Математический анализ 1.
Направление 38.03.01 Экономика
Семинар 10. Применение формулы Тейлора. Правило Лопиталя

1. Использовав формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, вычислите пределы:

(1) $f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+4x} - \sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4-x^3} - \frac{3}{2}x\right)$; (4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^6+x^5} - \sqrt[3]{x^6-2x^5} - x\right)$; (5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$; (7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x}$; (8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^2}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x}}$; (10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$; (11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x\cos x}{\ln^3(1-x)}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\ln(\sqrt{1+x^2}+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; (13) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; (14) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\sin \pi x)}{\ln(1+\ln x)}$;

(15) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(1 - x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$; (16) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[6]{x^6+x^5} + \sqrt[6]{x^6-x^5} - 2x}{x\ln(1+x) - x\ln x - x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$.

2. Использовав формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, вычислите пределы:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(2022x))}{\ln(\cos(2023x))}$; (2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[48]{x} - 1}{\sqrt[36]{x} - 1}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}\sqrt{1+3x} - 1}{x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x})\sqrt{x}$; (6) $\lim\limits_{x\to x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\arcsin x}\right)$; (7) $\lim\limits_{x\to 0+0} (1+x)^{\ln x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2+3^x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Вычислите пределы, использовав правило Лопиталя (*в полном решении следует проверить все условия его применимости*):

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right)$; (2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4}{x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x - 4}$; (3) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(x^2-8)}{2x^2 - 5x - 3}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$; (5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{4\sin^2 x - 6\sin x + 1}{3\sin^2 x + 5\sin x - 4}$;

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x^3}$, $n \in \mathbb{N}$; (7) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$.

4. Покажите, что следующие пределы **невозможно вычислить по правилу Лопиталя**, и укажите, какие условия его применимости нарушаются. Найдите эти пределы другим способом:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \cos x}{x - \cos x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sin^2 x}$.

5. Использовав формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, вычислите значение заданной величины a с указанной точностью ε:

   (1) $a = \sqrt[3]{e}$, $\varepsilon = 0.001$; (2) $a = \sqrt[3]{2}$, $\varepsilon = 0.001$; (3) $a = \sqrt{127}$, $\varepsilon = 0.001$;

   (4) $a = \sqrt{10}$, $\varepsilon = 0.001$.

6. Оцените точность вычисления функции $f(x)$ по указанной приближенной формуле Тейлора на заданном сегменте S:

   (1) $\ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5}$, $S = [0, \frac{1}{2}]$;

   (2) $\operatorname{tg} x \approx x + \dfrac{x^3}{3}$, $S = [-0.1, 0.1]$;

   (3) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16}$, $S = [0, 0.2]$.