Математический анализ 1.
Тема 2: функции нескольких переменных.
Лекция 2.1
Пространство $\mathbb{R}^n$ и его подмножества.
Последовательности точек $\mathbb{R}^n$

1 ноября 2023 г.

Пространство $\mathbb{R}^n$

- Линейное, евклидово, нормированное пространства $\mathbb{R}^n$

Подмножества $\mathbb{R}^n$

- Шары и сфера
- Последовательности точек и их пределы
- Теорема о покоординатной сходимости последовательностей из $\mathbb{R}^n$
- Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$
- Ограниченные, компактные, связные множества
- Выпуклые множества

Пространство $\mathbb{R}^n$

Напоминание: $\mathbb{R}^n$ – это множество всех упорядоченных наборов из n вещественных чисел

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Элементы множества $\mathbb{R}^n$ часто называют **точками** или **векторами** и обозначают заглавными буквами латинского алфавита, возможно с индексами: A, B_1, C_{21} и т.п. или полужирными строчными буквами латинского алфавита, возможно с индексами: $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}_1$ и т.п.

Для любых векторов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$ и числа $\alpha \in \mathbb{R}$ определены две операции

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{(сложение)},$$
$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \quad \text{(умножение на вещественное число)}$$

Как следствие, рекуррентно определены **линейные комбинации** векторов $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, \mathbf{x}_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$:

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}_k = (\alpha_1 x_{11} + \ldots + \alpha_k x_{k1}, \ldots, \alpha_1 x_{1n} + \ldots + \alpha_k x_{kn})$$

для любых чисел (**коэффициентов**) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.
С этими операциями $\mathbb{R}^n$ становится **линейным пространством** (подробнее в курсе линейной алгебры).

Для любых векторов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$ вводится операция **скалярного произведения**

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Для линейного пространства $\mathbb{R}^n$ с операцией скалярного произведения выполнены аксиомы **евклидова пространства** (подробнее в курсе линейной алгебры): для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (симметричность),
2. $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{w})$ (линейность по первому аргументу),
3. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$, причем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (положительная определенность).

Из первых двух свойств следует, что скалярное произведение линейно и по второму аргументу:

$$(\mathbf{w}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{w}, \mathbf{x}) + \beta(\mathbf{w}, \mathbf{y}),$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Возникает потребность в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ вводить и другие скалярные произведения и тем самым задавать другие евклидовы нормы.

(Евклидовой) длиной вектора $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ называется число

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Теорема (неравенство Коши-Буняковского)

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

В подробной записи это неравенство имеет вид

$$|x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

для любых чисел $x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_n$.

Доказательство. Для всех вещественных чисел t выполнено

$$0 \leqslant |t\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (t\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})t^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})t + (\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Поэтому дискриминант этого квадратного трехчлена (при $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ он вырождается в аффинную функцию) неположительный:

$$4(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - 4(\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant 0.$$

(Евклидовым) расстоянием между точками $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$ называется число

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Теорема (неравенство треугольника для евклидовой нормы)

Для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство* $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$. ★

Доказательство. С помощью неравенства Коши-Буняковского

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2+2(\mathbf{x}, \mathbf{y})+|\mathbf{y}|^2 \leqslant |\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|+|\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2.$$

Линейное пространство $\mathbb{R}^n$ с операцией длины (**нормы**) вектора $\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}|$ удовлетворяет трем аксиомам **нормированного пространства**: для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, причем $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
2. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$ (положительная однородность),
3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (неравенство треугольника).

Другие часто употребимые нормы в $\mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|.$$

Легко видеть, что они тоже удовлетворяют аксиомам нормы.
Они **эквивалентны** евклидовой норме:

$$|\mathbf{x}|_\infty \leqslant |\mathbf{x}| \leqslant \sqrt{n}|\mathbf{x}|_\infty, \quad \frac{1}{\sqrt{n}}|\mathbf{x}|_1 \leqslant |\mathbf{x}| \leqslant \mathbf{x}|_1 \ \text{для всех} \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Однако им не соответствуют никакие скалярные произведения.

