Линейная алгебра. Лекция 4. Определитель матрицы

Н. Л. Поляков

Высшая Школа Экономики, Факультет экономических наук, Москва

2022 г.

Определитель

Определитель

Для квадратных матриц можно определить **число**, которое характеризует многие важные свойства матрицы. Это число называется **определитель** (или **детерминант**) матрицы.

Определитель

Для квадратных матриц можно определить **число**, которое характеризует многие важные свойства матрицы. Это число называется **определитель** (или **детерминант**) матрицы. Исторически оно возникло в связи с исследованием вопроса о разрешимости систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Определитель

Для квадратных матриц можно определить **число**, которое характеризует многие важные свойства матрицы. Это число называется **определитель** (или **детерминант**) матрицы. Исторически оно возникло в связи с исследованием вопроса о разрешимости систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Пример. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Определитель

Для квадратных матриц можно определить **число**, которое характеризует многие важные свойства матрицы. Это число называется **определитель** (или **детерминант**) матрицы. Исторически оно возникло в связи с исследованием вопроса о разрешимости систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Пример. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на d, второе на $-b$, а затем сложив результаты, получим $(ad - bc)x = (pd - qb)$.

Определитель

Для квадратных матриц можно определить **число**, которое характеризует многие важные свойства матрицы. Это число называется **определитель** (или **детерминант**) матрицы. Исторически оно возникло в связи с исследованием вопроса о разрешимости систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Пример. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на d, второе на $-b$, а затем сложив результаты, получим $(ad - bc)x = (pd - qb)$. Аналогично, умножив первое уравнение на $-c$, второе на a, а затем сложив результаты, получим $(-bc + ad)y = (-pc + qa)$.

Определитель

Для квадратных матриц можно определить **число**, которое характеризует многие важные свойства матрицы. Это число называется **определитель** (или **детерминант**) матрицы. Исторически оно возникло в связи с исследованием вопроса о разрешимости систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Пример. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на d, второе на $-b$, а затем сложив результаты, получим $(ad - bc)x = (pd - qb)$. Аналогично, умножив первое уравнение на $-c$, второе на a, а затем сложив результаты, получим $(-bc + ad)y = (-pc + qa)$. **Вывод:** если $ad - bc \neq 0$, система имеет единственное решение.

Определитель

Для квадратных матриц можно определить **число**, которое характеризует многие важные свойства матрицы. Это число называется **определитель** (или **детерминант**) матрицы. Исторически оно возникло в связи с исследованием вопроса о разрешимости систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Пример. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на d, второе на $-b$, а затем сложив результаты, получим $(ad - bc)x = (pd - qb)$. Аналогично, умножив первое уравнение на $-c$, второе на a, а затем сложив результаты, получим $(-bc + ad)y = (-pc + qa)$. **Вывод:** если $ad - bc \neq 0$, система имеет единственное решение. Число $ad - bc$ называется определителем матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Понятие определителя для матриц 2×2, по всей видимости, было осознано в глубокой древности.

Понятие определителя для матриц 2×2, по всей видимости, было осознано в глубокой древности. Однако, на квадратные матрицы произвольной размерности это понятие было перенесено, вероятно, не раньше конца 17 века, независимо,

Понятие определителя для матриц 2×2, по всей видимости, было осознано в глубокой древности. Однако, на квадратные матрицы произвольной размерности это понятие было перенесено, вероятно, не раньше конца 17 века, независимо,

немецким ученым Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1693)

Понятие определителя для матриц 2×2, по всей видимости, было осознано в глубокой древности. Однако, на квадратные матрицы произвольной размерности это понятие было перенесено, вероятно, не раньше конца 17 века, независимо,

немецким ученым Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1693)

Понятие определителя для матриц 2×2, по всей видимости, было осознано в глубокой древности. Однако, на квадратные матрицы произвольной размерности это понятие было перенесено, вероятно, не раньше конца 17 века, независимо,

немецким ученым Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1693)

и японским ученым Сэки Такакадзу (1683)

Понятие определителя для матриц 2×2, по всей видимости, было осознано в глубокой древности. Однако, на квадратные матрицы произвольной размерности это понятие было перенесено, вероятно, не раньше конца 17 века, независимо,

немецким ученым Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1693)

и японским ученым Сэки Такакадзу (1683)

Понятие определителя для матриц 2×2, по всей видимости, было осознано в глубокой древности. Однако, на квадратные матрицы произвольной размерности это понятие было перенесено, вероятно, не раньше конца 17 века, независимо,

немецким ученым Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1693)

и японским ученым Сэки Такакадзу (1683)

Теория определителей развита Вандермондом, Лапласом, Коши и Якоби (вторая половина 18 – начало 19 вв.).

Определения

Определения

Внимание:

Определения

Внимание:

- Определитель определен только для квадратных матриц.

Определения

Внимание:

- Определитель определен только для квадратных матриц.
- Определитель есть число.

Определения

Внимание:

- Определитель определен только для квадратных матриц.
- Определитель есть число.

Мы дадим четыре разных определения определителя.

Определения

Внимание:

- Определитель определен только для квадратных матриц.
- Определитель есть число.

Мы дадим четыре разных определения определителя. Все они равносильны друг другу, см. доказательства в рекомендуемой литературе. Кроме того, все определения, кроме первого, требуют обоснования корректности (также см. рекомендованную литературу).

Определения

Внимание:

- Определитель определен только для квадратных матриц.
- Определитель есть число.

Мы дадим четыре разных определения определителя. Все они равносильны друг другу, см. доказательства в рекомендуемой литературе. Кроме того, все определения, кроме первого, требуют обоснования корректности (также см. рекомендованную литературу).

Определение (1)

Определения

Внимание:

- Определитель определен только для квадратных матриц.
- Определитель есть число.

Мы дадим четыре разных определения определителя. Все они равносильны друг другу, см. доказательства в рекомендуемой литературе. Кроме того, все определения, кроме первого, требуют обоснования корректности (также см. рекомендованную литературу).

Определение (1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i\sigma(i)} \right)$$

Определения

Внимание:

- Определитель определен только для квадратных матриц.
- Определитель есть число.

