Математический анализ 1. Лекция 7. Производная и дифференциал.

25 сентября 2023 г.

Производная и дифференциал

Фундаментальные определения. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0.

1. Ее **производной** в точке x_0 называется число

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(сделана замена $h = x - x_0$), если этот предел существует.

2. Говорят, что f **дифференцируема** в точке x_0, если для приращения ее значения в этой точке при некотором A верна формула

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h) \text{ при } h \to 0.$$

Величина $df(x_0, h) = Ah$ – это **дифференциал** функции f в точке x_0.
В противном случае говорят, что f **не дифференцируема** в точке x_0.

Интуитивный смысл: производная функции f в точке x_0 – это мгновенная скорость изменения функции f в точке x_0. Здесь слово "скорость" понимается в самом широком смысле слова.
Так, если (производственная) функция $f(L)$ выражает объем производства в зависимости от труда L, то $f'(L)$ есть ... *предельная производительность труда* (Marginal product of labor, $\mathrm{MP_L}$).

Производной (функцией) функции f называют функцию $f'(x)$, определенную во всех точках $x \in D(f)$, где функция f имеет производную.

Примеры. 1. Найдем по определению производную функции $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x.$$

2. Функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке 0:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sgn} h \quad \text{не существует.}$$

Теорема. Функция f имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда она дифференцируема в точке x_0. При этом $A = f'(x_0)$, т.е. $df(x_0, h) = f'(x_0)h$.

Доказательство. Существует $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \;\Leftrightarrow$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1) \text{ при } h \to 0.$$

Умножим на h и преобразуем

$$f(x_0+h) - f(x_0) = (f'(x_0) + o(1))h = f'(x_0)h + o(h),$$

значит, существование $f'(x_0)$ эквивалентно формуле

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \text{ при } h \to 0.$$

В формуле для приращения A определяется однозначно: если $f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+o(h)$ и $f(x_0+h)=f(x_0)+Bh+o(h)$ при $h\to 0$, то

$$0=(A-B)h+o(h) \;\Rightarrow\; A-B=o(1) \;\Rightarrow\; A-B=0.$$

Следствие. Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.
В самом деле, $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h)=f(x_0)+o(1)$ при $h\to 0$.

Обратное неверно (*контрпример*): функция $f(x)=|x|$ непрерывна в 0, но $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\operatorname{sgn} h$ не существует.

В конце XIX века К. Вейерштрасс впервые построил пример функции f, которая определена и непрерывна на всем множестве $\mathbb{R}$, но не дифференцируема **ни в одной точке** $x\in\mathbb{R}$.

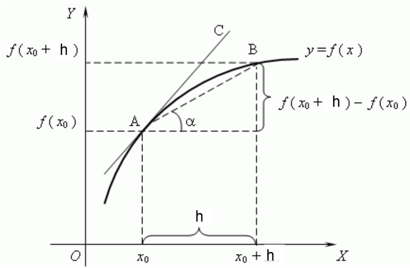
Обычно пишут короче: $df(x_0)=df(x_0,h)$. Поскольку $x+h-x=h$, то в простейшем случае $f(x)=x$ дифференциал dx не зависит от x_0 и равен h. Поэтому дифференциал часто записывают в виде $df(x_0)=f'(x_0)dx$. Предположив, что $dx\neq 0$, получим формулу для производной $f'(x_0)=\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

В случае функций одной переменной понятие производной является главным, а понятие дифференциала играет второстепенную роль. Однако в случае функций нескольких переменных ситуация резко меняется.

Геометрический смысл производной

Производная функции f в точке x_0 – это предельное значение тангенса угла наклона секущей к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ при $h \to 0$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Иначе говоря, производная функции f в точке x_0 – это тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Уравнение касательной к графику функции f в точке x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ или } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Производные основных элементарных функций

1. $C' = 0$. Это очевидно: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{C-C}{h} = 0$. Верно ли в каком-то смысле обратное – на лекции 8.
2. $|x|' = \operatorname{sgn} x$ при $x \neq 0$.
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$ при любом x для $n \in \mathbb{N}$.
   $(x^n)' = nx^{n-1}$ при любом $x \neq 0$ для $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$.
   $(x^a)' = ax^{a-1}$ при $x > 0$ для вещественного a.
   Случай рационального a несколькл отличается.
   Например, для вещественного a по определению
   $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^a\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^a - 1\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^a \cdot \frac{ah}{x}}{h} = ax^{a-1}.$$
4. $(a^x)' = (\ln a)a^x$ при $a > 0$. По определению
   $$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x\left(a^h - 1\right)}{h} = a^x \ln a.$$
4. $(\sin x)' = \cos x$. По определению
   $$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sin x)\cos h + (\cos x)\sin h - \sin x}{h} =$$
   $$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sin x)(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} (\cos x)\frac{\sin h}{h} = \cos x.$$
5. $(\cos x)' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$.