Шары и сфера

В пространстве $\mathbb{R}^n$ (с обычной евклидовой нормой) **открытый шар** радиуса r с центром в точке $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ – это

$$B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}-\mathbf{a}| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < r\},$$

замкнутый шар радиуса r с центром в точке $\mathbf{a}$ – это

$$\overline{B}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}-\mathbf{a}| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} \leqslant r\},$$

сфера радиуса r с центром в точке $\mathbf{a}$ – это

$$S_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}-\mathbf{a}| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} = r\}.$$

Замечание

Если вместо обычной евклидовой нормы в $\mathbb{R}^n$ используется другая, то открытый шар будет иметь форму, далекую от привычной. Например, это так для норм $|\mathbf{x}|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ и $|\mathbf{x}|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$ ★.

Последовательности точек и их пределы

(Бесконечной) **последовательностью** (элементов множества $\mathbb{R}^n$) называется любая функция $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Пишут $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_k$, всю последовательность часто обозначают через $(\mathbf{x}_k)$.

Определение. Пусть $(\mathbf{x}_k)$ – последовательность элементов $\mathbb{R}^n$. Если существует точка $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ такая, что
числовая последовательность $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}|$ бесконечно малая, т.е.
$\lim\limits_{k\to\infty} |\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| = 0$,
то последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ называется **сходящейся**, а точка $\mathbf{a}$ — ее **пределом**, и при этом пишут $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$ при $k \to \infty$ или $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$.

Подробнее это означает, что для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ найдется (достаточно большой) номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad k \geqslant N(\varepsilon).$$

Теорема.
1. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$, то предел $\mathbf{a}$ единствен.
2. Если существуют $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{b}$, то для любых чисел α и β существует $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha\mathbf{x}_n + \beta\mathbf{y}_n) = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.
3. Если существуют $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{b}$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Доказательства несложные, полезно дать их самостоятельно.

Теорема

Свойство сходимости последовательности векторов $\mathbf{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$*:* $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ *эквивалентно свойству ее* ***покоординатной сходимости***

$$\lim_{k\to\infty} x_{k1} = a_1, \dots, \lim_{k\to\infty} x_{kn} = a_n.$$

Доказательство. Справедливы элементарные неравенства

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \leqslant |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leqslant \sqrt{n} \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

Применив их к $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k - \mathbf{a}$, получим

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_{ki} - a_i| \leqslant |\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| \leqslant \sqrt{n} \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_{ki} - a_i|.$$

Если $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| \to 0$ при $k \to \infty$, то в силу левого неравенства и $|x_{ki} - a_i| \to 0$ при $k \to \infty$ для всех $i = 1, \dots, n$.
Наоборот, если $|x_{ki} - a_i| \to 0$ при $k \to \infty$ для всех $i = 1, \dots, n$, то $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_{ki} - a_i| \to 0$ и в силу правого неравенства $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| \to 0$ при $k \to \infty$.

Предыдущую теорему можно легко доказать и с применением данной теоремы.

Примеры для последовательностей в $\mathbb{R}^2$.

- Пусть $\mathbf{x}_k = \left(\frac{2k+1}{3k+2}, \frac{3k+2}{2k+1}\right)$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \left(\lim\limits_{k\to\infty} \frac{2k+1}{3k+2}, \lim\limits_{k\to\infty} \frac{3k+2}{2k+1}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$.
- Пусть $\mathbf{x}_k = \left(\frac{1}{k}, \cos(\pi k)\right)$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$ не существует, поскольку не существует $\lim\limits_{k\to\infty} \cos(\pi k)$.

Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$

Определение

Пусть множество $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда его **дополнение** есть множество $U^c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \notin U\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash U\}$.

