Математический анализ 1. Лекция 1. Числовые множества. Многочлены и рациональные дроби

4 сентября 2023 г.

Организационные вопросы

Введение

Числовые множества. Натуральные числа. Принцип математической индукции

Целые, рациональные и действительные числа

Многочлены и рациональные функции
- Бином Ньютона
- Многочлены и рациональные функции

Общая информация

- Лектор: Злотник Александр Анатольевич, профессор департамента математики ФЭН

  https://www.hse.ru/staff/azlotnik

! Просьба к старостам всех групп выслать тестовое письмо (с указанием номера группы) с почтовых адресов групп на мою почту: azlotnik@hse.ru

Математический анализ – это классический раздел высшей математики, посвященный исследованию числовых функций одной и нескольких переменных с использованием операции предельного перехода. Математический анализ состоит из двух взаимосвязанных частей: *дифференциального исчисления* и *интегрального исчисления*; в рамках этой дисциплины изучаются пределы, производные, дифференциалы, интегралы и бесконечные ряды и многое др.

Исторически математический анализ оформился на рубеже XVII и XVIII вв., прежде всего, благодаря трудам Исаака Ньютона (1642 – 1727) и Готфрида Вильгельма Лейбница (1646 – 1716), которые в том числе систематизировали предшествующие достижения в этой области, ввели основные понятия, разработали удобную систему обозначений и нашли впечатляющие приложения к естественным наукам. Как законченная система знаний математический анализ практически полностью сформировался во второй половине XIX в.

Области применения

- Естественные науки: физика, биология, химия и др.
- Общественные науки: экономика, социология
- Информационные технологии
- Etc.

Числовые множества

В курсе математического анализа в основном изучаются *числовые* множества (и заданные на них функции). Под *числовым множеством* будем сначала понимать произвольное подмножество множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Наиболее важные числовые множества – это:

- $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел,
- $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел,
- $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел,
- $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Каждое из этих множеств расширяет предыдущее:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ – это множество, состоящее из чисел

$$1, 2, 3, \dots$$

Что мы еще знаем о натуральных числах? Мы умеем их складывать, умножать, сравнивать между собой, решать некоторые уравнения.

Достаточна ли такая характеризация множества натуральных чисел?

Нет, поскольку она не дает возможности обосновать, что какое-то свойство выполнено *для всех* натуральных чисел. Как, например, проверить справедливость следующего утверждения:

Для любого натурального числа n число $7^n + 3n - 1$ делится на 9?

Если оно неверно, то, перебирая подряд все натуральные числа, мы найдем контрпример. Но, если оно верно, то для того, чтобы доказать его "методом перебора", нам потребуется бесконечно много времени!

Принцип математической индукции

Пусть:

1. высказывание $\varphi(n)$ верно для $n = 1$ (*база индукции*) и
2. из того, что высказывание $\varphi(n)$ верно для $n = k$ следует, что оно верно при $n = k + 1$ (*шаг индукции*).

Тогда высказывание $\varphi(n)$ верно при всех $n \in \mathbb{N}$.

Равносильная формулировка

Пусть:

1. высказывание $\varphi(n)$ верно для $n = n_0$ (*база индукции*) и
2. из того, что высказывание $\varphi(n)$ верно для $n = k \geqslant n_0$ следует, что оно верно при $n = k + 1$ (*шаг индукции*).

Тогда высказывание $\varphi(n)$ верно при всех натуральных чисел $n \geqslant n_0$.

Примеры

Утверждение

Для любого натурального числа n число $7^n + 3n - 1$ делится на 9.

База индукции. При $n = 1$ число $7^n + 3n - 1$ равно

$$7^1 + 3 \cdot 1 - 1 = 9.$$

Оно делится на 9, база индукции доказана.

