Математический анализ 1. Лекция 4. Предел функции и его свойства.

Примеры решения задач можно найти в пособии (разработанном на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова):
Бутузов В.Ф. и др. Математический анализ в вопросах и задачах, изд. 5-е. М.: Физматлит, 2001 (или другие годы изданий).

14 сентября 2023 г.

Экономический смысл числа $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828\ldots$.

Пусть сначала для наглядности некоторый банк дает 100% годовых, а за любой меньший срок вклад возрастает пропорционально этому сроку (например, за 1 месяц на $\frac{100}{12}\%$).
За год вклад удвоится: $A_0 + A_0 = 2A_0$.
Однако можно поступить иначе: через полгода закрыть счет и снова вложить полученную сумму $A_0 + \frac{A_0}{2} = A_0(1 + \frac{1}{2})$ на полгода. Тогда к концу года сумма станет равной

$$\left[A_0\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right]\left(1 + \frac{1}{2}\right) = A_0\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25A_0.$$

Аналогично, если закрывать/открывать счет ежемесячно, то к концу года сумма станет равной $A_0(1 + \frac{1}{12})^{12} \approx 2.613A_0$, а если ежедневно – то $A_0(1 + \frac{1}{365})^{365} \approx 2.713A_0$.
Если гипотетически закрывать/открывать счет непрерывно, то результатом будет $A_0 \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = A_0 e \approx 2.718A_0$.

В более общей постановке сумма A_0 вкладывается в банк под $p\%$ годовых и хранится t лет. Разделив промежуток $[0, t]$ на n равных периодов и устремив n к ∞, получим итоговую сумму

$$A_0 \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{p}{100n}t\right)^n = A_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{pt}{100n}\right)^{\frac{100n}{pt}}\right]^{\frac{pt}{100}} = A_0 e^{\frac{pt}{100}}.$$

Полученный результат называется *формулой непрерывных процентов*.

Предел функции

Напоминание. Окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – любой интервал (a, b), содержащий точку x.
ε-окрестность точки – это $O_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Проколотая окрестность $\mathcal{O}_p(x)$ точки x – это окрестность точки x с удалением самой точки x.
Проколотая ε-окрестность точки x – это $O^\circ_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$.

Введем также **окрестности фиктивных точек** $+\infty$ и $-\infty$ – это интервалы–полупрямые $(C, +\infty)$ и $(-\infty, C)$ соответственно (где $C \in \mathbb{R}$).

Пусть еще окрестность **фиктивной точки** ∞ – это объединение полупрямых $(-\infty, -C) \cup (C, +\infty)$, где $C > 0$. Указанные окрестности не содержат самих фиктивных точек и их можно считать проколотыми.

Это делается для того, чтобы единым образом ввести и записать четыре формально разных предела функции

$$\lim_{x\to b} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to\infty} f(x)$$

и в дальнейшем также формулировать их свойства единым образом.
Обратим внимание на то, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ – разные понятия.

Геометрическое определение предела функции по Коши. Пусть $b \in \mathbb{R}$ или b – одна из фиктивных точек $+\infty$, $-\infty$, ∞. Пусть f – числовая функция, определенная в некоторой $\mathcal{O}_p(b)$. **Она имеет предел** $c \in \mathbb{R}$ **при** x**, стремящемся к** b ($x \to b$), если для любой (сколь угодно малой) окрестности $O_\varepsilon(c)$ найдется такая проколотая окрестность $\mathcal{O}_p(b)$ точки b (истинной или фиктивной), что

$$f(x) \in O_\varepsilon(c) \ \text{ при всех } \ x \in \mathcal{O}_p(b), \quad \text{т.е. } \ \{f(x) : x \in \mathcal{O}_p(b)\} \subset O_\varepsilon(c).$$

Это свойство записывается так: $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$.

Эквивалентные формулировки.

Аналитическое определение предела функции по Коши (на языке ε–δ). Для $b \in \mathbb{R}$ свойство $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$ означает, что для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - c| < \varepsilon$ при всех $0 < |x - b| < \delta$, т.е.

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \delta > 0) : \ |f(x) - c| < \varepsilon \ \ \forall x : \ 0 < |x - b| < \delta.$$

Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, т.к. для любого $\varepsilon > 0$ имеем $x^2 < \varepsilon$ при всех $0 < |x| < \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ не существует; $\frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn} x$ при $x \neq 0$. ★

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

4. Если $f(x) = c$ при всех $x \in \mathcal{O}_p(b)$, то очевидно, что $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$.

