Математический анализ 1.
Направление 38.03.01 Экономика
Семинар 2.5. Дифференцирование – II.

Основные формулы работы с дифференциалами

A. Пусть $u, v : X \to \mathbb{R}$, $X = D(u) = D(v) \subset \mathbb{R}^n$ – функции, дифференцируемые в точке $\mathbf{x} \in X$. Верны следующие формулы для дифференциалов арифметических операций над ними (слева дифференциалы записаны в полном виде, справа – в кратком):

$$d\big(u(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}), d\mathbf{x}\big) = du(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) + dv(\mathbf{x}, d\mathbf{x}), \qquad d(u+v) = du + dv$$
$$d\big(\alpha u(\mathbf{x}), d\mathbf{x}\big) = \alpha\, du(\mathbf{x}, d\mathbf{x}),\ \alpha \in \mathbb{R}, \qquad d(\alpha u) = \alpha\, du,\ \alpha \in \mathbb{R}$$
$$d\big(u(\mathbf{x}) \cdot v(\mathbf{x}), d\mathbf{x}\big) = u(\mathbf{x})\, dv(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) + v(\mathbf{x})\, du(\mathbf{x}, d\mathbf{x}), \qquad d(uv) = u\, dv + v\, du$$
$$d\Big(\frac{u(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})}, d\mathbf{x}\Big) = \frac{v(\mathbf{x})\, du(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})\, dv(\mathbf{x}, d\mathbf{x})}{v^2(\mathbf{x})},\ v(\mathbf{x}) \neq 0, \qquad d\Big(\frac{u}{v}\Big) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}, v \neq 0.$$

B (частный случай общей формулы). Пусть $v : X \to \mathbb{R}$, $X = D(v) \subset \mathbb{R}^n$ – скалярная функция, дифференцируемая в точке $\mathbf{x} \in X$, а $\mathbf{u} : (a, b) = D(\mathbf{u}) \to \mathbb{R}^n$ – вектор-функция одной переменной, дифференцируемая в точке $v(\mathbf{x}) \in (a, b)$. Тогда верна формула для дифференциала их композиции в полной и краткой формах

$$d\big(\mathbf{u}(v(\mathbf{x})), d\mathbf{x}\big) = \mathbf{u}'(v(\mathbf{x}))dv(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \mathbf{u}'(v(\mathbf{x}))(\nabla v(\mathbf{x}), d\mathbf{x}), \quad d\mathbf{u}(v) = \mathbf{u}'(v)(\nabla v, d\mathbf{x}).$$

1. С использованием основных формул работы с дифференциалами выведите указанные ниже формулы:

   (1) $d\big(u(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x}), d\mathbf{x}\big) = du(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) - dv(\mathbf{x}, d\mathbf{x})$;

   (2) Если x и y – независимые переменные, то $d(xy) = x\, dy + y\, dx$;

   (3) Если x – независимая переменная, а $y = y(x)$ – дифференцируемая функция (зависимая переменная), то
   $$d(xy) = (y + xy')\, dx.$$
   Как это соотносится с результатом п. 2?

   Запишите формулу для $d(xy)$ для случая, когда, наоборот, $x = x(y)$ – дифференцируемая функция (зависимая переменная), а y – независимая переменная;

   (4) $d(u^2) = 2u\, du$; (5) $d(u^v) = u^v\big(\frac{v}{u}\, du + \ln u\, dv\big) = vu^{v-1}\, du + u^v \ln u\, dv$ при $u > 0$.

2. С помощью формул для дифференциала произведения и композиции функций выведите формулу для дифференциала частного функций
$$d\Big(\frac{u(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})}, d\mathbf{x}\Big) = \frac{v(\mathbf{x})\, du(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})\, dv(\mathbf{x}, d\mathbf{x})}{v^2(\mathbf{x})},\ v(\mathbf{x}) \neq 0.$$

3. С использованием инвариантности формы первого дифференциала вычислите дифференциалы следующих функций:

   (1) $f(x, y) = 3x^2y + x^2 - y^5$; (2) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, $y \neq 0$;

   (3) $f(x, y) = \sin \dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$, $x \neq -y$; (4) $f(x, y) = x^2 \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$;

   (5) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

4. С использованием инвариантности формы первого дифференциала вычислите дифференциалы следующих функций:

(1) $f(x, y) = x^2y - xy^2 + 3$; (2) $f(x, y) = xy - \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$; (3) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3$;

(4) $f(x, y) = (\sin x)^{\cos y}$, $\sin x > 0$; (5) $f(x, y) = x - 3 \sin y$;

(6) $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$, $x^2 + y > 0$; (7) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$;

(8) $f(x, y) = y\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt{y}}$, $x > 0$, $y > 0$; (9) $f(x, y) = \ln \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$, $\operatorname{tg} \dfrac{y}{x} > 0$;

(10) $f(x, y) = \dfrac{x}{y} e^{xy}$, $y \neq 0$; (11) $f(x, y) = \dfrac{2x + 3y}{x - y}$, $x \neq y$;

(12) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

5. Даны функции $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x - y \end{pmatrix}$ и $\mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу Якоби функции:

(1) $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$; (2) $\mathbf{h}_2 = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ в точке $(1, 2)$.

