Математический анализ 1.
Лекция 2.5.
Дифференцирование вектор-функций нескольких вещественных переменных

16 ноября 2023 г.

Дифференциальное исчисление. Производные векторных функций одной вещественной переменной

Пусть $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : X \to \mathbb{R}^m$, где $X = D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}$ – промежуток, т.е. это вектор-функция одной вещественной переменной (обозначим ее через t), где $f_1, f_2, \ldots, f_m$ – обычные скалярные функции одной вещественной переменной (координаты точки $\mathbf{f}(t)$). Предел

$$\mathbf{f}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}, \quad t_0 \in D(\mathbf{f})$$

корректно определен и существует тогда и только тогда, когда существуют все пределы

$$f_1'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \ldots, f_m'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f_m(t) - f_m(t_0)}{t - t_0}$$

т.е. существуют производные функций $f_1, \ldots, f_m$ в точке $t_0 \in X$, причем $\mathbf{f}'(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots, f_m'(t_0))$ (почему?) или, если $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T$, то

$$\mathbf{f}'(t_0) = \begin{pmatrix} f_1'(t_0) \\ f_2'(t_0) \\ \ldots \\ f_m'(t_0) \end{pmatrix}.$$

Формулу $\mathbf{f}'(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}$ можно переписать через дифференциал

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + (t - t_0)\cdot \mathbf{f}'(t_0) + o(t - t_0) \text{ при } t \to t_0.$$

Это означает, что функция $\mathbf{f}$ отличается от аффинной вектор-функции

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{f}(t_0) + (t - t_0)\cdot \mathbf{f}'(t_0)$$

на величину порядка малости $o(t - t_0)$ в некоторой окрестности точки t_0.

При $\mathbf{f}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ аффинная вектор-функция $\mathbf{l}(t)$ задает в параметрической форме прямую в пространстве $\mathbb{R}^m$, которая называется **касательной прямой** к параметрической кривой $\mathbf{f}$ при $t = t_0$, т.е. в точке $\mathbf{f}(t_0) = (f_1(t_0), f_2(t_0), \ldots, f_m(t_0))$.

Касательная прямая к параметрической кривой $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{f}(t_0)$ (т.е. при $t = t_0$) единственна (если она существует). Она проходит через точку $\mathbf{f}(t_0) = (a_1, \ldots, a_m)$ и параллельна направляющему вектору $\mathbf{f}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Это позволяет выписать ее канонические уравнения

$$\frac{x_1 - a_1}{f_1'(t_0)} = \ldots = \frac{x_m - a_m}{f_m'(t_0)};$$

в случае $f_i'(t_0) = 0$ следует положить $x_i = a_i$ и соответствующую дробь опустить.

Примеры 1. Найдем касательную прямую к параметрической кривой на плоскости – эллипсу

$$\mathbf{f}(t) = (a\cos t, b\sin t), \quad 0 \leqslant t < 2\pi,$$

с полуосями $a > 0$ и $b > 0$.

2. Найдем касательную прямую к параметрической кривой в пространстве – спирали вокруг оси z:

$$\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t, t) \ \text{ при } t = \frac{\pi}{4}.$$

Частные производные

Частной производной вектор-функции $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^m$, где $X = D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$, в точке $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ по переменной x_i называется вектор-функция

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n)}{h} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \\ \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

где $1 \leqslant i \leqslant n$, т.е. фактически производная вектор-функции, зависящей от одной переменной x_i (остальные переменные здесь фиксированы).
Она совпадает с производной функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}$ по направлению числовой оси Ox_i, т.е. $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (единица на i-ом месте).

