Линейная алгебра. Лекция 3. Элементы матричной алгебры

Н. Л. Поляков

Высшая Школа Экономики, Факультет экономических наук, Москва

2022 г.

Операции над матрицами
- Сложение, умножение на число, транспонирование
- Матричное умножение

Особые случаи произведения матриц
- Произведение диагональных и блочно-диагональных матриц.
- Произведение «Жордановых клеток»
- Произведение «матриц поворота»
- Произведение матриц и элементарные операции

Степени матриц и многочлены от матриц

Литература

Операции над матрицами

Операции над матрицами

Основные алгебраические операции над матрицами это

Операции над матрицами

Основные алгебраические операции над матрицами это

- сложение,

Операции над матрицами

Основные алгебраические операции над матрицами это

- сложение,
- умножение на число,

Операции над матрицами

Основные алгебраические операции над матрицами это

- сложение,
- умножение на число,
- транспонирование,

Операции над матрицами

Основные алгебраические операции над матрицами это

- сложение,
- умножение на число,
- транспонирование,
- матричное умножение.

Операции над матрицами

Основные алгебраические операции над матрицами это

- сложение,
- умножение на число,
- транспонирование,
- матричное умножение.

Умножение на число и транспонирование определено для любой матрицы, а сложение и матричное умножение требуют специальных условий на операнды.

Операции над матрицами

Основные алгебраические операции над матрицами это

- сложение,
- умножение на число,
- транспонирование,
- матричное умножение.

Умножение на число и транспонирование определено для любой матрицы, а сложение и матричное умножение требуют специальных условий на операнды.

- Сумма $A + B$ определена тогда и только тогда, когда матрицы A и B одного размера. Если матрицы A и B обе размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = A + B$ есть матрица того же размера $m \times n$ и

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Операции над матрицами

Основные алгебраические операции над матрицами это

- сложение,
- умножение на число,
- транспонирование,
- матричное умножение.

Умножение на число и транспонирование определено для любой матрицы, а сложение и матричное умножение требуют специальных условий на операнды.

- Сумма $A + B$ определена тогда и только тогда, когда матрицы A и B одного размера. Если матрицы A и B обе размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = A + B$ есть матрица того же размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Пример

Операции над матрицами

Основные алгебраические операции над матрицами это

- сложение,
- умножение на число,
- транспонирование,
- матричное умножение.

Умножение на число и транспонирование определено для любой матрицы, а сложение и матричное умножение требуют специальных условий на операнды.

- Сумма $A + B$ определена тогда и только тогда, когда матрицы A и B одного размера. Если матрицы A и B обе размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = A + B$ есть матрица того же размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} =$$

Операции над матрицами

Основные алгебраические операции над матрицами это

- сложение,
- умножение на число,
- транспонирование,
- матричное умножение.

Умножение на число и транспонирование определено для любой матрицы, а сложение и матричное умножение требуют специальных условий на операнды.

- Сумма $A + B$ определена тогда и только тогда, когда матрицы A и B одного размера. Если матрицы A и B обе размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = A + B$ есть матрица того же размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix} =$$

Операции над матрицами

Основные алгебраические операции над матрицами это

- сложение,
- умножение на число,
- транспонирование,
- матричное умножение.

Умножение на число и транспонирование определено для любой матрицы, а сложение и матричное умножение требуют специальных условий на операнды.

- Сумма $A + B$ определена тогда и только тогда, когда матрицы A и B одного размера. Если матрицы A и B обе размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = A + B$ есть матрица того же размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

- Произведение λA числа λ на матрицу A определено всегда. Если матрица A размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = \lambda A$ есть матрица того же размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

- Произведение λA числа λ на матрицу A определено всегда. Если матрица A размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = \lambda A$ есть матрица того же размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Пример

- Произведение λA числа λ на матрицу A определено всегда. Если матрица A размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = \lambda A$ есть матрица того же размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Пример

$$10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

- Произведение λA числа λ на матрицу A определено всегда. Если матрица A размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = \lambda A$ есть матрица того же размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Пример

$$10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 1 & 10 \cdot 2 & 10 \cdot 3 \\ 10 \cdot 4 & 10 \cdot 5 & 10 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

- Произведение λA числа λ на матрицу A определено всегда. Если матрица A размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = \lambda A$ есть матрица того же размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Пример

$$10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 1 & 10 \cdot 2 & 10 \cdot 3 \\ 10 \cdot 4 & 10 \cdot 5 & 10 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

- Произведение λA числа λ на матрицу A определено всегда. Если матрица A размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = \lambda A$ есть матрица того же размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Пример

$$10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 1 & 10 \cdot 2 & 10 \cdot 3 \\ 10 \cdot 4 & 10 \cdot 5 & 10 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

- Транспонированная матрица A^T определена для любой матрицы A. Если матрица A размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = A^T$ есть матрица размера $n \times m$ и
$$c_{ij} = a_{ji}.$$

- Произведение λA числа λ на матрицу A определено всегда. Если матрица A размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = \lambda A$ есть матрица того же размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Пример

$$10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 1 & 10 \cdot 2 & 10 \cdot 3 \\ 10 \cdot 4 & 10 \cdot 5 & 10 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

- Транспонированная матрица A^T определена для любой матрицы A. Если матрица A размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = A^T$ есть матрица размера $n \times m$ и
$$c_{ij} = a_{ji}.$$

Пример

- Произведение λA числа λ на матрицу A определено всегда. Если матрица A размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = \lambda A$ есть матрица того же размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Пример

$$10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 1 & 10 \cdot 2 & 10 \cdot 3 \\ 10 \cdot 4 & 10 \cdot 5 & 10 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

