Математический анализ 1. Лекция 8. Монотонность и экстремумы функций

27 сентября 2023 г.

Свойства дифференцируемых функций
- Монотонность
- Теорема об условиях монотонности функций на промежутке
- Экстремумы
- Теорема Ферма о необходимом условии экстремума
- Теорема Ролля о нуле производной
- Теорема Лагранжа о конечных приращениях и ее следствие
- Доказательство теоремы об условиях монотонности функций на промежутке
- Теорема Коши о конечных приращениях

Определения. Промежутком называют сегмент $[a, b]$, полусегменты $(a, b]$ и $[a, b)$ и интервал (a, b); все они, кроме $[a, b]$, могут быть бесконечными. Пусть функция f определена на некотором промежутке Δ. Она называется:

- **возрастающей** на Δ, если

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{при всех} \quad x_1, x_2 \in \Delta, \ x_1 < x_2.$$

  Примеры. $f(x) = \ln x$ на $(0, +\infty)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на $\mathbb{R}$.

- **неубывающей** на Δ, если

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad \text{при всех} \quad x_1, x_2 \in \Delta, \ x_1 < x_2.$$

  Пример. $f(x) = \max\{x, 0\}$ на $\mathbb{R}$.

- **убывающей** на Δ, если

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{при всех} \quad x_1, x_2 \in \Delta, \ x_1 < x_2.$$

  Пример. $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$
  (но не на всей области определения $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (!)).

- **невозрастающей** на Δ, если

$$f(x_1) \geqslant f(x_2) \quad \text{при всех} \quad x_1, x_2 \in \Delta, \ x_1 < x_2.$$

  Пример. $f(x) = \max\{-x, 0\}$ на $\mathbb{R}$.

Теорема. Пусть функция f определена и непрерывна на промежутке $\Delta = [a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ или (a,b) (непрерывность в точке a означает ее непрерывность справа, а в точке b – слева). Пусть существует $f'(x)$ при всех $x \in (a,b)$. Тогда:

1. $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ функция f – возрастающая на Δ
2. $f'(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (a,b)$ $\Leftrightarrow$ функция f – неубывающая на Δ
3. $f'(x) < 0$ при всех $x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ функция f – убывающая на Δ
4. $f'(x) \leqslant 0$ при всех $x \in (a,b)$ $\Leftrightarrow$ функция f – невозрастающая на Δ

Важные **обобщения** – теорема сохраняет силу, если $f'(x)$ существует при всех $x \in (a,b)$, **за исключением конечного числа точек**, и удовлетворяет указанным неравенствам при всех $x \in (a,b)$, где она существует. Также в пп. 1 и 3 допустимо, чтобы $f'(x) = 0$ в конечном числе точек (!).
Примеры. 1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ при всех $x > 0$ $\Rightarrow$ функция $f(x) = \sqrt{x}$ – возрастающая на $[0, +\infty)$.
Контрпример для теоремы без обобщения: $f(x) = x^3$ возрастает на $\mathbb{R}$, но для $f'(x) = 3x^2$ имеем $f'(0) = 0$.
2. $f'(x) = \max\{2x, 0\} \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$
функция $f(x) = (\max\{x,0\})^2 \geqslant 0$ – неубывающая на $\mathbb{R}$.
3. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ при всех $x \in (0, +\infty)$ $\Rightarrow$ функция $f(x) = \frac{1}{x}$ – убывающая на $(0, +\infty)$.
4. $f'(x) = \min\{2x, 0\} \leqslant 0$ при всех $x \in (a,b)$ $\Leftrightarrow$ функция
$f(x) = (\min\{x,0\})^2 \leqslant 0$ – неубывающая на $\mathbb{R}$.

Примеры. 1. Найдите промежутки монотонности кубического многочлена $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.
Находим $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$.
Поэтому $f'(x) > 0$ на $(-\infty, -2)$ и $(1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ на $(-2, 1)$.
Тем самым $f(x)$ возрастает на $(-\infty, -2]$, убывает на $[-2, 1]$ и снова возрастает на $[1, +\infty)$.

2. Найдите промежутки монотонности тригонометрической функции $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.
Находим
$f'(x) = 4(\sin^3 x)\cos x - 4(\cos^3 x)\sin x = 4(\sin x)(\cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$
и далее $f'(x) = 2\sin(2x)(2\sin^2 x - 1) = -2\sin(2x) \cdot \cos(2x) = -\sin(4x)$.
Поэтому $f'(x) > 0$ на интервалах, где $-\pi + 2\pi k < 4x < 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и $f'(x) < 0$ на интервалах, где $2\pi k < 4x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Тем самым $f(x)$ возрастает на сегментах

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi k}{2}, \; k \in \mathbb{Z},$$

и убывает на сегментах

$$\frac{\pi k}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Определения. Пусть функция f определена в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ точки x_0. Тогда