6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ при $x > 0$ и $a > 0, a \neq 1$. *Доказательство* ниже.

Полезные частные случаи:

$$(x^2)' = 2x, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ при } x > 0, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \text{ при } x \neq 0,$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ при } x > 0.$$

Правила вычисления производных

Пусть существуют $f'(x)$ и $g'(x)$ в некоторой точке x. Тогда верны следующие три свойства:

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ и $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ (производные суммы и разности функций).

   Доказательство. Например, в случае суммы функций имеем
   $$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} =$$
   $$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

2. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (производная произведения функций).

   Доказательство. $(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$
   $$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x)+f'(x)h+o(h))(g(x)+g'(x)h+o(h)) - f(x)g(x)}{h} =$$
   $$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x)g'(x)+f'(x)g(x))h + o(h)}{h} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Правила 1 и 2 легко обобщаются на любое количество функций.

3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ при $g(x) \neq 0$ (производная частного функций).

Доказательство. Во-первых, существует

$\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = -\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h)g(x)h} = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}.$

Во-вторых, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \left(f\dfrac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\dfrac{1}{g(x)} + f(x)\Big(-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}\Big) =$

$= \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$

Пример. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Соответствующие правила действий над дифференциалами

$$d(f+g) = df + dg, \;\; d(f-g) = df - dg, \;\; d(fg) = g\,df + f\,dg, \;\; d\Big(\frac{f}{g}\Big) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}.$$

Здесь аргумент x опущен в левой и правой части формул.

Верны следующие свойства *производных композиции и обратной функции.*

4. Пусть существуют производные $f'(x)$ и $\varphi'(t)$, где $x = \varphi(t)$. Тогда $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \;\Leftrightarrow\; (f(\varphi(t)))' = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.
   Доказательство. При $h \to 0$ имеем:
   $f(\varphi(t+h)) = f(\varphi(t) + \varphi'(t)h + o(h)) =$
   $= f(\varphi(t)) + f'(\varphi(t))(\varphi'(t)h + o(h)) + o(\varphi'(t)h + o(h)) =$
   $= f(\varphi(t)) + f'(\varphi(t))\varphi'(t)h + o(h)$. Значит, $(f(\varphi(t)))' = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

Следствие. Производная любой элементарной функции есть элементарная функция.

Следствие (инвариантность формы 1-го дифференциала). Формула

$$df(x) = f'(x)dx$$

верна как в случае, когда x – независимая переменная, так и в случае, когда $x = \varphi(t)$ – дифференцируемая функция t, т.к. тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и

$$d(f(\varphi(t)) = f'(\varphi(t))dx(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

.

Примеры

- $(\sin(\cos x))' = \sin'(\cos x) \cdot (\cos x)' = -\cos(\cos x) \cdot \sin x.$

- Правило вычисления производной композиции функций легко применять многократно, например, при $x > 0$ имеем

$$(\sin(\sin(\ln x))' = \sin'(\sin(\ln x))) \cdot (\sin(\ln x)))' =$$

$$= \sin'(\sin(\ln x)) \cdot \sin'(\ln x) \cdot (\ln x)' = \cos(\sin(\ln x)) \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}.$$

- Пусть $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$. Найдите $f'(x)$. Здесь важно правильно представить функцию $f(x)$ в виде композиции:

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3 \quad \text{или} \quad f(x) = f_1(f_2(f_3(x))),$$

где $f_1 = e^x$, $f_2 = \sqrt{x}$, $f_3 = x^2 + 1$. Значит,

$$f'(x) = f_1'(f_2(f_3(x))) \cdot f_2'(f_3(x)) \cdot f_3'(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x.$$

5. Если $(f \circ f^{(-1)})(x) \equiv x$ и f дифференцируема в точке $y = f^{(-1)}(x)$, $f'(y) \neq 0$, то существует $(f^{(-1)})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{(-1)}(x))}$ (производная обратной функции).

Доказательство. Выведем только формулу для производной обратной функции. Дифференцируем тождество $(f \circ f^{(-1)})(x) \equiv x$:

$$f'(f^{(-1)}(x)) \cdot (f^{(-1)})'(x) \equiv 1 \;\Rightarrow\; (f^{(-1)})'(x) = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(x))}.$$

Важные примеры.

