Математический анализ 1. Направление 38.03.01 Экономика
Тема 2. Функции нескольких переменных
Семинар 2.12. Задачи на условный экстремум с несколькими условиями связи

1. Проверьте, что для заданных функции f и условий связи указанные точки удовлетворяют необходимым условиям экстремума в форме Лагранжа. Проверьте для каждой из указанных точек выполнение достаточных условий в форме Лагранжа, и если они выполняются, то определите тип экстремума (минимум или максимум). Дайте геометрическую интерпретацию задачи:

   (1) $f(x, y, \xi, \eta) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$, условия связи $x^2 + y^2 = 2$, $\xi + \eta = 6$, точки $(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0) = (1, 1, 3, 3)$, $(-1, -1, 3, 3)$;

   (2) $f(x, y, \xi, \eta) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$, условия связи $x^2 + y^2 = 2$, $(\xi - 5)^2 + (\eta - 5)^2 = 8$, точки $(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0) = (1, 1, 3, 3)$, $(1, 1, 7, 7)$;

   (3) $f(x, y, \xi, \eta) = y + \xi$, условия связи $x = y$, $\xi + \eta = 0$, $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = 4$, точки $(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0) = (-1, -1, -1, 1)$, $(1, 1, 1, -1)$;

   (4) $f(x, y, \xi, \eta) = y + \xi$, условия связи $x^2 + y^2 = 2$, $\xi^2 + \eta^2 = 2$, $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = 4$, точки $(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0) = (1, 1, -1, 1)$, $(-1, -1, 1, -1)$.

   (5) $f(x, y, z) = x + y + z$, условия связи $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $xyz = 2$, точка $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$;

   (6) $f(x, y, z) = x + y + z$, условия связи $x^2 + y^2 + z^2 = 19$, $xyz = 9$, точка $(x_0, y_0, z_0) = (3, 3, 1)$.

2. Для заданных функции f в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и условий связи методом Лагранжа найдите одну (любую) точку экстремума и определите ее тип:

   (1) $f(x, y, z) = xy^2z^3$, условия связи $x + y = z$, $6x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 36$;

   (2) $f(x, y, z) = xy^2z^5$, условия связи $x - y = z$, $10x^2 + 5y^2 + 2z^2 = 240$.

3. Для заданных функции f и условий связи методом Лагранжа найдите одну (любую) точку экстремума и определите ее тип:

   (1) $f(x, y, z) = xyz$, условия связи $x + y + z = 5$, $xy + xz + yz = 8$;

   (2) $f(x, y, z) = x + y + z$, условия связи $xyz + 4 = 0$, $xy + xz + yz = 8$;

   (3) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, условия связи $xyz + 4 = 0$, $x + y + z + 5 = 0$.

4. Для заданных функции f и условий связи методом Лагранжа найдите одну (любую) точку экстремума и определите ее тип:

   (1) $f(x, y, z) = (x + y)e^z$, условия связи $x + z = 1$, $y + z = 1$.

   Экономические приложения

5. Инвестор приобретает три рискованных актива:

   актив А с ожидаемой доходностью 20% и риском 17%,

   актив Б с ожидаемой доходностью 15% и риском 14% и

   актив В с ожидаемой доходностью 17% и риском 16%.

Ковариации между рисками активов А и Б, А и В и Б и В составляют соответственно 3%, −4% и 5%. В какой доле необходимо приобрести активы А, Б и В с тем, чтобы ожидаемая доходность портфеля составила 14%, а риск был минимален?

Указание. Риск портфеля определяется как $\sigma_p = \sqrt{\mathbf{r}^T V \mathbf{r}}$, где $\mathbf{r}$ — вектор искомых долей активов, а V – ковариационная матрица рисков (ковариация между рисками одного актива равна его риску), сумма долей должна составлять 100%, а ожидаемая доходность портфеля есть среднее взвешенное ожидаемых доходностей активов пропорционально их долям в портфеле.

6. Инвестор приобретает три рискованных актива:

актив А с ожидаемой доходностью 14% и риском 5%,

актив Б с ожидаемой доходностью 17% и риском 9%,

актив В с ожидаемой доходностью 18% и риском 20%

и безрисковый актив Г с ожидаемой доходностью 10%.

В какой доле необходимо приобрести активы А–Г с тем, чтобы ожидаемая доходность портфеля составила 16%, а риск был минимален? Предполагается, что ковариация между рисками активов А и Б, А и В и Б и В составляет соответственно −2%, 1% и 4%.

Указание. В целевой функции риска портфеля учитываются только рискованные активы. Долю безрискового актива можно выразить через доли рискованных активов с учетом того, что сумма долей должна составлять 100%.