- x_0 – **точка строгого локального максимума** функции f, если найдется такая окрестность $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ точки x_0, что

  $$f(x_0) > f(x) \text{ при всех } x \in \mathcal{O}_1, x \neq x_0.$$

  Пример. $f(x) = \sin x$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

- x_0 – **точка локального максимума** функции f, если найдется такая окрестность $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ точки x_0, что

  $$f(x_0) \geqslant f(x) \text{ при всех } x \in \mathcal{O}_1.$$

  Пример. $f(x) = \min\{x^2 - 1, 0\}$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, $|x_0| \geqslant 1$. ★

- x_0 – **точка строгого локального минимума** функции f, если найдется такая окрестность $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ точки x_0, что

  $$f(x_0) < f(x) \text{ при всех } x \in \mathcal{O}_1, x \neq x_0.$$

  Пример. $f(x) = \sin x$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, $x_0 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

- x_0 – **точка локального минимума функции** f, если найдется такая окрестность $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ точки x_0, что

  $$f(x_0) \leqslant f(x) \text{ при всех } x \in \mathcal{O}_1.$$

  Пример. $f(x) = \max\{x^2 - 1, 0\}$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, $x_0 \in [-1, 1]$. ★

Определение. Вместе возрастающие и убывающие функции называют **монотонными** (иногда – строго монотонными).
Неубывающие и невозрастающие функции называют **нестрого монотонными**.

Определение. Вместе точки строгого локального максимума и строгого локального минимума функции f называют ее **точками строгого локального экстремума**. Точки локального максимума и локального минимума функции f называют ее **точками локального экстремума.**

Пример. $f(x) = \sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ – точки строгого локального экстремума.

Значение функции f в точке ее локального максимума (минимума) называется ее **локальным максимумом (минимумом)**.

Непосредственно из определений следуют простые свойства.

1. Функция f – возрастающая на $\Delta \Leftrightarrow (-f)$ – убывающая на Δ.
2. Функция f – неубывающая на $\Delta \Leftrightarrow (-f)$ – невозрастающая на Δ.
3. Точка x_0 – точка строгого локального максимума функции f и $M = \max\limits_{x \in \mathcal{O}_1} f(x) \Leftrightarrow x_0$ – точка строгого локального минимума функции $(-f)$ и $m = \min\limits_{x \in \mathcal{O}_1} (-f(x)) = -M$.

   Пример. $\sin \frac{\pi}{2} = \max\limits_{x \in (0,\pi)} \sin x = -\min\limits_{x \in (0,\pi)} (-\sin x) = -\big(-\sin \frac{\pi}{2}\big)$. ★
4. Точка x_0 – точка локального максимума функции $f \Leftrightarrow x_0$ – точка локального минимума функции $(-f)$.

Теорема (Ферма о необходимом условии экстремума)

Пусть функция f дифференцируема в точке c и имеет в ней локальный экстремум. Тогда $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности функция f имеет локальный максимум в точке c. Тогда $f(c) \geqslant f(x)$ для всех $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$. Это свойство можно переписать в виде двух неравенств

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0 \text{ при всех } x \in (c-\varepsilon, c), \tag{1}$$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0 \text{ при всех } x \in (c, c+\varepsilon). \tag{2}$$

Поскольку функция f дифференцируема в точке c, то существует

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c),$$

значит, существуют и соответствующие односторонние пределы и они равны

$$\lim_{x\to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c).$$

В силу теоремы о предельном переходе (одностороннем) в неравенствах из неравенств (1) и (2) получаем: $f'(c) \geqslant 0$ и $f'(c) \leqslant 0$. Значит, $f'(c) = 0$.

Примеры. 1. $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $x_0 = 0$ – точка строгого локального (и глобального) минимума и в ней $f'(0) = 0$.
2. $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ – точки строгого локального экстремума, в них $\sin x_k = (-1)^k$, а также $f'(x_k) = 0$.

Контрпримеры. 1. $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, но $x_0 = 0$ не является точкой локального экстремума.
Следовательно, теорема обратная теореме Ферма, неверна.
2. $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$ – точка строгого локального (и глобального) минимума, но $f'(0)$ не существует.

Схема исследования функции на локальные экстремумы на интервале

1. Находим все точки b, в которых $f'(b) = 0$ или функция f не дифференцируема (такие точки часто называют **критическими**).

2. Анализируем $\operatorname{sgn} f'(x)$ в **проколотой** окрестности каждой такой точки b.

2a. Если $f'(x)$ меняет знак с - на + при переходе через точку b, т.е. $f'(x) < 0$ при всех $x \in (b - \varepsilon, b)$ и $f'(x) > 0$ при всех $x \in (b, b + \varepsilon)$ при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$, то b – точка строгого локального минимума.