Аналитическое определение предела функции по Коши (на языке ε–δ). Для $b = +\infty$ свойство $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$ означает, что для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - c| < \varepsilon$ при всех $x > \delta$, т.е.

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \exists \delta > 0 : \ |f(x) - c| < \varepsilon\ \forall x > \delta.$$

Лемма

Свойство $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$ *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = c.$$

Примеры. 1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x$ не существует.

Определение предела функции по Гейне (через последовательности). Пусть $b \in \mathbb{R}$ или b – одна из фиктивных точек $+\infty$, $-\infty$, ∞. Пусть f – числовая функция, определенная в некоторой $\mathcal{O}_p(b)$. **Она имеет предел** $c \in \mathbb{R}$ **при** x**, стремящемся к** b, если

для любой последовательности $(a_n) \subset \mathcal{O}_p(b) : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = c$.

Напоминание: запись $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty, +\infty, -\infty$ означает, что (a_n) является соответственно бесконечно большой (б.б.),
б.б. и положительной (начиная с достаточно больших n),
б.б. и отрицательной (начиная с достаточно больших n).

Теорема

Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Это глубокий и важный результат, позволяющий сводить свойства пределов функций к аналогичным свойствам последовательностей.

Примеры. 1. Снова $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x$ не существует. ★

2. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$, то значения $f(n)$ при $n \in \mathbb{N}$ определены при достаточно больших n и $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = c$.
Обратное, конечно, неверно. *Контрпример:*

$$\lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0, \text{ но } \lim_{x\to\infty} \sin(2\pi x) \text{ не существует.}\bigstar$$

Свойства пределов функций.

- **Единственность предела.** Если $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ существует, то он единствен.
- **Локальность понятия предела.** При $b \in \mathbb{R}$ существование и значение $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ зависят только от значений $f(x)$ в достаточно малой $\mathcal{O}_p(b)$.

  Иначе говоря, пусть $f(x) = g(x)$ при всех x из некоторой $\mathcal{O}_p(b)$. Тогда $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b} g(x)$ существуют или не существуют одновременно и, если они существуют, то равны.

  В частности, существование и значение $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ не зависят от того, чему равно $f(b)$ и определена ли вообще функция f в точке b.

  Пример: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$; сделанное сокращение корректно, т.к. здесь точка $x = 0$ выкалывается.

Определения.

- Пусть функция f определена на множестве $S \subset \mathbb{R}$. Она называется **ограниченной на** S, если $|f(x)| \leqslant C$ для некоторого $C > 0$ при всех $x \in S$. Нередко это свойство записывают так: $\sup\limits_S |f(x)| < \infty$.

  Примеры. 1. $|\sin x| \leqslant 1$ на $\mathbb{R}$. 2. $f(x) = x$ не ограничена на $\mathbb{R}$.

- Функция f называется **бесконечно малой** при $x \to b$ (где $b \in \mathbb{R}$), если для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ выполнено $|f(x)| < \varepsilon$ при всех x из некоторой $\mathcal{O}_p(b)$. Это эквивалентно тому, что $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$.

  Пример. $f(x) = x$ – бесконечно малая при $x \to 0$, но не при $x \to b$ при $b \neq 0$.

- Функция f называется **бесконечно большой** при $x \to b$ (где $b \in \mathbb{R}$), если для любого (сколь угодно большого) $C > 0$ выполнено $|f(x)| \geqslant C$ при всех x из некоторой $\mathcal{O}_p(b)$.

  Разумеется, такая функция **не имеет предела** при $x \to b$. Но тем не менее это свойство удобно записывать как $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$.

  Пример. $f(x) = \frac{1}{x}$ – бесконечно большая при $x \to 0$, но не при $x \to b$ при $b \neq 0$.

Нетрудно дать аналогичные определения и при $b = \pm\infty, \infty$.

Свойства. Пусть $b \in \mathbb{R}$ или $b = \pm\infty, \infty$.