Мы дадим четыре разных определения определителя. Все они равносильны друг другу, см. доказательства в рекомендуемой литературе. Кроме того, все определения, кроме первого, требуют обоснования корректности (также см. рекомендованную литературу).

Определение (1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i\sigma(i)} \right)$$

Все необходимые разъяснения ниже.

Разъяснения

- *Перестановкой* множества X называется любое взаимно-однозначное отображение
$$\sigma : X \to X.$$

Разъяснения

- *Перестановкой* множества X называется любое взаимно-однозначное отображение
$$\sigma : X \to X.$$
Множество всех перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ обозначается символом S_n.

Разъяснения

- *Перестановкой* множества X называется любое взаимно-однозначное отображение
$$\sigma : X \to X.$$
Множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначается символом S_n.
- Каждую перестановку $\sigma \in S_n$ можно записать с помощью строки (вектора)
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$$
ее последовательных значений на элементах $1, 2, \dots, n$.

Разъяснения

- *Перестановкой* множества X называется любое взаимно-однозначное отображение
$$\sigma : X \to X.$$
Множество всех перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ обозначается символом S_n.
- Каждую перестановку $\sigma \in S_n$ можно записать с помощью строки (вектора)
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$$
ее последовательных значений на элементах $1, 2, \ldots, n$. Например, перестановка $\sigma \in S_3$, для которой
$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 1,$$
записывается с помощью строки
$$(2, 3, 1)$$

Разъяснения

- *Перестановкой* множества X называется любое взаимно-однозначное отображение
$$\sigma : X \to X.$$
Множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначается символом S_n.
- Каждую перестановку $\sigma \in S_n$ можно записать с помощью строки (вектора)
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$$
ее последовательных значений на элементах $1, 2, \dots, n$. Например, перестановка $\sigma \in S_3$, для которой
$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 1,$$
записывается с помощью строки
$$(2, 3, 1)$$
В строке, которая задает некоторую перестановку, нет повторений, т.е. такая строка удовлетворяет условию: $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ (**упражнение**: почему?).

Разъяснения

- *Перестановкой* множества X называется любое взаимно-однозначное отображение
$$\sigma : X \to X.$$
Множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначается символом S_n.
- Каждую перестановку $\sigma \in S_n$ можно записать с помощью строки (вектора)
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$$
ее последовательных значений на элементах $1, 2, \dots, n$. Например, перестановка $\sigma \in S_3$, для которой
$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 1,$$
записывается с помощью строки
$$(2, 3, 1)$$
В строке, которая задает некоторую перестановку, нет повторений, т.е. такая строка удовлетворяет условию: $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ (**упражнение**: почему?). При этом каждая строка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ без повторений однозначно определяет перестановку $\sigma \in S_n$ со значениями $x_1, x_2, \dots, x_n$ на элементах $1, 2, \dots, n$.

Разъяснения

- *Перестановкой* множества X называется любое взаимно-однозначное отображение
$$\sigma : X \to X.$$
Множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначается символом S_n.
- Каждую перестановку $\sigma \in S_n$ можно записать с помощью строки (вектора)
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$$
ее последовательных значений на элементах $1, 2, \dots, n$. Например, перестановка $\sigma \in S_3$, для которой
$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 1,$$
записывается с помощью строки
$$(2, 3, 1)$$
В строке, которая задает некоторую перестановку, нет повторений, т.е. такая строка удовлетворяет условию: $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ (**упражнение**: почему?). При этом каждая строка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ без повторений однозначно определяет перестановку $\sigma \in S_n$ со значениями $x_1, x_2, \dots, x_n$ на элементах $1, 2, \dots, n$. Поэтому, в частности, S_n содержит ровно ровно $n!$ перестановок.

- Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *транспозицией* если для некоторых различных $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнено:

$$\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = i \quad \text{и} \quad \sigma(k) = k \text{ для всех } k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

- Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *транспозицией* если для некоторых различных $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнено:

$$\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = i \quad \text{и} \quad \sigma(k) = k \text{ для всех } k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

- **Факт.** При $n \geqslant 2$ каждая перестановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена в виде композиции транспозиций.

- Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *транспозицией* если для некоторых различных $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнено:

$$\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = i \quad \text{и} \quad \sigma(k) = k \text{ для всех } k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

- **Факт.** При $n \geqslant 2$ каждая перестановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена в виде композиции транспозиций.

  Пример. Перестановка σ, которая задается строкой $(2, 3, 4, 1)$ есть композиция $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ транспоциций $\sigma_3 = (2, 1, 3, 4)$, $\sigma_2 = (3, 2, 1, 4)$, $\sigma_1 = (4, 2, 3, 1)$:

- Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *транспозицией* если для некоторых различных $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнено:

$$\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = i \quad \text{и} \quad \sigma(k) = k \text{ для всех } k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

- **Факт.** При $n \geqslant 2$ каждая перестановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена в виде композиции транспозиций.

  Пример. Перестановка σ, которая задается строкой $(2, 3, 4, 1)$ есть композиция $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ транспоциций $\sigma_3 = (2, 1, 3, 4)$, $\sigma_2 = (3, 2, 1, 4)$, $\sigma_1 = (4, 2, 3, 1)$:

$$1\,2\,3\,4 \xrightarrow{\sigma_3} 2\,1\,3\,4 \xrightarrow{\sigma_2} 2\,3\,1\,4 \xrightarrow{\sigma_1} 2\,3\,4\,1$$

- Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *транспозицией* если для некоторых различных $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнено:

$$\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = i \quad \text{и} \quad \sigma(k) = k \text{ для всех } k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

- **Факт.** При $n \geqslant 2$ каждая перестановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена в виде композиции транспозиций.

  Пример. Перестановка σ, которая задается строкой $(2, 3, 4, 1)$ есть композиция $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ транспоциций $\sigma_3 = (2, 1, 3, 4)$, $\sigma_2 = (3, 2, 1, 4)$, $\sigma_1 = (4, 2, 3, 1)$:

$$1\,2\,3\,4 \xrightarrow{\sigma_3} 2\,1\,3\,4 \xrightarrow{\sigma_2} 2\,3\,1\,4 \xrightarrow{\sigma_1} 2\,3\,4\,1$$

- **Факт.** Если перестановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена в виде композиции четного числа транспозиций, то она не может быть представлена в виде нечетного числа транспозиций, и наоборот.

- Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *транспозицией* если для некоторых различных $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнено:

$$\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = i \quad \text{и} \quad \sigma(k) = k \text{ для всех } k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

- **Факт.** При $n \geqslant 2$ каждая перестановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена в виде композиции транспозиций.

  Пример. Перестановка σ, которая задается строкой $(2, 3, 4, 1)$ есть композиция $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ транспоциций $\sigma_3 = (2, 1, 3, 4)$, $\sigma_2 = (3, 2, 1, 4)$, $\sigma_1 = (4, 2, 3, 1)$:

$$1\,2\,3\,4 \xrightarrow{\sigma_3} 2\,1\,3\,4 \xrightarrow{\sigma_2} 2\,3\,1\,4 \xrightarrow{\sigma_1} 2\,3\,4\,1$$

- **Факт.** Если перестановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена в виде композиции четного числа транспозиций, то она не может быть представлена в виде нечетного числа транспозиций, и наоборот. Это дает возможность ввести следующее определение.

- Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *транспозицией* если для некоторых различных $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнено:

$$\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = i \quad \text{и} \quad \sigma(k) = k \text{ для всех } k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

- **Факт.** При $n \geqslant 2$ каждая перестановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена в виде композиции транспозиций.

  Пример. Перестановка σ, которая задается строкой $(2, 3, 4, 1)$ есть композиция $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ транспоциций $\sigma_3 = (2, 1, 3, 4)$, $\sigma_2 = (3, 2, 1, 4)$, $\sigma_1 = (4, 2, 3, 1)$:

$$1\,2\,3\,4 \xrightarrow{\sigma_3} 2\,1\,3\,4 \xrightarrow{\sigma_2} 2\,3\,1\,4 \xrightarrow{\sigma_1} 2\,3\,4\,1$$

- **Факт.** Если перестановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена в виде композиции четного числа транспозиций, то она не может быть представлена в виде нечетного числа транспозиций, и наоборот. Это дает возможность ввести следующее определение. Перестановка называется **четной**, если она может быть представлена виде четного числа транспозиций. В противном случае перестановка называется **нечетной**.

- Практически четность перестановки можно определить следующим образом. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть запись перестановки σ в виде строки ее значений. **Инверсией** называется такая пара номеров $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, что $i < j$, но $x_i > x_j$. Тогда если строка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит четное число инверсий, то перестановка σ четная, и наоборот.

- Практически четность перестановки можно определить следующим образом. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть запись перестановки σ в виде строки ее значений. **Инверсией** называется такая пара номеров $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, что $i < j$, но $x_i > x_j$. Тогда если строка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит четное число инверсий, то перестановка σ четная, и наоборот.

Примеры.

– Перестановка $(1, 3, 2)$ нечетная, поскольку содержит только одну инверсию $(2, 3)$. Действительно:

$$2 < 3, \text{ но } x_2 = 3 > 2 = x_3.$$

Другие кандидаты (i, j), где $i < j$, не подходят:

$$x_1 = 1 < 3 = x_2 \text{ и } x_1 = 1 < 2 = x_3.$$

- Практически четность перестановки можно определить следующим образом. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть запись перестановки σ в виде строки ее значений. **Инверсией** называется такая пара номеров $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, что $i < j$, но $x_i > x_j$. Тогда если строка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит четное число инверсий, то перестановка σ четная, и наоборот.

  Примеры.

– Перестановка $(1, 3, 2)$ нечетная, поскольку содержит только одну инверсию $(2, 3)$. Действительно:

$$2 < 3, \text{ но } x_2 = 3 > 2 = x_3.$$

  Другие кандидаты (i, j), где $i < j$, не подходят:

$$x_1 = 1 < 3 = x_2 \text{ и } x_1 = 1 < 2 = x_3.$$

– Перестановка $(4, 5, 1, 3, 6, 2)$ четная, поскольку содержит 8 инверсий:

$$(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5), (5, 6).$$

- Практически четность перестановки можно определить следующим образом. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть запись перестановки σ в виде строки ее значений. **Инверсией** называется такая пара номеров $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, что $i < j$, но $x_i > x_j$. Тогда если строка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит четное число инверсий, то перестановка σ четная, и наоборот.

Примеры.

– Перестановка $(1, 3, 2)$ нечетная, поскольку содержит только одну инверсию $(2, 3)$. Действительно:

$$2 < 3, \text{ но } x_2 = 3 > 2 = x_3.$$

Другие кандидаты (i, j), где $i < j$, не подходят:

$$x_1 = 1 < 3 = x_2 \text{ и } x_1 = 1 < 2 = x_3.$$

– Перестановка $(4, 5, 1, 3, 6, 2)$ четная, поскольку содержит 8 инверсий:

$$(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5), (5, 6).$$

– Тождественная перестановка четная (в том числе при $n = 1$ по определению).

Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i\sigma(i)} \right),$$

где S_n есть множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ и

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, \text{если перестановка } \sigma \text{ четная} \\ -1, \text{если перестановка } \sigma \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i\sigma(i)} \right),$$

где S_n есть множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ и

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, \text{если перестановка } \sigma \text{ четная} \\ -1, \text{если перестановка } \sigma \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Пример.

Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i\sigma(i)} \right),$$

где S_n есть множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ и

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, \text{если перестановка } \sigma \text{ четная} \\ -1, \text{если перестановка } \sigma \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Пример. Вычисление определителя матрицы 3×3 по (классическому) определению.

σ	$\operatorname{sgn}(\sigma)$	σ	$\operatorname{sgn}(\sigma)$
123	$+1$	321	-1
213	-1	231	$+1$
132	-1	312	$+1$

Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i\sigma(i)} \right),$$

где S_n есть множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ и

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{если перестановка } \sigma \text{ четная} \\ -1, & \text{если перестановка } \sigma \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Пример. Вычисление определителя матрицы 3×3 по (классическому) определению.

