Математический анализ 1.
Направление 38.03.01 Экономика
Семинар 8. Свойства дифференцируемых функций. Экстремумы.

1. Докажите **по определению**, что:

   (1) функция $f(x) = x^{100} + 2x^{30} + x^2 + 2$ имеет в точке 0 строгий локальный минимум; также докажите, что других точек локального экстремума функция $f(x)$ не имеет;

   (2) функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, имеет в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$ строгий локальный экстремум, а именно, минимум, если $a > 0$ и максимум, если $a < 0$;

   (3) функция
   $$f(x) = \begin{cases} \left|x \sin \dfrac{1}{x}\right|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
   имеет в точке 0 локальный экстремум; охарактеризуйте этот экстремум: строгий/нестрогий максимум/минимум.

2. Найдите и классифицируйте (строгий/нестрогий максимум/минимум) все точки локальных экстремумов функции $f(x)$:

   (1) $f(x) = (x+1)e^{2x}$; (2) $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 24x + 2$; (3) $f(x) = x\sqrt[3]{\ln^2|x|}$;

   (4) $f(x) = x^3 - 4x^2$; (5) $f(x) = (x-5)e^x$; (6) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$; (7) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+|x|}}{1+|4x+5|}$;

   (8) $f(x) = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$; (9) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; (10) $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$; (11) $f(x) = x^x$.

3. Найдите максимальное и минимальное значения функции $f(x) = x^2 - 4x + 6$ на сегменте $[-3, 10]$.

4. Найдите область значений функции $f(x)$ на сегменте S и определите, в каких его точках достигаются минимальное и максимальное значения этой функции на S:

   (1) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, $S = [-10, 10]$; (2) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $S = [-1, 2]$;

   (3) $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$, $S = [-1, 4]$.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = xe^{-x}$ на интервале $(0, +\infty)$.

6. (*) Найдите область значений функции
   $$f(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$
   на интервале $(0, +\infty)$.

7. Докажите неравенство:

   (1) $|3x - x^3| \leqslant 2$ при $x < 2$; (2) $\dfrac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $p > 1$;

   (3) $|a \sin x + b \cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.

8. Найдите интервалы строгого возрастания и строгого убывания функции:

   (1) $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7$; (2) $f(x) = 3^{\frac{1}{x-3}}$; (3) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln x$.

9. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* x_0, если существует такое число $\delta > 0$, что $f(x) < f(x_0)$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \dfrac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   является возрастающей в точке $x = 0$, но при этом не является возрастающей ни на каком интервале, содержащем эту точку.

10. По оценкам производителя при производстве q единиц определенного товара получаемая прибыль составляет $P(q) = -2q^2 + 68q - 128$ тысяч у.е.

    (1) Найдите функции средней прибыли $\frac{P(q)}{q}$ и предельной прибыли $P'(q)$.

    (2) При каком уровне производства $\bar{q}$ средняя прибыль совпадает с предельной прибылью?

    (3) Покажите, что средняя прибыль максимальна при уровне производства $\bar{q}$, найденном в пункте 2.

    (4) Постройте совместно графики функций средней и предельной прибылей в окрестности точки $\bar{q}$.

11. Джина работает менеджером по продажам в компании, которая производит игрушки. Компания производит x сотен единиц недорогих кукол (Флопси) и y сотен единиц дорогих кукол (Мопси). Компания зарабатывает в два раза больше при продаже куклы Мопси, чем при продаже куклы Флопси. По исследованиям Джины можно организовать процесс производства кукол таким образом, что

$$y = \frac{82 - 10x}{10 - x}$$

    при $0 \leqslant x \leqslant 8$.

    Сколько единиц каждого вида кукол (и x, и y) Джине следует рекомендовать производить компании, чтобы максимизировать ее общий доход? Предполагается, что компания может продать каждую произведенную ей куклу.

12. Пусть $q > 0$ единиц товара производятся с общими издержками $C(q)$ у.е. и средними издержками $A(q) = \frac{C(q)}{q}$ у.е./ед.

    (1) Докажите, что точка $q = q_c$ удовлетворяет условию $A'(q_c) = 0$ тогда и только тогда, когда $C'(q_c) = A(q_c)$, т.е. когда предельные издержки $C'(q)$ совпадают со средними.

    (2) Общие издержки производства товара обычно растут с возрастающей скоростью при производстве все большего числа товаров. Используя этот экономический принцип, что можно сказать о знаке $C''(q)$?

    (3) Покажите, что $A''(q) > 0$ тогда и только тогда, когда $C''(q) > 0$. Затем, используя результат пункта 2, покажите, что $A(q)$ достигает минимума в точке $q = q_c$.