Математический анализ 1.
Направление 38.03.01 Экономика
Семинар 6. Односторонние пределы. Непрерывные функции. Классификация точек разрыва. Асимптоты.

1. Вычислите односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ в следующих случаях:

   (1) $f(x) = \dfrac{3x+|x|}{2x+|x|}$, $a=0$; (2) $f(x) = \dfrac{x^2+2|x-1|-1}{2x^2-3|x-1|-2}$, $a=1$;

   (3) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, $a=0$; (4) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}-1}$, $a=0$;

   (5) $f(x) = \left(\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}\right)^{3^{-\frac{1}{x}}}$, $a=0$;

   (6) $f(x) = \dfrac{|x^2+3x-10|-|2x^2-3x-2|}{x^2+|2-x|-4}$, $a=2$;

   (7) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}+2^{-\frac{1}{x}}}$, $a=0$; (8) $f(x) = \operatorname{arctg}\big(e^{\frac{1}{x}}\big)$, $a=0$;

   (9) $f(x) = \dfrac{x}{2+2^{\frac{1}{x}}}$, $a=0$; (10) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-x^n}{2+x^n}$, $a=1$.

2. Вычислите односторонние пределы:

   (1) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{|x^2-5x+6|}{x-2}$ и $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{|x^2-5x+6|}{x-2}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x-1}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2^x-1}$;

   (3) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, где $f(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<1\\ 5, & x=1\\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}, & x>1\end{cases}$.

3. Установите, существует ли указанный предел, проанализировав соответствующие односторонние пределы. Найдите указанный предел, если он существует, а в противном случае найдите односторонние пределы, если они существуют:

   (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+3|x|)^2}{3x+2|x|}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{e^{\frac{1}{x}}+1}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin|x|}{|x|}$;

   (5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin|x|}{|x-\pi|}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1-\cos 4x}}{\sin x}$; (7) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x\sqrt{1-\cos 4x}}{\sin x}$.

4. Найдите и классифицируйте все точки разрыва заданной функции:

   (1) $f(x) = \begin{cases}\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$; (2) $f(x) = \begin{cases}x^2\cos(\pi x), & x<0\\ \dfrac{x}{x-2}, & 0\leqslant x<3\\ 3\cos(x-3), & x\geqslant 3\end{cases}$;

(3) $f(x)=\begin{cases} x\ln|x|, & x\leqslant 1\\ \dfrac{x-1}{x+1}, & 1\leqslant x<3\\ \dfrac{x-2}{2}, & x\geqslant 3\end{cases}$; (4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x-1}, & x\leqslant 0\\ \dfrac{\sin^2 x}{x}, & 0<x<\pi\\ 1+\cos(x), & x\geqslant \pi\end{cases}$;

(5) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$; (6) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$; (7) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$;

(8) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$; (9) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$;

(10) $f(x)=\begin{cases} x. & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$; (11) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\leqslant 1\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$;

(12) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{ctg}^2\pi x, & x\notin\mathbb{Z}\\ 0, & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$; (13) $f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

5. Найдите и классифицируйте точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}$ и постройте ее график.

6. Докажите, что функция $f(x)=\operatorname{sgn}(x+1)$ не является непрерывной в точке $x_0=-1$ и постройте ее график.

7. Найдите значение параметра a, при котором заданная функция является непрерывной:
$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0\\ a+x, & x\geqslant 0\end{cases}.$$

8. Найдите все асимптоты функции $f(x)$:

(1) $f(x)=\dfrac{x^3+x+2}{3x^2-x-2}$; (2) $f(x)=\dfrac{2x^2+|x-2|}{x+1}$; (3) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+10}$;

(4*)$f(x)=\sqrt{x^4+2x^3+1}-\sqrt{x^4-x^3+2}$; (5) $f(x)=\dfrac{x^3}{6x^2-8-x^4}$;

(6) $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|+1}$; (7) $f(x)=\sqrt{x^2+3x-1}$;

(8) $f(x)=\sqrt{x^4+x^3}-\sqrt{x^4-x^3}$; (9) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$;

(10*) $f(x)=\sqrt{x^4+2x^3+1}-\sqrt{x^4-x^3+2}$; (11) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

9. Рассмотрим две схемы налогообложения:

(A) Все граждане, имеющие нулевой доход, получают помощь в размере 6000 у.е. Те, чей доход превышает 6000 у.е., уплачивают налог в размере 20% от суммы, превышающей 6000 у.е. Имеющие любой положительный доход граждане помощь не получают.

(B) Каждый человек независимо от его доходов получает помощь в размере 6000 у.е. С каждой у.е. своего заработка он уплачивает 40% налога (указанные 6000 у.е. не считаются заработком).

Найдите для схем (A) и (B) функции $y(x)$ дохода после уплаты налога в зависимости от дохода x, полученного до уплаты налога. Постройте графики получившихся функций. Исследуйте функции на непрерывность. Какая из схем налогообложения предоставляет больше стимулов для человека? Зависит ли ответ от величины дохода?

10. Алиса является менеджером фабрики. При использовании $x\%$ мощности фабрики общие операционные издержки составляют

$$C(x) = \frac{8x^2 - 636x - 320}{x^2 - 68x - 960}$$

сотен тысяч у.е.

(1) Найдите $C(0)$ и $C(100)$.

(2) Объясните, почему Алиса не может использовать результат пункта 1 вместе с теоремой о промежуточном значении непрерывной функции для заключения, что операционные издержки могут составлять ровно 700 000 у.е. при использовании некоторого процента мощности фабрики.