1. **Ограниченность функции, имеющей предел.** Если существует $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, то функция f ограничена в некоторой $\mathcal{O}_p(b)$.
2. Функция g – бесконечно малая при $x \to b$ и $g(x) \neq 0$ в некоторой $\mathcal{O}_p(b)$ тогда и только тогда, когда функция $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ определена в $\mathcal{O}_p(b)$ и является бесконечно большой при $x \to b$.
3. Пусть f ограничена в некоторой $\mathcal{O}_p(b)$, а g – бесконечно малая функция при $x \to b$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x) = 0$.
4. Пусть f ограничена в некоторой $\mathcal{O}_p(b)$, а h – бесконечно большая функция при $x \to b$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$.

Примеры: $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}) \cdot x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{\ln |x|} = 0$.

Свойство 1 очевидно в силу определения предела функции по Коши. ★

Свойства 2–4 вытекают из определения предела функции по Гейне и соответствующих свойств для последовательностей.

В самом деле, например, в свойстве 3 для любой последовательности $(a_n) \subset \mathcal{O}_p(b)$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, имеем: последовательность $f(a_n)$ ограничена, а $g(a_n)$ бесконечно малая. По свойству произведения таких последовательностей $f(a_n)g(a_n)$ также бесконечно малая. Значит, по определению предела функции по Гейне существует $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x) = 0$.

Свойство 4 также следует из свойств 2 и 3, и в нем $h(x) \neq 0$ в некоторой $\mathcal{O}_p(b)$.

Теорема (пределы алгебраических операций над функциями)

Пусть $b \in \mathbb{R}$ *или* $b = \pm\infty, \infty$. *Пусть функции* f *и* g *определены в некоторой* $\mathcal{O}_p(b)$ *и существуют* $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to b} g(x)$. *Тогда существуют следующие пределы:*

1. $\lim\limits_{x\to b}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to b} f(x) + \lim\limits_{x\to b} g(x)$,
2. $\lim\limits_{x\to b}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to b} f(x) - \lim\limits_{x\to b} g(x)$,
3. $\lim\limits_{x\to b}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to b} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to b} g(x)$,
4. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to b} f(x)}{\lim\limits_{x\to b} g(x)}$, *где предполагается, что* $\lim\limits_{x\to b} g(x) \neq 0$.

Замечание. По индукции п. 1 и 3 теоремы обобщаются на любое число слагаемых и сомножителей.

Доказательство вытекает из определения предела функции по Гейне и соответствующей теоремы для последовательностей.

В п. 4 надо учесть, что свойство $\lim\limits_{x\to b} g(x) \neq 0$ обеспечивает то, что функция g сохраняет знак и поэтому не обращается в 0 в достаточно малой окрестности $\mathcal{O}_p(b)$ (см. это свойство ниже).

Примеры. 1. Пусть $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ – многочлен. По доказанной теореме $\lim\limits_{x\to b} p_n(x) = p_n(b)$ при любом $b \in \mathbb{R}$.
Если же, например, $b = \infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty} p_n(x) = \infty$ не существует ($p_n(x)$ является бесконечно большой при $x \to \infty$) при $a_0 \neq 0$, $n \geqslant 1$ (а при $n = 0$ просто $p_n(x) \equiv a_0$).

2. Пусть $r_{n,m}(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ – рациональная дробь, где $q_m(x) = c_0x^m + c_1x^{m-1} + \ldots + c_m$ – многочлен степени $m \geqslant 1$, $c_0 \neq 0$. По доказанной теореме $\lim\limits_{x\to b} r_{n,m}(x) = r_{n,m}(b)$ при любом $b \in \mathbb{R}$, не являющемся корнем $q_m(x)$, т.е. при $q_m(b) \neq 0$.
Если b – корень $p_n(x)$ кратности k и $q_m(x)$ кратности $l \leqslant k$, то $\lim\limits_{x\to b} r_{n,m}(x)$ по-прежнему существует, причем $\lim\limits_{x\to b} r_{n,m}(x) = 0$ при $l < k$.
В случае $l > k$ (включая случай $k = 0$, когда $p_n(b) \neq 0$) предел $\lim\limits_{x\to b} r_{n,m}(x) = \infty$ не существует.
При $b = \infty$ играют роль другие факторы. Пусть для определенности $a_0 \neq 0$. При $n \leqslant m$ запишем

$$r_{n,m}(x) = \frac{a_0\frac{1}{x^{m-n}} + a_1\frac{1}{x^{m-n+1}} + \ldots + a_n\frac{1}{x^m}}{c_0 + c_1\frac{1}{x} + \ldots + c_m\frac{1}{x^m}}.$$

По доказанной теореме $\lim\limits_{x\to\infty} r_{n,m}(x) = 0$ при $n < m$ (если дробь – правильная) либо $\lim\limits_{x\to\infty} r_{n,m}(x) = \frac{a_0}{c_0}$ при $n = m$.
При $n > m$ предел $\lim r_{n,m}(x) = \infty$ не существует.