- Транспонированная матрица A^T определена для любой матрицы A. Если матрица A размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = A^T$ есть матрица размера $n \times m$ и
$$c_{ij} = a_{ji}.$$

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Произведение λA числа λ на матрицу A определено всегда. Если матрица A размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = \lambda A$ есть матрица того же размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Пример

$$10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 1 & 10 \cdot 2 & 10 \cdot 3 \\ 10 \cdot 4 & 10 \cdot 5 & 10 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

- Транспонированная матрица A^T определена для любой матрицы A. Если матрица A размера $m \times n$, то матрица $(c_{ij}) = A^T$ есть матрица размера $n \times m$ и
$$c_{ij} = a_{ji}.$$

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матричное умножение

Матричное умножение

- Произведение AB определено тогда и только тогда, когда длина строки (число столбцов) матрицы A совпадает с высотой столбца (числом строк) матрицы B. Если матрица A размера $m \times k$, а матрица B размера $k \times n$, то матрица $(c_{ij}) = AB$ есть матрица размера $m \times n$ и
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}.$$

Матричное умножение

- Произведение AB определено тогда и только тогда, когда длина строки (число столбцов) матрицы A совпадает с высотой столбца (числом строк) матрицы B. Если матрица A размера $m \times k$, а матрица B размера $k \times n$, то матрица $(c_{ij}) = AB$ есть матрица размера $m \times n$ и

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}.$$

Пример

Матричное умножение

- Произведение AB определено тогда и только тогда, когда длина строки (число столбцов) матрицы A совпадает с высотой столбца (числом строк) матрицы B. Если матрица A размера $m \times k$, а матрица B размера $k \times n$, то матрица $(c_{ij}) = AB$ есть матрица размера $m \times n$ и

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}.$$

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} =$$

Матричное умножение

- Произведение AB определено тогда и только тогда, когда длина строки (число столбцов) матрицы A совпадает с высотой столбца (числом строк) матрицы B. Если матрица A размера $m \times k$, а матрица B размера $k \times n$, то матрица $(c_{ij}) = AB$ есть матрица размера $m \times n$ и

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}.$$

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 10 & 1\cdot 8 + 2\cdot 11 & 1\cdot 9 + 2\cdot 12 \\ 3\cdot 7 + 4\cdot 10 & 3\cdot 8 + 4\cdot 11 & 3\cdot 9 + 4\cdot 12 \\ 5\cdot 7 + 6\cdot 10 & 5\cdot 8 + 6\cdot 11 & 5\cdot 9 + 6\cdot 12 \end{pmatrix} =$$

Матричное умножение

- Произведение AB определено тогда и только тогда, когда длина строки (число столбцов) матрицы A совпадает с высотой столбца (числом строк) матрицы B. Если матрица A размера $m \times k$, а матрица B размера $k \times n$, то матрица $(c_{ij}) = AB$ есть матрица размера $m \times n$ и

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}.$$

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 10 & 1\cdot 8 + 2\cdot 11 & 1\cdot 9 + 2\cdot 12 \\ 3\cdot 7 + 4\cdot 10 & 3\cdot 8 + 4\cdot 11 & 3\cdot 9 + 4\cdot 12 \\ 5\cdot 7 + 6\cdot 10 & 5\cdot 8 + 6\cdot 11 & 5\cdot 9 + 6\cdot 12 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 27 & 30 & 33 \\ 61 & 68 & 75 \\ 95 & 106 & 117 \end{pmatrix}.$$

Мотивация

Мотивация

Пусть f есть линейная функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, т.е.

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Мотивация

Пусть f есть линейная функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, т.е.

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$

Мотивация

Пусть f есть линейная функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, т.е.

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Тогда

$$A_f \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Мотивация

Пусть f есть линейная функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, т.е.

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Тогда

$$A_f \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

и, значит,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A_f \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пример

Пример

Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ действует по формуле

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 5y \end{pmatrix}$$

(элементы $\mathbb{R}^2$ записаны в столбик).

Пример

Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ действует по формуле

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 5y \end{pmatrix}$$

(элементы $\mathbb{R}^2$ записаны в столбик).

Ей можно сопоставить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пример

Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ действует по формуле

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 5y \end{pmatrix}$$

(элементы $\mathbb{R}^2$ записаны в столбик).

Ей можно сопоставить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Теперь действие этой функции можно описать с помощью матричного умножения:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Пример

Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ действует по формуле

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 5y \end{pmatrix}$$

(элементы $\mathbb{R}^2$ записаны в столбик).

Ей можно сопоставить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Теперь действие этой функции можно описать с помощью матричного умножения:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Совсем кратко формулу для этой функции можно записать так:

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}.$$

Формула имеет такой же вид, как формула $f(x) = ax$, которая описывает обычную линейную функцию одной переменной.

