Математический анализ 1. Направление 38.03.01 Экономика
Тема 2. Функции нескольких переменных
Семинар 2.9. Однородные функции. Выпуклые функции

1. Функция f задана на конусе $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Проверьте, однородна ли она на X, и если да, то найдите ее степень однородности:

   (1) $f(x,y) = \dfrac{x^3 + 2xy^2 - y^3}{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}$; (2) $f(x,y) = \sqrt[3]{\dfrac{xy}{x^2 + 3y^2}}$; (3) $f(x,y) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{y} + \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

   (4) $f(x,y) = \sqrt[5]{x^3 - 3x^2y + y^3} \cdot \sqrt[7]{x^2 + 4y^2}$; (5) $f(x,y) = \ln \dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$;

   (6) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2} + \sqrt{x^3 + y^3}$.

2. Скалярная функция f или вектор-функция $\mathbf{f}$ задана на конусе X. Проверьте, однородна ли она на X, и если да, то найдите ее степень однородности:

   (1) $f(x,y) = \dfrac{4}{\sqrt{y - x}}$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$;

   (2) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{xy + 2yz + 3zx}$, $X = \mathbb{R}^3$;

   (3) $\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ \sqrt{x^4 + 5y^4} \end{pmatrix}$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$;

   (4) $\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^3 + xy^2 + y^3 \end{pmatrix}$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

3. Проверьте, корректно ли определена и является ли однородной степени 0 на конусе X неявно заданная функция f:

   (1) $f(a,b,c) = \max\limits_{D_{a,b,c}} g(x,y)$ на $X = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a > 0, b > 0, c > 0\}$, где
   $$g(x,y) = 7x^3 - y^2 + x - 4y, \quad D_{a,b,c} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + by^2 \leqslant c\};$$

   (2) $f(a,b) = \max\limits_{D_{a,b}} g(x,y)$ на $X = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0, b > 0\}$, где
   $$g(x,y) = x^2 + y, \quad D_{a,b} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\Big\}.$$

4. Пусть $g(x,y)$ – непрерывная однородная степени α функция на $\mathbb{R}^2$, а функция f неявно задана формулой
   $$f(a,b) = \max_{D_{a,b}} g(x,y) \ \text{ на конусе } \ X = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0, b > 0\},$$
   где $D_{a,b} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\Big\}$. Докажите, что f корректно определена и однородна степени α на X.

5. Функция $f(x,y) = \sqrt{x + 3y} \cdot \sqrt[4]{15x^3 + y^3}$ задана на конусе $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$. Проверьте, что она однородна, и найдите ее степень однородности.

   С использованием теоремы Эйлера найдите также значение функции
   $$h(x,y) = \mathbf{r}^T \nabla f(\mathbf{r}) = (\mathbf{r}, \nabla f(\mathbf{r})) = x f'_x(x,y) + y f'_y(x,y)$$
   в точке $(1,1)$, где $\mathbf{r} = (x,y)^T$ – радиус-вектор-столбец.

6. Функция $f(x,y)=\sqrt[3]{2x^5+6y^5}\cdot\sqrt{7x^2+2y^2}$ задана на конусе $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geqslant 0,$ $y\geqslant 0\}$. Проверьте, что она однородна, и найдите ее степень однородности.

   С использованием следствия теоремы Эйлера об однородных функциях найдите также значение функции

$$v(x,y)=\mathbf{r}^T H_f(\mathbf{r})\mathbf{r}=(H_f(\mathbf{r})\mathbf{r},\mathbf{r})=x^2 f''_{xx}(x,y)+2xyf''_{xy}(x,y)+y^2 f''_{yy}(x,y)$$

   в точке $(1,1)$, где $\mathbf{r}=(x,y)^T$ – радиус-вектор-столбец.

7. Проверьте, что функция $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt[4]{x}+3\sqrt[4]{y}}$, определенная на конусе $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x>y>0\}$, однородна, и найдите ее степень однородности.

   С использованием теоремы Эйлера об однородных функциях найдите сумму ее эластичностей по x и y:

$$E_x[f](x,y)+E_y[f](x,y)=\frac{xf'_x(x,y)}{f(x,y)}+\frac{yf'_y(x,y)}{f(x,y)}\quad\text{на}\quad X.$$

8. Проверьте, обладает ли функция $f(x,y)$ свойствами однородности и гомотетичности на открытом конусе $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x>0, y>0\}$:

   (1) $f(x,y)=2^{\sqrt{2}x}3^{\sqrt{3}y}$; (2) $f(x,y)=x+y+\sqrt{x+y}$;

   (3) $f(x,y)=x^2y+xy$; (4) $f(x,y)=3\ln x-2\ln y$.

9. Докажите, что:

   (1) функция $f(\mathbf{x})=|\mathbf{x}|$ выпукла, но не строго выпукла на $\mathbb{R}^n$;

   (2) если функция $f(\mathbf{x})$ выпукла и неотрицательна на выпуклом множестве $V\subset\mathbb{R}^n$, то функция $f^2(\mathbf{x})$ также выпукла на V;

   (3) функция $f(x_1,\ldots,x_n)=(x_1\ldots x_n)^{1/n}$ вогнута на множестве $x_1>0,\ldots,x_n>0$.

10. Пусть $f(\mathbf{x})=(A\mathbf{x},\mathbf{x})_{\mathbb{R}^n}$ – квадратичная форма с симметричной матрицей A порядка n.

   (1) Докажите тождество

$$f(\alpha\mathbf{x}+(1-\alpha)\mathbf{y})=\alpha f(\mathbf{x})+(1-\alpha)f(\mathbf{y})-\alpha(1-\alpha)f(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

   для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ и числа α.

   (2) С помощью этого тождества докажите, что:

   а) функция $f(\mathbf{x})$ выпукла на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $A\geqslant 0$;

   б) функция $f(\mathbf{x})$ строго выпукла на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $A>0$.

   (3) С помощью результата п. 2 докажите, что квадратичная функция $g(\mathbf{x})=(A\mathbf{x},\mathbf{x})_{\mathbb{R}^n}+(\mathbf{b},\mathbf{x})_{\mathbb{R}^n}+c$ с некоторыми $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ и c выпукла (строго выпукла) на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $A\geqslant 0$ (соответственно $A>0$.

11. Исследуйте функцию f на выпуклость/вогнутость в области D. Использовав полученный результат,чи найдите значение и точки глобальных экстремумов (если они существуют) и область значений функции f на множестве D:

(1) $f(x,y) = \sqrt{x} + 4\sqrt{y} - x - 6y$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$;

(2) $f(x,y) = 18\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} - x - 3y$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$;

(3) $f(x,y) = \sqrt{xy}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0, y > 0\}$.

12. (*) Функция прибыли предприятия выражается формулой

$$p(x,y) = 8\sqrt{x} + 8\sqrt{y} - 7x - 8y + 100,$$

где x и y – некоторые производственные параметры. Исследуйте ее на выпуклость / вогнутость на множестве $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0, y > 0\}$.

Использовав полученный результат, найдите $\max\limits_S p(x,y)$ (если он существует) и точку, где он достигается на множестве $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y > 0,\ x + y \geqslant 20$.

13. Исследуйте функцию $f(x,y) = 2 - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{y+2}$ на выпуклость/вогнутость в области $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 2x + y \leqslant 6\}$.

Использовав полученный результат, найдите глобальные экстремумы $f(x,y)$ (если они существуют) и точки, где они достигаются на S, и укажите область значений функции f на S.