Математический анализ 1.
Направление 38.03.01 Экономика
Семинар 12. Элементы выпуклого анализа. Графики – I

1. Использовав свойства выпуклых функций, исследуйте функцию $f(x)$ на выпуклость и вогнутость на заданном промежутке X:

   (1) $f(x) = x^2(2\ln x - 3)$, $X = (0, 1)$; (2) $f(x) = x^2(2\ln x - 3)$, $X = (1, +\infty)$;

   (3) $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 7\cos x$, $X = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; (4) $f(x) = x^2(2 + \sin x)$, $X = \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$;

   (5) $f(x) = \sin^2 x$, $X = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; (6) $f(x) = (1 - \sin x)^2$, $X = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

   (7) $f(x) = \left(\frac{1}{2} - \sin x\right)^2$, $X = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; (8) $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$, $X = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

   (9) $f(x) = x^2 - 6x - 6(x - 2)\ln(x - 2)$, $X = (3, 5)$;

   (10) $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$, $X = [3, 10]$;

   (11) $f(x) = -4\ln(1 + x) + 5x^2 - 11\cos x$, $X = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и выпукла на сегментах $[a, c]$ и $[c, b]$, где $a < c < b$. Верно ли, что тогда она выпукла на сегменте $[a, b]$?

3. (1) Исследуйте функцию $f(x) = x^2 - \ln(2x)$ на выпуклость или вогнутость (на всей области определения).

   (2) Использовав полученный результат, найдите точку глобального минимума функции $f(x)$ и ее область значений.

   (3) Использовав полученные результаты, найдите максимальное значение функции $f(x)$ на сегменте $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

4. (1) Исследуйте функцию $f(x) = -x^2 + x + \ln(4x)$ на выпуклость или вогнутость (на всей области определения).

   (2) Использовав полученный результат, найдите точку глобального минимума функции $f(x)$ (на всей области определения) и ее область значений.

   (3) Использовав полученные результаты, найдите максимальное значение этой функции на сегменте $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$.

5. *Средним гармоническим* положительных чисел x_1, $x_2, \ldots, x_n$ называется число

   $$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

   Использовав выпуклость функции $f(x) = \frac{1}{x}$, докажите, что среднее гармоническое чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не превосходит их среднего арифметического.

   При каких x_1, $x_2, \ldots, x_n$ это неравенство является строгим?

6. *Средним геометрическим* положительных чисел x_1, $x_2, \ldots, x_n$ называется число

   $$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

   Использовав выпуклость функции $f(x) = x\ln x$, докажите, что среднее гармоническое чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не превосходит их среднего геометрического.

   При каких x_1, $x_2, \ldots, x_n$ это неравенство является строгим?

7. Для следующих степенных функций $f(x)$ найдите область определения, корни, $f'(x)$, исследуйте характер монотонности и найдите точки локального минимума и максимума. Найдите также $f''(x)$, исследуйте функции на выпуклость и вогнутость и найдите точки перегиба. Нарисуйте эскизы графиков:

   (1) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$; (2) $f(x) = 2x^6 - 3x^4$; (3) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$;

   (4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; (5) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; (6) $f(x) = x(4 - x)^3$;

   (7) $f(x) = x^2(5 - x)^3$; (8) $f(x) = (x - 2)^3(10 - x)^5$;

   (9) $f(x) = x(x - 1)(x + 1)$.

8. Для следующих иррациональных функций $f(x)$ найдите область определения, корни, $f'(x)$, исследуйте характер монотонности и найдите точки локального минимума и максимума. Найдите также $f''(x)$, исследуйте функции на выпуклость и вогнутость и найдите точки перегиба. Нарисуйте эскизы графиков:

   (1) $f(x) = x\sqrt{2 - x}$; (2) $f(x) = x\sqrt{3 - x}$; (3) $f(x) = (3 - x)\sqrt{x}$; (4) $f(x) = (4 - x)\sqrt[3]{x}$;

   (5) $f(x) = (6 - x)\sqrt[5]{x}$; (6) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2 - x}$; (7) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{6 - x}$;

   (8) $f(x) = \sqrt{x(4 - x)}$; (9) $f(x) = \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{64 - x}$; (10) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{12 - x}$.