Пусть теперь f есть линейная функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$, а g есть линейная функция из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m.$$

Пусть теперь f есть линейная функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$, а g есть линейная функция из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$:
$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m.$$

В этом случае определена **композиция** $g \circ f$ функций g и f, которая действует по формуле
$$g \circ f(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})).$$

Пусть теперь f есть линейная функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$, а g есть линейная функция из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m.$$

В этом случае определена **композиция** $g \circ f$ функций g и f, которая действует по формуле

$$g \circ f(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})).$$

Можно показать, что композиция $g \circ f$ есть линейная функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, причем

$$A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f,$$

Пусть теперь f есть линейная функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$, а g есть линейная функция из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m.$$

В этом случае определена **композиция** $g \circ f$ функций g и f, которая действует по формуле

$$g \circ f(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})).$$

Можно показать, что композиция $g \circ f$ есть линейная функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, причем

$$A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f,$$

иначе говоря,

$$g\left(f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = (A_g \cdot A_f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пример

Пример

Пусть даны линейные функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2,$$

заданные матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример

Пусть даны линейные функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2,$$

заданные матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем значение функции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Пример

Пусть даны линейные функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2,$$

заданные матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем значение функции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Это можно сделать непосредственно:

Пример

Пусть даны линейные функции $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2,$$

заданные матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем значение функции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Это можно сделать непосредственно:

1. $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

Пример

Пусть даны линейные функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2,$$

заданные матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем значение функции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Это можно сделать непосредственно:

1. $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

Пример

Пусть даны линейные функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2,$$

заданные матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем значение функции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Это можно сделать непосредственно:

1. $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} =$

Пример

Пусть даны линейные функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2,$$

заданные матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем значение функции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Это можно сделать непосредственно:

1. $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$

Пример

Пусть даны линейные функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2,$$

заданные матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем значение функции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Это можно сделать непосредственно:

1. $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$

2. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$

Пример

Пусть даны линейные функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2,$$

заданные матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем значение функции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Это можно сделать непосредственно:

1. $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$
2. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} =$

Пример

Пусть даны линейные функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2,$$

заданные матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем значение функции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Это можно сделать непосредственно:

1. $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$
2. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} =$

Пример

Пусть даны линейные функции $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ и $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2,$$

заданные матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем значение функции $g\circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Это можно сделать непосредственно:

1. $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 1 \\ 3\cdot 1+4\cdot 1 \\ 5\cdot 1+6\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$
2. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} =$

   $\begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 7+3\cdot 11 \\ 4\cdot 3+5\cdot 7+6\cdot 11 \end{pmatrix} =$

Пример

Пусть даны линейные функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2,$$

заданные матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем значение функции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Это можно сделать непосредственно:

1. $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$
2. $g\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} =$
   $\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 11 \\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 113 \end{pmatrix}.$

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

$$A_{g \circ f} =$$

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

$$A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f =$$

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

$$A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

$$A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

$$A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix},$$

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

$$A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix},$$

а затем уже найти значение композиции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

$$A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix},$$

а затем уже найти значение композиции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$g \circ f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

$$A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix},$$

а затем уже найти значение композиции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$g \circ f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{g\circ f} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

$$A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix},$$

а затем уже найти значение композиции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$g \circ f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{g\circ f} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

$$A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix},$$

а затем уже найти значение композиции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$g \circ f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{g\circ f} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22\cdot 1 + 28\cdot 1 \\ 49\cdot 1 + 64\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

$$A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix},$$

а затем уже найти значение композиции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$g \circ f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{g\circ f} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22\cdot 1 + 28\cdot 1 \\ 49\cdot 1 + 64\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 113 \end{pmatrix}.$$

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

$$A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix},$$

а затем уже найти значение композиции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$g \circ f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{g\circ f} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22\cdot 1 + 28\cdot 1 \\ 49\cdot 1 + 64\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 113 \end{pmatrix}.$$

Получился тот же результат!

Но можно вначале вычислить матрицу композиции $g \circ f$:

$$A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix},$$

а затем уже найти значение композиции $g \circ f$ на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$g \circ f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{g\circ f} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22\cdot 1 + 28\cdot 1 \\ 49\cdot 1 + 64\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 113 \end{pmatrix}.$$

Получился тот же результат!

Замечание

Последний способ может оказаться удобнее, если задачу вычисления $g(f(\boldsymbol{x}))$ надо решать не для одного фиксированного вектора $\boldsymbol{x}$, а для многих: лучше сразу найти $A_{g\circ f}$ и далее выполнять более простые вычисления.

Основные свойства умножения матриц

Основные свойства умножения матриц

- $A(BC) = (AB)C$.

Основные свойства умножения матриц

- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)A = BA + CA$.

Основные свойства умножения матриц

- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.
- $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.

Основные свойства умножения матриц

- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.
- $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.
- Если $A \in M_{mn}$ – произвольная матрица, а $E_m \in M_{mm}$ и $E_n \in M_{nn}$ – *единичные* матрицы, то

$$E_m A = AE_n = A.$$

Основные свойства умножения матриц

- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.
- $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.
- Если $A \in M_{mn}$ – произвольная матрица, а $E_m \in M_{mm}$ и $E_n \in M_{nn}$ – *единичные* матрицы, то

$$E_m A = AE_n = A.$$

(Вот почему такие матрицы называются единичными!)

Основные свойства умножения матриц

- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.
- $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.
- Если $A \in M_{mn}$ – произвольная матрица, а $E_m \in M_{mm}$ и $E_n \in M_{nn}$ – *единичные* матрицы, то
$$E_m A = AE_n = A.$$
(Вот почему такие матрицы называются единичными!)
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Основные свойства умножения матриц

- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.
- $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.
- Если $A \in M_{mn}$ – произвольная матрица, а $E_m \in M_{mm}$ и $E_n \in M_{nn}$ – *единичные* матрицы, то

  $$E_m A = AE_n = A.$$

  (Вот почему такие матрицы называются единичными!)
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- Вообще говоря, $AB \neq BA$.

Основные свойства умножения матриц

- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.
- $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.
- Если $A \in M_{mn}$ – произвольная матрица, а $E_m \in M_{mm}$ и $E_n \in M_{nn}$ – *единичные* матрицы, то

  $$E_m A = AE_n = A.$$

  (Вот почему такие матрицы называются единичными!)
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- Вообще говоря, $AB \neq BA$.

