Математический анализ 1. Лекция 5. Эквивалентность и порядки малости функций

18 сентября 2023 г.

Напоминание: элементарная техника вычисления пределов

Элементарная техника полагается на удачное преобразование подпредельного выражения. Успех на этом пути зависит от случайной догадки и везения. Мы будем прокладывать путь к более систематическому вычислению пределов.

Эквивалентность функций

Определение. Пусть $b \in \mathbb{R}$ или $b = \pm\infty, \infty$ Пусть функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности точки b, причем $g(x) \neq 0$ в ней. Функции f и g называются *эквивалентными* ($f \sim g$) *при* $x \to b$, если

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Отсюда следует, что и $f(x) \neq 0$ в проколотой окрестности точки b и $\lim\limits_{x \to b} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$. Т.е. и $g \sim f$.

Пример. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Простейшие эквивалентности при $x \to 0$ (их надо запомнить!)

1. $\sin x \sim x$,
2. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$,
3. $(1 + x)^a - 1 \sim ax$,
4. $a^x - 1 \sim (\ln a)x$ при $a > 0$, $a \neq 1$
5. $\log_a(1 + x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$ при $a > 0$, $a \neq 1$,
6. $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$.

Что это означает для графиков функций? ★

Основные свойства эквивалентности

Ниже предполагается, что функции $f, g, \ldots$ определены в некоторой проколотой окрестности точки b.

1. Если $f \sim g$ при $x \to b$ и существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b} g(x)$, то существует и второй, и эти пределы равны.
   Если дополнительно обе функции непрерывны в точке b, то $f(b) = g(b)$.

   Доказательство. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} g(x)\right) = 1 \cdot \lim\limits_{x\to b} g(x)$.

2. Тривиальный случай: если существуют $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = c \neq 0$, то $f \sim g$ при $x \to b$.
   В частности, если существует $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c \neq 0$, то $f \sim c$ при $x \to b$.

   Пример. $\cos x \sim 1$ при $x \to 0$.

3. Для любых функций f, g, h при $x \to b$

   3.1 $f \sim f$ (рефлексивность),
   3.2 $f \sim g \;\Rightarrow\; g \sim f$ (симметричность) – уже обсудили выше.
   3.3 $f \sim g$ и $g \sim h \;\Rightarrow\; f \sim h$ (транзитивность).

   Доказательство. 1. $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{f(x)} = 1$.

   3. $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\lim\limits_{x\to b} \frac{g(x)}{h(x)} = 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$.

4. **Произведение эквивалентных функций.** Если $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \to b$, то $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ при $x \to b$.
   Пример. $\sin x \sim x$ при $x \to 0 \Rightarrow \; x \sin^2 x \sim x^3$ при $x \to 0$.
   Доказательство: $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f_1(x) f_2(x)}{g_1(x) g_2(x)} = \lim\limits_{x\to b} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \lim\limits_{x\to b} \dfrac{f_2 x)}{g_2(x)} = 1.$
5. **Частное эквивалентных функций.** Если $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \to b$, то $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$ при $x \to b$.
   Пример. $\sin x \sim x$ и $\cos x \sim 1$ при $x \to 0 \Rightarrow \; \operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$.
   Доказательство: $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} : \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)} = \lim\limits_{x\to b} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \lim\limits_{x\to b} \dfrac{g_2(x)}{f_2(x)} = 1.$

   Пример 1. При $x \to 0$ имеем
   $$\frac{\sin(2x)(1-\cos(3x))}{\ln(1-5x)} \sim \frac{2x \cdot \frac{1}{2}(3x)^2}{-5x} = -\frac{9}{5}x^2.$$

   Пример 2. При $x \to 2$ имеем
   $$\ln\left(\frac{2x+3}{x+5}\right) = \ln\left(1 + \frac{x-2}{x+5}\right) \sim \frac{x-2}{x+5} \sim \frac{1}{7}(x-2).$$

Верно ли, что:

если $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \to b$, то $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ при $x \to b$?

Нет!

Контрпример. При $x \to 0$:

- $x \sim x$,
- $-x + x^2 \sim -x + x^3$, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x + x^2}{-x + x^3} = 1$
- Но: $x^2 \nsim x^3$.

Замечание. Подобная ошибочная замена на эквивалентные в суммах и разностях может привести к неверному вычислению предела (!).
Например:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \neq \lim_{x \to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0. \ (!)$$

На самом деле $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$ (убедимся в этом в дальнейшем).

Замена на эквивалентные в пределах.