Теорема (пределы и неравенства)

Пусть $b \in \mathbb{R}$ *или* $b = \pm\infty, \infty$.

1. *Если* $f(x) \leqslant g(x)$ *при всех* x *из некоторой* $\mathcal{O}_p(b)$ *и* f *и* g *имеют пределы при* $x \to b$, *то* $\lim\limits_{x\to b} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to b} g(x)$.
2. *Пусть функции* f, g, h *связаны двойным неравенством*
$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$
при всех x *из некоторой* $\mathcal{O}_p(b)$. *Пусть также существуют* $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$ *и* $\lim\limits_{x\to b} h(x) = c$. *Тогда существует* $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$.
3. *Если функции* f *и* g *определены в некоторой* $\mathcal{O}_p(b)$ *и имеют пределы при* $x \to b$, *причем* $\lim\limits_{x\to b} f(x) < \lim\limits_{x\to b} g(x)$, *то* $f(x) < g(x)$ *при всех* x *из некоторой* $\mathcal{O}_p(b)$.
4. *Если существует* $\lim\limits_{x\to b} g(x) = d \neq 0$, *то существует такая* $\mathcal{O}_p(b)$, *где* $g(x)$ *имеет тот же знак, что и* d *(и поэтому, в частности,* $g(x) \neq 0$*).*

Замечание. При $b \in \mathbb{R}$ окрестности $\mathcal{O}_p(b)$, упомянутые в п. 3 и 4, достаточно малы.

Пример. Из п. 2 снова следует, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную – бесконечно малая.

Доказательство. П. 1 и 2 вытекает из определения предела функции по Гейне и соответствующей теоремы для последовательностей.

Докажем п. 3 для наглядности при $b \in \mathbb{R}$. По условию для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_f(\varepsilon) > 0$ и $\delta_g(\varepsilon) > 0$ такие, что

$$|f(x) - c| < \varepsilon \text{ при } 0 < |x - b| < \delta_f(\varepsilon), \quad |g(x) - d| < \varepsilon \text{ при } 0 < |x - b| < \delta_g(\varepsilon),$$

где $c = \lim\limits_{x \to b} f(x) < d = \lim\limits_{x \to b} g(x)$. Тогда, выбрав, например, $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{d-c}{4}$, получим

$$f(x) < c + \varepsilon < d - \varepsilon < g(x) \text{ при } 0 < |x - b| < \delta_0 = \min\{\delta_f(\varepsilon_0), \delta_g(\varepsilon_0)\},$$

т.е. $f(x) < g(x)$ в проколотой δ_0-окрестности точки b.

П. 4 уже был использован выше. Он следует из п. 3. В самом деле, пусть для определенности $d > 0$. Положим $f(x) \equiv \frac{d}{2}$. Тогда выполнены условия п. 3 и поэтому $0 < f(x) = \frac{d}{2} < g(x)$ в некоторой $\mathcal{O}_p(b)$.

При вычислении многих пределов очень полезен такой результат.

Теорема (замена переменных под знаком предела)

Пусть $b \in \mathbb{R}$ *или* $b = \pm\infty, \infty$ *и существует* $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$, *причем* $f(x) \neq c$ *в некоторой* $\mathcal{O}_p(b)$. *Пусть также существует* $\lim\limits_{y \to c} g(y) = d$. *Тогда существует*

$$\lim_{x \to b} g(f(x)) = \lim_{x \to b} g(y)|_{y=f(x)} = \lim_{y \to c} g(y) = d.$$

Пример. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \lim\limits_{y \to 1} \dfrac{1}{y} = 1$. Здесь $b = \infty$, $g(y) = \dfrac{1}{y}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

Контрпример. Пусть $f(x) \equiv 0$, $g(y) = 0$ при $y \neq 0$, а $g(0) = 1$. Тогда

$$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = 1 \neq \lim_{y \to 0} g(y) = 0,$$

т.е. правило замены переменных не работает (нарушено условие: $f(x) \neq c$ в некоторой $\mathcal{O}_p(b)$).

