Математический анализ 1.
Направление 38.03.01 Экономика
Семинар 3. Пределы последовательностей

1. Докажите, что:

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{2n-1}}=0$;

   (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{3n-11}}=0$.

2. Вычислите пределы:

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n^2+n+\ln n)(n^3+\sin n+2)}{(2n^4+n^3+1)(5n+\sqrt{n})}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+3}+3^{n+4}}{4^n+3^{n+10}}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-2n-3}+3^{-n-4}}{4^{-n}+3^{-n-10}}$;

   (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; (5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}$;

   (7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{2^n}}{\left(\dfrac{3}{10}\right)^{n+1}+5}$; (8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n+2\cdot 5^n}$; (9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n}$;

   (10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 6^n-5^{n+1}}{5^n-(-1)^{n+1}\cdot 6^{n+1}}$; (11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+3n+4)^3-(n^2+3n-4)^3}{(n^2+5n+6)^3-(n^2+5n-6)^3}$; (12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg^2 10n}{\lg^2 n}$;

   (13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^{10}+n+1)}$.

3. Выясните, существуют ли указанные пределы, и если да, то найдите их:

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^3-(1+n)^3}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+2}+3^{n+2}}{2^n+3^n}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$;

   (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

4. Выясните, существуют ли указанные пределы, и если да, то найдите их:

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{6n-1}-\sqrt[3]{27n^3+2}}{\sqrt[4]{n+7}-2n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2022n+2023}-n)$;

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+3\cdot 25^n}{(7n^3+5^n)(n-5^n)}$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+\log_2 n)(n^2-5\cos n)}{-3n^3+\log_4 n}$.

5. Докажите, что указанные последовательности монотонны (по крайней мере начиная с некоторого номера) и ограничены и найдите их пределы:

   (1) $x_1=13$, $x_n=\sqrt{12+x_{n-1}}$, $n\geqslant 2$; (2) $x_1=10$, $x_n=\dfrac{4x_{n-1}+3}{x_{n-1}+2}$, $n\geqslant 2$;

   (3) $x_1=18$, $x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{36}{x_{n-1}}\right)$, $n\geqslant 2$.

6. Вычислите пределы:

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2+n+1}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+3}{3n+1}\right)^{\sqrt{n}}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3n+1}\right)^{n^2}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3n+1}\right)^{n^2}$; (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n(n+2)}\right)^{n}$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{n}$.