Математический анализ 1. Лекция 2.11
Условные экстремумы

7 декабря 2023 г.

Пример 1. Задачи на экстремум с одним условием и ее решение методом Лагранжа.

Решим *методом множителей Лагранжа* задачу об экстремуме функции

$$f(x,y,z) = xyz \quad \text{на} \quad S = \{(x,y,z);\ x>0, y>0, z>0\}$$

при условии связи

$$F(x,y,z) \equiv \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 = 0, \tag{1}$$

где $a>0$, $b>0$, $c>0$ — параметры.

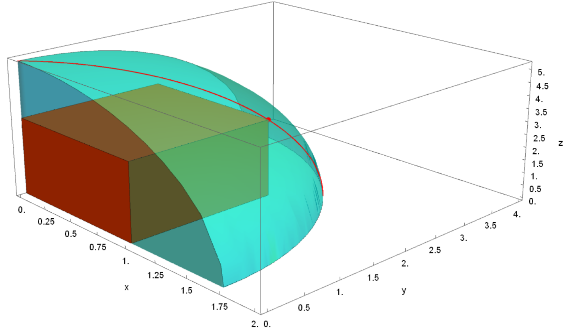

Рис.: Искомый параллелепипед и часть поверхности эллипсоида с $a=\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}$, $c=3\sqrt{3}$ в первом октанте. Искомая точка $(x,y,z)=(1,2,3)$

Геометрически эта задача означает поиск размеров прямоугольного параллелепипеда с максимальным объемом, три грани которого лежат на координатных плоскостях, и одной из вершин является начало координат, а противоположная ей лежит на поверхности эллипсоида с указанным уравнением (с полуосями a, b, c) в первом октанте.
Построим *функцию Лагранжа*

$$L(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) + \lambda F(x,y,z) = xyz + \lambda\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\Big),$$

где параметр λ — дополнительная переменная, называемая *множителем Лагранжа*.
Метод Лагранжа очень важен, поскольку допускает обобщение на очень широкий круг существенно более сложных задач и поэтому активно используется в современной науке.

Этап 1. Запишем необходимые условия экстремума — систему уравнений для точек возможного экстремума. Они пишутся для функции $L(x,y,z,\lambda)$ так, как если бы все переменные x, y, z, λ были независимыми:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z,\lambda) = 0 \\ L'_y(x,y,z,\lambda) = 0 \\ L'_z(x,y,z,\lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,z,\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; F(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Это система 4-х нелинейных уравнений с 4-мя неизвестными.
В нашем примере эта система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} yz + \dfrac{2x\lambda}{a^2} = 0 \\ xz + \dfrac{2y\lambda}{b^2} = 0 \\ xy + \dfrac{2z\lambda}{c^2} = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Из первых трех уравнений с учетом того, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, получим 3 разных выражения для λ:

$$\lambda = -a^2 \frac{yz}{2x} = -b^2 \frac{xz}{2y} = -c^2 \frac{xy}{2z}.$$

Второе из равенств позволяет записать, что $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x^2}{a^2}$, а третье — что $\dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{x^2}{a^2}$. Подстановка этих выражений в 4-е уравнение дает $3\dfrac{x^2}{a^2} - 1 = 0$.
Следовательно, $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, а $\lambda = \lambda_0 := -\dfrac{abc}{2\sqrt{3}}$. Итак, точка возможного экстремума — это $(x_0, y_0, z_0) = (\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}})$ вместе с $\lambda = \lambda_0$.

Этап 2. Проверим достаточные условия экстремума. Рассмотрим функцию

$$L_0(x, y, z) := L(x, y, z, \lambda_0) = xyz + \lambda_0\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\Big).$$

Вычислим сначала 2-й дифференциал функции $L_0(x, y, z)$ для независимых переменных x, y, z:

$$d^2L_0(x, y, z) =$$

$$= L''_{0xx}dx^2 + L''_{0yy}dy^2 + L''_{0zz}dz^2 + 2L''_{0xy}dxdy + 2L''_{0xz}dxdz + 2L''_{0yz}dydz =$$

$$= 2\frac{\lambda_0}{a^2}dx^2 + 2\frac{\lambda_0}{b^2}dy^2 + 2\frac{\lambda_0}{c^2}dz^2 + 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz$$

(здесь все вторые производные $L_0(x, y, z)$ берутся в точке (x, y, z)).

