Математический анализ 1.
Направление 38.03.01 Экономика
Семинар 2.4. Дифференцирование – I.

Частные производные и дифференциал функций двух переменных

1. Найдите частные производные функции $f(x,y)$. Выпишите ее градиент и дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\mathbf{L}$ в точке (x_0,y_0) и выпишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ для любой (x_0,y_0), где это возможно, и указанной конкретной (x_0,y_0):

   (1) $f(x,y)=2x+3y$, $\mathbf{L}=(3,-2)$, $(x_0,y_0)=(1,1)$;

   (2) $f(x,y)=xy$, $\mathbf{L}=(1,-1)$, $(x_0,y_0)=(1,1)$;

   (3) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$, $\mathbf{L}=(1,2)$, $(x_0,y_0)=(1,1)$;

   (4) $f(x,y)=xy^2(4-x-2y)$, $\mathbf{L}=(1,1)$, $(x_0,y_0)=(1,1)$;

   (5) $f(x,y)=x^y$ (где $x>0$), $\mathbf{L}=(2,3)$, $(x_0,y_0)=(1,1)$;

   (6) $f(x,y)=x\sin(x+y)$; $\mathbf{L}=(3,-4)$, $(x_0,y_0)=(0,\pi)$;

   (7) $f(x,y)=\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{y}$; $\mathbf{L}=(-2,1)$, $(x_0,y_0)=(\pi,\pi)$.

2. Найдите частные производные функции $f(x,y)$. Выпишите ее градиент и дифференциал. Найдите производную по направлению вектора $\mathbf{L}$ в точке (x_0,y_0) и выпишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ для любой (x_0,y_0), где это возможно, и указанной конкретной (x_0,y_0):

   (1) $f(x,y)=3x-2y$, $\mathbf{L}=(-3,2)$, $(x_0,y_0)=(1,1)$;

   (2) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ (где $x\neq 0$), $\mathbf{L}=(3,-2)$, $(x_0,y_0)=(2,3)$;

   (3) $f(x,y)=xy(3-x-y)$, $\mathbf{L}=(1,1)$, $(x_0,y_0)=(0,0)$;

   (4) $f(x,y)=x^2+2y^2-2x^4-y^4$, $\mathbf{L}=(1,-1)$, $(x_0,y_0)=(1,0.5)$;

   (5) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ (где $(x,y)\neq(0,0)$), $\mathbf{L}=(1,-1)$, $(x_0,y_0)=(1,1)$;

   (6) $f(x,y)=\log_x y$ (где $x>0, x\neq 1, y>0$), $\mathbf{L}=(2,3)$, $(x_0,y_0)=(2,2)$.

3. Найдите частные производные и дифференциал следующих функций:

   (1) $f(x,y)=Ax^\alpha y^\beta$, $A>0$, $0<\alpha<1$, $\alpha+\beta=1$ (*производственная функция Кобба-Дугласа*);

   (2) $f(x,y)=A\big(\alpha x^{-\beta}+(1-\alpha)y^{-\beta}\big)^{-\frac{1}{\beta}}$, $A>0$, $0<\alpha<1$, $\beta>-1$, $\beta\neq 0$ (*производственная функция с постоянной эластичностью замещения*).

4. Найдите частные производные и дифференциал следующих функций:

   (1) $f(x,y,z)=Ax^\alpha y^\beta z^\gamma$, $A>0$, $\alpha,\beta,\gamma\in(0,1)$, $\alpha+\beta+\gamma=1$ (*производственная функция Кобба-Дугласа*);

   (2) $f(x,y,z)=A\big(\alpha x^{-\gamma}+\beta y^{-\gamma}+(1-\alpha-\beta)z^{-\gamma}\big)^{-\frac{1}{\gamma}}$, $A>0$, $\alpha,\beta\in(0,1)$, $\gamma>-1$, $\gamma\neq 0$ (*производственная функция с постоянной эластичностью замещения*).

5. Найдите дифференциал функции:

   (1) $f(x,y) = a^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$, $a>0$ (при $\left|\dfrac{y}{x}\right|<1$, $x\neq 0$);

   (2) $f(x,y) = (\sin x)^y$ (при $\sin x > 0$);

   (3) $f(x,y) = (\sin x)^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{y}{x}}$ (при $\sin x>0$, $\left|\dfrac{y}{x}\right|<1$).

6. Найдите дифференциал функции:

   (1) $f(x,y) = a^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{x}{y}}$, $a>0$ (при $\left|\dfrac{x}{y}\right|<1$, $y\neq 0$);

   (2) $f(x,y) = (\cos x)^y$ (при $\cos x > 0$);

   (3) $f(x,y) = (\cos x)^{\ln(x^2+y^2)\cdot\arcsin\frac{x}{y}}$ (при $\cos x>0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right|<1$, $y\neq 0$).

7. Найдите частные производные и производную по любому направлению $\boldsymbol{\ell} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ функции:

   (1) $f(x,y) = 3x+4y+12xy+x^2+2y^2$; (2) $f(x,y) = x^4+3y^5-2x^2y^3$.

   Частные производные и дифференциал функции трех переменных

8. Найдите частные производные функции $f(x,y,z)$. Выпишите ее градиент и 1-й дифференциал. Найдите производную по направлению $\mathbf{L}$ в любой точке (x_0,y_0,z_0) и указанной конкретной (x_0,y_0,z_0):

   (1) $f(x,y,z) = 2x+3y+4z$, $\mathbf{L} = (2,3,4)$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$;

   (2) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $\mathbf{L} = (1,2,-1)$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,2,3)$;

   (3) $f(x,y,z) = xy^2z^3(7-x-2y-3z)$, $\mathbf{L} = (1,1,1)$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$;

   (4) $f(x,y,z) = x^3+x+y+xyz$, $\mathbf{L} = (1,1,1)$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,-1)$.