Следствие. Пусть при $x \to b$

$$f_1 \sim g_1, \ \ldots, \ f_n \sim g_n,$$
$$u_1 \sim v_1, \ \ldots, \ u_m \sim v_m$$

Тогда $f_1 \ldots f_n \sim g_1 \ldots g_n$, $u_1 \ldots u_m \sim v_1 \ldots v_m$ и

$$\lim_{x \to b} \frac{f_1(x) \ldots f_n(x)}{u_1(x) \ldots u_m(x)} = \lim_{x \to b} \frac{g_1(x) \ldots g_n(x)}{v_1(x) \ldots v_m(x)}.$$

Пример 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)\sin(3x)\sin(5x)}{\sin(2x)\sin(4x)\sin(6x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 3x \cdot 5x}{2x \cdot 4x \cdot 6x} = \frac{5}{16}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos(3x))\ln^2(1-\sin(x))}{(2^x-1)(\sqrt{1+x^3}-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(3x)^2}{2} \cdot x^2}{(\ln 2)x \cdot \frac{x^3}{2}} = \frac{9}{\ln 2}.$$

6. **Замена переменных** (очень часто используется в примерах).

Пусть $f \sim g$ при $x \to b$. Пусть функция h определена в некоторой окрестности точки $d \in \mathbb{R}$ или $d = \pm\infty, \infty$, существует $\lim\limits_{x \to d} h(x) = b$ и $h(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности точки d. Тогда

$$f(y)|_{y=h(x)} = f(h(x)) \sim g(y)|_{y=h(x)} = g(h(x)) \text{ при } \ x \to d.$$

Пример 1. Т.к. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, то

$$\sin\left(\frac{x^2+3x-4}{x+\ln(x^2)}\right) \sim \frac{x^2+3x-4}{x+\ln(x^2)} \sim \frac{(x+4)(x-1)}{1} \sim 5(x-1) \text{ при } \ x \to 1.$$

Пример 2. При $x \to 0$ имеем (также с учетом транзитивности $\sim$)

$$\sin(1-\cos x) \sim 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin(1-\cos x) \sim \frac{x^2}{2}.$$

Пусть $f \sim g$ при $x \to b$, а функция h определена и непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что

$$h(f(x)) \sim h(g(x)) \text{ при } \ x \to b?$$

Нет!

Контрпример. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}(1+x^2) = 1 \neq 0$, то имеем

$$1 + x \sim 1 + x^2 \text{ при } \ x \to 0.$$

Пусть $h(x) = x - 1$. Тогда

$$h(1+x) = x \not\sim x^2 = h(1+x^2) \text{ при } \ x \to 0.$$

Впрочем, для отдельных функций h это свойство может выполняться.

- Пусть $f \sim g$ при $x \to b$, и выражения f^α и g^α определены в некоторой проколотой окрестности точки b. Тогда $f^\alpha \sim g^\alpha$ при $x \to b$.

Порядки малости

Распространить на суммы и разности технику замены эквивалентных помогают *порядки малости*.

Определение. Пусть $b \in \mathbb{R}$ или $b = \pm\infty, \infty$ и функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности точки b и $g(x) \neq 0$ в ней. Тогда $f = o(g)$ при $x \to b$, если

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

В частности, запись $f = o(1)$ при $x \to b$ означает, что функция f – бесконечно малая при $x \to b$.

Примеры. Если $a < b$, то

- $|x|^b = o(|x|^a)$ при $x \to 0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{|x|^b}{|x|^a} = \lim\limits_{x \to \infty} |x|^{b-a} = 0.$
- $|x|^a = o(|x|^b)$ при $x \to \infty$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{|x|^a}{|x|^b} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{|x|^{b-a}} = 0.$

  (наоборот!)

Пусть $k \in \mathbb{Z}$. На практике очень часто $g(x) = (x-b)^k$ при $x \to b$, $b \in \mathbb{R}$ или $g(x) = x^k$ при $b = 0, \pm\infty, \infty$.

Замечание

Запись $f = o(g)$ на самом деле **не вполне корректна**, она не является равенством в привычном смысле: в том числе из нее вовсе не следует, что $o(g) = f$ (??).

Правильнее было бы писать $f \in o(g)$, ведь на самом деле $o(g)$ – это **множество** всех функций $f(x)$ таких, что

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Тем не менее соотношение $f = o(g)$ используют как равенство, упрощая в формулах f до $o(g)$. Это очень удобно, но требует аккуратности.

Используя такую подстановку, необходимо помнить, что разные вхождения одного и того же символа $o(g)$ обозначают, вообще говоря, **разные функции**.