Шаг индукции. Пусть $7^k + 3k - 1$ делится на 9. Рассмотрим число $7^{k+1} + 3(k+1) - 1$:

$$7^{k+1} + 3(k+1) - 1 = 7 \cdot 7^k + 3k + 2 = 7 \cdot (7^k + 3k - 1) - 18k + 9$$

Первое слагаемое делится на 9 по предположению индукции, остальные делятся на 9 по известным свойствам натуральных чисел. Значит, $7^{k+1} + 3(k+1) - 1$ делится на 9. Шаг индукции доказан. Значит, утверждение верно.

Утверждение

Для любого натурального числа n и действительного числа $x \geqslant -1$ выполнено неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

База индукции. При $n=1$ получаем верное числовое неравенство

$$1+x \geqslant 1+x.$$

Шаг индукции. Пусть $(1+x)^k \geqslant 1+kx$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geqslant (1+kx)(1+x) =$$
$$= 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x.$$

Целые и рациональные числа

1. $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Для целых a, b уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение $x \in \mathbb{Z}$, т.е. определено вычитание $b - a$.
2. $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ (указанная запись рационального числа неоднозначна), $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1$. Для рациональных a, b уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение $x \in \mathbb{Q}$, т.е. определено вычитание $b - a$, и, если $a \neq 0$, то уравнение $a \cdot x = b$ тоже имеет единственное решение $x \in \mathbb{Q}$, т.е. определено деление $\dfrac{b}{a}$.

Потребность в дальнейшем расширении множества рациональных чисел до действительных (вещественных) чисел естественным образом возникает из геометрических и физических задач: например, диагональ единичного квадрата и длина единичной окружности не выражается в рациональных числах.

Действительные числа

С практической точки зрения действительные числа – это бесконечные десятичные дроби.

Множество действительных чисел с операциями сложения и умножения можно определить как *упорядоченное поле*, которое удовлетворяет *принципу супремума* или (что равносильно) *принципу инфимума*. Что это означает?

Понятие "поле" определяется в курсе линейной алгебры. Тот факт, что действительные числа являются полем, означает, что их можно складывать, умножать, вычитать и делить по обычным законам.

Упорядоченность означает, что на множестве действительных чисел определен линейный порядок $\geqslant$, удовлетворяющий условиям: для всех x, y, z

1. $x \geqslant y \Rightarrow x + z \geqslant y + z$,
2. $x \geqslant 0, y \geqslant 0 \Rightarrow xy \geqslant 0$.

Аксиомы линейного порядка

1. если $x \geqslant y$ и $y \geqslant z$, то $x \geqslant z$,
2. если $x \geqslant y$ и $y \geqslant x$, то $x = y$,
3. $x \geqslant y$ или $y \geqslant x$.

Бином Ньютона

Утверждение

Для любого $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$ верна формула бинома Ньютона:

$$(x+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m,$$

где $\binom{n}{m} = C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ для всех $0 \leqslant m \leqslant n$.

Замечание: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$.

Следствие:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}a^nb^0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Частные случаи:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Многочлены и рациональные функции

Многочлен (полином) степени n (одной переменной) – это выражение вида

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n \neq 0$. Степень многочлена p обозначается $\deg(p) = n$.
Константу 0 также относят к многочленам, при этом обычно полагают $\deg(0) = -\infty$.

Для многочленов определены естественные операции сложения и умножения, например,

$$(2x^2 + x - 1) + (-x^2 + 2x + 3) = x^2 + 3x + 2$$
$$(2x^2 + x - 1) \cdot (-x^2 + 2x + 3) = -2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + x - 3$$

При этом

$$\deg(p + q) \leqslant \max\{\deg(p), \deg(q)\}$$

причем из $\deg(p) \neq \deg(q) \Rightarrow \deg(p + q) = \max\{\deg(p), \deg(q)\}$

$$\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$$

Деление с остатком

Теорема

Для любой пары многочленов p и q, где $\deg(p) \geqslant \deg(q)$ и $q \not\equiv 0$, существует единственная пара многочленов s и r со свойствами:

1. $p = sq + r$,
2. $\deg(p) = \deg(s) + \deg(q)$, $\deg(r) < \deg(q)$

Многочлен s называют (неполным) *частным от деления* p на q, а многочлен r называют *остатком от деления* p на q.
Если $r = 0$, то говорят, что многочлен p *делится* (нацело) на многочлен q.