Примеры. 1. $f(x) = |x|$, $f'(x) = \operatorname{sgn} x$ при $x \neq 0 \ \Rightarrow b = 0$ – точка строгого локального (и глобального) минимума.

2. $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ при $x \neq 0 \ \Rightarrow b = 0$ – точка строгого локального (и глобального) минимума.

2b. Если $f'(x)$ меняет знак с + на - при переходе через точку b, т.е. $f'(x) > 0$ при всех $x \in (b - \varepsilon, b)$ и $f'(x) < 0$ при всех $x \in (b, b + \varepsilon)$ при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$, то b – точка строгого локального максимума.

Примеры. Можно рассмотреть функции $-f(x)$ для примеров пункта 2b.

2c. Если $f'(x)$ не меняет знак в некоторой проколотой окрестности $O_\varepsilon^\circ(b)$ точки b, т.е. $f'(x) > 0$ при всех $x \in O_\varepsilon^\circ(b)$ или $f'(x) < 0$ при всех $x \in O_\varepsilon^\circ(b)$ при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$, то b не является точкой экстремума.

Пример. $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \ \Rightarrow b = 0$ не является точкой экстремума.

2d. Если ни одно из этих трех свойств не выполняется, требуется дополнительное исследование.

Пример. Исследуйте на локальные экстремумы функцию–многочлен

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 1.$$

1. Находим критические точки.
   1.1 Находим производную: $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$.
   1.2 $f'(x)$ определена всюду, поэтому критические точки – это все решения уравнения $4x^3 - 12x + 8 = 0$.
   Один из корней легко подбирается: $x_1 = 1$, далее многочлен делим $4x^3 - 12x + 8$ на $x - 1$, получим $4x^3 - 12x + 8 = 4(x^2 + x - 2)(x - 1)$ и находим остальные корни: $x_2 = 1$, $x_3 = -2$.

   Итак, критические точки: 1 и -2.
2. Проверяем для критических точек условие смены знака. Для удобства представим $f'(x)$ в виде произведения

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x-1)^2(x+2).$$

   2.1 В точке $x = -2$ знак меняется с $-$ на $+$, это точка минимума.
   2.2 В точке $x = 1$ знак не меняется, это не точка экстремума.

Схема нахождения глобальных экстремумов и области значений функции f, непрерывной на сегменте $[a, b]$ и дифференцируемой на (a, b), за исключением быть может, конечного числа точек

1. Находим все критические точки $c \in (a, b)$ функции f. Пусть $\mathcal{C}$ – множество всех таких точек.
2. Для нахождения глобального максимума M функции f на сегменте $[a, b]$ используем то, что
$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x) = \max_{x \in \mathcal{C} \cup \{a,b\}} f(x).$$
Для нахождения точек глобального максимума функции f на сегменте $[a, b]$ выбираем все точки $\xi \in \mathcal{C} \cup \{a, b\}$, для которых $f(\xi) = M$.
3. Аналогично, для нахождения глобального минимума m функции f на сегменте $[a, b]$ используем то, что
$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) = \min_{x \in \mathcal{C} \cup \{a,b\}} f(x).$$
Для нахождения точек глобального минимума функции f на сегменте $[a, b]$ выбираем все точки $\eta \in \mathcal{C} \cup \{a, b\}$, для которых $f(\eta) = m$.
4. Область значений функции f на сегменте $[a, b]$ – это сегмент $[m, M]$.

Пример

Найдите $\max\limits_{[-1,2]} f(x)$ и $\min\limits_{[-1,2]} f(x)$ для $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$.

Решение.

1. Находим критические точки из интервала $(-1, 2)$.
   1.1 Находим производную: $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$.
   1.2 Критические точки уже найдены: это точки -2 и 1.
   1.3 Отбираем те критические точки, которые принадлежат интервалу $(-1, 2)$. Это только точка 1.
2. Вычисляем $f(-1) = -12$, $f(1) = 4$, $f(2) = 9$. Из них выбираем максимальное и минимальное значения:

$$\max_{[-1,2]} f(x) = 9, \quad \min_{[-1,2]} f(x) = -12,$$

   они достигаются в точках 2 и -1 соответственно.

Замечание. При нахождении точек глобального максимума (минимума) можно отбрасывать критические точки, не являющиеся точками локального максимума (соответственно, минимума). Например, в данном примере точку 1, как мы знаем, можно было не рассматривать. Но обычно исследование критических точек на максимум/минимум более трудоемко, чем просто вычисление значения функции в них.