Но на самом деле в силу условия связи $z = z(x, y)$. Поэтому вычислим 1-й дифференциал тождества

$$F(x, y, z(x, y)) = \big(\frac{x}{a}\big)^2 + \big(\frac{y}{b}\big)^2 + \big(\frac{z(x, y)}{c}\big)^2 - 1 \equiv 0$$

и получим

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz(x, y) \equiv 0,$$

Отсюда находим

$$dz(x_0, y_0) = -\frac{c^2}{z_0}\Big(\frac{x_0}{a^2}dx + \frac{y_0}{b^2}dy\Big) = -\frac{c}{a}dx - \frac{c}{b}dy.$$

С учетом этой формулы можно записать $(d^2L_0)(x,y,z(x,y))$ как квадратичную форму относительно dx, dy в точке возможного экстремума:

$$d^2L_0(x_0,y_0,z_0) \equiv (d^2L_0)(x,y,z(x,y))|_{x=x_0,y=y_0} =$$

$$= 2\Big[\frac{\lambda_0}{a^2}dx^2 + \frac{\lambda_0}{b^2}dy^2 + \frac{\lambda_0}{c^2}\Big(-\frac{c}{a}dx - \frac{c}{b}dy\Big)^2 + z_0dxdy +$$

$$+(y_0dx + x_0dy)\Big(-\frac{c}{a}dx - \frac{c}{b}dy\Big)\Big] =$$

$$= 2\Big[\Big(2\frac{\lambda_0}{a^2} - \frac{y_0c}{a}\Big)dx^2 + \Big(2\frac{\lambda_0}{b^2} - \frac{x_0c}{b}\Big)dy^2 + \Big(2\frac{\lambda_0}{ab} + z_0 - \frac{y_0c}{b} - \frac{x_0c}{a}\Big)dxdy\Big] =$$

$$= 2\Big(-\frac{2bc}{\sqrt{3}a}dx^2 - \frac{2c}{\sqrt{3}}dxdy - \frac{2ac}{\sqrt{3}b}dy^2\Big) = \left(A\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}\right)_{\mathbb{R}^2}$$

с матрицей

$$A = -\frac{2c}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{2b}{a} & 1\\ 1 & \frac{2a}{b}\end{pmatrix}.$$

Имеем $\det A = 4c^2 > 0$ и $a_{11} = -\frac{4bc}{\sqrt{3}a} < 0$, поэтому в исследуемой точке – строгий локальный условный максимум.

Общая постановка задачи на условный экстремум и ее решение методом Лагранжа

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ задана и дважды дифференцируема на открытом множестве $S \subset \mathbb{R}^n$. Требуется исследовать ее на экстремум при k условиях связи

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{x}) = 0 \\ \cdots \\ F_k(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad \text{на} \quad S, \tag{2}$$

где $1 \leqslant k < n$ (почему?) и функции $F_1(\mathbf{x}), \ldots, F_k(\mathbf{x})$ также заданы и дважды дифференцируемы на S.

Этап 1. Запишем **необходимые условия экстремума**. Составим **функцию Лагранжа**

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) + \lambda_1 F_1(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_k F_k(\mathbf{x}),$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — параметры (множители Лагранжа).

Необходимые условия экстремума пишутся так, как если бы $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ были независимыми переменными:

$$\begin{cases} L'_{x_1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \\ \vdots \\ L'_{x_n}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \\ L'_{\lambda_1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \\ \vdots \\ L'_{\lambda_k}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_{x_1}(\mathbf{x}) + \lambda_1 F'_{1x_1}(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_k F'_{kx_1}(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_n}(\mathbf{x}) + \lambda_1 F'_{1x_n}(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_k F'_{kx_n}(\mathbf{x}) = 0 \\ F_1(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ F_k(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Это **система $n + k$ нелинейных уравнений с $n + k$ неизвестными.**
Решая её, получаем точки возможного **условного экстремума** $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$, где $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$, $\boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_{10}, \ldots, \lambda_{k0})$.
Этот подход основан на следующей теореме — *необходимом условии* условного экстремума.