Деление многочленов в столбик

Пример:

$$
\begin{array}{l|l}
10x^5+3x^4-12x^3+25x^2-2x+5 & 5x^2-x+2 \\ \cline{2-2}
10x^5-2x^4+4x^3 & 2x^3+x^2-3x+4 \\ \cline{1-1}
\qquad 5x^4-16x^3+25x^2-2x+5 & \\
\qquad 5x^4-x^3+2x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -15x^3+23x^2-2x+5 & \\
\qquad\qquad -15x^3+3x^2-6x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 20x^2+4x+5 & \\
\qquad\qquad\qquad 20x^2-4x+8 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad 8x-3 &
\end{array}
$$

В указанной выше записи $p = sq + r$ это означает, что

$$10x^5+3x^4-12x^3+25x^2-2x+5 = (2x^3+x^2-3x+4)\cdot(5x^2-x+2)+8x-3.$$

Корни многочленов

Следствие (теорема Безу)

Остаток от деления многочлена p на одночлен $x - a$ равен $p(a)$

Определение

Число c называется корнем многочлена p, если $p(c) = 0$.

Следствие (из теоремы Безу)

Число c является корнем многочлена p тогда и только тогда, когда $p(x)$ (нацело) делится на $x - c$.

Определение

Кратность корня c многочлена p есть наибольшее натуральное число k, для которого $p(x)$ делится на $(x - c)^k$.

Теорема

Кратность корня c многочлена p есть наибольшее натуральное число k такое, что

$$p(c) = 0, \ \ p'(c) = 0, \ \ldots, \ p^{(k-1)}(c) = 0,$$

где $p^{(k-1)}$ – это $k - 1$-я производная p.

Теорема

Целые корни (если они существуют) многочлена с целыми коэффициентами есть делители свободного члена a_0.

Напоминание: если n – натуральный делитель целого числа k, то $-n$ также является делителем k. Числа ± 1 также являются делителями k в этой теореме.

Решения не всех квадратных уравнений выражаются в вещественных числах: для

$$x^2 + bx + c = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-b \pm i\sqrt{|b^2 - 4c|}\right) \text{ при } b^2 - 4c < 0,$$

где i – *мнимая единица*. Возникают *комплексные* числа.

Основная теоремы алгебры (многочленов); но доказывается средствами математического анализа.

Теорема

Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ имеет ровно n комплексных корней с учетом их кратности.

Поэтому если $c_1, c_2, \ldots, c_s$ – все различные **комплексные** корни многочлена степени $n \geqslant 1$, а $k_1, k_2, \ldots, k_s$ – их соответствующие кратности, то $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$.

Многочлен степени n однозначно определяется своими значениями в $n+1$ различных точках:

Следствие

Пусть p и q – многочлены степени не более n, и пусть они принимают одинаковые значения в $n+1$ различных точках, т.е.

$$p(x_1) = q(x_1), \quad p(x_2) = q(x_2), \ldots, p(x_{n+1}) = q(x_{n+1})$$

для некоторых различных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Тогда $f = g$.

Пример (упражнение)

При любых различных действительных a, b, c

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} \equiv 1.$$

Разложение многочленов на множители

Каноническое разложение произвольного многочлена $p_n(x)$ степени $n \geqslant 1$ на простейшие (неприводимые) комплексные множители.

Теорема

*Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_s$ – все различные **комплексные** корни многочлена*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

а $k_1, k_2, \ldots, k_s$ – их соответствующие кратности. Тогда

$$p_n(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \ldots (x - c_s)^{k_s}$$

и поэтому $k_1 + \ldots + k_s = n$.
Это разложение единственно с точностью до перенумерации корней.