- $(e^x)' = e^x$. Следовательно, $(\ln x)' = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$ при $x > 0$.
- $(\sin x)' = \cos x$. Следовательно, при $|x| < 1$
  $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$
- $(\cos x)' = -\sin x$. Следовательно, при $|x| < 1$
  $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\cos(\arccos x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, в частности, при $|x| < \dfrac{\pi}{2}$. Следовательно
  $(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ при всех x, т.к. $\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, в частности, при $|\alpha| < \dfrac{\pi}{2}$.

Производные неявных и параметрических функций

Функция $y = y(x)$ **задана неявно** на $[a, b]$, если ее аргумент и значение связаны уравнением

$$F(x, y) = 0,\ x \in [a, b],\ y \in [c, d],$$

где $F : D(F) \to \mathbb{R}$, $[a, b] \times [c, d] \subset D(F)$, а также, как правило – для выделения единственного решения – дополнительному условию $y(x_0) = y_0$, где $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$ и $F(x_0, y_0) = 0$. Неявная функция обращает указанное уравнение в тождество $F(x, y(x)) \equiv 0,\ x \in [a, b]$.

Пример. Уравнение $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$ задает две функции: $y_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ и $y_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. ★

При определенных условиях неявно заданная функция существует и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0 \in (a, b)$ (более подробно во 2-м модуле). Оказывается, что правила вычисления производных позволяют иногда вычислять производные неявных функций.

Пример. Пусть функция $y(x)$ задана уравнением $x^2 - 3xy + y^2 = -1$ и условием $y(1) = 1$. Тогда $y(x)$ обращает это уравнение в тождество $x^2 - 3xy(x) + y^2(x) \equiv -1$, его можно дифференцировать

$$(x^2 - 3xy + y^2)' = 0 \Rightarrow 2x - 3y - 3xy' + 2yy' = 0 \ \Rightarrow$$

$$y' = \frac{3y - 2x}{2y - 3x} \ \Rightarrow \ y'(1) = \frac{3 - 2}{2 - 3} = -1.$$

Функция $y = f(x)$ **задана параметрически**, если ее аргумент и значение связаны следующими уравнениями (Δ – некоторый промежуток):

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad t \in \Delta.$$

Пример. Граница эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ с полуосями $a > 0$, $b > 0$ параметрически задается уравнениями $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \Delta = [0, 2\pi)$. В том числе его верхняя половина отвечает $t \in \Delta = [0, \pi]$.

Вопрос о существовании и области определения такой функции сейчас не рассматриваем. Используя дифференциалы, получаем

$$dx = u'(t)dt, \quad dy = v'(t)dt, \quad t \in \Delta_0 \subset \Delta.$$

Производную $f'(x)$ указанной функции $y = f(x)$ можно задать параметрически следующим образом (в силу инвариантности df)

$$x = \varphi(t), \quad f' = \frac{dy}{dx} = \frac{v'(t)}{u'(t)}, \quad t \in \Delta_0, \ u'(t) \neq 0.$$

Пример. Пусть $y = f(x)$ задана уравнениями $x = \cos t$, $y = \sin t$, где $t \in [0, \pi]$ (это верхняя половина единичной окружности).
Тогда $y = f'(x)$ задается параметрически так: $x = \cos t$, $f' = -\operatorname{ctg} t$, где $t \in (0, \pi)$.
Например, при $t = \frac{\pi}{6}$ имеем
$x = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad y' = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$. Поэтому $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$.
"Проверка": производная $(\sqrt{1 - x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ равна $-\sqrt{3}$ при $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Уравнение касательной

Напоминание. Если функция $y(x)$ задана аналитически, то уравнение касательной к ее графику в точке $P(x_0, y_0)$, где $y_0 = y(x_0)$, есть

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение касательной к графику функции (кривой), заданной параметрически или неявно, находится по этой же формуле.

Пример

Найдите уравнение касательной к кривой $2x^2 - xy + y^2 = 4$ в точке $P(1, 2)$. Фактически $y(x)$ обращает это уравнение в тождество: $2x^2 - xy(x) + y^2(x) \equiv 4$.