Теорема (необходимое условие условного экстремума)

Пусть $\mathbf{x}_0$ *— точка экстремума в поставленной задаче на условный экстремум. Тогда векторы-градиенты* $\nabla f(\mathbf{x}_0), \nabla F_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla F_k(\mathbf{x}_0)$ *линейно зависимы, т.е. существуют числа* $\lambda_0, \lambda_{10}, \ldots, \lambda_{k0}$*, не все равные нулю и такие, что*

$$\lambda_0 \nabla f(\mathbf{x}_0) + \lambda_{10} \nabla F_1(\mathbf{x}_0) + \ldots + \lambda_{k0} \nabla F_k(\mathbf{x}_0) = 0.$$

В частности, если градиенты $\nabla F_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla F_k(\mathbf{x}_0)$ *линейно независимы, т.е. прямоугольная матрица Якоби функций* $F_1, \ldots, F_k$ *по всем переменным* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *в точке* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$*:*

$$\begin{pmatrix} F'_{1x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & F'_{1x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F'_{kx_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & F'_{kx_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

имеет линейно независимые строки (иными словами, ранг k*), то* $\lambda_0 \neq 0$ *и существуют числа* $\lambda_{10}, \ldots, \lambda_{k0}$ *такие, что*

$$\nabla L(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) \equiv \nabla f(\mathbf{x}_0) + \lambda_{10} \nabla F_1(\mathbf{x}_0) + \ldots + \lambda_{k0} \nabla F_k(\mathbf{x}_0) = 0,$$

где $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) + \lambda_1 F_1(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_k F_k(\mathbf{x})$*– функция Лагранжа.*

Покомпонентная запись этого векторного уравнения и есть первые n уравнений для точек возможного экстремума (при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0$). Они дополняются k уравнениями связи. Это уравнение можно переписать в виде

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = -\lambda_{10} \nabla F_1(\mathbf{x}_0) - \ldots - \lambda_{k0} \nabla F_k(\mathbf{x}_0),$$

что алгебраически означает возможность разложения вектора $\nabla f(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$ по $k < n$ (!) векторам $\nabla F_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla F_k(\mathbf{x}_0)$.

Этап 2. Проверим достаточные условия экстремума в точках возможного экстремума. Возьмем функцию Лагранжа при $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0$ – значении $\boldsymbol{\lambda}$ в точке возможного экстремума:

$$L_0(\mathbf{x}) := L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_0) = f(\mathbf{x}) + \lambda_{10} F_1(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_{k0} F_k(\mathbf{x}).$$

Найдем ее 2-й дифференциал при независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$d^2 L_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L''_{0 x_i x_j}(\mathbf{x}) dx_i dx_j.$$

Далее выделим k зависимых переменных из $x_1, \ldots, x_n$. Пусть для определенности это будут $(x_1, \ldots, x_k) =: \check{\mathbf{x}}$. Напомним, что выбор зависимых переменных должен отвечать условию $\det J(\mathbf{x}_0) \neq 0$, иначе выбор в качестве них $x_1, \ldots, x_k$ нужно менять (!).
Эти переменные будем рассматривать как неявные функции остальных $m - k$ независимых переменных $x_{k+1}, \ldots, x_n$:

$$x_1 = \varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}), \ldots, x_k = \varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}), \quad \text{где} \quad \widehat{\mathbf{x}} = (x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Дифференциалы $dx_1, \dots, dx_k$ этих функций можно выразить через $dx_{k+1}, \dots, dx_n$ – как именно, рассмотрим отдельно позже. При этом снова достаточно решать систему с матрицей Якоби $J(\mathbf{x})$ только в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Подставив найденные выражения $dx_1, \dots, dx_k$ в последнюю формулу для $d^2 L_0(\mathbf{x})$, приведя подобные слагаемые и симметризовав запись, получим квадратичную форму относительно дифференциалов $dx_{k+1}, \dots, dx_n$:

$$\left[(d^2 L_0)(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}), \dots, \varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}), \widehat{\mathbf{x}})\right]\Big|_{\widehat{\mathbf{x}}=\widehat{\mathbf{x}}_0} = \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} w_{i,j,0} dx_i dx_j; \qquad (4)$$

напомним, что $\widehat{\mathbf{x}}_0 = (x_{(k+1)0}, \dots, x_{n0})$. Свойства матрицы этой квадратичной формы

$$W = \begin{pmatrix} w_{k+1,k+1,0} & \dots & w_{k+1,n,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,k+1,0} & \dots & w_{n,n,0} \end{pmatrix}$$