Пример

Основные свойства умножения матриц

- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.
- $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.
- Если $A \in M_{mn}$ – произвольная матрица, а $E_m \in M_{mm}$ и $E_n \in M_{nn}$ – *единичные* матрицы, то

$$E_m A = A E_n = A.$$

  (Вот почему такие матрицы называются единичными!)
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- Вообще говоря, $AB \neq BA$.

Пример

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Основные свойства умножения матриц

- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.
- $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.
- Если $A \in M_{mn}$ – произвольная матрица, а $E_m \in M_{mm}$ и $E_n \in M_{nn}$ – *единичные* матрицы, то
$$E_m A = AE_n = A.$$
(Вот почему такие матрицы называются единичными!)
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- Вообще говоря, $AB \neq BA$.

Пример

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Экономический пример

Экономический пример

- Пусть предприятие производит n видов продукции $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, используя m видов сырья (ресурсов) $C_1, C_2, \ldots, C_m$, причем на единицу продукции Π_i расходуется a_{ij} сырья C_j $(1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m)$.

Экономический пример

- Пусть предприятие производит n видов продукции $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, используя m видов сырья (ресурсов) $C_1, C_2, \ldots, C_m$, причем на единицу продукции Π_i расходуется a_{ij} сырья C_j $(1 \leqslant i \leqslant n,$ $1 \leqslant j \leqslant m)$.

  Значит, если предприятие произвело y_1 единиц продукции Π_1, y_2 единиц продукции Π_2, ..., y_n единиц продукции Π_n, то общие расходы x_j сырья C_j составят

$$x_j = a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{nj}y_n.$$

Экономический пример

- Пусть предприятие производит n видов продукции $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, используя m видов сырья (ресурсов) $C_1, C_2, \ldots, C_m$, причем на единицу продукции Π_i расходуется a_{ij} сырья C_j $(1 \leqslant i \leqslant n,$ $1 \leqslant j \leqslant m)$.

  Значит, если предприятие произвело y_1 единиц продукции Π_1, y_2 единиц продукции Π_2, ..., y_n единиц продукции Π_n, то общие расходы x_j сырья C_j составят

$$x_j = a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{nj}y_n.$$

  Эти формулы можно объединить в одну:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix},$$

  где $A = (a_{ij})$.

- Пусть другое предприятие производит k видов продукции $\Pi_1', \Pi_2', \ldots, \Pi_k'$, используя для производства продукцию первого предприятия, причем на единицу продукции Π_l' оно расходует b_{li} продукции Π_i первого предприятия ($1 \leqslant l \leqslant k$, $1 \leqslant i \leqslant n$).

- Пусть другое предприятие производит k видов продукции $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_k$, используя для производства продукцию первого предприятия, причем на единицу продукции Π'_l оно расходует b_{li} продукции Π_i первого предприятия ($1 \leqslant l \leqslant k$, $1 \leqslant i \leqslant n$). Рассуждая аналогично, мы можем производственную деятельность второго предприятия промоделировать формулой

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_k \end{pmatrix},$$

где z_l ($1 \leqslant l \leqslant k$) есть количество произведенных единиц продукции Π'_l, y_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) есть количество использованной продукции Π_i первого предприятия, а $B = (b_{li})$.

- Пусть другое предприятие производит k видов продукции $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_k$, используя для производства продукцию первого предприятия, причем на единицу продукции Π'_l оно расходует b_{li} продукции Π_i первого предприятия $(1 \leqslant l \leqslant k,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$. Рассуждая аналогично, мы можем производственную деятельность второго предприятия промоделировать формулой

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_k \end{pmatrix},$$

  где z_l $(1 \leqslant l \leqslant k)$ есть количество произведенных единиц продукции Π'_l, y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ есть количество использованной продукции Π_i первого предприятия, а $B = (b_{li})$.
- Если мы хотим рассмотреть оба предприятия как единый производственный цикл, мы приходим к модели:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} = \left(A^T B^T\right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_k \end{pmatrix}.$$

- Пусть другое предприятие производит k видов продукции $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_k$, используя для производства продукцию первого предприятия, причем на единицу продукции Π'_l оно расходует b_{li} продукции Π_i первого предприятия ($1 \leqslant l \leqslant k$, $1 \leqslant i \leqslant n$). Рассуждая аналогично, мы можем производственную деятельность второго предприятия промоделировать формулой
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_k \end{pmatrix},$$
где z_l ($1 \leqslant l \leqslant k$) есть количество произведенных единиц продукции Π'_l, y_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) есть количество использованной продукции Π_i первого предприятия, а $B = (b_{li})$.
- Если мы хотим рассмотреть оба предприятия как единый производственный цикл, мы приходим к модели:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} = \left(A^T B^T\right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_k \end{pmatrix}.$$
Матрица $A^T B^T = (BA)^T$ выражает линейную зависмость между производственным планом выпуска конечной продукции и необходимыми для этого запасами ресурсов.

Экономический пример: модель Леонтьева

Экономический пример: модель Леонтьева

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики: n отраслей/фабрик производят и потребляют/инвестируют n продуктов (каждая отрасль экономики производит только один продукт); производственный процесс есть преобразование на одной фабрике нескольких типов продуктов в один результат. Ряд продуктов не полностью или вовсе не участвуют в производственных процессах — их выпуск предназначен для конечного потребления.