1. Находим производную $y'(x)$ как функцию от x и $y(x)$:

$$(2x^2 - xy + y^2)' = 4' \Rightarrow 4x - (y + xy') + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y - 4x}{2y - x}.$$

2. Подставляем координаты точки $y'(1, 2) = \dfrac{2 - 4 \cdot 1}{2 \cdot 2 - 1} = -\dfrac{2}{3}$.
3. Выписываем уравнение касательной

$$y - 2 = -\frac{2}{3} \cdot (x - 1) \;\Leftrightarrow\; y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}.$$

В случае, когда $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, формулы для произведения и частного можно переписать в виде

$$\frac{(fg)'(x)}{f(x)g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)},$$

$$\frac{\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)}{\dfrac{f}{g}(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Поэтому при $f_1(x) \neq 0$,...,$f_n(x) \neq 0$ и $g_1(x) \neq 0$,...,$g_m(x) \neq 0$

$$\left(\frac{f_1 f_2 \dots f_n}{g_1 g_2 \dots g_m}\right)'(x) =$$

$$= \left(\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \dots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} - \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} - \dots - \frac{g_m'(x)}{g_m(x)}\right) \frac{f_1 f_2 \dots f_n}{g_1 g_2 \dots g_m}.$$

Условие $f_1(x) \dots f_n(x) \neq 0$, конечно, лишнее в отличие от $g_1(x) \dots g_m(x) \neq 0$. Умножение результата в скобках на числитель дроби $f_1(x) \dots f_n(x)$ ведет к формальному пропаданию лишнего условия.

Неформально последний результат будет верен по непрерывности, если предположить, что функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ непрерывны в точке x такой, что $f_1(x) = 0$,...,$f_n(x) = 0$ соответственно.

Логарифмическая производная и эластичность

Логарифмическая производная

Определение. $L(f)(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ при $f(x) \neq 0$.

Пример. $L(x^a) = \dfrac{ax^{a-1}}{x^a} = \dfrac{a}{x}$, где $x > 0$ для $a \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ для $a = n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Если $f(x) > 0$, то $L(f)(x) = (\ln f)'(x)$.

Свойства:

1. $L(fg) = L(f) + L(g)$,
2. $L\left(\dfrac{f}{g}\right) = L(f) - L(g)$,
3. $L(f^a) = aL(f)$ при $f > 0$.

Эластичность

Определение. $E(f)(x) = x\dfrac{f'(x)}{f(x)} = xL(x)$ при $f(x) \neq 0$.

Пример. $E(x^a) = x\dfrac{ax^{a-1}}{x^a} = a$, где $x > 0$ для $a \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ для $a = n \in \mathbb{Z}$.

Экономический смысл:

$$E_f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))/f(x_0)}{(x - x_0)/x_0}.$$

Свойства:

1. $E(fg) = E(f) + E(g)$,
2. $E\left(\dfrac{f}{g}\right) = E(f) - E(g)$,
3. $E(f^a) = aE(f)$ при $f > 0$.

Применение. Вычисление производных функций вида $\dfrac{f_1 f_2 \dots f_n}{g_1 g_2 \dots g_m}$.

Пример. Найдите производную функции $f(x) = \dfrac{x \sin x}{e^x \ln x}$. Она определена и дифференцируема при $x > 0$, $x \neq 1$. Многократное применение формулы производной суммы и частного **громоздко**. Поступаем иным образом.

1. Вычисляем логарифмическую производную функции f. Сначала вычисляем логарифмические производные функций–составляющих

$$L(x) = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x}, \quad L(\sin x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \operatorname{ctg} x,$$

$$L(e^x) = \frac{(e^x)'}{e^x} = 1, \quad L(\ln x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}.$$

Теперь можно вычислить

$L(f) = L(x) + L(\sin x) - L(e^x) - L(\ln x) = \dfrac{1}{x} + \operatorname{ctg} x - 1 - \dfrac{1}{x \ln x}$.

2. Используя определение логарифмической производной, получаем:

$f'(x) = L(f) f = \left(\dfrac{1}{x} + \operatorname{ctg} x - 1 - \dfrac{1}{x \ln x} \right) \dfrac{x \sin x}{e^x \ln x}$.

Однако при таком подходе формула верна вместо $x > 0$, $x \neq 1$ при дополнительном условии $\sin x \neq 0$, т.е. $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

Последнее легко устранить умножением на сомножитель числителя $\sin x$, обращающийся в 0:

$$f'(x) = L(f)f = \left[\left(\frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x\ln x}\right)\sin x + \cos x\right]\frac{x}{e^x \ln x}.$$

Строгое обоснование состоит в использовании свойства непрерывности $\sin x$ в ее нулях (как и во всех других точках x).