позволяют судить о наличии или отсутствии строгого экстремума и его типе в каждой из точек возможного экстремума.
Но почему это действительно так и верна формула

$$\left[(d^2 L_0)(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}), \dots, \varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}), \widehat{\mathbf{x}})\right]\Big|_{\widehat{\mathbf{x}}=\widehat{\mathbf{x}}_0} = d^2 f(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}), \dots, \varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}), \widehat{\mathbf{x}})\Big|_{\widehat{\mathbf{x}}=\widehat{\mathbf{x}}_0} ? \qquad (5)$$

Во-первых, по определению $L_0(\mathbf{x})$ можно записать

$$d^2L_0(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}),\ldots,\varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}),\widehat{\mathbf{x}}) = d^2f(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}),\ldots,\varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}),\widehat{\mathbf{x}})+$$
$$+\lambda_{10}d^2F_1(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}),\ldots,\varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}),\widehat{\mathbf{x}})+\ldots+\lambda_{k0}d^2F_k(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}),\ldots,\varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}),\widehat{\mathbf{x}}).$$

Так как $F_i(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}),\ldots,\varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}),\widehat{\mathbf{x}})\equiv 0$ в некоторой окрестности $\widehat{\mathbf{x}}_0$, то в ней

$$dF_i(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}),\ldots,\varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}),\widehat{\mathbf{x}})\equiv 0,\quad d^2F_i(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}),\ldots,\varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}),\widehat{\mathbf{x}})\equiv 0,\quad i=1,\ldots,k,$$

и поэтому

$$d^2L_0(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}),\ldots,\varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}),\widehat{\mathbf{x}}) = d^2f(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}),\ldots,\varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}),\widehat{\mathbf{x}}).$$

Во-вторых, используя инвариантность формы 1-го дифференциала относительно замены переменных и затем беря дифференциал от произведения, имеем

$$d^2L_0(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}),\ldots,\varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}),\widehat{\mathbf{x}}) = d\big(dL_0(\mathbf{x})|_{\check{\mathbf{x}}=\boldsymbol{\varphi}(\widehat{\mathbf{x}})}\big) =$$
$$= d\Big(\sum_{i=1}^{n} L'_{0x_i}(\mathbf{x})dx_i\Big|_{\check{\mathbf{x}}=\boldsymbol{\varphi}(\widehat{\mathbf{x}})}\Big) = \sum_{i=1}^{n} d\Big(L'_{0x_i}(\mathbf{x})dx_i\Big|_{\check{\mathbf{x}}=\boldsymbol{\varphi}(\widehat{\mathbf{x}})}\Big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\big[d\big(L'_{0x_i}(\mathbf{x})\big)\big]dx_i\Big|_{\check{\mathbf{x}}=\boldsymbol{\varphi}(\widehat{\mathbf{x}})} + \sum_{i=1}^{k} L'_{0x_i}(\mathbf{x})d^2x_i\Big|_{\check{\mathbf{x}}=\boldsymbol{\varphi}(\widehat{\mathbf{x}})}. \qquad (6)$$

Еще раз используя инвариантность формы 1-го дифференциала, получим

$$d^2 L_0(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}), \ldots, \varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}), \widehat{\mathbf{x}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{j=1}^{n} L''_{0x_i x_j}(\mathbf{x}) dx_j \Big] dx_i \big|_{\check{\mathbf{x}}=\boldsymbol{\varphi}(\widehat{\mathbf{x}})} + \sum_{i=1}^{k} L'_{0x_i}(\mathbf{x}) \big|_{\check{\mathbf{x}}=\boldsymbol{\varphi}(\widehat{\mathbf{x}})} d^2\varphi_i(\widehat{\mathbf{x}}).$$

Обратим внимание на то, что, как правило,

$$d^2 L_0(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}), \ldots, \varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}), \widehat{\mathbf{x}}) \neq (d^2 L_0)(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}), \ldots, \varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}), \widehat{\mathbf{x}})$$

(т.е. 2-й дифференциал не обладает свойством инвариантности относительно замены переменных). Но при этом имеем

$$L'_{0x_1}(\mathbf{x}_0) = L'_{x_1}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) = 0, \ldots, L'_{0x_k}(\mathbf{x}_0) = L'_{x_k}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) = 0$$

в силу выполнения необходимых условий экстремума (3) при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0$. Тем самым при $\widehat{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{x}}_0$ предыдущая формула все же верна:

$$\left[d^2 L_0(\varphi_1(\widehat{\mathbf{x}}), \ldots, \varphi_k(\widehat{\mathbf{x}}), \widehat{\mathbf{x}}) \right] \big|_{\widehat{\mathbf{x}}=\widehat{\mathbf{x}}_0} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L''_{0x_i x_j}(\mathbf{x}) dx_i dx_j \big|_{\check{\mathbf{x}}=\boldsymbol{\varphi}(\widehat{\mathbf{x}})} \right) \Big|_{\widehat{\mathbf{x}}=\widehat{\mathbf{x}}_0}.$$

Из полученной выше формулы (6) и последней формулы следует выполнение равенства (5).