Для скалярной функции f это просто ранее введенная частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f'_{x_i}(\mathbf{x}).$$

Матрица Якоби

Пусть дана вектор-функция $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^m$, где $X = D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

которая имеет в точке $\mathbf{x} \in D(\mathbf{f})$ частные производные по всем переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда ее **матрицей Якоби** в точке $\mathbf{x}$ называется $m \times n$ матрица, составленная из этих производных как столбцов

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left\{ \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right\} \Bigg|_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}.$$

Если $n = 1$, т.е. когда $\mathbf{f}$ – дифференцируемая функция одной вещественной переменной x, то $J_{\mathbf{f}}(x)$ – просто вектор-столбец.

Если $m = 1$, т.е. когда $\mathbf{f} = f_1 = f$ – скалярная функция, имеющая все частные производные в точке $\mathbf{x}$, то $J_f(\mathbf{x})$ – просто вектор-строка, и она совпадает с *градиентом* $\nabla f(\mathbf{x})$.

Для матрицы Якоби используют также обозначение $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ и ее называют производной функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}$.

При $m = n$ определитель матрицы Якоби $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ называют **якобианом**.

Примеры

- Пусть $\mathbf{f}(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)^T$ – вектор-функция перехода от полярных координат к декартовым. Тогда

$$J_{\mathbf{f}}(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \det J_{\mathbf{f}}(\rho,\varphi) = \rho.$$

- Пусть $\mathbf{f}(t) = (t^2, -t)^T$. Тогда

$$J_f(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Пусть $f(x,y) = xy$. Тогда

$$J_f(x,y) = \nabla f(x,y) = (y,x).$$

- Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ – вектор-функция нормировки $\mathbf{x}$.

Линейные операторы

Линейная алгебра: Линейный оператор $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ при использовании канонических базисов в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ задается так

$$L(\mathbf{h}) = A \cdot \mathbf{h}$$

для некоторой $m \times n$ матрицы A и любого вектора $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix},$$

т.е.

$$L(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} L_1(\mathbf{h}) \\ L_2(\mathbf{h}) \\ \dots \\ L_m(\mathbf{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + \dots + a_{1n}h_n \\ a_{21}h_1 + a_{22}h_2 + \dots + a_{2n}h_n \\ \dots \\ a_{m1}h_1 + a_{m2}h_2 + \dots + a_{mn}h_n \end{pmatrix}.$$

Здесь элементы пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ – вектор-столбцы.

Дифференцируемость вектор-функции и ее дифференциал

Определение

Пусть дана вектор-функция $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^m$, где $X = D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$. Она называется **дифференцируемой** в точке $\mathbf{x} \in D(\mathbf{f})$, если для некоторого линейного оператора $d\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, называемого **дифференциалом** функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}$, выполнено

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = d\mathbf{f}(\mathbf{h}) + \mathbf{r}(\mathbf{h}) \text{ при } |\mathbf{h}| \leqslant \delta,$$

где остаточный член $\mathbf{r}(\mathbf{h}) = o(|\mathbf{h}|)$ при $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, т.е

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - d\mathbf{f}(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|} = \mathbf{0}.$$

Обозначение дифференциала: $d\mathbf{f}$, $d\mathbf{f}(\mathbf{h})$, $d\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{h})$. Переменные $h_1, h_2, \ldots, h_n$ часто обозначаются через $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

Теорема

1. Вектор-функция $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{x}$ *тогда и только тогда, когда все скалярные функции* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *дифференцируемы в точке* $\mathbf{x}$.
2. Если функция $\mathbf{f}$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{x} \in D(\mathbf{f})$, *то ее дифференциал таков*

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = A\mathbf{h} \quad \textit{при всех} \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$$

с $A = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ *– матрицей Якоби функции* $\mathbf{f}$ *в точке* $\mathbf{x}$.
3. Как следствие, если дифференциал функции $\mathbf{f}$ *в точке* $\mathbf{x}$ *существует, то он единствен.*

Напоминание (прошлая лекция). Если f – скалярная функция n вещественных переменных, то ее дифференциал (если он существует) в точке $\mathbf{x} \in D(f)$ есть линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, т.е. **линейная форма** n переменных. Он выражается формулами

$$df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})h_n = (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h}) \quad \text{при всех} \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема

Если вектор-функция $\mathbf{f}$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{x} \in D(\mathbf{f})$, *то она непрерывна в точке* $\mathbf{x}$.