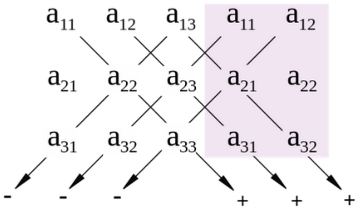
σ	$\operatorname{sgn}(\sigma)$	σ	$\operatorname{sgn}(\sigma)$
123	$+1$	321	-1
213	-1	231	$+1$
132	-1	312	$+1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

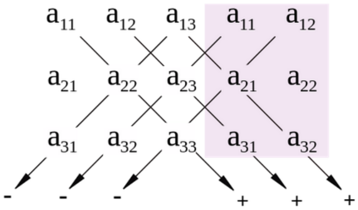
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Мнемоническое представление этой формулы носит название **правило Саррюса**.

Мнемоническое представление этой формулы носит название **правило Саррюса**.

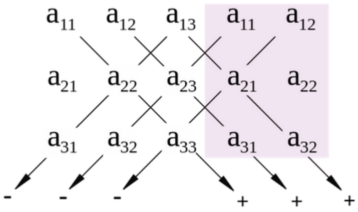


Мнемоническое представление этой формулы носит название **правило Саррюса**.



Правило Саррюса

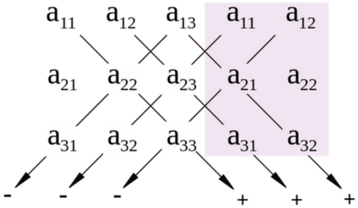
Мнемоническое представление этой формулы носит название **правило Саррюса**.



Правило Саррюса

- Широко известно.

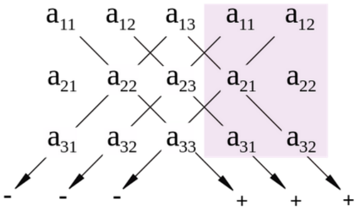
Мнемоническое представление этой формулы носит название **правило Саррюса**.



Правило Саррюса

- Широко известно.
- Наихудшее по трудозатратам.

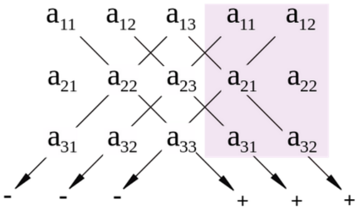
Мнемоническое представление этой формулы носит название **правило Саррюса**.



Правило Саррюса

- Широко известно.
- Наихудшее по трудозатратам.
- Не имеет обобщений на большие размерности.

Мнемоническое представление этой формулы носит название **правило Саррюса**.



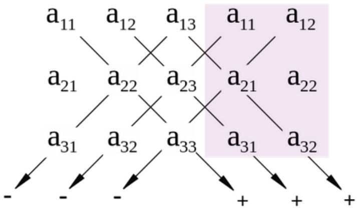
Правило Саррюса

- Широко известно.
- Наихудшее по трудозатратам.
- Не имеет обобщений на большие размерности.

Следствие определения (1).

$$|A^T| = |A|.$$

Мнемоническое представление этой формулы носит название **правило Саррюса**.



Правило Саррюса

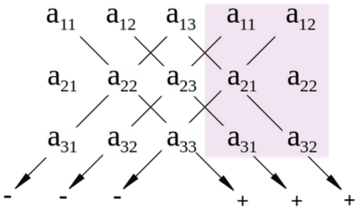
- Широко известно.
- Наихудшее по трудозатратам.
- Не имеет обобщений на большие размерности.

Следствие определения (1).

$$|A^T| = |A|.$$

Доказательство.

Мнемоническое представление этой формулы носит название **правило Саррюса**.



Правило Саррюса

- Широко известно.
- Наихудшее по трудозатратам.
- Не имеет обобщений на большие размерности.

Следствие определения (1).

$$|A^T| = |A|.$$

Доказательство.

$$|A^T| = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i\sigma^{-1}(i)} \right) = \sum_{\tau \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\tau) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i\tau(i)} \right)$$

Определение (2)

Определение (2)

Определитель есть кососимметрическая полилинейная функция столбцов и строк, равная единице на единичной матрице.

Определение (2)

Определитель есть кососимметрическая полилинейная функция столбцов и строк, равная единице на единичной матрице.

Разъяснения.

Определение (2)

Определитель есть кососимметрическая полилинейная функция столбцов и строк, равная единице на единичной матрице.

Разъяснения. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – строки матрицы A.

Определение (2)

Определитель есть кососимметрическая полилинейная функция столбцов и строк, равная единице на единичной матрице.

Разъяснения. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – строки матрицы A. Будем рассматривать функцию

$$\det : M_{nn} \to \mathbb{R}$$

как функцию строк матрицы-аргумента, т.е. как функцию

$$\det : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}.$$

Определение (2)

Определитель есть кососимметрическая полилинейная функция столбцов и строк, равная единице на единичной матрице.

Разъяснения. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – строки матрицы A. Будем рассматривать функцию

$$\det : M_{nn} \to \mathbb{R}$$

как функцию строк матрицы-аргумента, т.е. как функцию

$$\det : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}.$$

Выражение “$\det$ есть полилинейная функция строк” означает, что

$$\det(A_1, A_2, \ldots, \alpha A_i, \ldots, A_n) = \alpha \cdot \det(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n).$$

и

$$\det(A_1, A_2, \ldots, A_i + B_i, \ldots, A_n) =$$
$$\det(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n) + \det(A_1, A_2, \ldots, B_i, \ldots, A_n).$$

Определение (2)

Определитель есть кососимметрическая полилинейная функция столбцов и строк, равная единице на единичной матрице.

Разъяснения. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – строки матрицы A. Будем рассматривать функцию
$$\det : M_{nn} \to \mathbb{R}$$
как функцию строк матрицы-аргумента, т.е. как функцию
$$\det : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}.$$

Выражение "$\det$ есть полилинейная функция строк" означает, что
$$\det(A_1, A_2, \dots, \alpha A_i, \dots, A_n) = \alpha \cdot \det(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n).$$

и
$$\begin{aligned}&\det(A_1, A_2, \dots, A_i + B_i, \dots, A_n) = \\ &\det(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n) + \det(A_1, A_2, \dots, B_i, \dots, A_n).\end{aligned}$$

Выражение "$\det$ есть кососимметрическая функция строк" означает, что
$$\det(A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n) = -\det(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n).$$

Определение (2)

Определитель есть кососимметрическая полилинейная функция столбцов и строк, равная единице на единичной матрице.