Экономический пример: модель Леонтьева

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики: n отраслей/фабрик производят и потребляют/инвестируют n продуктов (каждая отрасль экономики производит только один продукт); производственный процесс есть преобразование на одной фабрике нескольких типов продуктов в один результат. Ряд продуктов не полностью или вовсе не участвуют в производственных процессах — их выпуск предназначен для конечного потребления.

- x_i – совокупный выпуск i-ой отрасли, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – вектор (столбец) совокупных выпусков всех отраслей;

Экономический пример: модель Леонтьева

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики: n отраслей/фабрик производят и потребляют/инвестируют n продуктов (каждая отрасль экономики производит только один продукт); производственный процесс есть преобразование на одной фабрике нескольких типов продуктов в один результат. Ряд продуктов не полностью или вовсе не участвуют в производственных процессах — их выпуск предназначен для конечного потребления.

- x_i – совокупный выпуск i-ой отрасли, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – вектор (столбец) совокупных выпусков всех отраслей;
- y_i – конечный (для потребления) выпуск i-ой отрасли, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ – вектор (столбец) конечных выпусков всех отраслей;

Экономический пример: модель Леонтьева

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики: n отраслей/фабрик производят и потребляют/инвестируют n продуктов (каждая отрасль экономики производит только один продукт); производственный процесс есть преобразование на одной фабрике нескольких типов продуктов в один результат. Ряд продуктов не полностью или вовсе не участвуют в производственных процессах — их выпуск предназначен для конечного потребления.

- x_i – совокупный выпуск i-ой отрасли, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор (столбец) совокупных выпусков всех отраслей;
- y_i – конечный (для потребления) выпуск i-ой отрасли, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ – вектор (столбец) конечных выпусков всех отраслей;
- a_{ij} – необходимый объем продукции i-ой отрасли для производства единицы продукции j-й отрасли; $A = (a_{ij})$ – матрица технологических коэффициентов (матрица Леоньева).

Экономический пример: модель Леонтьева

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики: n отраслей/фабрик производят и потребляют/инвестируют n продуктов (каждая отрасль экономики производит только один продукт); производственный процесс есть преобразование на одной фабрике нескольких типов продуктов в один результат. Ряд продуктов не полностью или вовсе не участвуют в производственных процессах — их выпуск предназначен для конечного потребления.

- x_i – совокупный выпуск i-ой отрасли, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – вектор (столбец) совокупных выпусков всех отраслей;
- y_i – конечный (для потребления) выпуск i-ой отрасли, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ – вектор (столбец) конечных выпусков всех отраслей;
- a_{ij} – необходимый объем продукции i-ой отрасли для производства единицы продукции j-й отрасли; $A = (a_{ij})$ – матрица технологических коэффициентов (матрица Леоньева).

Тогда

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + y_i.$$

Экономический пример: модель Леонтьева

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики: n отраслей/фабрик производят и потребляют/инвестируют n продуктов (каждая отрасль экономики производит только один продукт); производственный процесс есть преобразование на одной фабрике нескольких типов продуктов в один результат. Ряд продуктов не полностью или вовсе не участвуют в производственных процессах — их выпуск предназначен для конечного потребления.

- x_i – совокупный выпуск i-ой отрасли, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – вектор (столбец) совокупных выпусков всех отраслей;
- y_i – конечный (для потребления) выпуск i-ой отрасли, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ – вектор (столбец) конечных выпусков всех отраслей;
- a_{ij} – необходимый объем продукции i-ой отрасли для производства единицы продукции j-й отрасли; $A = (a_{ij})$ – матрица технологических коэффициентов (матрица Леоньева).

Тогда

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + y_i.$$

В матричном виде: $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ или

$$\boldsymbol{y} = (E - A)\boldsymbol{x},$$

где E – единичная матрица $n \times n$.

Особые случаи произведения матриц

Особые случаи произведения матриц

- **Произведение диагональных матриц.**

Особые случаи произведения матриц

- **Произведение диагональных матриц.**

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

- **Произведение блочно-диагональных матриц** $(A_i, B_i \in M_{k_i k_i})$.

- **Произведение блочно-диагональных матриц** $(A_i, B_i \in M_{k_i k_i})$.

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_1 B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 B_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 B_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n B_n \end{pmatrix}$$

- **Произведение блочно-диагональных матриц** $(A_i, B_i \in M_{k_i k_i})$.

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3B_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_nB_n \end{pmatrix}$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 34 & 0 & 0 \\ 71 & 78 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 155 & 166 \\ 0 & 0 & 211 & 226 \end{pmatrix}$$

- Произведение «Жордановых клеток» одного размера.

- **Произведение «Жордановых клеток» одного размера.**

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} xy & x+y & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & xy & x+y & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & xy & x+y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & xy & x+y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & xy \end{pmatrix}$$

- **Произведение «Жордановых клеток» одного размера.**

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} xy & x+y & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & xy & x+y & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & xy & x+y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & xy & x+y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & xy \end{pmatrix}$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Произведение «матриц поворота».**

- **Произведение «матриц поворота».**

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} =$$

- **Произведение «матриц поворота».**

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cdot\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\cdot\sin\psi - \sin\varphi\cdot\cos\psi \\ \sin\varphi\cdot\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\cdot\sin\psi + \cos\varphi\cdot\sin\psi \end{pmatrix} =$$

- Произведение «матриц поворота».

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cdot\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\cdot\sin\psi - \sin\varphi\cdot\cos\psi \\ \sin\varphi\cdot\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\cdot\sin\psi + \cos\varphi\cdot\sin\psi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$$

- **Произведение «матриц поворота».**

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cdot\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\cdot\sin\psi - \sin\varphi\cdot\cos\psi \\ \sin\varphi\cdot\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\cdot\sin\psi + \cos\varphi\cdot\sin\psi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$$

Замечание. Каждую матрицу вида $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ можно записать «в тригонометрической форме»:

$$A = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Поэтому такие матрицы можно умножеть друг на друга, используя формулы выше.