Доказательство первой из теорем несложное: свойство

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = A\mathbf{h} \;\text{ при всех }\; \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$$

в покоординатной записи означает, что

$$df_k(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = A_k\mathbf{h} \;\text{ при всех }\; \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n,$$

где A_k – это k-я строка матрицы A, $1 \leqslant k \leqslant m$. Но нам уже известна формула для дифференциала скалярной функции

$$A_k = \nabla f_k(\mathbf{x}),$$

которая и доказывает основной пункт 2.

Доказательство второй из теорем такое же, как в скалярном случае.

Правила действий над дифференциалами

Если $\mathbf{f} : X_f \to \mathbb{R}^m$, $X_f = D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{g} : X_g \to \mathbb{R}^m$, $X_g = D(\mathbf{g}) \subset \mathbb{R}^n$ – дифференцируемые в точке $\mathbf{x} \in X_f \cap X_g$ вектор-функции, то верны следующие формулы

$$d\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}), d\mathbf{x}\big) = d\mathbf{f}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) + d\mathbf{g}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}),$$

$$d\big(\alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}), d\mathbf{x}\big) = \alpha\, d\mathbf{f}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}),\ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Если $\mathbf{f} : X_f \to \mathbb{R}^m$, $X_f = D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$ и $g : X_g \to \mathbb{R}$, $X_g = D(\mathbf{g}) \subset \mathbb{R}^n$ – дифференцируемые в точке $\mathbf{x} \in X_f \cap X_g$ вектор-функция и скалярная функция, то верны следующие формулы

$$d\big(g(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}), d\mathbf{x}\big) = dg(\mathbf{x}, d\mathbf{x})\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\, d\mathbf{f}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}),$$

$$d\Big(\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}, d\mathbf{x}\Big) = \frac{g(\mathbf{x})\, d\mathbf{f}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) - dg(\mathbf{x}, d\mathbf{x})\, \mathbf{f}(\mathbf{x})}{g^2(\mathbf{x})} \text{ при } g(\mathbf{x}) \neq 0.$$

Достаточное условие дифференцируемости

Теорема

Если все элементы матрицы Якоби $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ определены в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}$ и непрерывны в точке $\mathbf{x}$, то функция $\mathbf{f}$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}$.

Следствие

*Если все частные производные **элементарной** функции $\mathbf{f}$ нескольких вещественных переменных определены в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}$, то функция $\mathbf{f}$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}$.*

Теорема (дифференциал композиции функций)

Если вектор-функция $\mathbf{f} : X_f \to \mathbb{R}^m$, $X_f = D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{x}$, *а вектор-функция* $\mathbf{g} : X_g \to \mathbb{R}^k$, $X_g = D(\mathbf{g}) \subset \mathbb{R}^m$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *то их композиция – вектор-функция* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{x}$, *причем*

$$d(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}|_{\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})},$$

где в правой части стоит произведение матриц Якоби $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})$ *порядка* $k \times m$ *и* $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ *порядка* $m \times n$.

Второе равенство выражает важное ***свойство инвариантности дифференциала***.

