

**Математический анализ 1.**  
**Направление 38.03.01 Экономика**  
**Семинар 2.8. Локальные и глобальные экстремумы функций нескольких переменных**

**Локальный экстремум**

1. Для следующих функций найдите все точки возможного экстремума и проверьте в них выполнение достаточных условий локального экстремума:  
(1)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ; (2)  $f(x, y) = -x^2 - 2xy - 4y^2$ ; (3)  $f(x, y) = xy$ ;  
(4)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$ ; (5)  $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + xy + xz + yz$ ;  
(6)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ .
2. Для следующих функций найдите все точки возможного экстремума и проверьте в них выполнение достаточных условий локального экстремума:  
(1)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ ; (2)  $f(x, y) = -x^2 + 8xy - y^2$ ; (3)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ;  
(4)  $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - xy - xz - yz$ ; (5)  $f(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xy - xz + yz$ ;  
(6)  $f(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$ .
3. Проверьте, что в точке  $(0,0)$  выполнены необходимые условия локального экстремума, но она не является точкой строгого локального экстремума следующих функций:  
(1)  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ ; (2)  $f(x, y) = x^2 - 2xy$ ; (3)  $f(x, y) = x^2y$ ; (4)  $f(x, y) = xy^3$ ;  
(5)  $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)$ .
4. Проверьте, что в точке  $(0,0)$  выполнены необходимые условия локального экстремума, но она не является точкой строгого локального экстремума следующих функций:  
(1)  $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 - y^4$ ; (2)  $f(x, y) = x^4 - y^4$ ; (3)  $f(x, y) = x^3y^5$ ;  
(4)  $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2$ ; (5)  $f(x, y) = x^5 + y^5$ .
5. Проверьте, является ли для заданной функции точкой локального экстремума указанная точка  $(x_0, y_0)$ :  
(1)  $f(x, y) = x^2y^2$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ; (2)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ .
6. Проверьте, является ли для заданной функции точкой локального экстремума указанная точка  $(x_0, y_0)$ :  
(1)  $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ;  
(2)  $f(x, y) = x \ln^2(x^2 + y^2 - 2)$ ,  $(x_0, y_0) = (\sqrt{3}, 0), (0, \sqrt{3})$ .
7. Найдите все точки локального экстремума следующих функций:  
(1)  $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ ; (2)  $f(x, y, z) = xyz$ ;  
(3)  $f(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z)$  на множестве  $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$ ;  
(4)  $f(x, y) = x^2y + \frac{8}{x^2} + \frac{8}{y}$  на множестве  $\{x > 0, y > 0\}$ .

8. Найдите все точки локального экстремума следующих функций:

- (1)  $f(x, y, z) = x^2 + y^4 + z^6$ ; (2)  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ ;  
(3)  $f(x, y, z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$  на множестве  $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$ ;  
(4)  $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ .

9. Найдите все точки возможного экстремума и проверьте в них выполнение достаточных условий локального экстремума для следующих функций:

- (1)  $f(x, y) = x^3 + y^3$ ; (2)  $f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ ;  
(3)  $f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ ; (4)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$ ;  
(5)  $f(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z)$ ; (6)  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$ ; (7)  $f(x, y) = xy(3 - x - y)$ ;  
(8)  $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{50}{y}$ ; (9)  $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$ ; (10)  $f(x, y) = xye^{-(x+y)}$ ;  
(11)  $f(x, y) = x^2y^3e^{-(x+y)}$ ; (12)  $f(x, y) = x^3y^4e^{-(x+y)}$ ; (13)  $f(x, y) = x^3y^4e^{-(x+y^2)}$ .

10. Найдите все точки возможного экстремума и проверьте в них выполнение достаточных условий локального экстремума для следующих функций:

- (1)  $f(x, y) = x^3 - y^3$ ; (2)  $f(x, y) = x^6 + 2x^3y^3 + y^6$ ;  
(3)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ ; (4)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$ ;  
(5)  $f(x, y, z, t) = xyzt(5 - x - y - z - t)$ ; (6)  $f(x, y, z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$ ;  
(7)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ; (8)  $f(x, y) = xy^2(4 - x - 2y)$ ; (9)  $f(x, y) = x^2y^2e^{-(x+y)}$ ;  
(10)  $f(x, y) = xy^2e^{-(x+y)}$ ; (11)  $f(x, y) = x^3y^3e^{-(x+y)}$ ; (12)  $f(x, y) = (5 - 2x + y)e^{x^2-y}$ .

### Глобальный экстремум

11. Найдите значения глобальных максимумов и минимумов и точки, где они достигаются, а также область значений функции  $f$  на множестве  $D$ :

- (1)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 9x - 18y$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 30\}$ ;  
(2)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 9x - 18y$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 25\}$ ;  
(3)  $f(x, y) = 4x - 3y + 2$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$ .

12. Множество  $D$  точек плоскости  $\mathbb{R}^2$  задано одним из трех наборов условий:

- а)  $2x^2 + y^2 \leq 4$ ; б)  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x + y \leq 1$ ; в)  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $x \geq y$ ,  $y \geq 0$ .

Методом параметризации границы найдите глобальные экстремумы функции  $f(x, y)$  на  $D$  и точки, где они достигаются:

- (1)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ; (2)  $f(x, y) = -x^2 - 2xy - 4y^2$ ; (3)  $f(x, y) = xy$ ;  
(4)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ ; (5)  $f(x, y) = -x^2 + 8xy - y^2$ ; (6)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ;  
(7)  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ ; (8)  $f(x, y) = x^2 - 2xy$ ; (9)  $f(x, y) = x^2y$ ;  
(10)  $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2$ ; (11)  $f(x, y) = x^3 + y^3$ ; (12)  $f(x, y) = x^3 - y^3$ ;  
(13)  $f(x, y) = xy(3 - x - y)$ ; (14)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .

## Экономические приложения

13. Производитель с исключительными правами на сложное промышленное оборудование планирует продать ограниченное число экземпляров как внутренним, так и зарубежным фирмам. Ожидаемая цена, по которой производитель сможет продать оборудование, зависит от числа выводимых на рынок экземпляров (к примеру, если их вывести мало, то конкурентная торговля среди заинтересованных покупателей будет двигать цену вверх). По сделанным оценкам, при поставке  $x$  экз. на внутренний рынок и  $y$  экз. на зарубежный рынок, на внутреннем рынке каждый экз. будет продаваться по  $60 - \frac{x}{5} + \frac{y}{20}$  тыс. у.е., а на зарубежном – по  $50 - \frac{y}{10} + \frac{x}{20}$  тыс. у.е. Если себестоимость каждого экз. составляет 10 000 у.е., то сколько экз. следует поставить на каждый рынок, чтобы максимизировать прибыль?

*Указание.* Прибыль = (кол-во экз. на внутр. рынке)\*(цена на внутр. рынке) + (кол-во экз. на внешнем рынке)\*(цена на внешнем рынке) – (общее кол-во экз.)\*(себестоимость)

14. **Производитель планирует** продавать новый продукт по цене в 210 у.е. за единицу и предполагает, что если он затратит  $x$  тыс. у.е. на развитие и  $y$  тыс. у.е. на продвижение, то потребители купят  $\frac{640y}{y+3} + \frac{216x}{x+5}$  единиц продукта. Если себестоимость этого продукта равна 135 у.е. на единицу, то сколько производитель должен потратить денег на развитие и сколько – на продвижение продукта, чтобы получить максимальную прибыль от его продажи?

*Указание.* Прибыль = (кол-во ед.)\*(цена за ед. – себестоимость ед.) – (общие издержки на развитие и продвижение).