Утверждение

1. *Для любого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ выполнено $(U^c)^c = U$.*
2. *Для любого семейства $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ множеств в $\mathbb{R}^n$, где I – произвольное множество индексов, верны формулы*

    2.1 $\left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha\right)^c = \bigcap\limits_{\alpha \in I} U_\alpha^c,$

    2.2 $\left(\bigcap\limits_{\alpha \in I} U_\alpha\right)^c = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha^c.$

    В частности, верны законы де Моргана
    $(U \cup V)^c = U^c \cap V^c$ *и* $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$.

Определения

Рассмотрим множество $U \subset \mathbb{R}^n$.

- Точка $\mathbf{x}$ называется **внутренней точкой** множества U, если существует ε-окрестность $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ точки $\mathbf{x}$, целиком лежащая в U (т.е. $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset U$).
- Точка $\mathbf{x}$ называется **внешней точкой** множества U, если она является внутренней точкой дополнения U^c множества U.
- Точка $\mathbf{x}$ называется **граничной точкой** множества U, если каждая ее ε-окрестность содержит точки как из U, так из U^c.

  Если в некоторой окрестности точки $\mathbf{x} \in U$ нет других точек из U, то такая точка называется изолированной точкой U.
- Множество всех граничных точек множества U называется его **границей** и обозначается через ∂U.
- Множество всех внутренних точек множества U называется его **внутренностью** и обозначается символом $\operatorname{Int} U$.
- Множество U называется **открытым**, если $\operatorname{Int} U = U$, т.е. если каждая точка $\mathbf{x} \in U$ является внутренней точкой множества U.
- Множество $\overline{U} = U \cup \partial U$ называется **замыканием** множества U.
- Множество U называется **замкнутым**, если $\overline{U} = U$, иначе говоря, $\partial U \subset U$, т.е. если U содержит все свои граничные точки.

Примеры.

- Только два множества – все пространство $\mathbb{R}^n$ и пустое множество $\varnothing$ – одновременно открыты и замкнуты.

  Открытость и замкнутость множества $\mathbb{R}^n$ очевидны, поскольку ε-окрестность любой точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и граница любого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ являются подмножествами $\mathbb{R}^n$. Отдельно можно заметить, что $\partial\mathbb{R}^n = \varnothing$.

  Открытость множества $\varnothing$ следует из логических соображений (каждая точка пустого множества, как несуществующий объект, обладает любыми свойствами). Далее, множество $\varnothing$ замкнуто, поскольку $\partial\varnothing = \varnothing$ и, значит, $\varnothing = \varnothing \cup \partial\varnothing$.
- Замыкание открытого шара $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r\}$ есть замкнутый шар $\overline{B}_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leqslant r\}$.

  Граница открытого шара $B_r(\mathbf{x})$ и замкнутого шара $\overline{B}_r(\mathbf{x})$ есть **сфера** $S_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r\}$.
- В пространстве $\mathbb{R}^1$

$$\partial(a,b) = \partial[a,b) = \partial(a,b] = \partial[a,b] = \{a,b\},$$
$$\text{замыкания } (a,b), [a,b)), (a,b], [a,b] = [a,b],$$
$$\operatorname{Int}((a,b)) = \operatorname{Int}([a,b)) = \operatorname{Int}((a,b]) = \operatorname{Int}([a,b]) = (a,b).$$

  Отрезок $[a,b]$ замкнут, интервал (a,b) открыт, полусегменты $[a,b)$ и $(a,b]$ не открыты и не замкнуты.
- $\partial U = \partial U^c$ для любого $U \subset R^n$.

Основные свойства открытых и замкнутых множеств

Теорема

1. *Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто тогда и только тогда, когда его дополнение U^c замкнуто.*

   Наоборот, множество $U \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение U^c открыто.

2. *Для любого семейства открытых множеств $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ из $\mathbb{R}^n$ (I – любое множество индексов) множество $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ открыто.*

   Для любого семейства замкнутых множеств $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ из $\mathbb{R}^n$ множество $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ замкнуто.