Обсудим частный случай, когда g – скалярная функция. Тогда

$$d(g \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = (\nabla g)(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \big((\nabla g)(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\big) d\mathbf{x},$$

откуда следуют важные формулы для частных производных композиции

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Схема доказательства. Используя дифференцируемость сначала функции $\mathbf{f}$, а затем функции $\mathbf{g}$, получаем

$$\begin{aligned}(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(\mathbf{x}+\mathbf{h}) &= \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+o(|\mathbf{h}|)) = \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))+\mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\cdot(\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+o(|\mathbf{h}|))+o(|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+o(|\mathbf{h}|)|) = \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))+\mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+\mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\cdot o(|\mathbf{h}|)+o(|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+o(|\mathbf{h}|)|).\end{aligned}$$

Остается показать, что

$$\mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\cdot o(|\mathbf{h}|) = o(|\mathbf{h}|) \text{ и } o(|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+o(|\mathbf{h}|)|) = o(|\mathbf{h}|).$$

Это делается так:

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{\mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\cdot o(|\mathbf{h}|)}{|\mathbf{h}|} = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\cdot\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{o(|\mathbf{h}|)}{|\mathbf{h}|} = \mathbf{0},$$

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{o(|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+o(|\mathbf{h}|)|)}{|\mathbf{h}|} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{o(|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+o(|\mathbf{h}|)|)}{|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+o(|\mathbf{h}|)|}\cdot\frac{|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+o(|\mathbf{h}|)|}{|\mathbf{h}|} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) \neq 0$ (иначе результат очевиден). Последнее равенство верно, потому что подпредельное выражение есть произведение бесконечно малой функции $\dfrac{o(|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+o(|\mathbf{h}|)|)}{|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+o(|\mathbf{h}|)|}$ на ограниченную функцию

$$\frac{|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+o(|\mathbf{h}|)|}{|\mathbf{h}|} = \left|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}+\frac{o(|\mathbf{h}|)}{|\mathbf{h}|}\right| \leqslant |\mathbf{f}'(\mathbf{x})| + \frac{|o(|\mathbf{h}|)|}{|\mathbf{h}|}.$$

Пример. Пусть

$$\mathbf{f}(x,y) = (x+y^2, x^2+y)^T \quad \text{и} \quad \mathbf{g}(u,v) = (uv, u+v)^T.$$

Композиция

$$\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$$

есть функция, задаваемая формулой

$$\mathbf{h}(x,y) = ((x+y^2)(x^2+y), (x+y^2)+(x^2+y)) = (x^3+x^2y^2+xy+y^3, x^2+y^2+x+y)^T$$

(с использованием этой формулы можно было бы вычислить производные функции $\mathbf{h}$ непосредственно).

Матрицы Якоби:

$$\mathbf{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g}'(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит,
$\mathbf{h}'(x,y) = (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(x,y) = \mathbf{g}'(f(x,y)) \cdot \mathbf{f}'(x,y)$

$$= \left.\begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right|_{\substack{u=x+y^2 \\ v=x^2+y}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^2+y & y^2+x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x^2+y)+(y^2+x)\cdot 2x & (x^2+y)\cdot 2y+(y^2+x) \\ 1+2x & 2y+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x^2+2xy^2+y & 3y^2+2xy^2+x \\ 2x+1 & 2y+1 \end{pmatrix}.$$

Частный случай

Пусть $\mathbf{f} = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ – функция одной вещественной переменной, а g – скалярная функция от n переменных. Тогда композиция $g \circ \mathbf{f}$ – обычная скалярная функция одного аргумента. Формула производной композиции для этого случая имеет вид:

$$(g \circ \mathbf{f})' = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{f}(x)) \cdot f_1'(x) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{f}(x)) \cdot f_n'(x)$$

Примеры

1. Пусть $f(x) = (x, x)$, $g(x, y) = x^y$.

   Тогда $g \circ f = x^x$, $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$, $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$, $f_1'(x) = f_2'(x) = 1$. Значит,

$$(x^x)' = x \cdot x^{x-1} \cdot 1 + x^x \ln x \cdot 1 = x^x + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x).$$

2. Пусть $\mathbf{f}(x) = (u(x), v(x))$, $g(x, y) = xy$.

   Тогда $g \circ \mathbf{f} = u(x) \cdot v(x)$, $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = x$. Значит,

$$(uv)' = v \cdot u' + u \cdot v'.$$

   Аналогично для производной суммы, разности и частного.