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{y \to c} g(y) = d$, то для каждой окрестности $O(d)$ точки d существует $\mathcal{O}_p(c)$ такая, что

$$\{g(y) : y \in \mathcal{O}_p(c)\} \subset O(d).$$

Поскольку $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$, то для непроколотой окрестности $O(c) = \mathcal{O}_p(c) \cup \{c\}$ существует $\mathcal{O}_p(b)$ такая, что

$$\{f(x) : x \in \mathcal{O}_p(b)\} \subset O(c).$$

По условию можно считать, что $f(x) \neq c$ в $\mathcal{O}_p(b)$ (при необходимости сузив $\mathcal{O}_p(b)$), тогда

$$\{f(x) : x \in \mathcal{O}_p(b)\} \subset \mathcal{O}_p(c).$$

В итоге

$$\{g(f(x)) : x \in \mathcal{O}_p(b)\} \subset \{g(y) : y \in \mathcal{O}_p(c)\} \subset O(d),$$

что и доказывает утверждение.

«Базовые» пределы для решения первых задач

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^a}{b^x}=0$ при $b>1$ (показательная функция растет быстрее степенной).
2. $\lim\limits_{x\to 0} x^a\log_b|x|=[0\cdot\infty]=0$ при $a>0, b>0$, $b\neq 1$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=1$ (первый замечательный предел).
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=\lim\limits_{y\to 0}(1+ay)^{\frac{1}{y}}=[1^\infty]=e^a$ (второй замечательный предел);

   более общий вариант: если существуют $\lim\limits_{x\to b} g(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x)=c$, то $\lim\limits_{x\to b}(1+g(x))^{f(x)}=e^c$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ при $a>0$; в частности, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_b(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln b}$ при $b>0$, $b\neq 1$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Функция f, определенная в окрестности точки $b \in \mathbb{R}$, называется **непрерывной в точке** b, если существует

$$\lim_{x\to b} f(x) = f(\lim_{x\to b} x) = f(b),$$

т.е. если возможен предельный переход под знаком функции f при $x \to b$. Вскоре такие функции будем подробно изучать.

Если f – **элементарная** (“школьная”) функция и f определена в некоторой окрестности точки b, то она непрерывна в точке b, и указанной формулой можно пользоваться.

Примеры (элементарная техника вычисления пределов)

1. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{3x^2+x-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(3x+4)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{3x+4} = \frac{4}{7}.$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{x-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})} = \frac{1}{6}.$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-\cos(4x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)\sin(3x)}{x^2} =$

   $\displaystyle = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot 3\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 6 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 6.$

4. $\displaystyle \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = [1^\infty] = \lim_{x\to 0} [1+(\cos x - 1)]^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} =$

   $\displaystyle = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0} (\frac{\sin x}{x})^2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{(\cos x+1)}} = e^{(-1)\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

Выше было дано определение бесконечно большой функции при $x \to b$ и оно записывалось символически как $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$.

В ряде случаев возникает необходимость уточнить эту информацию и ввести дополнительные понятия. Пусть $b \in \mathbb{R}$ или $b = \pm\infty, \infty$.

- Функция f называется **бесконечно большой и положительной** при $x \to b$, если для любого $C > 0$ найдется такая проколотая окрестность $\mathcal{O}_p(b)$ точки b (истинной или фиктивной), что

  $$f(x) > C \quad \text{при} \quad x \in \mathcal{O}_p(b);$$

  это свойство символически записывается как $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

  Примеры. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ при $x \to 0$; $f(x) = e^x$ при $x \to +\infty$; $f(x) = x^2$ при $x \to \infty$.

- Функция f называется **бесконечно большой и отрицательной** при $x \to b$, если для любого $C < 0$ найдется такая проколотая окрестность $\mathcal{O}_p(b)$ точки b (истинной или фиктивной), что

  $$f(x) < C \quad \text{при} \quad x \in \mathcal{O}_p(b);$$

  это свойство символически записывается как $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$.

  Примеры. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ при $x \to 0$ и т.д.; $f(x) = x^3$ при $x \to -\infty$.

Конечно, нужно помнить что пределов при $x \to b$ для введенных функций на самом деле не существует.