Математический анализ 1.
Направление 38.03.01 Экономика
Семинар 2.10. Неявные функции

1. Найдите все точки локального экстремума неявной функции $y = f(x)$, заданной следующим уравнением (выражать явно $y = f(x)$ не следует, даже если это возможно):

   (1) $(y-x)^3 + x + 6 = 0$; (2) $(y-x^2)^2 - x^5 = 0$.

2. Найдите все точки локального экстремума неявных функций как вида $y = y(x)$, так и $x = x(y)$, заданных следующим уравнением (выражать явно $y = y(x)$ и $x = x(y)$ не следует, даже если это возможно):

   (1) $x^4 + y^4 - 8xy^2 = 0$; (2) $(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$.

3. Найдите dz и d^2z в заданной точке для неявной функции $z = f(x, y)$, заданной указанным уравнением:

   (1) $xz^5 + y^3z - x^3 = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$;

   (2) $x^3 + y^3 + z^3 - 5xyz = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$.

4. Найдите точки локального экстремума (т.е. найдите все точки возможного экстремума и проверьте выполнение в них достаточных условий экстремума) неявной функции $z = f(x, y)$, заданной следующим уравнением:

   (1) $x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2+y^2+z^2) = 0$; (2) $z^2 + xyz - (xy^2 + x^3) = 0$.

5. Найдите z', z'', dz, d^2z и точки локального экстремума неявной функции $z = z(x)$, которая вместе с $y = y(x)$ удовлетворяет указанной системе уравнений:

   (1) $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0$; (2) $xyz - 2 = 0$; $x + y + z - 4 = 0$.

6. Набор неявных функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ удовлетворяет указанной системе уравнений. Найдите du, dv и d^2u, d^2v (выражать явно $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ не следует, даже если это возможно):

   (1) $x - uv = 0$, $y - (u+v) = 0$; (2) $x - (u^2+v^2) = 0$, $y - (u+v) = 0$.

7. Набор неявных функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $z = z(x, y)$ удовлетворяет указанной системе уравнений. Найдите dz и d^2z (выражать явно $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ не следует, даже если это возможно):

   (1) $x - (u+v) = 0$, $y - (u^2+v^2) = 0$, $z - (u^3+v^3) = 0$;

   (2) $x - u\cos v = 0$, $y - u\sin v = 0$, $z - uv = 0$;

   (3) $x - (u+v) = 0$, $y - uv = 0$, $z - (u^2+v^2) = 0$;

   (4) $x - ue^{u+v} = 0$, $y - ue^{u-v} = 0$, $z - (u^2+v^2) = 0$.

8. Докажите, что уравнение $\sin(xyz) - (x+y+z) = 0$ определяет в окрестности точки $(0, 0, 0)$ функцию $z = f(x, y)$, принимающую в точке $(x, y) = (0, 0)$ значение $z = 0$, и найдите dz и d^2z в этой точке.

9. Найдите dz и d^2z для неявной функции $z = f(x, y)$, заданной указанным уравнением:

   (1) $\sin(xy) + \cos(xz) + \operatorname{tg}(yz) = 0$; (2) $z\ln(x + z) - \dfrac{xy}{z} = 0$.

10. Исследуйте на строгую выпуклость/строгую вогнутость в окрестности точки A неявную функцию $z = z(x, y)$, заданную указанными уравнением и условием:

    (1) $x^2 + 2y^2 + z^2 - xz + y - 4 = 0$ и условием $z(A) = 0$, $A = (1, 1)$;

    (2) $z^3 + 2xz + 3y + 2 = 0$ и условием $z(A) = -1$, $A = (-1, -1)$.

11. Уравнение $F(x, y) = 0$ задает неявную функцию $y = f(x)$ в окрестности точки x_0. Напишите уравнение касательной к графику этой функции в точке x_0, если:

    (1) $F(x, y) = xy - y^x$, $x_0 = 2$; (2) $F(x, y) = ye^x + e^y$, $x_0 = -1$.

12. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает неявную функцию $z = f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0). Найдите касательную плоскость к поверхности, являющейся графиком этой функции, в точке (x_0, y_0), если:

    (1) $x^2 + 2xy^2 - 7z^3 + 3y + 1 = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$;

    (2) $(x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 + 7xy + 3x + z^4 - z - 14 = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$;

    (3) $\sin^2 x + \cos(y + z) - \dfrac{3}{4} = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}, 0\right)$.

13. Набор неявных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяет указанным системе уравнений и условиям $u(x_0, y_0) = u_0$, $v(x_0, y_0) = v_0$. Найдите du, dv и d^2u, d^2v в точке (x_0, y_0), если:

    (1) $\exp\left(\dfrac{u}{x}\right) \cdot \cos\dfrac{v}{y} - \dfrac{x}{\sqrt{2}} = 0$, $\exp\left(\dfrac{u}{x}\right) \cdot \sin\dfrac{v}{y} - \dfrac{y}{\sqrt{2}} = 0$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $u_0 = 0$, $v_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

    (2) $x\cos u + (y - 1)\sin u + \ln v = 0$, $-x\sin u + (y - 1)\cos u = 0$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $u_0 = 0$, $v_0 = \dfrac{1}{e}$.