3. Пусть g – скалярная функция n вещественных переменных, дифференцируемая в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Пусть также

$$\mathbf{f}(t) = (x_1 + te_1, \ldots, x_n + te_n) = \mathbf{x} + t\mathbf{e},$$

где $t \in \mathbb{R}$, $|\mathbf{e}| = 1$. Тогда $f_i'(t) = e_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$, поэтому производная функции g по направлению $\mathbf{e}$ в точке $\mathbf{x}$ равна

$$g_{\mathbf{e}}'(\mathbf{x}) = (g \circ \mathbf{f})'(0) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \cdot e_1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \cdot e_n = (\nabla g(\mathbf{x}), \mathbf{e})$$

– это другой вывод формулы, уже известной нам с прошлой лекции.

Определение

Вектор $\mathbf{u}$ перпендикулярен (или является вектором *нормали* к) гладкой поверхности Π в точке $\mathbf{x} \in \Pi$, если он перпендикулярен (направляющему вектору) касательной к любой содержащейся в поверхности Π дифференцируемой параметрической кривой в точке $\mathbf{x}$.

Теорема

Если дифференцируемая в точке $\mathbf{x}_0$ функция имеет в точке $\mathbf{x}_0$ ненулевой градиент, то он перпендикулярен поверхности (линии) уровня функции f, проходящей через эту точку.

Доказательство. Пусть дана функция $f : X \to \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}^n$, которая дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$. Рассмотрим дифференцируемую в точке t_0 параметрическую кривую $\varphi(t) : I \to \mathbb{R}^n$, где $I \subset \mathbb{R}$, для которой $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$ и которая целиком содержится в поверхности уровня $f(\mathbf{x}) = C$. Последнее означает, что $f(\varphi(t)) = C$ для всех $t \in I$. Тогда

$$0 = C' = f'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0) = (\nabla f(\mathbf{x_0}), \varphi'(t_0)),$$

т.е. вектор $\nabla f(\mathbf{x})$ перпендикулярен вектору

$$\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0), \ldots, \varphi_n'(t_0)),$$

который направлен по касательной к кривой φ.

Касательные гиперплоскости и нормали к поверхности

Пусть f – дифференцируемая в точке $\mathbf{x}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ функция.

1. *Касательной гиперплоскостью* к поверхности $f(\mathbf{x}) = C$, проходящей через точку $\mathbf{x}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, называется гиперплоскость, которая проходит через точку $\mathbf{x}_0$ и перпендикулярна градиенту $\nabla f(\mathbf{x_0})$ (существуют и другие определения понятия «касательная плоскость».) Из этого следует, что эта гиперплоскость задается уравнением:
$$(\nabla f(\mathbf{x_0}), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0,$$
т.е.
$$f'_{x_1}(\mathbf{x}_0)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(\mathbf{x}_0)(x_2 - a_2) + \ldots + f'_{x_n}(\mathbf{x}_0)(x_n - a_n) = 0$$

2. *Нормальной прямой* к поверхности $f(\mathbf{x}) = C$, проходящей через точку $\mathbf{x}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, называется прямая, которая проходит через точку $\mathbf{x}_0$ и параллельна градиенту $\nabla f(\mathbf{x_0})$. Из этого следует, что эта прямая задается уравнениями:
$$\frac{x_1 - a_1}{f'_{x_1}(\mathbf{x}_0)} = \frac{x_2 - a_2}{f'_{x_2}(\mathbf{x}_0)} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{f'_{x_n}(\mathbf{x}_0)}$$

Примеры

1. Дана поверхность
$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6.$$
Найти уравнение касательной и нормали в точке $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$.

