Математический анализ 1.
Направление 38.03.01 Экономика
Семинар 2.6. Производные и дифференциалы второго порядка

1. Найдите якобиан отображения $(x, y) \mapsto (u, v)$:

   (1) $u = x(x^2 - 3y^2)$, $v = y(3x^2 - y^2)$; (2) $u = (\operatorname{ch} x)\cos y$, $v = (\operatorname{sh} x)\sin y$.

2. Найдите якобиан отображения $(r, \varphi) \mapsto (x, y)$: $x = r\cos^p \varphi$, $y = r\sin^p \varphi$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Найдите якобиан отображения $(r, \varphi, \psi) \mapsto (x, y, z)$: $x = r(\cos^p \varphi)\cos^q \psi$, $y = r(\sin^p \varphi)\cos^q \psi$, $z = r\sin^q \psi$, p, $q \in \mathbb{N}$.

4. Найдите якобиан отображения $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$:

   (1) $u = xyz$, $v = xy - xyz$, $w = y - xy$;

   (2) $u = \dfrac{x}{\sqrt{1 - r^2}}$, $v = \dfrac{y}{\sqrt{1 - r^2}}$, $w = \dfrac{z}{\sqrt{1 - r^2}}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 < 1$.

5. Найдите якобиан отображения $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (u_1, \ldots, u_n)$:

   (1) $u_i = \dfrac{1}{i}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k)^i = \dfrac{1}{i}\left[(x_1)^i + \ldots + (x_n)^i\right]$, $i = 1, \ldots, n$;

   (2) $u_i = \dfrac{1}{2}x_i^2 + \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n,\, k \neq i} a_k x_k$, $i = 1, \ldots, n$.

6. Найдите все частные производные второго порядка функции $f(x, y)$ в точке A:

   (1) $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 2xy^2 + y^3$, $A(1, 1)$;

   (2) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y^4$, $A(1, 1)$.

7. Найдите матрицу Гессе и дифференциал 2-го порядка функции $f(x, y, z)$ в точке A:

   (1) $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3xz$, $A(1, 1, 1)$;

   (2) $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2$, $A(1, 2, 3)$.

8. Существует ли функция $h(x, y)$, дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой области D, для которой $h'_x(x, y) = x^2y$ и $h'_y(x, y) = 2x + y$ в D?

9. Найдите дифференциалы 2-го порядка и матрицу Гессе следующих функций:

   (1) $f(x, y) = 3x^2y + x^2 - y^5$; (2) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; (3) $f(x, y) = \sin\dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$;

   (4) $f(x, y) = x^2 \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ при $x \neq 0, y \neq 0$, $f(0, 0) = 0$;

   (5) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

10. Найдите дифференциалы 2-го порядка и матрицу Гессе следующих функций:

    (1) $f(x, y) = x^2y - xy^2 + 3$; (2) $f(x, y) = xy - \dfrac{y}{x}$; (3) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3$;

    (4) $f(x, y) = (\sin x)^{\cos y}$; (5) $f(x, y) = x - 3\sin y$; (6) $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$;

    (7) $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; (8) $f(x, y) = y\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt{y}}$; (9) $f(x, y) = \ln \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$;

(10) $f(x,y)=\frac{x}{y}e^{xy}$; (11) $f(x,y)=\frac{2x+3y}{x-y}$; (12) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

11. Вычислите дифференциалы 1-го и 2-го порядка в точке $(2,1,1)$ отображения

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy\\z/y\end{pmatrix}.$$

12. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядка отображения

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}yz\\zx\\xy\end{pmatrix}.$$

13. Пусть f, g – дважды дифференцируемые функции одной переменной на $\mathbb{R}$. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядка композиции функций:

(1) $f(xy)$; (2) $\frac{f(x)}{f(y)}$, где $f(y)\neq 0$; (3) $f(x)+g(y)$; (4) $f(x)g(y)$; (5) $f(x-y)+g(x+y)$.

14. Пусть f, g, h – дважды дифференцируемые функции одной переменной на $\mathbb{R}$. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядка композиции функций:

(1) $f(x+y)$; (2) $f(x^2+y^2)$; (3) $f(x-y)+f(x+y)$; (4) $f(x)+g(y)+h(z)$;

(5) $f(x)g(y)h(z)$.

15. Пусть f – дважды дифференцируемая функция двух переменных на $\mathbb{R}^2$. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядка композиции функций:

(1) $f(x+y,x-y)$; (2) $f(x,x)$; (3) $f(x,y)-f(y,x)$.

16. Пусть f, g – дважды дифференцируемые функции двух переменных на $\mathbb{R}^2$. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядка композиции функций:

(1) $f(x,y)+g(y,x)$; (2) $f(x,x^2)$; (3) $\frac{f(x,y)}{f(y,x)}$, где $f(y,x)\neq 0$.

17. Пусть производство Q на предприятии зависит от количества K вложений капитала (измеряемых в у.е.) и размера L рабочей силы (измеряемой в трудочасах). Объясните экономический смысл частной производной второго порядка $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}$.

18. На определенном предприятии производство составляет $Q=120K^{1/2}L^{1/5}$ единиц, где K – вложения капитала, измеряемые в тыс. у.е., а L – размер рабочей силы, измеряемый в трудочасах.

(1) Найдите знак частной производной 2-го порядка $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ и объясните его экономическое значение.

(2) Найдите знак частной производной 2-го порядка $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}$ и объясните его экономическое значение.

19. Пусть ежедневное производство Q на предприятии зависит от количества K вложений капитала и размера L рабочей силы. **Закон убывающей отдачи** гласит, что при определенных условиях существует такое значение L_0, что предельная полезность труда будет возрастать при $L < L_0$ и убывать при $L > L_0$.

   Запишите данный закон в терминах знака соответствующей частной производной 2-го порядка.