- **Произведение «матриц поворота».**

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cdot\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\cdot\sin\psi - \sin\varphi\cdot\cos\psi \\ \sin\varphi\cdot\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\cdot\sin\psi + \cos\varphi\cdot\sin\psi \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$$

Замечание. Каждую матрицу вида $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ можно записать «в тригонометрической форме»:

$$A = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Поэтому такие матрицы можно умножить друг на друга, используя формулы выше.

Эти матрицы образуют **матричную модель комплексных чисел:**

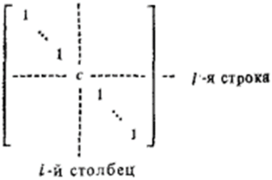
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \sim a + ib.$$

Произведение матриц и элементарные операции

Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \leftrightarrows A_j$ (перестановка i-ой и j-ой строки), то $B = P_{ij}A$, где P_{ij} есть матрица следующего вида: см. рис. справа.

Произведение матриц и элементарные операции

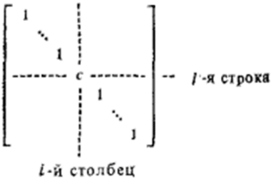
Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \leftrightarrows A_j$ (перестановка i-ой и j-ой строки), то $B = P_{ij}A$, где P_{ij} есть матрица следующего вида: см. рис. справа.



Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \to cA_i$ (умножение i-ой строки на число c), то $B = Q_i(c)A$, где $Q_i(c)$ есть матрица следующего вида: см. рис. слева.

Произведение матриц и элементарные операции

Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \leftrightarrows A_j$ (перестановка i-ой и j-ой строки), то $B = P_{ij}A$, где P_{ij} есть матрица следующего вида: см. рис. справа.



Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \to cA_i$ (умножение i-ой строки на число c), то $B = Q_i(c)A$, где $Q_i(c)$ есть матрица следующего вида: см. рис. слева.

Если матрица B получена из матрицы A с помощью операции $A_i \to A_i + cA_j$, $i \neq j$ (замена i-ой строки сумму i-ой строки и j-ой строки, где $j \neq i$, умноженной на число c), то $B = R_{ij}(c)A$, где $R_{ij}(c)$ есть матрица следующего вида: см. рис. справа.

Следствие (1)

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований, то $B = TA$ для некоторой матрицы T. При этом существует матрица T^{-1} (обратных преобразований), для которой $A = T^{-1}B$.

Следствие (1)

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований, то $B = TA$ для некоторой матрицы T. При этом существует матрица T^{-1} (обратных преобразований), для которой $A = T^{-1}B$.

Следствие (2)

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований и некоторая линейная комбинация

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n$$

ее столбцов равна нулевому вектору, то соответствующая линейная комбинация

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_n B_n$$

столбцов матрицы B тоже равна нулевому вектору.

Следствие (1)

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований, то $B = TA$ для некоторой матрицы T. При этом существует матрица T^{-1} (обратных преобразований), для которой $A = T^{-1}B$.

Следствие (2)

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований и некоторая линейная комбинация

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n$$

ее столбцов равна нулевому вектору, то соответствующая линейная комбинация

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_n B_n$$

столбцов матрицы B тоже равна нулевому вектору.

Следствие (3)

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований, то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

Доказательство следствия (1). Из замечания о матрицах элементарных преобразований с использованием ассоциативности произведения матриц:

$$B = T_k(T_{k-1}(\ldots(T_1 \cdot A)\ldots)) = (T_k T_{k-1} \ldots T_1) \cdot A.$$

Доказательство следствия (1). Из замечания о матрицах элементарных преобразований с использованием ассоциативности произведения матриц:

$$B = T_k(T_{k-1}(\ldots(T_1 \cdot A)\ldots)) = (T_k T_{k-1} \ldots T_1) \cdot A.$$

Существование обратной матрицы T^{-1} следует из того, что все элементарные преобразования обратимы (т.е. по преобразованной матрице однозначно устанавливается исходная), причем обратные преобразования это преобразования того же типа (а значит, тоже могут быть представлены как результат умножения на матрицу слева).

Доказательство следствия (1). Из замечания о матрицах элементарных преобразований с использованием ассоциативности произведения матриц:

$$B = T_k(T_{k-1}(\dots(T_1 \cdot A)\dots)) = (T_k T_{k-1} \dots T_1) \cdot A.$$

Существование обратной матрицы T^{-1} следует из того, что все элементарные преобразования обратимы (т.е. по преобразованной матрице однозначно устанавливается исходная), причем обратные преобразования это преобразования того же типа (а значит, тоже могут быть представлены как результат умножения на матрицу слева).

Доказательство следствия (2). По следствию 1, $B = TA$. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – столбцы матрицы A, а $B_1, B_2, \dots, B_n$ – столбцы матрицы B. Значит (см. определение произведения матриц)

$$B_1 = TA_1, \quad B_2 = TA_2, \quad \dots \quad , \quad B_n = TA_n.$$

Доказательство следствия (1). Из замечания о матрицах элементарных преобразований с использованием ассоциативности произведения матриц:

$$B = T_k(T_{k-1}(\dots(T_1 \cdot A)\dots)) = (T_k T_{k-1} \dots T_1) \cdot A.$$

Существование обратной матрицы T^{-1} следует из того, что все элементарные преобразования обратимы (т.е. по преобразованной матрице однозначно устанавливается исходная), причем обратные преобразования это преобразования того же типа (а значит, тоже могут быть представлены как результат умножения на матрицу слева).