Поэтому, например, также неверно, что $o(g) - o(g) = 0$ (??).

А как записать $o(g) - o(g) =$ правильно?

Основные свойства отношения o

Пусть $f(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки b. При $x \to b$ имеем

1. $o(Cg) = o(g)$ для любых $C \neq 0$, пример: $o(3x) = o(x)$ при $x \to 0$
2. $o(g) \pm o(g) = o(g)$, пример: $\sin^2 x \pm x^3 = o(x)$ при $x \to 0$
3. $o(o(g)) = o(g)$, пример: $o(x^2) = o(o(x)) = o(x)$ при $x \to 0$
4. $o(g + o(g)) = o(g)$, пример: $o(x + x^2) = o(x)$ при $x \to 0$
5. $f \cdot o(g) = o(fg)$, пример: $xo(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$
6. $o(f)o(g) = o(fg)$, пример: $o(x^2)o(x^3) = o(x^5)$ при $x \to 0$
7. если $f \sim g$ при $x \to b$, то $o(f) = o(g)$ при $x \to b$,
   пример: $o(\sin x) = o(x)$ при $x \to 0$.

Внимание: это, вообще говоря, «направленные» равенства.

Доказательство. Что именно в точности эти свойства означают:

2. $f_1 = o(g)$, $f_2 = o(g)$ $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to b} \frac{f_1(x)}{g(x)} = 0,\ \lim_{x\to b} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to b} \frac{f_1(x) \pm f_2(x)}{g(x)} = 0 \ \Leftrightarrow\ f_1 \pm f_2 = o(g).$$

3. Пусть $f = o(g)$, $h = o(f)$ $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,\ \lim_{x\to b} \frac{h(x)}{f(x)} = 0 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to b} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \frac{h(x)}{f(x)}\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to b} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $h = o(g)$.

$$5. \quad h = o(g) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to b}\frac{h(x)}{g(x)} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to b}\frac{f(x)h(x)}{f(x)g(x)} = 0 \;\Leftrightarrow\; fh = o(fg).$$

$$4. \quad f = o(g + o(g)) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x) + o(g(x))} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)(1 + o(1))} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)(1+o(1))}(1 + o(1)) = 0 \;\Leftrightarrow\; f = o(g).$$

$$6. \;\; u = o(f),\; v = o(g) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to b}\frac{u(x)}{f(x)} = 0,\; \lim_{x\to b}\frac{v(x)}{g(x)} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to b}\frac{u(x)v(x)}{f(x)g(x)} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; uv = o(fg).$$

7. Пусть $f \sim g \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$

$$u = o(f),\; v = o(g) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to b}\frac{u(x)}{f(x)} = 0,\; \lim_{x\to b}\frac{v(x)}{g(x)} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to b}\frac{u(x)}{g(x)} = 0,\; \lim_{x\to b}\frac{v(x)}{f(x)} = 0 \;\Leftrightarrow\; u = o(g),\; v = o(f)$$

Теорема

Пусть функции f и g определены и отличны от 0 в некоторой проколотой окрестности точки b. Тогда при $x \to b$

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f = g + o(g).$$

Доказательство:

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{f}{g} - 1 = o(1) \;\Leftrightarrow\; f = g + g \cdot o(1) \;\Leftrightarrow\; f = g + o(g).$$

Пример. Почему $o(g + o(g)) = o(g)$:
$f = g + o(g) \;\Leftrightarrow\; f \sim g$, а тогда $o(f) = o(g)$.

Следствия. При $x \to 0$ имеем

1. $\sin x = x + o(x)$,
2. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$,
3. $(1 + x)^a = 1 + ax + o(x)$,
4. $a^x = 1 + (\ln a)x + o(x)$ при $a > 0$,
5. $\log_a(1 + x) = \dfrac{x}{\ln a} + o(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$,
6. $\arcsin x = x + o(x)$, $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$.

Применение к вычислению пределов

Пример. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)-\sin(x)}{\sin(3x)-\sin(x)}$.

- Поскольку при $a\neq 0$ выполнено
$$\sin(ax)\sim ax \text{ при } x\to 0$$
(замена переменных $y=ax$ в основной эквивалентности), при $a\neq 0$ имеем
$$\sin(ax)=ax+o(ax)=ax+o(x) \text{ при } x\to 0.$$
- Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)-\sin(x)}{\sin(3x)-\sin(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+o(x)-(x+o(x))}{3x+o(x)-(x+o(x))}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+o(x)}{2x+o(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+o(x)}{2x+o(2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

Замечание. Эта стратегия не всегда приводит к успеху.