Пример 2. Рассмотрим задачу об экстремуме прежней функции

$$f(x,y,z) = xyz \text{ на } S = \{(x,y,z);\, x>0, y>0, z>0\},$$

но теперь при двух условиях связи

$$F_1(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2-a^2 = 0, \quad F_2(x,y,z) \equiv x+y+z-d = 0$$

где $a>0$, $d>0$ — параметры. Первое из них — это частный случай прежнего условия связи при $a=b=c$ (ограничиваемся им во избежание громоздких выкладок).

Геометрически задача означает поиск размеров прямоугольных параллелепипедов с максимальным и минимальным объемами, три грани которых лежат на координатных плоскостях, и одной из вершин является начало координат, а противоположная ей лежит на кривой – сечении расположенной в первом октанте части сферы с центром в начале координат и радиусом a плоскостью с уравнением $x+y+z-d=0$.

Решение этой задачи оказывается намного богаче разнообразием ситуаций, чем предыдущей.

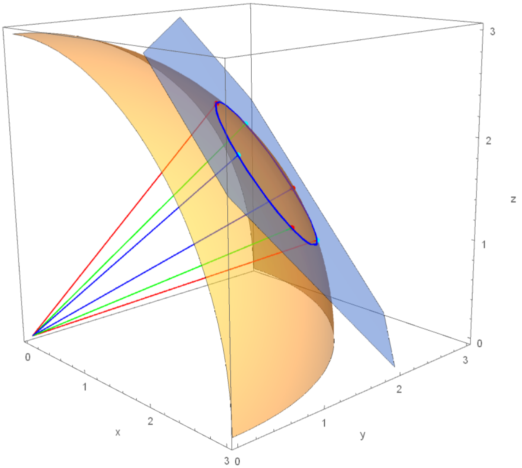

Рис.: Пример 2: графики сферы и плоскости — условий связи в первом октанте при $a = 3$ и $d = 5$, а также векторы — диагонали искомых параллелепипедов, проведенные из начала координат. Три конца красного цвета отвечают точкам максимума $(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, $(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$, $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$, а три конца голубого цвета $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$ — точкам минимума.

Этап 1. Построим функцию Лагранжа

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \equiv f(x,y,z) + \lambda_1 F_1(x,y,z) + \lambda_2 F_2(x,y,z) =$$
$$= xyz + \lambda_1(x^2+y^2+z^2-a^2) + \lambda_2(x+y+z-d),$$

где аргументы λ_1, λ_2 — множители Лагранжа. Запишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} L'_x \equiv yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ L'_y \equiv xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ L'_z \equiv xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ L'_{\lambda_1} \equiv x^2+y^2+z^2-a^2 = 0 \\ L'_{\lambda_2} \equiv x+y+z-d = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где аргументы $(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)$ у частных производных опущены.
Матрица Якоби размеров 2×3 функций F_1, F_2 по всем переменным x,y,z имеет вид

$$\begin{pmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2x} & F'_{2y} & F'_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Ее строки линейно независимы при любых x,y,z, кроме $x=y=z$. Последний случай ниже мы исключаем (он оказывается тривиальным). Решим систему уравнений (7). Из 2-го уравнения вычтем 1-е, а из 3-го уравнения – 2-е:

$$(x-y)(z-2\lambda_1) = 0, \quad (y-z)(x-2\lambda_1) = 0.$$

Возможны следующие случаи с учетом того, что случай $x = y = z$ исключен:
1) в первом из уравнений $x = y$, $z \neq 2\lambda_1$; тогда в силу второго $x = y = 2\lambda_1$;
2) в первом из уравнений $z = 2\lambda_1$, $x \neq y$; тогда в силу второго либо $y = z = 2\lambda_1$, либо $x = 2\lambda_1$.
Таким образом, возникают решения вида

$$(2\lambda_1, 2\lambda_1, \alpha), \quad (2\lambda_1, \alpha, 2\lambda_1), \quad (\alpha, 2\lambda_1, 2\lambda_1), \quad \text{где} \quad \alpha \neq 2\lambda_1.$$

