Математический анализ 1. Лекция 10. Приложения формулы Тейлора. Правило Лопиталя. Второе достаточное условие экстремума.

5 октября 2023 г.

Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
Пусть функция f определена в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ точки x_0 и имеет все производные до n-го порядка включительно в точке x_0. Тогда

$$f(x) = T_n[f](x) + o((x-x_0)^n) =$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$
$$+ o((x-x_0)^n) \ \text{ при } \ x \to x_0.$$

Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
Пусть функция f определена и $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ точки x_0. Тогда для каждого $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$ существует точка c, лежащая строго между x_0 и x такая, что

$$f(x) = T_n[f](x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} =$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Формулы Макло́рена некоторых элементарных функций

1. $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$
$+r_{n+1}(x),\ x > -1$

2. $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + r_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_{n+1}(x)$

3. $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + r_{n+1}(x) =$
$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + r_{n+1}(x),\ \ x > -1$

4. $\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + r_{2n+2}(x) =$
$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + r_{2n+2}(x)$

5. $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + r_{2n+1}(x) =$
$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + r_{2n+1}(x)$

Приложение 1. Приближенные вычисления с использованием формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Примеры. 1. Найдем приближенное значение $e^{0.1}$ с помощью многочлена Макло́рена 2-й степени для функции e^x при $x = 0.1$:

$$e^{0.1} \approx 1 + 0.1 + \frac{1}{2!}(0.1)^2 = 1.105.$$

Погрешность результата – это

$$|r_3| = \frac{e^c}{3!}(0.1)^3 < \frac{e}{3!}0.001 < \frac{3}{2\cdot 3}0.001 = 0.0005, \quad \text{где } 0 < c < 0.1.$$

Итак, погрешность вычисленного значения составляет менее 0.0005, что записывают так: $e^{0.1} = 1.1050 \pm 0.0005$.

2. В более типичном случае надо подбирать степень многочлена Те́йлора или Макло́рена такую, что обеспечивается заданная погрешность. Найдем приближенное значение $\sin 0.5$ по формуле Макло́рена с точностью не выше 0.0005. Погрешность результата – это

$$|r_{2k+1}| = \frac{|\sin^{(2k+1)}(c)|}{(2k+1)!}(0.5)^{2k+1} \leqslant \frac{1}{(2k+1)!2^{2k+1}}, \quad 0 < c < 0.5.$$

Имеем $\dfrac{1}{3!2^3} \approx 0.0208$, $\dfrac{1}{5!2^5} \approx 0.00026$. Поэтому нужно использовать формулу Макло́рена 3-го порядка

$$\sin 0.5 \approx 0.5 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.4791666... \;\Rightarrow\; \sin 0.5 \approx 0.4792 \pm 0.0003$$

Приложение 2. Вычисление пределов с использованием формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Примеры. 1. Вычислим ранее возникавший, но оставшийся ненайденным предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3!}+o(x)\right) = -\frac{1}{6}.$$

Брать формулу Макло́рена 1-го порядка, как мы знаем, слишком грубо, а брать формулу 5-го порядка можно, но было бы излишне.

2. Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)-\sin(2x)-\sin x}{\sin(4x)-4\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3x-\frac{(3x)^3}{3!}+o(x^4)-\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^4)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}{\left(4x-\frac{(4x)^3}{3!}+o(x^4)\right)-4\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}(-27+8+1)+o(x^4)}{\frac{x^3}{3!}(-64+4)+o(x^4)} = \frac{3}{10}.$$

3. Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)}{x^4+o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}(1-\frac{1}{3})x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \frac{1}{12}.$$

4. Вычислим предел $L = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ функции $f(x) = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin x - x)}}$.

Найдем сначала $\lim\limits_{x\to 0} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)}{x(\sin x - x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)}{x\left(-\frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4!} + o(x^5)}{-\frac{x^4}{3!} + o(x^5)} = -\frac{1}{4}.$$

В силу непрерывности экспоненты $L = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln f(x)} = e^{-\frac{1}{4}}$.

Теорема (правило Лопиталя)

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ или x_0 – фиктивная точка $\pm\infty, \infty$, и функции f и g определены в некоторой окрестности x_0. Тогда если:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$
   или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $-\infty$ *или* ∞,
2. f *и* g *дифференцируемы в некоторой окрестности* x_0,
3. $g'(x) \neq 0$ *для всех* x *из некоторой окрестности* x_0,
4. *существует* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Для $x_0 \in \mathbb{R}$ и неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ этот результат сразу следует из леммы прошлой лекции.
Доказательства в других случаях не рассматриваем.

Пример. Вычислим $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+x+2}{x^4-2x^2-8}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-3x^2+x+2)'}{(x^4-2x^2-8)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-6x+1}{4x^3-4x}=\frac{1}{24}.$$

Замечания.

1. Если не проверить условие 1, то может быть получен неверный ответ, не вызывающий подозрения по своей форме.
2. Применение правила Лопиталя может быть нерационально, если дифференцирование усложняет вид дроби.