Разъяснения. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – строки матрицы A. Будем рассматривать функцию

$$\det : M_{nn} \to \mathbb{R}$$

как функцию строк матрицы-аргумента, т.е. как функцию

$$\det : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}.$$

Выражение "$\det$ есть полилинейная функция строк" означает, что

$$\det(A_1, A_2, \dots, \alpha A_i, \dots, A_n) = \alpha \cdot \det(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n).$$

и

$$\det(A_1, A_2, \dots, A_i + B_i, \dots, A_n) =$$
$$\det(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n) + \det(A_1, A_2, \dots, B_i, \dots, A_n).$$

Выражение "$\det$ есть кососимметрическая функция строк" означает, что

$$\det(A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n) = -\det(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n).$$

Аналогично для столбцов.

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство.

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 2: определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на диагонали.

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 2: определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на диагонали.
Доказательство для случая матриц 2×2 (доказательство в общем случае аналогично):

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 2: определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на диагонали.
Доказательство для случая матриц 2×2 (доказательство в общем случае аналогично):

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} =$$

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 2: определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на диагонали.
Доказательство для случая матриц 2×2 (доказательство в общем случае аналогично):

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} =$$

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 2: определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на диагонали.
Доказательство для случая матриц 2×2 (доказательство в общем случае аналогично):

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 2: определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на диагонали.
Доказательство для случая матриц 2×2 (доказательство в общем случае аналогично):

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad.$$

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 2: определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на диагонали.
Доказательство для случая матриц 2×2 (доказательство в общем случае аналогично):

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad.$$

Следствие 3: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 2: определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на диагонали.
Доказательство для случая матриц 2×2 (доказательство в общем случае аналогично):

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad.$$

Следствие 3: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
Доказательство.

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 2: определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на диагонали.
Доказательство для случая матриц 2×2 (доказательство в общем случае аналогично):

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad.$$

Следствие 3: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 2: определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на диагонали.
Доказательство для случая матриц 2×2 (доказательство в общем случае аналогично):

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad.$$

Следствие 3: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 2: определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на диагонали.
Доказательство для случая матриц 2×2 (доказательство в общем случае аналогично):

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad.$$

Следствие 3: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} =$$

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 2: определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на диагонали.
Доказательство для случая матриц 2×2 (доказательство в общем случае аналогично):

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad.$$

Следствие 3: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} =$$

$$ad - \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} =$$

Следствие 1: если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.
Доказательство. Из полилинейности определителя следует, что если матрица A содержит нулевую строку, то $|A| = 2|A|$, откуда $|A| = 0$.

Следствие 2: определитель диагональной матрицы равен произведению элементов на диагонали.
Доказательство для случая матриц 2×2 (доказательство в общем случае аналогично):

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad.$$

Следствие 3: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} =$$

$$ad - \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Определение (3)

Определение (3)

1. Определитель единичной матрицы равен единице.

Определение (3)

1. Определитель единичной матрицы равен единице.
2. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \leftrightarrows A_j$ (где $i \neq j$), то $|B| = -|A|$.

Определение (3)

1. Определитель единичной матрицы равен единице.
2. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \leftrightarrows A_j$ (где $i \neq j$), то $|B| = -|A|$.
3. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \to \lambda A_i$, то $|B| = \lambda |A|$.

Определение (3)

1. Определитель единичной матрицы равен единице.
2. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \leftrightarrows A_j$ (где $i \neq j$), то $|B| = -|A|$.
3. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \to \lambda A_i$, то $|B| = \lambda |A|$.
4. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \to A_i + \lambda A_j$, то $|B| = |A|$.

Определение (3)

1. Определитель единичной матрицы равен единице.
2. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \leftrightarrows A_j$ (где $i \neq j$), то $|B| = -|A|$.
3. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \to \lambda A_i$, то $|B| = \lambda |A|$.
4. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \to A_i + \lambda A_j$, то $|B| = |A|$.

Замечание. Поскольку $|A^T| = |A|$, аналогичные равенства верны и для преобразований столбцов.

Определение (3)

1. Определитель единичной матрицы равен единице.
2. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \leftrightarrows A_j$ (где $i \neq j$), то $|B| = -|A|$.
3. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \to \lambda A_i$, то $|B| = \lambda |A|$.
4. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \to A_i + \lambda A_j$, то $|B| = |A|$.

Замечание. Поскольку $|A^T| = |A|$, аналогичные равенства верны и для преобразований столбцов.

Следствие 1. Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению элементов на диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Определение (3)

1. Определитель единичной матрицы равен единице.
2. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \leftrightarrows A_j$ (где $i \neq j$), то $|B| = -|A|$.
3. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \to \lambda A_i$, то $|B| = \lambda |A|$.
4. Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \to A_i + \lambda A_j$, то $|B| = |A|$.

Замечание. Поскольку $|A^T| = |A|$, аналогичные равенства верны и для преобразований столбцов.

Следствие 1. Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению элементов на диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Следствие 2. Пусть A есть матрица размера $n \times n$. Тогда $|A| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} A < n$.

Определение (4)

Определение (4)

Пусть A есть матрица размера $n \times n$.

Определение (4)

Пусть A есть матрица размера $n \times n$.

1. Если $n = 1$, т.е. $A = (a)$, то $|A| = a$.

Определение (4)

Пусть A есть матрица размера $n \times n$.

1. Если $n = 1$, т.е. $A = (a)$, то $|A| = a$.
2. Если $n > 1$, то

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, а M_{ij} есть определитель матрицы B_{ij}, полученной из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца (**разложение Лапласа**).

Определение (4)

Пусть A есть матрица размера $n \times n$.

1. Если $n = 1$, т.е. $A = (a)$, то $|A| = a$.
2. Если $n > 1$, то
$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$
где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, а M_{ij} есть определитель матрицы B_{ij}, полученной из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца (**разложение Лапласа**).

Замечание. Это *рекурсивное* определение.