Каноническое разложение произвольного многочлена $q_m(x)$ степени $m \geqslant 1$ на простейшие (неприводимые) вещественные множители имеет вид

$$q_m(x) = c_0(x-x_1)^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_s)^{\ell_s} \cdot (x^2+p_1x+t_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_jx+t_j)^{k_j},$$

где $c_0 \neq 0$, а $x_1, \ldots, x_s$ – (все) различные вещественные корни кратностей $\ell_1 \geqslant 1, \ldots, \ell_s \geqslant 1$ соответственно и, кроме того,

$$x^2+p_1x+t_1 > 0, \ldots, x^2+p_jx+t_j > 0 \text{ при всех } x,$$

причем пары коэффициентов $(p_1, t_1), \ldots, (p_j, t_j)$ различны, и $k_1 \geqslant 1, \ldots, k_j \geqslant 1$. При этом выполняется равенство

$$m = \ell_1 + \ldots + \ell_s + 2(k_1 + \ldots + k_j).$$

Произведение степеней двучленов

$$(x-x_1)^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_s)^{\ell_s},$$

отвечает вещественным корням многочлена $q_m(x)$, и если их нет, т.е. $m = 2(k_1 + \ldots + k_j)$, то в разложении это произведение отсутствует.
Произведение степеней трехчленов

$$(x^2+p_1x+t_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_jx+t_j)^{k_j}.$$

отвечает парам комплексно сопряженных корней кратности $k_1, \ldots, k_j$ соответственно, и если таких нет, т.е. $m = \ell_1 + \ldots + \ell_s$, то в разложении это произведение отсутствует.
Данное разложение *единственно* с точностью до перестановки однотипных множителей (т.е. внутри первого или второго из указанных произведений).

Рациональные функции

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены и $\deg(q) \geqslant 1$.

Соответствующая числовая функция $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ называется *рациональной функцией*. Она определена для всех вещественных x, кроме вещественных корней знаменателя.

Определение

- Рациональная дробь $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ называется *правильной*, если $\deg(p) < \deg(q)$.
- *Элементарными (вещественными) дробями* называются дроби вида

$$\frac{a}{(x-c)^k} \quad \text{и} \quad \frac{bx+d}{(x^2+px+t)^k},$$

где $k \in \mathbb{N}$ и квадратный трехчлен $x^2 + px + t$ не имеет вещественных корней (т.е. $p^2 - 4t < 0$).

Мы будем рассматривать только рациональные функции с действительными коэффициентами.

Представление рациональной дроби в виде суммы многочлена и элементарных дробей

1. **Выделение целой части с помощью деления с остатком**: рациональную дробь $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, не являющуюся правильной, можно представить в виде $\dfrac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$, где $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, а $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ есть уже правильная дробь.
2. **Разложение правильной дроби в сумму элементарных дробей**: каждую правильную дробь $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ можно представить в виде суммы *элементарных* рациональных дробей вида

$$\frac{a}{(x-c)^k}, \quad \frac{bx+d}{(x^2+px+t)^k},$$

знаменатели которых являются делителями многочлена $q(x)$, $x^2+px+t > 0$ при всех x.

Более точно результат формулируется ниже.

Теорема

(о разложении правильной рациональной дроби на элементарные дроби). *Пусть* $0 \leqslant k < m$ *и многочлен* $q_m(x)$ *имеет указанное выше каноническое разложение. Тогда справедливо разложение правильной рациональной дроби на элементарные дроби вида*

$$\frac{r_k(x)}{q_m(x)} = \frac{a_1^{(1)}}{x - x_1} + \ldots + \frac{a_1^{(\ell_1)}}{(x - x_1)^{\ell_1}} + \ldots + \frac{a_s^{(1)}}{x - x_s} + \ldots + \frac{a_s^{(\ell_s)}}{(x - x_s)^{\ell_s}} +$$

$$+ \frac{b_1^{(1)}x + d_1^{(1)}}{x^2 + p_1 x + t_1} + \ldots + \frac{b_1^{(k_1)}x + t_1^{(k_1)}}{(x^2 + p_1 x + t_1)^{k_1}} + \ldots$$

$$+ \frac{b_j^{(1)}x + d_j^{(1)}}{x^2 + p_j x + t_j} + \ldots + \frac{b_j^{(k_j)}x + d_j^{(k_j)}}{(x^2 + p_j x + t_j)^{k_j}}.$$