3. *Для любого **конечного** семейства открытых множеств $U_1, \ldots, U_K$ из $\mathbb{R}^n$ множество $\bigcap\limits_{k=1}^{K} U_k$ открыто.*

   *Для любого **конечного** семейства замкнутых множеств $U_1, \ldots, U_K$ из $\mathbb{R}^n$ множество $\bigcap\limits_{k=1}^{K} U_k$ замкнуто.*

4. *Множество $U \subset R^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой сходящейся последовательности $(\mathbf{x}_k)$ точек из U ее предел также принадлежит U.*

Замечание.

- Пересечение $\bigcap\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ **счетного** семейства $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ открытых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ может не быть открытым. Пример:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = [0,1].$$

- Объединение $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ **счетного** семейства $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ может не быть замкнутым. Пример:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = (0,1).$$

С помощью последовательностей можно дать эквивалентное определение **граничной точки** множества: точка $\mathbf{a}$ называется граничной для множества U, если существуют последовательности точек $(\mathbf{x}_k)$ из U и $(\mathbf{y}_k)$ из U^c такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_k = \lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{a}$.

? Эквивалентное определение **предельной точки** множества таково: точка $\mathbf{a}$ называется предельной для множества U, если существует последовательность точек $(\mathbf{x}_k)$ из U такая, что $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$.

Доказательство. Докажем для примера первые утверждения всех пунктов 1–3.

1. Пусть U — открытое множество. Если $U = \mathbb{R}^m$, то $U^c = \varnothing$. Если $U \neq \mathbb{R}^m$, то $U^c \neq \varnothing$. Если $\mathbf{a} \in \partial U^c$, то в любой сколь угодно малой окрестности $\mathbf{a}$ имеются как точки из U, так и из $\mathbb{R}^m \setminus U$. Поэтому $\mathbf{a}$ не может являться внутренней точкой U, а т.к. U — открытое множество, то $\mathbf{a} \notin U$. Значит, $\mathbf{a} \in U^c$ и U^c — замкнутое множество.

2. Пусть $\mathbf{a} \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, тогда $\mathbf{a} \in U_{\alpha(\mathbf{a})}$ при некотором $\alpha(\mathbf{a}) \in I$. Если U_α — открытое множество для всех $\alpha \in I$, то $\mathbf{a}$ входит в $U_{\alpha(\mathbf{a})}$, а поэтому и в $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, вместе с некоторой $\varepsilon(\mathbf{a})$-окрестностью. Следовательно, $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ — открытое множество.

3. Пусть $\mathbf{a} \in \bigcap\limits_{i=1}^{K} U_i$, тогда $\mathbf{a} \in U_i$ для всех $i = 1, \ldots, K$. Если U_i — открытое множество для всех $i = 1, \ldots, K$, то $\mathbf{a}$ входит в U_i вместе с некоторой $\varepsilon_i(\mathbf{a})$-окрестностью. Тогда $\mathbf{a}$ входит в $\bigcap\limits_{i=1}^{K} U_i$ с $\varepsilon(\mathbf{a})$-окрестностью при $\varepsilon(\mathbf{a}) := \min_{1 \leqslant i \leqslant K} \varepsilon_i(\mathbf{a})$. Следовательно, $\bigcap\limits_{i=1}^{K} U_i$ — открытое множество.

Определения. 1. Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется **ограниченным**, если оно содержится в некотором шаре $B_r(0)$, т.е. $|\mathbf{x}| \leqslant r$ при всех $\mathbf{x} \in U$ и некотором $r > 0$.
Иначе оно называется **неограниченным**. Иными словами, если для любого номера N найдется $\mathbf{x} \in U$ такой, что $|\mathbf{x}| > N$.

2. Замкнутое и ограниченное множество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется **компактным множеством** (или просто **компактом**).

3. Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется **связным**, если любые две точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ можно соединить непрерывной кривой, лежащей в U, т.е. если существует вектор-функция $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ такая, что:

1. $\mathbf{f}(0) = \mathbf{x}$, $\mathbf{f}(1) = \mathbf{y}$,
2. $\mathbf{f}(t) \in U$ для всех $t \in [0,1]$,
3. функции $f_1, \ldots, f_n$ непрерывны на $[0,1]$.

Примеры.

- Замкнутый шар $\overline{B}_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leqslant r\}$, $r > 0$ есть компактное и множество.
- n-мерный замкнутый прямоугольный параллелепипед
$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$
где $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, ..., $a_n < b_n$, есть компактное множество. В частности, таков сегмент в $\mathbb{R}^1$.
- В $\mathbb{R}^1$ связные множества – это промежутки, и только они.

Свойства компактных множеств

Теорема

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда следующие свойства эквивалентны:

1. *U есть компактное множество.*
2. *Из любой последовательности $(\mathbf{x}_k)$ точек из U можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из U.*
3. *Из каждого открытого покрытия множества U можно выделить его конечное подпокрытие. Подробнее говоря, если $U \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где U_α – открытые множества, I – произвольное множество индексов, то $U \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_k}$ для некоторых $\alpha_1, \ldots \alpha_k \in I$.*

Следствие (теорема Больцано-Вейерштрасса для пространства $\mathbb{R}^n$). Из любой ограниченной последовательности точек пространства $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Эту теорему легко вывести и последовательным n-кратным применением соответствующей теоремы для числовых последовательностей.

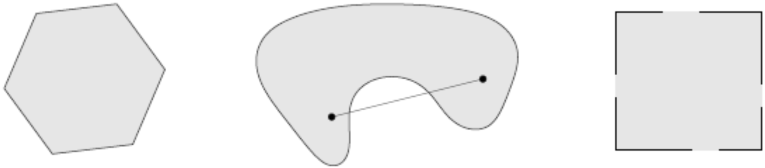
Пример. Любое замкнутое ограниченное множество U можно покрыть открытыми шарами $B_{r(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$ с какими-либо радиусами $r(\mathbf{x}) > 0$, где $\mathbf{x}$ пробегает U. В силу указанной теоремы существует **конечное** покрытие U некоторыми шарами $B_{r(\mathbf{x}_1)}(\mathbf{x}_1), \ldots, B_{r(\mathbf{x}_k)}(\mathbf{x}_k)$.

Выпуклые множества

Определение. Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется **выпуклым**, если вместе с каждыми двумя точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ оно содержит соединяющий их **отрезок** $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Каждое выпуклое множество U связно. Обратное неверно.

Упражнение. Какие из изображенных на рисунке связных множеств выпуклые?



Экономический пример. Пусть имеются блага $S_1, \ldots, S_n$ с ценами $p_1 > 0, \ldots, p_n > 0$. Пусть $P > 0$ – бюджетное ограничение. Тогда **бюджетное множество** – это

$$W = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0,\ p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \leqslant P\}.$$

В векторной форме $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geqslant 0,\ (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \leqslant P\}$, где $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ – вектор цен.

Это множество замкнуто, ограничено ($\Rightarrow$ компактно) и выпукло. ★

Упражнение. Какие из указанных множеств в $\mathbb{R}^n$ являются открытыми, замкнутыми, компактными, связными, выпуклыми:
1. Открытый шар.
2. Замкнутый шар
3. Сфера.
4. Множество, состоящее из двух непересекающихся открытых шаров.
5. Множество, состоящее из двух непересекающихся замкнутых шаров.
6. Множество, состоящее из сферы и ее центра.
7. Сферический слой – множество, получаемое из замкнутого шара удалением открытого шара с тем же центром, но меньшего радиуса. Что изменится, если удалять аналогичный, но замкнутый шар?

Упражнение. Докажите, что график функции f, заданной на сегменте $[a, b]$, является компактным множеством в $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда функция f непрерывна на $[a, b]$.

Может ли быть компактным множеством в $\mathbb{R}^2$ график функции f, заданной на интервале (a, b)?