Определение (4)

Пусть A есть матрица размера $n \times n$.

1. Если $n = 1$, т.е. $A = (a)$, то $|A| = a$.
2. Если $n > 1$, то
$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$
где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, а M_{ij} есть определитель матрицы B_{ij}, полученной из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца (**разложение Лапласа**).

Замечание. Это *рекурсивное* определение.

Замечание. Поскольку $|A^T| = |A|$, аналогичные равенства верны и для преобразований столбцов.

Определение (4)

Пусть A есть матрица размера $n \times n$.

1. Если $n = 1$, т.е. $A = (a)$, то $|A| = a$.
2. Если $n > 1$, то

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

   где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, а M_{ij} есть определитель матрицы B_{ij}, полученной из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца (**разложение Лапласа**).

Замечание. Это *рекурсивное* определение.

Замечание. Поскольку $|A^T| = |A|$, аналогичные равенства верны и для преобразований столбцов.

Пример.

Определение (4)

Пусть A есть матрица размера $n \times n$.

1. Если $n = 1$, т.е. $A = (a)$, то $|A| = a$.
2. Если $n > 1$, то

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

   где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, а M_{ij} есть определитель матрицы B_{ij}, полученной из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца (**разложение Лапласа**).

Замечание. Это *рекурсивное* определение.

Замечание. Поскольку $|A^T| = |A|$, аналогичные равенства верны и для преобразований столбцов.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Определение (4)

Пусть A есть матрица размера $n \times n$.

1. Если $n = 1$, т.е. $A = (a)$, то $|A| = a$.
2. Если $n > 1$, то

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

   где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, а M_{ij} есть определитель матрицы B_{ij}, полученной из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца (**разложение Лапласа**).

Замечание. Это *рекурсивное* определение.

Замечание. Поскольку $|A^T| = |A|$, аналогичные равенства верны и для преобразований столбцов.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Определение (4)

Пусть A есть матрица размера $n \times n$.

1. Если $n = 1$, т.е. $A = (a)$, то $|A| = a$.
2. Если $n > 1$, то

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

   где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, а M_{ij} есть определитель матрицы B_{ij}, полученной из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца (**разложение Лапласа**).

Замечание. Это *рекурсивное* определение.

Замечание. Поскольку $|A^T| = |A|$, аналогичные равенства верны и для преобразований столбцов.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = 0$$

Быстрое вычисление определителя 3×3

Для быстрого вычисления определителя матрицы A размера 3×3 уместно

Быстрое вычисление определителя 3×3

Для быстрого вычисления определителя матрицы A размера 3×3 уместно (вместо применения правила Саррюса),

Быстрое вычисление определителя 3×3

Для быстрого вычисления определителя матрицы A размера 3×3 уместно (вместо применения правила Саррюса), используя элементарные преобразования (строк или столбцов), получить матрицу, содержащую два нуля в одной из строк (или в одном из столбцов),

Быстрое вычисление определителя 3×3

Для быстрого вычисления определителя матрицы A размера 3×3 уместно (вместо применения правила Саррюса), используя элементарные преобразования (строк или столбцов), получить матрицу, содержащую два нуля в одной из строк (или в одном из столбцов), а затем разложить определитель по этой строке (или столбцу).

Быстрое вычисление определителя 3×3

Для быстрого вычисления определителя матрицы A размера 3×3 уместно (вместо применения правила Саррюса), используя элементарные преобразования (строк или столбцов), получить матрицу, содержащую два нуля в одной из строк (или в одном из столбцов), а затем разложить определитель по этой строке (или столбцу). Получится определитель матрицы 2×2 (умноженный на какой-то коэффициент).

Быстрое вычисление определителя 3×3

Для быстрого вычисления определителя матрицы A размера 3×3 уместно (вместо применения правила Саррюса), используя элементарные преобразования (строк или столбцов), получить матрицу, содержащую два нуля в одной из строк (или в одном из столбцов), а затем разложить определитель по этой строке (или столбцу). Получится определитель матрицы 2×2 (умноженный на какой-то коэффициент). Последний определитель надо будет подсчитать по формуле $ad - bc$.

Быстрое вычисление определителя 3×3

Для быстрого вычисления определителя матрицы A размера 3×3 уместно (вместо применения правила Саррюса), используя элементарные преобразования (строк или столбцов), получить матрицу, содержащую два нуля в одной из строк (или в одном из столбцов), а затем разложить определитель по этой строке (или столбцу). Получится определитель матрицы 2×2 (умноженный на какой-то коэффициент). Последний определитель надо будет подсчитать по формуле $ad - bc$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & 2 \end{vmatrix} =$$

Быстрое вычисление определителя 3×3

Для быстрого вычисления определителя матрицы A размера 3×3 уместно (вместо применения правила Саррюса), используя элементарные преобразования (строк или столбцов), получить матрицу, содержащую два нуля в одной из строк (или в одном из столбцов), а затем разложить определитель по этой строке (или столбцу). Получится определитель матрицы 2×2 (умноженный на какой-то коэффициент). Последний определитель надо будет подсчитать по формуле $ad - bc$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -10 & -5 & 0 \\ -11 & -10 & 0 \end{vmatrix} =$$

Быстрое вычисление определителя 3×3

Для быстрого вычисления определителя матрицы A размера 3×3 уместно (вместо применения правила Саррюса), используя элементарные преобразования (строк или столбцов), получить матрицу, содержащую два нуля в одной из строк (или в одном из столбцов), а затем разложить определитель по этой строке (или столбцу). Получится определитель матрицы 2×2 (умноженный на какой-то коэффициент). Последний определитель надо будет подсчитать по формуле $ad - bc$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -10 & -5 & 0 \\ -11 & -10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -5 \\ -11 & -10 \end{vmatrix} =$$

Быстрое вычисление определителя 3×3

Для быстрого вычисления определителя матрицы A размера 3×3 уместно (вместо применения правила Саррюса), используя элементарные преобразования (строк или столбцов), получить матрицу, содержащую два нуля в одной из строк (или в одном из столбцов), а затем разложить определитель по этой строке (или столбцу). Получится определитель матрицы 2×2 (умноженный на какой-то коэффициент). Последний определитель надо будет подсчитать по формуле $ad - bc$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -10 & -5 & 0 \\ -11 & -10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -5 \\ -11 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$100 - 55 = 45$$

Дополнительные свойства.