Пример:
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}=?$$
Ответа не получено, т.к., например, и $x^2=o(x)$, и $x^3=o(x)$.

Пример. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{x+2}}{x-2}$.

- Делаем замену переменных $y = x-2$, чтобы получить предел при $y \to 0$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{x+2}}{x-2} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{4+3y}-\sqrt[3]{4+y}}{y}$$

- Преобразуем подпредельное выражение так, чтобы иметь под корнями термы вида $1+ay$:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{4+3y}-\sqrt[3]{4+y}}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3y}{4}}-\sqrt[3]{1+\frac{y}{4}}\right)}{y}$$

- Используем равенство $\sqrt[3]{1+ay} = 1+\dfrac{ay}{3}+o(y)$ при $y\to 0$ (снова использована простая замена переменных):

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3y}{4}}-\sqrt[3]{1+\frac{y}{4}}\right)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{4}\left[1+\frac{3y}{12}+o(y)-\left(1+\frac{y}{12}+o(y)\right)\right]}{y} = \frac{\sqrt[3]{4}}{6}.$$

Пример. Найдите предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+x^2\ln|x|+\sin(x^2)}{x+1-\cos x}.$$

Заметим, что

- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0$, поэтому $x\ln|x| = o(1)$ и $x^2\ln|x| = o(x)$ при $x\to 0$,
- $\sin(x^2)\sim x^2$ при $x\to 0$, поэтому $\sin(x^2) = o(x)$ при $x\to 0$,
- $1-\cos x\sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x\to 0$, поэтому $1-\cos x = o(x)$ при $x\to 0$.

Следовательно, при $x\to 0$

$$3x+x^2\ln x+\sin(x^2) = 3x+o(x) \text{ и } x+1-\cos x = x+o(x).$$

Значит,

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+x^2\ln|x|+\sin(x^2)}{x+1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x+o(x)}{x+o(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{3+o(1)}{1+o(1)} = 3.$$

Внимание. Нельзя путать эквивалентности при $x\to 0$ и при $x\to +\infty$. В данном случае при $x\to +\infty$ результат совсем иной

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+x^2\ln x+\sin(x^2)}{x+1-\cos x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3+x\ln x+\frac{\sin(x^2)}{x}}{1+\frac{1-\cos x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty.$$

Пример. Найдите предел **последовательности** $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

- Преобразуем: $\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \sin\left(2\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)$
- Верно $\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}+o(x)$ при $x\to 0$. Следовательно, при $t\to\infty$

$$\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} = 1+\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

- Значит, при $n\to\infty$ (n натуральное!)

$$\sin\left(2\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \sin\left(2\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) =$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{n}+o\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \frac{\pi}{n}+o\left(\frac{\pi}{n}\right)+o\left(\frac{\pi}{n}+o\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \frac{\pi}{n}+o\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

- Следовательно

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}+o\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(\pi+o(\pi)) = \pi.$$

Пример. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(2\pi\sqrt{x^2+1}\right)$ не существует.

- Если предел существует и равен c, то по определению предела по Гейне имеем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n \sin(2\pi\sqrt{a_n^2+1}) = c.$$

- Мы уже нашли этот предел при $a_n = n$: он равен π. Достаточно найти другую бесконечно большую b_n, для которой

$$\lim_{n\to\infty} b_n \sin(2\pi\sqrt{b_n^2+1}) \neq \pi$$

.

- Положим $b_n = \dfrac{2n+1}{2}$.

Тогда, рассуждая совершенно аналогично, при $n \to \infty$ имеем:

$$\sin(2\pi\sqrt{b_n^2+1}) = \sin\left(2\pi\sqrt{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2+1}\right) =$$

$$= \sin\left(2\pi\cdot\frac{2n+1}{2}\sqrt{1+\frac{4}{(2n+1)^2}}\right) =$$

$$= \sin\left(\pi(2n+1)\left[1+\frac{2}{(2n+1)^2}+o\left(\frac{2}{(2n+1)^2}\right)\right]\right) =$$

$$= \sin\left(2\pi n+\pi+\frac{2\pi}{2n+1}+o\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}+o\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right) =$$

$$= -\frac{2\pi}{2n+1}+o\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} b_n\sin(2\pi\sqrt{b_n^2+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{2\pi}{2n+1}+o\left(\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)}{\dfrac{2}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}(-\pi+o(\pi)) = -\pi.$$

Тем самым результат доказан.