Математический анализ 1. Направление 38.03.01 Экономика
Тема 2. Функции нескольких переменных
Семинар 2.1. Пространство $\mathbb{R}^n$ и его подмножества. Последовательности векторов

1. Приведите пример множества $U \subset \mathbb{R}^n$, которое не является ни открытым, ни замкнутым в $\mathbb{R}^n$.

2. Докажите, что следующие множества являются открытыми в $\mathbb{R}^n$:

   (1) n-мерный открытый шар $B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$, где $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$;

   (2) n-мерный открытый прямоугольный параллелепипед $(a_1, b_1) \times \ldots (a_n, b_n)$, где $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$.

3. Докажите, что следующие множества являются замкнутыми в $\mathbb{R}^n$:

   (1) n-мерный замкнутый шар $B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leqslant r\}$, где $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$;

   (2) n-мерный замкнутый прямоугольный параллелепипед $[a_1, b_1] \times \ldots [a_n, b_n]$, где $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$.

4. Какие фигуры представляют собой замкнутые «шары» с центром в 0 радиуса 1 при $n = 3$ (т.е. в $\mathbb{R}^3$) в неевклидовых нормах:

   (1) $|\mathbf{x}|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$; (2) $|\mathbf{x}|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$.

5. Выясните, существует ли предел $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{x}_k$ следующих последовательностей векторов, и если да, то найдите его:

   (1) $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \\ \dfrac{k-1}{k} \\ \dfrac{2k^2 - 1}{k^2} \\ \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k \end{pmatrix}$; (2) $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^k}{k} \\ (-1)^k \end{pmatrix}$; (3) $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos \varphi_k}{\varphi_k} \\ \dfrac{\sin \varphi_k}{\varphi_k} \end{pmatrix}$, где:

   а) $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — бесконечно большая последовательность, $\varphi_k \neq 0$;

   б) $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — бесконечно малая последовательность, $\varphi_k \neq 0$;

   (4) $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} r^k \cos(k\varphi) \\ r^k \sin(k\varphi) \end{pmatrix}$, $r > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$;

   (5) $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} k\left(\sqrt[k]{r} \cos \dfrac{\varphi}{k} - 1\right) \\ k\sqrt[k]{r} \sin \dfrac{\varphi}{k} \end{pmatrix}$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

6. Для функции двух переменных $f(x, y)$ найдите ее область определения $D(f)$ и область значений $R(f)$ и укажите (с обоснованием), является ли каждое из множеств $D(f)$ и $R(f)$ открытым, замкнутым, ограниченным, компактным:

   (1) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; (2) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$; (3) $f(x, y) = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$.

7. Для функции трех переменных $f(x, y, z)$ найдите ее область определения $D(f)$ и область значений $R(f)$ и укажите (с обоснованием), является ли каждое из множеств $D(f)$ и $R(f)$ открытым, замкнутым, ограниченным, компактным:

   (1) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; (2) $f(x, y, z) = \ln(xyz)$; (3) $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + \ln z$; (4) $f(x, y, z) = \ln(xy) + z$; (5) $f(x, y, z) = \ln x + \ln(yz)$.

8. Для функции n переменных $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ найдите ее область определения $D(f)$ и область значений $R(f)$ и укажите (с обоснованием), является ли каждое из множеств $D(f)$ и $R(f)$ открытым, замкнутым, ограниченным, компактным:

   (1) $f(\mathbf{x}) = \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}$; (2) $f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \ldots - \frac{x_n^2}{a_n^2}}}$, где $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$.

9. Множество S точек плоскости $\mathbb{R}^2$ задано одним из пяти условий на декартовы координаты его точек:

   а) $f(x, y) > 0$; б) $f(x, y) \geqslant 0$; в) $f(x, y) < 0$; г) $f(x, y) \leqslant 0$; д) $f(x, y) = 0$.

   Выясните (с обоснованием), является ли оно открытым, замкнутым, ограниченным, компактным, связным, выпуклым, для функций:

   (1) $f(x, y) = 3x + 2y - 4$; (2) $f(x, y) = 2x + y^2 + 1$; (3) $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + 4y^2 - 3$;

   (4) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 1$.

10. Множество S точек плоскости $\mathbb{R}^2$ задано двумя условиями на декартовы координаты его точек. Выясните (с обоснованием), является ли оно открытым, замкнутым, ограниченным, компактным, связным, выпуклым:

    (1) $x^2 + y^2 < 1,\ x + y < 1$; (2) $x^2 + y^2 < 1,\ x + y = 1$; (3) $x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x + y < 1$;
    (4) $x^2 + y^2 > 1,\ x + y \leqslant 1$; (5) $x^2 + y^2 > 1,\ x + y = 1$; (6) $x^2 + y^2 \geqslant 1,\ x + y \leqslant 1$;
    (7) $x^2 + y^2 = 1,\ x + y \leqslant 1$.

11. Множество S точек плоскости $\mathbb{R}^2$ задано двумя условиями на декартовы координаты его точек. Выясните (с обоснованием), является ли оно открытым, замкнутым, ограниченным, компактным, связным, выпуклым:

    (1) $x^2 + y^2 < 1,\ x + y \leqslant 1$; (2) $x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x + y \leqslant 1$; (3) $x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x + y = 1$;
    (4) $x^2 + y^2 > 1,\ x + y < 1$; (5) $x^2 + y^2 \geqslant 1,\ x + y < 1$; (6) $x^2 + y^2 \geqslant 1,\ x + y = 1$;
    (7) $x^2 + y^2 = 1,\ x + y < 1$.