Теорема (Ролля о нуле производной)

Пусть функция f определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда существует такая точка $x_0 \in (a, b)$, что

$$f'(x_0) = 0. \quad \bigstar$$

Доказательство. По 2-й теореме Вейерштрасса существуют такие точки $c, d \in [a, b]$, что

$$f(c) = \max_{x \in [a,b]} f(x) = M, \quad f(d) = \min_{x \in [a,b]} f(x) = m.$$

При $m < M$ в силу условия $f(a) = f(b)$ хотя бы одна из точек c, d принадлежит интервалу (a, b). Возьмем ее в качестве x_0. По определению она является точкой экстремума, и утверждение теоремы немедленно следует из теоремы Ферма о необходимом условии экстремума.
Если же $M = m$, то функция f постоянна на сегменте $[a, b]$, и в качестве x_0 можно взять любую точку $x_0 \in (a, b)$.

Теоремы о конечных приращениях

Теорема (Лагранжа о конечных приращениях). Пусть функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \quad \bigstar$$

Замечание. Теорема Лагранжа следует из теоремы Ролля и обобщает ее.
Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$u(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Она дифференцируема на (a, b) и построена так, что $u(a) = f(a)$ и $u(b) = f(a)$. Поэтому u удовлетворяет условиям теоремы Ролля, и в некоторой точке $c \in (a, b)$ имеем

$$0 = u'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

откуда $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Важные следствия.

Следствие 1. Если функция f определена на интервале (a, b) и имеет $f'(x) = 0$ при всех $x \in (a, b)$, то f постоянна на (a, b).
Доказательство. Фиксируем любую точку $x_0 \in (a, b)$. При $a < x < x_0$ применим теорему Лагранжа к f на сегменте $[x, x_0]$ и получим $f(x_0) - f(x) = 0$.
При $x_0 < x < b$ применим теорему Лагранжа к f на сегменте $[x_0, x]$ и получим $f(x) - f(x_0) = 0$. Тем самым $f(x) \equiv f(x_0)$ на (a, b).

Следствие 2. Пусть функции f и g непрерывны на сегменте $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), причем $f(a) \geqslant g(a)$ и $f'(x) > g'(x)$ при всех $x \in (a, b)$. Тогда $f(x) > g(x)$ при всех $x \in (a, b]$.
Доказательство. Следует применить теорему Лагранжа к $h = f - g$ на $[a, x]$.

Пример. $x > \operatorname{arctg} x$ при $x > 0$, т.к. $x|_{x=0} = \operatorname{arctg} x|_{x=0} = 0$ и $x' = 1 > (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ при $x > 0$.

Следствие 3. В условиях теоремы Лагранжа при $\sup_{a<x<b} |f'(x)| \leqslant L$ верно неравенство Липшица

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2| \text{ при всех } x_1, x_2 \in [a, b].$$

Пример. $|\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$ при всех x_1, x_2.

Теорема. Пусть функция f определена и непрерывна на промежутке $\Delta = [a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ или (a,b). Пусть существует $f'(x)$ при всех $x \in (a,b)$. Тогда:

1. $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ функция f – возрастающая на Δ
2. $f'(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (a,b)$ $\Leftrightarrow$ функция f – неубывающая на Δ
3. $f'(x) < 0$ при всех $x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ функция f – убывающая на Δ
4. $f'(x) \leqslant 0$ при всех $x \in (a,b)$ $\Leftrightarrow$ функция f – невозрастающая на Δ

Важные **обобщения** – теорема сохраняет силу, если $f'(x)$ существует при всех $x \in (a,b)$, **за исключением конечного числа точек**, и удовлетворяет указанным неравенствам при всех $x \in (a,b)$, где она существует. Также в пп. 1 и 3 допустимо, чтобы $f'(x) = 0$ в конечном числе точек (!).

Доказательство. Оно несложное. По теореме Лагранжа, примененной к любому сегменту $[x_1, x_2] \subset \Delta$, имеем $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ для некоторой точки $c = c(x_1, x_2) \in (x_1, x_2)$. Поэтому верны все следования $\Rightarrow$ в пп. 1-4.

Обратно, если в п. 2 функция f – неубывающая на Δ, то

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0 \;\text{ при всех }\; x \in (a,b),\; 0 < h < b - x.$$

Поэтому

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0.$$

Обратное утверждение в п. 4 выводится аналогично.

Теорема (Коши о конечных приращениях). Пусть функции f и g непрерывны на сегменте $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$. Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Указанная формула корректна – в ней $g(b) \neq g(a)$ в силу теоремы Ролля (от противного).

Замечание. Теорема Коши следует из теоремы Ролля, обобщает теорему Лагранжа и имеет очень важные для нас приложения для вывода нового способа раскрытия неопределенностей в пределах функций–дробей.

Доказательство. Введем обобщенную вспомогательную функцию

$$u(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Она дифференцируема на (a, b) и построена так, что $u(a) = f(a)$ и $u(b) = f(a)$. Поэтому u удовлетворяет условиям теоремы Ролля, и в некоторой точке $c \in (a, b)$ имеем

$$0 = u'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c),$$

откуда $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.