Математический анализ 1.
Направление 38.03.01 Экономика
Семинар 9. Производные высших порядков. Формула Тейлора

1. Найдите производную функции $f(x)$ указанного порядка k:

   (1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $k \geqslant 1$; (2) $f(x) = \dfrac{4x+5}{2x^2 - x - 1}$, $k = 5$;

   (3) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$, $k = 5$; (4) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$, $k = 4$;

   (5) $f(x) = \sin(3x)\cos(5x)$, $k = 4$; (6) $f(x) = xe^{2x}$, $k = 11$;

   (7) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $k = 2$; (8) $f(x) = x^2 \sin x$, $k = 15$;

   (9) $f(x) = \dfrac{x+4}{2x^2+9x+10}$, $k \geqslant 1$; (10) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)$, $k \geqslant 1$;

   (11) $f(x) = \sin^2(2x)\cos x$, $k = 7$; (12) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, $k = 3$;

   (13) $f(x) = x^2 e^{2x}$, $k = 20$.

2. Выпишите формулу Маклорена с первыми тремя ненулевыми слагаемыми функции $f(x)$:

   (1) $f(x) = x\ln(1+3x^2)$; (2) $f(x) = x^2\cos(3x)$; (3) $f(x) = \cos(2x)\cos(3x)$.

3. Выпишите формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано указанной степени k функции $f(x)$:

   (1) $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$, $k = 3$; (2) $f(x) = \sqrt{1+x}\,\ln(1+x)$, $k = 3$;

   (3) $f(x) = \sqrt[3]{1+2x} \cdot \sqrt{1-x}$, $k = 2$; (4) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $k = 3$;

   (5) $f(x) = \ln(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+x} - 1)$, $k = 2$; (6) $f(x) = \operatorname{sh} x \equiv \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $k \in \mathbb{N}$;

   (7) $f(x) = \operatorname{ch} x \equiv \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $k \in \mathbb{N}$.

   Функция $\operatorname{sh} x$ называется *синусом гиперболическим*, а функция $\operatorname{ch} x$ – *косинусом гиперболическим.*

4. Выпишите формулу Тейлора 2-го порядка указанной функции $f(x)$ в заданной точке x_0 с остаточным членом в форме Пеано и форме Лагранжа:

   (1) $f(x) = \dfrac{3x}{2x^2 - x - 1}$, $x_0 = 2$; (2) $f(x) = xe^{2x}$, $x_0 = -1$;

   (3) $f(x) = \ln\dfrac{4x}{5-x}$, $x_0 = 1$.

5. Выпишите формулу Тейлора 3-го порядка функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ с остаточным членом в форме Пеано и форме Лагранжа:

   (1) $f(x) = \dfrac{x-3}{2x^2+3x-2}$, $x_0 = 1$; (2) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

   (3) $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 3)$, $x_0 = 2$;

6. Использовав табличные многочлены Маклорена, найдите производную k-го порядка функции $f(x)$ в точке $x = x_0$:

   (1) $f(x) = x\sin(2x)$, $k = 8$, $x = x_0$; (2) $f(x) = x^2\ln(1+2x)$, $k = 4$, $x_0 = 0$;

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$, $k = 4$, $x_0 = 2$; (4) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2x}$, $k \geqslant 1$;

(5) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x^2 + 5x + 4}$, $k \geqslant 1$; дополнительно в этой задаче найдите $f^{(10)}(0)$.

7. Использовав производную $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ и табличные многочлены Маклорена, выпишите формулу Маклорена степени $2n + 1$ функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.