- $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

Дополнительные свойства.

- $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство для матриц 2×2 **с помощью Определения (2)**.

Дополнительные свойства.

- $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство для матриц 2×2 **с помощью Определения (2)**.

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right| =$$

Дополнительные свойства.

- $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство для матриц 2×2 с помощью Определения (2).

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{vmatrix} =$$

Дополнительные свойства.

- $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство для матриц 2×2 с помощью Определения (2).

$$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} ae & af \\ ce & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ae & bh \\ ce & dh \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & af \\ dg & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{vmatrix} =$$

Дополнительные свойства.

- $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство для матриц 2×2 **с помощью Определения (2).**

$$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} ae & af \\ ce & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ae & bh \\ ce & dh \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & af \\ dg & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{vmatrix} =$$

$$0 + eh\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + fg\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + 0 =$$

Дополнительные свойства.

- $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|.$

Доказательство для матриц 2×2 **с помощью Определения (2).**

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} ae & af \\ ce & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ae & bh \\ ce & dh \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & af \\ dg & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{vmatrix} =$$

$$0 + eh \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + fg \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + 0 = eh \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - fg \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

Дополнительные свойства.

- $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство для матриц 2×2 **с помощью Определения (2).**

$$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} ae & af \\ ce & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ae & bh \\ ce & dh \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & af \\ dg & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{vmatrix} =$$

$$0 + eh\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + fg\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + 0 = eh\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - fg\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$(eh - fg)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

Дополнительные свойства.

- $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство для матриц 2×2 с помощью Определения (2).

$$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} ae & af \\ ce & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ae & bh \\ ce & dh \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & af \\ dg & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{vmatrix} =$$

$$0 + eh\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + fg\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + 0 = eh\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - fg\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$(eh - fg)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- Определитель блочно-диагональной (и блочно-верхнетреугольной) матрицы равен произведению определителей диагональных блоков.

- Определитель блочно-диагональной (и блочно-верхнетреугольной) матрицы равен произведению определителей диагональных блоков.

Пример.

- Определитель блочно-диагональной (и блочно-верхнетреугольной) матрицы равен произведению определителей диагональных блоков.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} =$$

- Определитель блочно-диагональной (и блочно-верхнетреугольной) матрицы равен произведению определителей диагональных блоков.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

- Определитель блочно-диагональной (и блочно-верхнетреугольной) матрицы равен произведению определителей диагональных блоков.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 11 & 10 & 12 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

- Определитель блочно-диагональной (и блочно-верхнетреугольной) матрицы равен произведению определителей диагональных блоков.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 11 & 10 & 12 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

- Определитель блочно-диагональной (и блочно-верхнетреугольной) матрицы равен произведению определителей диагональных блоков.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 11 & 10 & 12 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(45-33)(14-8) = 72$$

Определители и системы уравнений

Вернемся к исходной мотивации введения определителей (исследованию вопроса о разрешимости систем линейных уравнений)

Определители и системы уравнений

Вернемся к исходной мотивации введения определителей (исследованию вопроса о разрешимости систем линейных уравнений)

Теорема

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{212} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Определители и системы уравнений

Вернемся к исходной мотивации введения определителей (исследованию вопроса о разрешимости систем линейных уравнений)

Теорема

Система линейных уравнений

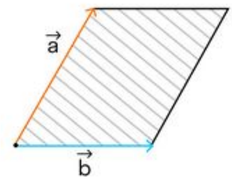
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{212} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Эту тему мы подробно рассмотрим на следующих двух лекциях.

Определители и геометрия

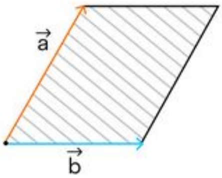


Пусть $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ – векторы из $\mathbb{R}^2$. Тогда число

$$\left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right|$$

есть площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Определители и геометрия



Пусть $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ – векторы из $\mathbb{R}^2$.
Тогда число

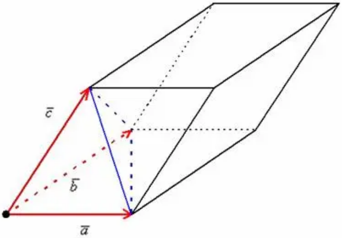
$$\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right|$$

есть площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

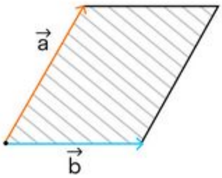
Пусть $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ – векторы из $\mathbb{R}^3$.
Тогда число

$$\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right|$$

есть объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.



Определители и геометрия



Пусть $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ – векторы из $\mathbb{R}^2$. Тогда число

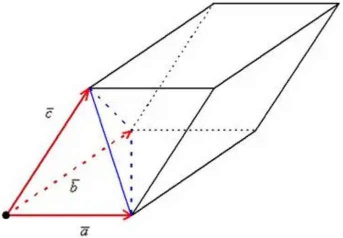
$$\left|\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right|$$

есть площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Пусть $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ – векторы из $\mathbb{R}^3$. Тогда число

$$\left|\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right|$$

есть объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.



Здесь внешние прямые линии означают модуль (поэтому определитель обозначен символ $\det$, а не линиями).

Следствие.

Следствие.

Если двух- или трехмерная фигура F^* получена из фигуры F с помощью линейного преобразования

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x},$$

то ее площадь (соответственно, объем) равна площади (сответственно, объему) фигуры F, умноженной на модуль определителя матрицы A.

Следствие.

Если двух- или трехмерная фигура F^* получена из фигуры F с помощью линейного преобразования

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x},$$

то ее площадь (соответственно, объем) равна площади (сответственно, объему) фигуры F, умноженной на модуль определителя матрицы A.

$\xrightarrow{A}$

Объем V

Объем $V \cdot |\det A|$

Следствие.