3. Правило Лопиталя можно применять последовательно несколько раз, т.е. многократно. Например, недавно вычисленный предел можно найти также трехкратным применением правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-\sin(2x)-\sin x}{\sin(4x)-4\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)-2\cos(2x)-\cos x}{4\cos(4x)-4\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{9\sin(3x)-4\sin(2x)-\sin x}{16\sin(4x)-4\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{27\cos(3x)-8\cos(2x)-\cos x}{64\cos(4x)-4\cos x}=\frac{18}{60}=\frac{3}{10}.$$

Еще пример: степенная функция растет медленнее экспоненты при $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

4. Правило Лопиталя верно и для односторонних пределов.

Пример. При $a>0$ вычислим $\lim\limits_{x\to+0}x^a\ln x=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-a}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-ax^{-a-1}}=\lim\limits_{x\to+0}(-\frac{1}{a}x^a)=0$. Здесь нестандартная для правила Лопиталя неопределенность $[0\cdot\infty]$ преобразована в стандартную.

Еще один пример с преобразованием неопределенности.
Вычислить $L = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = [1^\infty]$ для показательно-степенной функции $f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$.

Найдем сначала

$$\lim_{x\to 0} \ln f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}}{e^x} = 2\cdot 1 = 2.$$

В силу непрерывности экспоненты $L = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln f(x)} = e^2$.

Теорема

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0, а в самой точке x_0 она непрерывна и существует предел производной $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = A$.
Тогда функция $f(x)$ дифференцируема и в точке x_0, и

$$f'(x_0) = A,$$

т.е. производная $f'(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Применить правило Лопиталя к функции $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Пример. Пусть $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$.

Найдем $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 0$
– результат не удивителен, т.к. функция $f(x)$ – четная.

Другой способ: если заранее знать, что $f(x)$ имеет $f'''(0)$, то значения $f'(0)$ и $f''(0)$ легко вычисляются и с помощью формулы Макло́рена

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{1}{3}\frac{x^2}{2!} + o(x^2) \Rightarrow f'(0) = 0, \quad f''(0) = -\frac{1}{3}.$$

Теорема (второе достаточное условие экстремума)

Пусть функция f имеет все производные до n-го порядка включительно в точке x_0, где $n \geqslant 2$, и при этом

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:
1. если $n = 2k$ четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка строгого локального минимума;
2. если $n = 2k$ четно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка строгого локального максимума;
3. если $n = 2k - 1$ нечетно, то x_0 не является точкой локального экстремума.

В частности (случай $n = 2$), если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то:
1. если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка строгого локального минимума;
2. если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка строгого локального максимума.

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) =$$
$$= \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right) (x - x_0)^n \text{ при } x \to x_0.$$

В достаточно малой окрестности точки x_0 имеем

$$\operatorname{sgn} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0);$$

кроме того, $(x - x_0)^{2k} > 0$ при $x \neq x_0$ либо $\operatorname{sgn}\left((x - x_0)^{2k-1}\right) = \operatorname{sgn}(x - x_0)$. Остается воспользоваться определениями точек строгого локального минимума, строгого локального максимума и экстремума. ★

Примеры. 1. Повторно исследуем на локальные экстремумы многочлен $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$.
Вычисляем $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 \;\Rightarrow\; f''(x) = 12x^2 - 12$. Ранее уже были найдены критические точки, где $f'(x) = 0$ – это $x = -2, 1$.
1) Имеем $f''(-2) > 0$. Следовательно, $x = -2$ – точка строгого локального минимума.
2) Имеем $f''(1) = 0$.Поэтому **дополнительно находим** $f'''(x) = 24x$ и вычисляем $f'''(1) = 24 \neq 0$. Значит, $x = 1$ не является точкой локального экстремума.

2. Исследуем на экстремум рациональную дробь $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$.
Для упрощения выкладок преобразуем дробь к правильной:
$f(x) = 1 - 5\dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$.
Вычисляем $f'(x) = -5\dfrac{x^2 + 1 - (x - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = 5\dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$.
Критические точки: $x^2 - 2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1 - \sqrt{2},\; x_2 = 1 + \sqrt{2}$.
Вычисляем $f''(x) = 5\dfrac{2(x - 1)}{(x^2 + 1)^2} + 5(x^2 - 2x - 1)\left(\dfrac{1}{(x^2 + 1)^2}\right)'$, где второе слагаемое обращается в 0 в критических точках.
Имеем $f''(x_1) < 0$, $f''(x_2) > 0$, поэтому x_1 – точка строгого локального максимума, а x_2 – точка строгого локального минимума (более подробный анализ показывает, что они – точки строгого глобального максимума и минимума).

Односторонняя непрерывность

Определения. 1. Пусть функция f определена на полусегменте $[x_0, x_0 + \delta)$. Тогда она **непрерывна справа** в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

2. Пусть функция f определена на полусегменте $(x_0 - \delta, x_0]$. Тогда она **непрерывна слева** в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Эти понятия уже использовались в основных теоремах о функциях, непрерывных на сегменте.

Примеры. 1. Функция $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$
в точке $x_0 = 0$ непрерывна справа, но не непрерывна слева.
2. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке $x_0 = 0$.

На свойства непрерывности справа и слева переносятся основные свойства обычной непрерывности, например, непрерывности арифметических действий над непрерывными функциями.