Это естественно, т.к. уравнения (7) не меняются при циклической перестановке (x, y, z). Поэтому достаточно найти λ_1 и α в решении вида, например, $(\alpha, 2\lambda_1, 2\lambda_1)$. Его подстановка в условия связи дает для них 2 уравнения

$$\alpha^2 + 8\lambda_1^2 - a^2 = 0, \ \ \alpha + 4\lambda_1 - d = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda_1 = \frac{d - \alpha}{4}, \ \ \alpha^2 + \frac{1}{2}(d - \alpha)^2 - a^2 = 0.$$

Значит, α является корнем квадратного уравнения

$$3\alpha^2 - 2d\alpha + d^2 - 2a^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \alpha_\pm = \tfrac{1}{3}(d \pm \sqrt{6a^2 - 2d^2})$$

при условии $d \leqslant \sqrt{3}a$. В случае $d = \sqrt{3}a$ корень один: $\alpha = \frac{d}{3}$, и при этом $2\lambda_1 = \alpha$, т.е. этот случай нужно отбросить. Кроме того, при $d \leqslant \sqrt{2}a$ имеем $\alpha_- \leqslant 0$ и соответствующие решения тоже нужно отбросить.
Наконец, имеем

$$d - \alpha_+ = \frac{1}{3}(2d - \sqrt{6a^2 - 2d^2}) > 0 \ \Leftrightarrow \ 4d^2 > 6a^2 - 2d^2 \ \Leftrightarrow \ d > a$$

поэтому при $d \leqslant a$ точек возможного экстремума в первом октанте также нет. Если же $d > \sqrt{3}a$, то точек возможного экстремума также нет.
Из любого из трех первых уравнений можно найти $\lambda_2 = \lambda_2(\alpha)$, но это значение ниже не понадобится.

Этап 2. Рассмотрим функцию

$$L_0(x,y,z) = xyz + \frac{d-\alpha}{4}(x^2+y^2+z^2-a^2) + \lambda_2(\alpha)(x+y+z-d),$$

где $\alpha = \alpha_+$ или α_-. Для нее

$$d^2L_0(x,y,z) = \frac{d-\alpha}{2}(dx^2+dy^2+dz^2) + 2(z\,dxdy + y\,dxdz + x\,dydz).$$

Обратим внимание на то, что в правой части нет $\lambda_2(\alpha)$; это произошло по той причине, что функция $F_2(x,y,z)$ — аффинная.
Рассмотрим для определенности точку возможного экстремума $(\alpha, \frac{d-\alpha}{2}, \frac{d-\alpha}{2})$. В ней $\alpha \neq \frac{d-\alpha}{2} \;\Leftrightarrow\; \alpha \neq \frac{1}{3}d$ и поэтому первые два столбца в матрице Якоби (8) линейно независимы, значит, можно рассмотреть неявные функции $x = x(z)$ и $y = y(z)$. (Подчеркнем, что в других точках возможного экстремума надо было бы выбирать другие пары неявных функций (!)). Дифференциалы функций из условий связи таковы

$$dF_1(x,y,z) = 2xdx + 2ydy + 2zdz, \quad dF_2(x,y,z) = dx + dy + dz,$$

поэтому дифференциалы неявных функций удовлетворяют тождествам — уравнениям для $dx(z)$, $dy(z)$ в окрестности рассматриваемой точки

$$x(z)dx(z) + y(z)dy(z) + zdz \equiv 0, \quad dx(z) + dy(z) + dz \equiv 0$$

и, в частности, уравнениям

$$\alpha dx(z_0) + z_0 dy(z_0) + z_0 dz = 0, \quad dx(z_0) + dy(z_0) + dz = 0$$

с $z_0 = \frac{d-\alpha}{2}$ в точке возможного экстремума. Отсюда находим

$$dx(z_0) = 0, \quad dy(z_0) = -dz.$$

Подставим эти величины в выражение для $d^2L_0(x,y,z)$ в точке возможного экстремума и получим

$$d^2L_0(\alpha, \tfrac{d-\alpha}{2}, \tfrac{d-\alpha}{2}) \equiv \big[(d^2L_0)(x(z), y(z), z)\big]\big|_{z=z_0} = (d-\alpha)dz^2 - 2\alpha\, dz^2 =$$