Если в каноническом разложении $q_m(x)$ *порядок сомножителей фиксирован, то это разложение единственно.*

В разложении стоят неопределенные коэффициенты

$$a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(\ell_1)};\ \ldots;\ a_s^{(1)}, \ldots, a_s^{(\ell_s)};$$

$$b_1^{(1)}, d_1^{(1)}, \ldots, b_1^{(k_1)}, d_1^{(k_1)};\ \ldots;\ b_j^{(1)}, d_j^{(1)}, \ldots, b_j^{(k_j)}, d_j^{(k_j)}.$$

Их можно найти *методом неопределенных коэффициентов*, приведя правую часть разложения к общему знаменателю и приравняв возникающий многочлен в числителе многочлену $r_k(x)/c_0$, точнее, приравняв их коэффициенты при одинаковых степенях.

Теорема дополнительно гарантирует, что эта процедура ведет к системе m линейных алгебраических уравнений для указанных m коэффициентов, которая имеет, и при том единственное, решение.

Отметим, что общий знаменатель правой части разложения — это многочлен $q_m(x)/c_0$.

Метод неопределенных коэффициентов

Примеры

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^3 - x^2 + x - 1}$

- Раскладываем знаменатель на множители: $f(x) = \dfrac{2x}{(x-1)(x^2+1)}$.

  Значит, решение надо искать в виде

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

- Правую часть приводим к общему знаменателю и ее числитель раскладываем по степеням x:

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a(x^2+1) + (x-1)(bx+c)}{(x-1)(x^2+1)} = \\ = \frac{(a+b)x^2 + (c-b)x + a - c}{(x-1)(x^2+1)}.$$

- Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях в числителях, составляем систему

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c - b = 2 \\ a - c = 0 \end{cases}$$

- Решаем систему (ясно, что $b = -a$, $c = a$, $2a = 2$) и записываем окончательный результат: $a = 1, b = -1, c = 1$, т.е.

$$f(x) = \frac{1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x^2 + 1}.$$

2. $f(x)=\dfrac{2x}{x^3+x^2-x-1}$

- Раскладываем знаменатель на множители: $f(x)=\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)^2}$.

  Значит, решение надо искать в виде $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}$;

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}.$$

- Правую часть приводим к общему знаменателю:

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+b(x^2-1)+c(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}=$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(2a+c)x+a-b-c}{(x-1)(x^2+1)}.$$

- Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях в числителях, составляем систему

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+c=2 \\ a-b-c=0 \end{cases}$$

- Решаем систему и записываем окончательный результат: $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{1}{2}, c=1,$

$$f(x)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Частный случай: пусть

$$q_m(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_m),$$

где все числа $x_1, x_2, \dots, x_m$ различны (т.е. все корни $x_1, x_2, \dots, x_m$ – простые, т.е. однократные). В этом случае приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях и решать системы не требуется и нетрудно видеть, что

$$\frac{r_k(x)}{q_m(x)} = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \dots + \frac{a_m}{x - x_m},$$

где

$$a_i = \frac{r_k(x_i)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_m)}$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant m$.

Для получения этой формулы достаточно привести правую часть разложения к общему знаменателю и, не записывая ее по степеням x, просто подставить $x = x_1, \dots, x_n$.

Аналогично и в общем случае можно сразу найти коэффициенты a_i, отвечающие простым вещественным корням знаменателя, что упрощает решение системы уравнений в методе неопределенных коэффициентов.