

**Математический анализ 1.**  
**Направление 38.03.01 Экономика**  
**Семинар 11. Второе достаточное условие экстремума. Выпуклость и**  
**вогнутость. Точки перегиба.**

1. Найдите все критические точки функции  $f(x)$  и исследуйте их на экстремум, используя второе достаточное условие экстремума:
- (1)  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x - 1$ ; (2)  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 30x^2 + 36x - 11$ ;  
(3)  $f(x) = \ln(2 - x) + 2 \operatorname{arctg} x$ ; (4)  $f(x) = (x + 1)e^{2x}$ .

2. Найдите точки глобальных экстремумов следующих функций:

(1)  $f(x) = e^x + e^{-2x}$ ; (2)  $f(x) = 9 - (x - a)^2 - 2(x - b)^2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

3. При подготовке к экзамену студент за  $t$  дней изучает  $\frac{t}{t+k}$ -ю часть курса, а забывает  $\alpha t$ -ю часть, где  $k > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  и  $0 < k\alpha < 1$ . Сколько времени в днях  $t$  (положительное вещественное число) нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

Рассмотрите конкретные случаи:

(1)  $k = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \frac{2}{81}$ ; (2)  $k = 1$ ,  $\alpha = \frac{1}{16}$ ; (3)  $k = 2$ ,  $\alpha = \frac{2}{49}$ .

4. Найдите, на каких промежутках следующие многочлены являются строго выпуклыми или строго вогнутыми, а также найдите точки перегиба:

(1)  $f(x) = 3x^2 - x^3$ ; (2)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$ ; (3)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10x + 9$ ;

(4)  $f(x) = x(2x + 1)^2$ ; (5)  $f(x) = x(x + 3)^2$ ; (6)  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x - 5$ ;

(7)  $f(x) = 3x^5 - 25x^4 + 11x - 17$ .

5. Найдите, на каких промежутках следующие функции являются строго выпуклыми или строго вогнутыми, а также найдите точки перегиба:

(1)  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ ; (2)  $f(x) = \frac{a^2}{a^2 + x^2}$ ,  $a > 0$ ; (3)  $f(x) = (x - 4)^{\frac{7}{3}}$ ; (4)  $f(x) = x + x^{\frac{5}{3}}$ ;

(5)  $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ ; (6)  $f(x) = x + \sin x$ ; (7)  $f(x) = e^{-x^2}$ ; (8)  $f(x) = \ln(1 + x^2)$ ;

(9)  $f(x) = x \sin(\ln x)$ ,  $x > 0$ ; (10)  $f(x) = x^x$  ( $x > 0$ ); (11)  $f(x) = \frac{x^3}{12 + x^2}$ ;

(12)  $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$ .

6. При каком выборе параметра  $h > 0$  «кривая вероятности»

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

имеет точки перегиба  $x = \pm \sigma$  с заданным  $\sigma > 0$ ?

7. Найдите, на каких промежутках следующие функции являются строго выпуклыми или строго вогнутыми, а также найдите точки перегиба и нарисуйте эскизы графиков функций:

(1)  $f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$ ; (2)  $f(x) = \sqrt[3]{\ln x}$ ; (3)  $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2 - 1)}$ ; (4)  $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}$ ;

(5)  $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 14x + 7}{(x + 1)^2}$ .

8. Пусть задана производная  $f'(x)$  некоторой функции  $f(x)$ . Найдите промежутки, на которых функция  $f(x)$  возрастает, убывает, строго выпукла, строго вогнута. Найдите локальные экстремумы и точки перегиба функции  $f(x)$ . Постройте эскиз графика  $f(x)$ :

(1)  $f'(x) = x^2 - 4x$ ; (2)  $f'(x) = x^2 - 2x - 8$ ; (3)  $f'(x) = 5 - x^2$ ; (4)  $f'(x) = x(1 - x)$ .

9. Постройте эскиз графика функции, заданной на  $\mathbb{R}$  и удовлетворяющей указанным четырем свойствам (а)-(г):

(1) (а)  $f'(x) > 0$  при  $x < -1$  и при  $x > 3$ ; (б)  $f'(x) < 0$  при  $-1 < x < 3$ ;

(в)  $f''(x) < 0$  при  $x < 2$ ; (г)  $f''(x) > 0$  при  $x > 2$ ;

(2) (а) функция разрывна в точках  $x = -1$  и  $x = 3$ ;

(б)  $f'(x) > 0$  при  $x < 1$ ,  $x \neq -1$  и  $f'(x) < 0$  при  $x > 1$ ,  $x \neq 3$ ;

(г)  $f''(x) > 0$  при  $x < -1$  и при  $x > 3$  и  $f''(x) < 0$  при  $-1 < x < 3$ ;

(д)  $f(0) = 0$ ,  $f(2) = 0$ ,  $f(1) = 3$ .

10. Компания тратит  $x$  тысяч у.е. на маркетинг определенного продукта и тогда по ее оценкам ежемесячные продажи составляют

$$S(x) = -x^3 + 33x^2 + 60x + 1000$$

единиц продукции. Найдите точку перегиба графика функции  $S(x)$ . Какое экономическое значение имеют расходы на маркетинг в этой точке?

11. Изучение эффективности утренней смены на предприятии (с 7:00 до 12:00) показывает, что средний работник, начинающий работу в 7:00, спустя  $t$  часов произведет

$$Q(t) = -t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 15t$$

единиц продукции (где  $0 \leq t \leq 5$  может быть вещественным).

(1) В какой момент времени  $t_{dr}$  производство работника достигнет точки убывающей отдачи?

(2) В какой момент времени  $t_{le}$  работник выполняет работу наименее эффективно?

12. В определенном обществе планируется построить  $M(r)$  тысяч новых домов при фиксированной ставке  $r\%$  годовых на 30-летнюю ипотеку, где

$$M(r) = \frac{1 + 0.02r}{1 + 0.009r^2}.$$

При какой процентной ставке  $r_0$  скорость изменения  $M(r)$  (т.е.  $M'(r)$ ) будет минимальна?