Обозначим $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Тогда $\nabla f(\mathbf{x}) = (2x, 4y, 6z)$, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = (2, 4, 6)$.
Уравнение касательной плоскости
$$2(x-1) + 4(y-1) + 6(z-1) = 0$$
или
$$2x + 4y + 6z = 12 \;\Leftrightarrow\; x + 2y + 3z = 6.$$
Каноническое уравнение нормали
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{6} \;\Leftrightarrow\; \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

2. Дана кривая

$$y^3 + 2xy^2 - x^3 = -3.$$

Найти уравнение касательной и нормали в точке $\mathbf{x}_0 = (2, 1)$.

Обозначим $f(x, y) = y^3 + 2xy^2 - x^3$. Тогда
$\nabla f(\mathbf{x}) = (2y^2 - 3x^2, 3y^2 + 4xy)$, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = (-10, 11)$.
Уравнение касательной

$$-10(x - 2) + 11(y - 1) = 0$$

или

$$y = \frac{10}{11}x - \frac{9}{11}.$$

Уравнения нормали

$$\frac{x - 2}{-10} = \frac{y - 1}{11}.$$

или

$$y = -\frac{11}{10}x + \frac{16}{5}.$$

Замечание

Задачу нахождения уравнения касательной гиперплоскости и/или нормальной прямой к поверхности, которая есть график функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, можно свести к предыдущей задаче, если переписать уравнение $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в виде $y - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Пример

Дана поверхность $z = 2x + \ln(x + y)$. Найти уравнение касательной плоскости и нормали в точке $\mathbf{a} = (1, 0)$.

Обозначим $f(x, y, z) = z - 2x - \ln(x + y)$ и $\mathbf{x}_0 = (1, 0, z(1, 0)) = (1, 0, 2)$. Тогда $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(-2 - \dfrac{1}{x + y}, -\dfrac{1}{x + y}, 1\right)$, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = (-3, -1, 1)$.
Уравнение касательной плоскости

$$-3(x - 1) - y + (z - 2) = 0$$

или

$$-3x - y + z = -1.$$

Уравнение нормали

$$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 2}{1}.$$

Эластичность по переменной

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – производственная функция (т.е. функция, выражающая объем производства в зависимости от параметров $x_1, x_2, \dots, x_n$). **Эластичностью функции** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **по переменной** x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ в точке $\mathbf{x}$ называется величина

$$E[f]_{x_i}(\mathbf{x}) = x_i \frac{f'_{x_i}(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}.$$

Экономический смысл эластичности функции f по переменной x_i соответствуют экономическому смыслу эластичности функции одной переменной

$$E[f]_{x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}}{\dfrac{(x_i + h) - x_i}{x_i}},$$

т.е. эластичность функции f по переменной x_i есть предельное отношение относительного (процентного) приращения функции f к относительному (процентному) приращению переменной x_i.

Пример. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Ax_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $A > 0$. Эластичность этой функции f по переменной x_k **постоянна** и равна α_k, $k = 1, \dots, n$. Важно, что при определенных условиях **верно и обратное**.

Предельные нормы замещения

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть производственная функция или функция полезности, т.е. функция, дающая некоторую оценку набору благ $1, 2, \ldots, n$ в количестве (или при оценках) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно. Будем говорить на языке функций полезности.
Предельная норма замещения $MRS_{x_i x_j}$– величина, характеризующая количество блага x_i, от которого потребитель готов отказаться ради увеличения блага x_j на единицу (при неизменной полезности набора благ).
Иначе говоря, $MRS_{x_i x_j} = -\dfrac{\Delta x_j}{\Delta x_i}$ при условии $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{const}$ и неизменности остальных переменных x_k $(k \neq i, j)$.
Для простоты будем считать, что x_i, x_j – это единственные переменные функции f; обозначим их через x и y. Тогда MRS_{xy} определяется из условия $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$. Считая, что величины Δx и Δy малы, и заменяя приращение $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = 0$ приближенно его линейной частью (дифференциалом), приходим к уравнению

$$f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y = 0,$$

откуда

$$MRS_{xy} = \frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$