Доказательство следствия (2). По следствию 1, $B = TA$. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – столбцы матрицы A, а $B_1, B_2, \dots, B_n$ – столбцы матрицы B. Значит (см. определение произведения матриц)

$$B_1 = TA_1, \quad B_2 = TA_2, \quad \dots \quad , \quad B_n = TA_n.$$

(**Запомните это свойство!**)

Доказательство следствия (1). Из замечания о матрицах элементарных преобразований с использованием ассоциативности произведения матриц:

$$B = T_k(T_{k-1}(\ldots(T_1 \cdot A)\ldots)) = (T_k T_{k-1} \ldots T_1) \cdot A.$$

Существование обратной матрицы T^{-1} следует из того, что все элементарные преобразования обратимы (т.е. по преобразованной матрице однозначно устанавливается исходная), причем обратные преобразования это преобразования того же типа (а значит, тоже могут быть представлены как результат умножения на матрицу слева).

Доказательство следствия (2). По следствию 1, $B = TA$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – столбцы матрицы A, а $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – столбцы матрицы B. Значит (см. определение произведения матриц)

$$B_1 = TA_1, \quad B_2 = TA_2, \quad \ldots \quad , \quad B_n = TA_n.$$

(**Запомните это свойство!**) Тогда

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_n B_n = \lambda_1 T A_1 + \lambda_2 T A_2 + \ldots + \lambda_n T A_n =$$

Доказательство следствия (1). Из замечания о матрицах элементарных преобразований с использованием ассоциативности произведения матриц:

$$B = T_k(T_{k-1}(\dots(T_1 \cdot A)\dots)) = (T_k T_{k-1} \dots T_1) \cdot A.$$

Существование обратной матрицы T^{-1} следует из того, что все элементарные преобразования обратимы (т.е. по преобразованной матрице однозначно устанавливается исходная), причем обратные преобразования это преобразования того же типа (а значит, тоже могут быть представлены как результат умножения на матрицу слева).

Доказательство следствия (2). По следствию 1, $B = TA$. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – столбцы матрицы A, а $B_1, B_2, \dots, B_n$ – столбцы матрицы B. Значит (см. определение произведения матриц)

$$B_1 = TA_1, \quad B_2 = TA_2, \quad \dots \quad , \quad B_n = TA_n.$$

(**Запомните это свойство!**) Тогда

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \dots + \lambda_n B_n = \lambda_1 TA_1 + \lambda_2 TA_2 + \dots + \lambda_n TA_n =$$
$$T \cdot (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n) = T \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Доказательство следствия (1). Из замечания о матрицах элементарных преобразований с использованием ассоциативности произведения матриц:

$$B = T_k(T_{k-1}(\dots(T_1 \cdot A)\dots)) = (T_k T_{k-1} \dots T_1) \cdot A.$$

Существование обратной матрицы T^{-1} следует из того, что все элементарные преобразования обратимы (т.е. по преобразованной матрице однозначно устанавливается исходная), причем обратные преобразования это преобразования того же типа (а значит, тоже могут быть представлены как результат умножения на матрицу слева).

Доказательство следствия (2). По следствию 1, $B = TA$. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – столбцы матрицы A, а $B_1, B_2, \dots, B_n$ – столбцы матрицы B. Значит (см. определение произведения матриц)

$$B_1 = TA_1, \quad B_2 = TA_2, \quad \dots \quad , \quad B_n = TA_n.$$

(**Запомните это свойство!**) Тогда

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_n B_n = \lambda_1 TA_1 + \lambda_2 TA_2 + \ldots + \lambda_n TA_n =$$
$$T \cdot (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n) = T \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Доказательство следствия (3). Из следствий (1) и (2). **Упражнение:** проведите подробное доказательство.

Степени матриц и многочлены от матриц

Степени матриц и многочлены от матриц

Степень матрицы:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}.$$

(при $n > 1$ имеет смысл только для квадратных матриц).

Степени матриц и многочлены от матриц

Степень матрицы:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}.$$

(при $n > 1$ имеет смысл только для квадратных матриц).

Пример:

Степени матриц и многочлены от матриц

Степень матрицы:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}.$$

(при $n > 1$ имеет смысл только для квадратных матриц).

Пример: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}.$

Степени матриц и многочлены от матриц

Степень матрицы:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}.$$

(при $n > 1$ имеет смысл только для квадратных матриц).

Пример: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}.$

Упражнение: почему?

Степени матриц и многочлены от матриц

Степень матрицы:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}.$$

(при $n > 1$ имеет смысл только для квадратных матриц).

Пример: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}.$

Упражнение: почему?

Одна из возможных мотиваций изучения степеней матрицы. Пусть последовательности a_n и b_n заданы простым рекуррентным соотношением, напр.,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{cases}$$

Степени матриц и многочлены от матриц

Степень матрицы:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}.$$

(при $n > 1$ имеет смысл только для квадратных матриц).

Пример: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}.$

Упражнение: почему?

Одна из возможных мотиваций изучения степеней матрицы. Пусть последовательности a_n и b_n заданы простым рекуррентным соотношением, напр.,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Степени матриц и многочлены от матриц

Степень матрицы:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}.$$

(при $n > 1$ имеет смысл только для квадратных матриц).

Пример: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}.$

Упражнение: почему?

Одна из возможных мотиваций изучения степеней матрицы. Пусть последовательности a_n и b_n заданы простым рекуррентным соотношением, напр.,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

Степени матриц и многочлены от матриц

Степень матрицы:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}.$$

(при $n > 1$ имеет смысл только для квадратных матриц).