Если двух- или трехмерная фигура F^* получена из фигуры F с помощью линейного преобразования
$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x},$$
то ее площадь (соответственно, объем) равна площади (сответственно, объему) фигуры F, умноженной на модуль определителя матрицы A.

$$\overset{A}{\Longrightarrow}$$

Объем V

Объем $V \cdot |\det A|$

Это свойство более подробно изучается в курсе «Математический анализ» или «Математика для экономистов» (раздел «Кратные интегралы»).

Спасибо за внимание!

- Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г. Линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебник для вузов, 2010.
- Fuad Aleskerov, Hasan Ersel, Dmitri Piontkovski. Linear Algebra for Economists. Springer (2011).

Приложение. Примеры вычисления определителей с помощью рекуррентных соотношений

Определитель Вандермонда.

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

Приложение. Примеры вычисления определителей с помощью рекуррентных соотношений

Определитель Вандермонда.

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (x_2 - x_1) & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (x_n - x_1) & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

Приложение. Примеры вычисления определителей с помощью рекуррентных соотношений

Определитель Вандермонда.

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & (x_2 - x_1) & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (x_n - x_1) & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$\prod_{2 \leqslant j \leqslant n} (x_j - x_1) \cdot W(x_2, \ldots, x_n).$$

Значит,

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Применение определителя Вандермонда

Теорема. Через любые $n \geqslant 2$ точек на плоскости с попарно различными абсциссами проходит ровно один график многочлена степени не выше $n-1$ (через две точки – прямая, через три – прямая или парабола, и т.д.).

Применение определителя Вандермонда

Теорема. Через любые $n \geqslant 2$ точек на плоскости с попарно различными абсциссами проходит ровно один график многочлена степени не выше $n-1$ (через две точки – прямая, через три – прямая или парабола, и т.д.).

Доказательство. Пусть даны точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, …, $A_n(x_n, y_n)$. Условие принадлежности этих точек графику единственного многочлена степени не выше $n-1$ равносильно существованию единственного набора чисел a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1} (коэффициентов многочлена), таких что при подстановке каждой пары (x_i, y_i) вместо переменных (x, y) уравнение

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} = y$$

превращается в верное числовое равенство.

Применение определителя Вандермонда

Теорема. Через любые $n \geqslant 2$ точек на плоскости с попарно различными абсциссами проходит ровно один график многочлена степени не выше $n-1$ (через две точки – прямая, через три – прямая или парабола, и т.д.).

Доказательство. Пусть даны точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, …, $A_n(x_n, y_n)$. Условие принадлежности этих точек графику единственного многочлена степени не выше $n-1$ равносильно существованию единственного набора чисел a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1} (коэффициентов многочлена), таких что при подстановке каждой пары (x_i, y_i) вместо переменных (x, y) уравнение

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} = y$$

превращается в верное числовое равенство. Таким образом, искомый многочлен существует тогда и только тогда, когда разрешима система уравнений (относительно переменных a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1}):

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n. \end{cases}$$

Применение определителя Вандермонда

Теорема. Через любые $n \geqslant 2$ точек на плоскости с попарно различными абсциссами проходит ровно один график многочлена степени не выше $n-1$ (через две точки – прямая, через три – прямая или парабола, и т.д.).

Доказательство. Пусть даны точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$. Условие принадлежности этих точек графику единственного многочлена степени не выше $n-1$ равносильно существованию единственного набора чисел a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} (коэффициентов многочлена), таких что при подстановке каждой пары (x_i, y_i) вместо переменных (x, y) уравнение

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} = y$$

превращается в верное числовое равенство. Таким образом, искомый многочлен существует тогда и только тогда, когда разрешима система уравнений (относительно переменных a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}):

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n. \end{cases}$$

Коэффициенты этой ситемы образуют матрицу Вандермонда.

Применение определителя Вандермонда

Теорема. Через любые $n \geqslant 2$ точек на плоскости с попарно различными абсциссами проходит ровно один график многочлена степени не выше $n-1$ (через две точки – прямая, через три – прямая или парабола, и т.д.).

Доказательство. Пусть даны точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, …, $A_n(x_n, y_n)$. Условие принадлежности этих точек графику единственного многочлена степени не выше $n-1$ равносильно существованию единственного набора чисел a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1} (коэффициентов многочлена), таких что при подстановке каждой пары (x_i, y_i) вместо переменных (x, y) уравнение

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} = y$$

превращается в верное числовое равенство. Таким образом, искомый многочлен существует тогда и только тогда, когда разрешима система уравнений (относительно переменных a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1}):

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n. \end{cases}$$

Коэффициенты этой ситемы образуют матрицу Вандермонда. Из выведенной формулы следует, что ее определитель отличен от нуля при попарно различных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Применение определителя Вандермонда

Теорема. Через любые $n \geqslant 2$ точек на плоскости с попарно различными абсциссами проходит ровно один график многочлена степени не выше $n-1$ (через две точки – прямая, через три – прямая или парабола, и т.д.).

Доказательство. Пусть даны точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $\ldots$, $A_n(x_n, y_n)$. Условие принадлежности этих точек графику единственного многочлена степени не выше $n-1$ равносильно существованию единственного набора чисел a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1} (коэффициентов многочлена), таких что при подстановке каждой пары (x_i, y_i) вместо переменных (x, y) уравнение

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} = y$$

превращается в верное числовое равенство. Таким образом, искомый многочлен существует тогда и только тогда, когда разрешима система уравнений (относительно переменных a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1}):

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2 \\ \ldots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n. \end{cases}$$

Коэффициенты этой ситемы образуют матрицу Вандермонда. Из выведенной формулы следует, что ее определитель отличен от нуля при попарно различных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. По свойствам определителя система имеет решение, причем единственное.

Определитель трехдиагональной матрицы Пусть даны последовательности $a_1, a_2, \ldots$, $b_1, b_2, \ldots$, $c_1, c_2, \ldots$.

$$D_n =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} =$$

$$-c_{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{n-2} & b_{n-1} \end{vmatrix} + a_n D_{n-1} =$$

$$-c_{n-1} b_{n-1} D_{n-2} + a_n D_{n-1}$$

При этом $D_1 = a_1$ и $D_2 = a_1 a_2 - b_1 c_1$.

Пример.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = D_{n-1} - D_{n-2}$$

Получаем последовательность значений D_n:

$$1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, \dots$$

Например, $D_6 = 1$.