b = +\infty$. Прямая $y = kx + l$ есть наклонная асимптота функции f при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, если соответственно
   $$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx - l) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx - l) = 0.$$
   При $k = 0$ наклонная асимптота становится **горизонтальной**.

   Теорема. Если прямая $y = kx + l$ есть наклонная асимптота функции f, то $k = \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{x}$ и $l = \lim\limits_{x \to b} (f(x) - kx)$
   (отметим, что во второй предел входит значение первого).
   Если же какой-либо из этих двух пределов не существует, то асимптоты при $x \to b$ **не существует**.

   Функция f может иметь не более двух наклонных асимптот.

Пример. $f(x)=\dfrac{3x^3-2x-3}{x^2+x-2}$ – рациональная дробь.

1. Вертикальные асимптоты: $x=1$, $x=-2$ (это корни знаменателя, но не числителя).
2. Ищем наклонные асимптоты. Первый способ решения: приведем рациональную дробь к правильному виду

$$f(x)=\frac{3x^3-2x-3}{x^2+x-2}=3x-3+\frac{7x-9}{x^2+x-2},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{7x-9}{x^2+x-2}=0.$$

По определению $y=3x-3$ – наклонная асимптота как при $x\to+\infty$, так и $x\to-\infty$.

Более формальное решение. При $x\to+\infty$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-2x-3}{(x^2+x-2)x}=3,$$

$$l=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3-2x-3}{x^2+x-2}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+4x-3}{x^2+x-2}=-3.$$

Асимптота: $y=3x-3$. При $x\to-\infty$: асимптота такая же $y=3x-3$, т.к.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-2x-3}{(x^2+x-2)x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{-3y^3+2y-3}{(y^2-y-2)(-y)}=3,$$

$$l=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^3-2x-3}{x^2+x-2}-3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2+4x-3}{x^2+x-2}=-3.$$

Первая теорема Вейерштрасса

Теорема

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a,b]$. *Тогда функция* f *ограничена на сегменте* $[a,b]$, *т.е. для некоторого* $C > 0$

$$|f(x)| \leqslant C$$

для всех $x \in [a,b]$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть функция f не ограничена на $[a,b]$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in [a,b]$, в которой

$$|f(x_n)| > n.$$

Последовательность x_n ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность x_{i_n}, т.е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i_n} = c$. Тогда $c \in [a,b]$. Поскольку функция f непрерывна, то последовательность $f(x_{i_n})$ сходится:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{i_n}) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{i_n}\right) = f(c).$$

Значит, $f(x_{i_n})$ ограничена, что противоречит ее построению.

Вторая теорема Вейерштрасса

Теорема

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда функция f достигает на сегменте своих максимального и минимального значений, т.е. существуют такие $c, d \in [a, b]$, что

$$f(c) = \sup_{x \in [a,b]} f(x), \quad f(d) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Доказательство. В силу первой теоремы существует $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) = M$. По определению супремума для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in [a, b]$, для которого $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M$. Последовательность x_n ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность x_{i_n}. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_{i_n} = c$. Тогда $c \in [a, b]$. Поскольку функция f непрерывна, вновь имеем

$$\lim_{n \to \infty} f(x_{i_n}) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_{i_n}\right) = f(c).$$

При этом $M - \dfrac{1}{i_n} < f(x_{i_n}) \leqslant M$, откуда $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_{i_n}) = M$. Значит, $f(c) = M$. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Теорема Коши о нулях непрерывной функции

Теорема

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$ *и в точках* a *и* b *принимает значения разных знаков, т.е.* $\operatorname{sgn} f(a) = -\operatorname{sgn} f(b)$. *Тогда существует такая точка* $x_0 \in (a, b)$*, что* $f(x_0) = 0$.

Схема доказательства методом бисекции (деления сегмента пополам).

- Строим последовательность вложенных сегментов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ такую, что $\Delta_1 = [a, b]$, а $\Delta_i = [a_i, b_i]$ является левой или правой половиной сегмента Δ_{i-1} такой, что функция f принимает на концах Δ_i значения разных знаков, $i = 2, 3, \ldots$

  Если же f принимает значение 0 в середине сегмента Δ_{i-1}, то построение заканчивается, и теорема доказана.

- По теореме Кантора $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_i = \{x_0\}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$.

- Пусть c_n – тот из концов a_n, b_n, где $f(c_n) < 0$, а d_n – где $f(d_n) > 0$. Тогда $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) \leqslant 0$ и $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(d_n) \geqslant 0$. Значит, $f(x_0) = 0$.

Теорема Коши о промежуточных значениях

Теорема

Пусть функция $f(x)$ непрерывна непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда функция f принимает все промежуточные значения, т.е. для любого числа p такого, что

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant p \leqslant \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

существует точка $q \in [a, b]$, в которой

$$f(q) = p.$$

Доказательство. Пусть $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(c)$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(d)$. Достаточно рассмотреть случай $f(d) < p < f(c)$. Пусть для определенности $c < d$. Тогда можно применить теорему Коши о нуле непрерывной функции к $g(x) = f(x) - p$ на сегменте $[c, d]$.