Пример: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}.$

Упражнение: почему?

Одна из возможных мотиваций изучения степеней матрицы. Пусть последовательности a_n и b_n заданы простым рекуррентным соотношением, напр.,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) =$$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Отсюда следует, что матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 - 2A - 3E = O.$$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Отсюда следует, что матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 - 2A - 3E = O.$$

Замечание 2. Если мы знаем многочлен степени k, *корнем* которого является матрица A, мы можем линейно выразить A^k, а затем и все степени A^t, $t > k$, через младшие степени A.

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Отсюда следует, что матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 - 2A - 3E = O.$$

Замечание 2. Если мы знаем многочлен степени k, *корнем* которого является матрица A, мы можем линейно выразить A^k, а затем и все степени A^t, $t > k$, через младшие степени A.

Пример.

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Отсюда следует, что матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 - 2A - 3E = O.$$

Замечание 2. Если мы знаем многочлен степени k, *корнем* которого является матрица A, мы можем линейно выразить A^k, а затем и все степени A^t, $t > k$, через младшие степени A.

Пример. $A^2 - 2A - 3E = O \Rightarrow A^2 = 2A + 3E.$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Отсюда следует, что матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 - 2A - 3E = O.$$

Замечание 2. Если мы знаем многочлен степени k, *корнем* которого является матрица A, мы можем линейно выразить A^k, а затем и все степени A^t, $t > k$, через младшие степени A.

Пример. $A^2 - 2A - 3E = O \Rightarrow A^2 = 2A + 3E$. Следовательно,

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Отсюда следует, что матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 - 2A - 3E = O.$$

Замечание 2. Если мы знаем многочлен степени k, *корнем* которого является матрица A, мы можем линейно выразить A^k, а затем и все степени A^t, $t > k$, через младшие степени A.

Пример. $A^2 - 2A - 3E = O \Rightarrow A^2 = 2A + 3E$. Следовательно,

$A^3 =$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Отсюда следует, что матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 - 2A - 3E = O.$$

Замечание 2. Если мы знаем многочлен степени k, *корнем* которого является матрица A, мы можем линейно выразить A^k, а затем и все степени A^t, $t > k$, через младшие степени A.

Пример. $A^2 - 2A - 3E = O \Rightarrow A^2 = 2A + 3E$. Следовательно,

$$A^3 = A \cdot A^2 =$$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Отсюда следует, что матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 - 2A - 3E = O.$$

Замечание 2. Если мы знаем многочлен степени k, *корнем* которого является матрица A, мы можем линейно выразить A^k, а затем и все степени A^t, $t > k$, через младшие степени A.

Пример. $A^2 - 2A - 3E = O \Rightarrow A^2 = 2A + 3E$. Следовательно,

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(2A + 3E) =$$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Отсюда следует, что матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 - 2A - 3E = O.$$

Замечание 2. Если мы знаем многочлен степени k, *корнем* которого является матрица A, мы можем линейно выразить A^k, а затем и все степени A^t, $t > k$, через младшие степени A.

Пример. $A^2 - 2A - 3E = O \Rightarrow A^2 = 2A + 3E$. Следовательно,

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(2A + 3E) = 2A^2 + 3A =$$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Отсюда следует, что матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 - 2A - 3E = O.$$

Замечание 2. Если мы знаем многочлен степени k, *корнем* которого является матрица A, мы можем линейно выразить A^k, а затем и все степени A^t, $t > k$, через младшие степени A.

Пример. $A^2 - 2A - 3E = O \Rightarrow A^2 = 2A + 3E$. Следовательно,

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(2A + 3E) = 2A^2 + 3A = 2(2A + 3E) + 3A =$$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Отсюда следует, что матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 - 2A - 3E = O.$$

Замечание 2. Если мы знаем многочлен степени k, *корнем* которого является матрица A, мы можем линейно выразить A^k, а затем и все степени A^t, $t > k$, через младшие степени A.

Пример. $A^2 - 2A - 3E = O \Rightarrow A^2 = 2A + 3E$. Следовательно,

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(2A + 3E) = 2A^2 + 3A = 2(2A + 3E) + 3A = 7A + 6E =$$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Отсюда следует, что матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 - 2A - 3E = O.$$

Замечание 2. Если мы знаем многочлен степени k, *корнем* которого является матрица A, мы можем линейно выразить A^k, а затем и все степени A^t, $t > k$, через младшие степени A.

Пример. $A^2 - 2A - 3E = O \Rightarrow A^2 = 2A + 3E$. Следовательно,

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(2A + 3E) = 2A^2 + 3A = 2(2A + 3E) + 3A = 7A + 6E =$$

$$7\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Если дан многочлен

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и квадратная матрица A, то можно рассмотреть выражение

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E.$$

Пример. Пусть $p(x) = x^2 - 2x - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание 1. Отсюда следует, что матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^2 - 2A - 3E = O.$$

Замечание 2. Если мы знаем многочлен степени k, *корнем* которого является матрица A, мы можем линейно выразить A^k, а затем и все степени A^t, $t > k$, через младшие степени A.

Пример. $A^2 - 2A - 3E = O \Rightarrow A^2 = 2A + 3E$. Следовательно,

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(2A + 3E) = 2A^2 + 3A = 2(2A + 3E) + 3A = 7A + 6E =$$
$$7 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 21 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

- Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г. Линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебник для вузов, 2010.
- Fuad Aleskerov, Hasan Ersel, Dmitri Piontkovski. Linear Algebra for Economists. Springer (2011).