9. Найдите частные производные функции $f(x,y,z)$. Выпишите ее градиент и 1-й дифференциал. Найдите производную по направлению $\mathbf{L}$ в любой точке (x_0,y_0,z_0) и указанной конкретной (x_0,y_0,z_0):

   (1) $f(x,y,z) = x^2-y^2+2z^2$, $\mathbf{L} = (1,6,-5)$, $(x_0,y_0,z_0) = (2,3,4)$;

   (2) $f(x,y,z) = x^2y^3z^4(10-2x-3y-4z)$, $\mathbf{L} = (1,0,1)$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$;

   (3) $f(x,y,z) = x^3+x+y+xyz$, $\mathbf{L} = (1,1,1)$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,-1)$.

10. Найдите частные производные и производную по произвольному направлению $\boldsymbol{\ell} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$, функции:

    (1) $f(x,y,z) = x+y+z+xy+xz+yz$; (2) $f(x,y,z) = xyz(4-x-y-z)$.

    Производная векторной функции одной вещественной переменной

11. Найдите уравнение касательной к параметрической кривой γ при $t=t_0$:

    (1) $\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t+1} \\ \dfrac{t}{t+1} \end{pmatrix}$, $t_0 = 1$; (2) $\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1+t+t^2 \\ t\ln t \end{pmatrix}$, $t_0 = 1$;

    (3) $\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 3\sin t \\ 4\cos t \end{pmatrix}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$; (4) $\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1-t+t^2 \\ 2+2t-t^2 \\ t \end{pmatrix}$, $t_0 = 1$.

12. Выполнив параметризацию, найдите уравнение касательной к кривой:

(1) $\boldsymbol{\gamma}: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ в точке $A\Big(1, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\Big)$; (2) $\boldsymbol{\gamma}: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ в точке $A\Big(\dfrac{1}{8}, \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\Big)$.

Исследование функции на дифференцируемость

13. Исследуйте функцию f на дифференцируемость в точке $(0,0)$:

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+xy+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$; (2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$;

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$.

14. Найдите все значения параметра α, при которых функция f:

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$; (2) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^\alpha \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$

обладает свойствами:

а) она непрерывна в точке $(0,0)$;

б) она дифференцируема в точке $(0,0)$;

в) она имеет непрерывные в точке $(0,0)$ частные производные.

Матрица Якоби

15. Выпишите матрицу Якоби заданной функции в указанной точке:

(1) $f(x,y) = xy$, (x_0, y_0) – произвольная точка;

(2) $\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$, $x_0 = 1$; (3) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ xy \\ \dfrac{x}{y} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(4) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, (x_0, y_0) – произвольная точка;

(5) $\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \operatorname{tg} x \end{pmatrix}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; (6) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x^2+y^2 \\ xy \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Экономические приложения

Два товара называются **взаимно заменяемыми**, если рост спроса на один товар приводит к падению спроса на другой товар; примером таких товаров являются масло и маргарин. С другой стороны, два товара называются **взаимно дополняемыми**, если падение спроса на какой-либо из них влечет падение спроса и на другой; примером таких товаров служат цифровые камеры и карты памяти для них.

Частные производные можно использовать для получения критериев того, являются ли два товара взаимно заменяемыми или взаимно дополняемыми. Пусть при ценах в p_1 у.е. за первый товар и p_2 у.е. на второй товар спрос на них составляет соответственно $D_1(p_1,p_2)$ и $D_2(p_1,p_2)$ единиц. Для взаимно заменяемых товаров верны неравенства $\dfrac{\partial D_1}{\partial p_2} > 0$, $\dfrac{\partial D_2}{\partial p_1} > 0$, а для взаимно дополняемых товаров верны другие неравенства $\dfrac{\partial D_1}{\partial p_2} < 0$, $\dfrac{\partial D_2}{\partial p_1} < 0$.

16. Функция спроса на арахисовое масло равна $D_1(p_1, p_2) = 800 - 0.03p_1^2 - 0.04p_2^2$, а функция спроса на второй товар равна $D_2(p_1, p_2) = 500 - 0.002p_1^2 - p_1p_2$. Второй товар с большей вероятностью является мармеладом или хлебом? Объясните свой ответ.

    Указание. Установите, являются ли два товара взаимно заменяемыми или взаимно дополняемыми.

17. Функция спроса на определенную марку гелевых ручек равна $D_1(p_1, p_2) = 700 - 4p_1^2 + 7p_1p_2$, а функция спроса на второй товар равна $D_2(p_1, p_2) = 300 - 2\sqrt{p_2} + 5p_1p_2$. Второй товар с большей вероятностью является карандашами или бумагой? Объясните свой ответ.

18. Две конкурентные марки газонокосилок продаются в одном городе. Цена первой марки составляет x у.е. за штуку, а второй – y у.е. за за штуку. Местный спрос на первую газонокосилку задается функцией $D(x, y)$.

    (1) По вашим ожиданиям, как будет меняться спрос на первую марку газонокосилки с ростом x? С ростом y?

    (2) Сформулируйте свои ответы на пункт (1) как условия на знаки частных производных функции D.

    (3) Если $D = a + bx + cy$, то что можно сказать о знаках коэффициентов b и c на основе пп. 1 и 2?