

Математический анализ 1.
Направление 38.03.01 Экономика
Семинар 4. Пределы функций

1. Вычислите пределы:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - x - 2}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x + 1}{3x^3 - x - 2}$; (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1}$;
 (4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - x - 2}$; (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - x - 2}$; (6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - x - 2}$;
 (7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{x+7}}$; (8) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{3x-1} - \sqrt[3]{x+5}}{x-3}$;
 (9) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x)$; (10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt[4]{9x-2}}{x-2}$; (11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \sin(3x)}{\sin(4x) \sin(5x)}$;
 (12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(x) \sin(3x)}$; (13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{\sin(7x) - \sin(x)}$; (14) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(x) + \cos(2x)}{\cos(3x) + \cos(2x)}$;
 (15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{4^x - 3^x}$; (16) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^x}{x - 2}$; (17) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(2x-2) - \ln(x+1)}{x-3}$; (18) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^3 + x + 1)}{\ln(3x^6 + x + 2)}$;
 (19) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{2x+5}$; (20) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x+1}{3x+2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$; (21) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

2. Вычислите пределы:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 1}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 1}$; (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 1}$;
 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$; (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$, $m, n \in \mathbb{N}$;
 (6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$; (7) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$; (8) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$;
 (9) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$; (10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$; (11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$;
 (12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$; (13) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(2x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; (14) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$;
 (15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{\frac{1}{x}}$; (16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x$, $a \in \mathbb{R}$.

3. Вычислите пределы:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$; (3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$; (4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$.

4. Вычислите пределы:

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$; (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$;
 (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$; (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2023x)}{x^2 + 2023x}$; (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$;
 (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \operatorname{tg}(2022x)}$; (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+3} - 8}{\ln(1 + 32x)}$; (8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$; (9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg} x}$;

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x) - 3 \arcsin(4x)}{\sin(5x) - 6 \operatorname{arctg}(7x)}.$$

5. По некоторым исследованиям, спустя t лет население определенной страны будет составлять $p(t) = 0.2t + 1500$ тысяч людей, а ее валовой доход — $E(t) = \sqrt{9t^2 + 0.5t} + 179$ миллионов у.е.

Что произойдет с доходом на душу населения $P = \frac{E}{p}$ в долгосрочной перспективе (при $t \rightarrow +\infty$)?

6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — функции, определенные в окрестности точки a . Укажите все верные из следующих утверждений о пределах при $x \rightarrow a$. Ответы обосновать.

- (а) Если $f(x)$ имеет предел и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) + g(x)$ имеет предел.
- (б) Если $f(x)$ не имеет предела, а $g(x)$ имеет предел, то $f(x) + g(x)$ не имеет предела.
- (в) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ не имеет предела, то $f(x) + g(x)$ не имеет предела.
- (г) Если $f(x) + g(x)$ имеет предел, а $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ не имеет предела.
- (д) Если $f(x) + g(x)$ не имеет предела, а $f(x)$ имеет предел, то $g(x)$ не имеет предела.
- (е) Если $f(x) + g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ может как иметь предел, так и не иметь предела.

7. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — функции, определенные в окрестности точки a . Укажите все верные из следующих утверждений о пределах при $x \rightarrow a$. Ответ обосновать.

- (а) Если $f(x) - g(x)$ имеет предел, а $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ не имеет предела.
- (б) Если $f(x) - g(x)$ не имеет предела, а $f(x)$ имеет предел, то $g(x)$ не имеет предела.
- (в) Если $f(x) - g(x)$ не имеет предела и $f(x)$ не имеет предела, то $g(x)$ может как иметь предел, так и не иметь предела.
- (г) Если $f(x)$ имеет предел и $g(x)$ имеет предел, то $f(x) - g(x)$ имеет предел.
- (д) Если $f(x)$ не имеет предела, а $g(x)$ имеет предел, то $f(x) - g(x)$ не имеет предела.
- (е) Если $f(x)$ не имеет предела и $g(x)$ не имеет предела, то $f(x) - g(x)$ не имеет предела.