Математический анализ 1. Направление 38.03.01 Экономика
Тема 2. Функции нескольких переменных
Семинар 2.3. Пределы. Непрерывность.

1. Найдите предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ и доопределите функцию f в точке $(0,0)$ так, чтобы она стала непрерывной в этой точке, для:

   (1) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; (2) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$; (3) $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$;

   (4) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$; (5) $f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$; (6) $f(x,y) = y\ln(x^2+y^2)$.

2. Найдите предел $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ и доопределите функцию f в точке (x_0,y_0) так, чтобы она стала непрерывной в этой точке, для:

   (1) $f(x,y) = x\ln y$, $(x_0,y_0) = (0,1)$; (2) $f(x,y) = xy\ln(xy)$, $(x_0,y_0) = (1,1)$;

   (3) $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$; (4) $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;

   (5) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$.

3. Найдите предел $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ и доопределите функцию f в точке (x_0,y_0) так, чтобы она стала непрерывной в этой точке, для:

   (1) $f(x,y) = x\ln(xy)$, $(x_0,y_0) = (1,1)$; (2) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;

   (3) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$; (4) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;

   (5) $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$.

4. Докажите, что предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует и функцию $f(x,y)$ невозможно доопределить так, чтобы она стала непрерывной в точке $(0,0)$, для:

   (1) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; (2) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$; (3) $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$;

   (4) $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$.

5. Найдите предел $\lim\limits_{t\to+0} f(x,y)|_{x=\alpha(t),\, y=\beta(t)}$ для:

   (1) $f(x,y) = xy$; (2) $f(x,y) = x^2+y^2$; (3) $f(x,y) = (x+2)^{y+3}$;

   (4) $f(x,y) = \log_{x+2}(y+8)$,

   рассмотрев во всех пунктах функции: (a) $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = t$; (b) $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = t^2$; (c) $\alpha(t) = t\cos t$, $\beta(t) = t\sin t$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{t\to+0} f(x,y)|_{x=\alpha(t),\, y=\beta(t)}$ для:

   (1) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = kt$; (2) $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$, $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = kt$;

(3) $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$, (a) $\alpha(t)=t$, $\beta(t)=kt$; (b) $\alpha(t)=t$, $\beta(t)=kt^2$,
где k – параметр.

7. Найдите предел $\lim\limits_{t\to+0} f(x,y)|_{x=\alpha(t),\, y=\beta(t)}$ для:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\alpha(t)=t$, $\beta(t)=kt$;

(2) $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$, (a) $\alpha(t)=t$, $\beta(t)=kt$; (b) $\alpha(t)=t$, $\beta(t)=kt^2$;

(3) $f(x,y)=\dfrac{2x^3y}{x^6+y^2}$, (a) $\alpha(t)=t$, $\beta(t)=t$; (b) $\alpha(t)=t$, $\beta(t)=kt^2$; (c) $\alpha(t)=t$, $\beta(t)=kt^3$,
где k – параметр.

8. Докажите, что предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует и выясните, существуют ли повторные пределы $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$ и $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$, для:

(1) $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$; (2) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$; (3) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

(4) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$; (5) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$; (6) $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x^2+xy+y^2}$;

(7) $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$; (8) $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$; (9) $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{y}$.

9. Найдите повторные пределы $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$ и $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ для:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy+y^2}{2x^2-xy+3y^2}$; (2) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{3x+2y}$; (3) $f(x,y)=\dfrac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2}$;

(4) $f(x,y)=\dfrac{\sin|x|-\sin|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (5) $f(x,y)=\dfrac{\sin 3x-\operatorname{tg} 2y}{6x+3y}$.

10. Существуют ли предел $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ и повторные пределы $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ в случае:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$; (2) $f(x,y)=\log_x(x+y)$, $(x_0,y_0)=(1,0)$;

(3) $f(x,y)=\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$.

11. При каком значении параметра a непрерывна на $\mathbb{R}^2$ функция:

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \quad \text{при} \quad x^2+y^2\neq0, \quad f(0,0)=a.$$

12. Дана функция $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ при $x^2+y^2\neq0$, $f(0,0)=0$.

(1) Докажите, что она разрывна в точке $(0,0)$.

(2) Докажите, что $\lim\limits_{t\to0} f(at,bt)=0$ для любых a, b таких, что $a^2+b^2\neq0$.

13. С применением свойств непрерывных функций установите открытость или замкнутость множества X решений системы неравенств:

    (1) $x^2 + 3y^2 \geqslant 5,\ x - 3y \geqslant 0$; (2) $x^2 + 3y^2 > 5,\ x^2 + y^2 < 100$.

14. Приведите примеры, показывающие, что на все следующие вопросы следует дать, вообще говоря, отрицательный ответ:

    (1) верно ли, что непрерывная функция переводит ограниченные множества в ограниченные?

    (2) верно ли, что непрерывная функция переводит замкнутые множества в замкнутые?

    (3) верно ли, что непрерывная функция переводит открытые множества в открытые?

    (4) верно ли, что непрерывная функция переводит открытые ограниченные множества в открытые ограниченные?

15. Контрпримеры к теоремам Вейерштрасса:

    (1) приведите пример разрывной функции f, определенной на множестве $S \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ – любое, не являющемся ни ограниченным, ни замкнутым, и при этом ограниченной на S;

    (2) приведите пример разрывной функции f, определенной на множестве $S \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ – любое, не являющемся ни ограниченным, ни замкнутым, для которой определены (и достигаются) и $\min\limits_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$, и $\max\limits_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$.