6. Найдите производную функции $f(x) = (\ln x)^{\sin x}$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$, представив функцию f в виде композиции $g \circ \mathbf{h}$ функций $g(x, y) = x^y$ и $\mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} \ln x \\ \sin x \end{pmatrix}$ и применив теорему о производной композиции.

7. Найдите скорость и направление максимального роста функции f в точке $A(1, 3)$:

(1) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$; (2) $f(x, y) = x^2 - 4xy + 2y^2$.

8. Найдите производную функции f в точке $\mathbf{x} = (x, y, z)$ по направлению вектора $\mathbf{v}$, если известно, что вектор $\mathbf{v}$ образует угол $\frac{\pi}{3}$ с $\nabla f(x, y, z)$ в точке $\mathbf{x}$:

(1) $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3xz$, $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$; (2) $f(x, y, z) = xyz$, $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$.

9. Докажите, что если $f : X \to \mathbb{R}$, $X = D(f) \subset \mathbb{R}^n$ – скалярная функция, дифференцируемая в точке $\mathbf{x}$, $n \geqslant 2$, то выполнено одно из двух свойств: либо $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$, либо существует направление $\mathbf{e}$ такое, что $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{x}) = 0$.

10. Найдите эластичности функции f по переменным x и y в точке A:

(1) $f(x, y) = e^{-x-y}(x^2 + 2y^2)$, $A(1, 2)$; (2) $f(x, y) = \dfrac{e^{-3x}(3x + y)}{x + y}$, $A(1, 1)$.

11. По оценкам производителя годовое производство на определенном предприятии составляет

$$Q(K, L) = 30K^{0.3}L^{0.7}$$

единиц, где K – вложения капитала (в тыс. у.е.), а L – размер рабочей силы (в трудочасах). Пусть текущие вложения капитала составляют 630 000 у.е., а размер рабочей силы – 830 часов. В целях более быстрого ускорения производства производителю следует предпочесть увеличение на 1 единицу количества капитала или количества труда?

Указание. Найдите наибольшую из частных производных в соответствующей точке.

12. Годовое производство определенной страны составляет

$$Q(K, L) = 150(0.4K^{-1/2} + 0.6L^{-1/2})^{-2}$$

единиц, где K – расходы капитала (в млн. у.е.), а L – размер рабочей силы (в тыс. трудочасов). Пусть текущие расходы капитала составляют 5.041 млрд. у.е. и используется 4900000 трудочасов. Чтобы как можно быстрее увеличить производство, парламенту страны следует поощрить дополнительные расходы капитала или дополнительную занятость населения?

Указание. Найдите наибольшую из частных производных в соответствующей точке.

13. Используя x часов квалифицированного труда и y часов неквалифицированного труда, производитель может изготовлять $Q(x, y) = 10xy^{1/2}$ единиц подукта. На текущий момент используется 30 часов квалифицированного труда и 36 часов неквалифицированного труда. С помощью математического анализа оцените, какой эффект на производство окажет решение производителя сократить уровень квалифицированного труда на 3 часа и увеличить уровень неквалифицированного труда на 5 часов.

Указание: Найдите $dQ(x, y, dx, dy)$ на заданных приращениях.

14. Петр является инвестором, который получает $U(x, y)$ единиц полезности от владения x лотами акций и y лотами облигаций, где $U(x, y) = (2x + 3)(y + 5)$. На текущий момент он владеет $x = 27$ лотами акций и $y = 12$ лотами облигаций. С помощью математического анализа оцените:

(1) насколько изменится полезность его портфеля, если он купит 3 лота акций и продаст 2 лота облигаций;

(2) сколько лотов облигаций Петр может обменять на 1 лот акций так, чтобы полезность его портфеля не изменилась.

Указание. В п. 1 необходимо найти $dU(x, y, dx, dy)$ на заданных приращениях, а в п. 2 необходимо решить уравнение $dU(x, y, dx, dy) = 0$ с одним неизвестным dy.