$$= -3(\alpha - \tfrac{d}{3})dz^2.$$

Коэффициент перед dz^2 при $\alpha = \alpha_+$ отрицателен, а при $\alpha = \alpha_-$ — положителен. Поэтому при $a < d < \sqrt{3}a$ в трех точках

$$(\alpha_+, \tfrac{d-\alpha_+}{2}, \tfrac{d-\alpha_+}{2}), \ (\tfrac{d-\alpha_+}{2}, \alpha_+, \tfrac{d-\alpha_+}{2}), \ (\tfrac{d-\alpha_+}{2}, \tfrac{d-\alpha_+}{2}, \alpha_+)$$

с $\alpha_+ = \frac{1}{3}(d + \sqrt{6a^2 - 2d^2})$ достигается строгий локальный условный максимум, равный $\alpha_+(\frac{d-\alpha_+}{2})^2$.
При $\sqrt{2}a < d < \sqrt{3}a$ в трех точках

$$(\alpha_-, \tfrac{d-\alpha_-}{2}, \tfrac{d-\alpha_-}{2}), \ (\tfrac{d-\alpha_-}{2}, \alpha_-, \tfrac{d-\alpha_-}{2}), \ (\tfrac{d-\alpha_-}{2}, \tfrac{d-\alpha_-}{2}, \alpha_-)$$

с $\alpha_- = \frac{1}{3}(d - \sqrt{6a^2 - 2d^2})$ достигается строгий локальный условный минимум, равный $\alpha_-(\frac{d-\alpha_-}{2})^2$.

В силу второй теоремы Вейерштрасса в поставленной задаче при условии

$$a < d < \sqrt{3}a$$

существует глобальный условный максимум, а при условии

$$\sqrt{2}a < d < \sqrt{3}a$$

– и глобальный условный минимум (почему?) Можно обосновать, что он достигается именно в найденных точках.

Дополнительно отметим, что при $d > \sqrt{3}a$ условия связи несовместны — нет точек (x, y, z), удовлетворяющих обоим уравнениям.
При $d < a$ условия связи в первом октанте также несовместны.

При $d = \sqrt{3}a$ такая точка всего одна — это $(x, y, z) = (\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}})$, и ответ в поставленной задаче очевиден.

При $a < d \leqslant \sqrt{2}a$ рассматриваемая функция $f(x, y, z) = xyz$ может принимать сколь угодно малые положительные значения, поэтому она не имеет минимума на S.

Случаи $d = \sqrt{3}a$ и $d = \sqrt{2}a$ проиллюстрированы на рисунках 3 и 4.

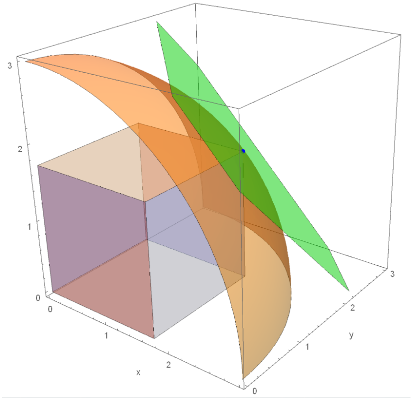

Рис.: Пример 2: случай касания сферы и плоскости — условий связи при $a = 3$ и $d = \sqrt{3}a$. Изображен также соответствующий параллелепипед — в данном случае это куб.

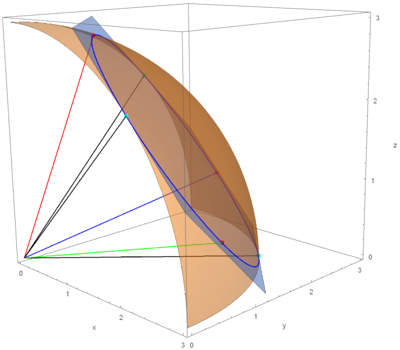

Рис.: Пример 2: графики сферы и плоскости — условий связи в первом октанте при $a = 3$ и $d = \sqrt{2}a$, а также векторы — диагонали искомых параллелепипедов, проведенные из начала координат.
Три конца красного цвета по-прежнему отвечают точкам максимума.
Три конца голубого цвета отвечали бы точкам минимума, если бы они не лежали на координатных плоскостях.