Математический анализ 1
Тема 2: функции нескольких переменных.
Лекция 2.3
Пределы (продолжение). Непрерывность

8 ноября 2023 г.

Пример 2. Если $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ существует, то

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t\cdot t}{(2t)^2+t^2} = \frac{2}{5},$$

противоречие.

Здесь вместо предела $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$, где $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, сначала вычислен предел

$$\lim_{t\to 0} g(\mathbf{f}(t)), \quad \text{где} \quad \mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ \mathbf{f}(t) = (t,t),$$

а затем предел

$$\lim_{t\to 0} g(\mathbf{h}(t)), \quad \text{где} \quad \mathbf{h}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ \mathbf{h}(t) = (2t,t).$$

С равным успехом можно рассмотреть последовательности $\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\to(0,0)$ и $\left(\frac{2}{k},\frac{1}{k}\right)\to(0,0)$ при $k\to\infty$.

Теорема. *1. Пусть даны вектор-функции* $\mathbf{f} : X_1 \to \mathbb{R}^m$ *и* $\mathbf{g} : X_2 \to \mathbb{R}^m$, *где* $X_1 = D(\mathbf{f}_1), X_2 = D(\mathbf{g}) \subset \mathbb{R}^n$, *определенные в некоторой проколотой окрестности точки* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, *и существуют* $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ *и* $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Тогда существуют

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{a} - \mathbf{b},$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} (\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

2. Пусть даны вектор-функция $\mathbf{f} : X_1 \to \mathbb{R}^m$, *где* $X_1 = D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$, *и скалярная функция* $g : X_2 \to \mathbb{R}$, *где* $X_2 = D(g) \subset \mathbb{R}^n$, *определенные в некоторой проколотой окрестности точки* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, *и существуют* $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ *и* $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = b$. *Тогда существуют*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = b\mathbf{a},$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{a}}{b} \text{ при условии } b \neq 0.$$

3. Пусть даны вектор-функция $\mathbf{f} : X_1 \to \mathbb{R}^m$, *где* $X_1 = D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$, *и скалярная функция* $g : X_2 \to \mathbb{R}$, *где* $X_2 = D(g) \subset \mathbb{R}^n$, *определенные в некоторой проколотой окрестности точки* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. *Пусть в этой окрестности верно неравенство*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}| \leqslant g(\mathbf{x}),$$

и существует $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = 0$. *Тогда существует* $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$.

4. Пусть функция f – элементарная, т.е. получена из основных элементарных функций от, быть может, различных переменных с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и композиции. Если она определена в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$, то $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$, т.е. функция f непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$.

Важно, что пункты 1-3 этой теоремы верны и для пределов в предельной точке $\mathbf{x}_0$ множества $X_1 \cap X_2$ вдоль $X_1 \cap X_2$.
П. 3 часто используется в случае, когда $g(\mathbf{x}) = h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$, где функция $h(r)$ определена на $(0, \delta)$ и $\lim\limits_{r\to+0} h(r) = 0$.

Примеры. 1. Поскольку $|\sin x| \leqslant |x|$, то

$$\Big|\frac{\sin(x_1x_2^2)}{x_1^2+x_2^2}\Big| \leqslant \frac{x_1^2|x_2|}{x_1^2+x_2^2} \leqslant \frac{1}{2}|x_2| \ \Rightarrow\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\sin(x_1^2x_2)}{x_1^2+x_2^2} = 0.$$

2. Элементарная функция $f(x,y) = \operatorname{tg}\frac{y}{x} + 2\ln(xy)$ определена на открытом множестве на плоскости

$$X = \Big\{x > 0, y > 0, y \neq \big(\frac{\pi}{2} + \pi k\big)x, k \in \mathbb{N}\Big\} \cap \Big\{x < 0, y < 0, y \neq \big(\frac{\pi}{2} + \pi k\big)x, k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Каждая точка открытого множества – внутренняя, поэтому $f(x,y)$ непрерывна на X. ★

Повторные пределы

Для функций многих переменных можно определить и другие — повторные — пределы. Пусть функция $f(x, y)$ определена при $a_1 < x < b_1$, $x \neq x_0$ и $a_2 < y < b_2$, $y \neq y_0$ (на открытом прямоугольнике с разрезами). Пусть при любом фиксированном y существует предел функции одной переменной x:

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) =: v(y), \quad a_2 < y < b_2, \ y \neq y_0.$$

Он определяет функцию одной переменной $v(y)$. Тогда можно рассмотреть $\lim\limits_{y \to y_0} v(y)$. Если этот предел существует, то его называют *повторным пределом*

$$\lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right) = \lim_{y \to y_0} v(y),$$

где первый рассмотренный предел (при $x \to x_0$) называют *внутренним*, а второй (при $y \to y_0$) — *внешним*.
Аналогично можно определить и второй возможный повторный предел

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right).$$

Сделайте это самостоятельно.

Теорема. *Пусть функция $f(x,y)$ задана при $a_1 < x < b_1$, $x \neq x_0$ и $a_2 < y < b_2$, $y \neq y_0$. Если существуют (двойной, т.е. по совокупности переменных) предел*

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0, x\neq x_0, y\neq y_0} f(x,y) = c$$

и внутренние пределы

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) =: v(y),\ a_2 < y < b_2,\ y \neq y_0;$$

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) =: u(x),\ a_1 < x < b_1,\ x \neq x_0,$$

то существуют и оба повторных предела

$$\lim_{y\to y_0} \big(\lim_{x\to x_0} f(x,y) \big) = \lim_{y\to y_0} v(y),$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(\lim_{y\to y_0} f(x,y) \big) = \lim_{x\to x_0} u(x),$$

и оба они равны c, т.е.

$$\lim_{y\to y_0} \big(\lim_{x\to x_0} f(x,y) \big) = \lim_{x\to x_0} \big(\lim_{y\to y_0} f(x,y) \big) = \lim_{x\to x_0, y\to y_0, x\neq x_0, y\neq y_0} f(x,y).$$

Однако вывод о равенстве всех трех пределов верен **далеко не всегда.**

Пример 1. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$. Существуют (двойной) предел

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{x_0y_0}{x_0^2+y_0^2}\quad\text{при}\quad(x_0,y_0)\neq(0,0)$$

и внутренние пределы

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{x_0y}{x_0^2+y^2},\ (x_0,y)\neq(0,0);\ \lim_{y\to y_0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{xy_0}{x^2+y_0^2},\ (x,y_0)\neq(0,0).$$

Далее, при $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ существуют повторные пределы

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{x_0y_0}{x_0^2+y_0^2},\quad\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{x_0y_0}{x_0^2+y_0^2}.$$

Кроме того, существуют и повторные пределы

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}0=0,\quad\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}0=0.$$

Однако (двойной, по совокупности переменных) предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\quad\text{не существует,}$$

т.к., например, пределы вдоль прямых $y=kx$ в точке 0 таковы

$$\lim_{x\to 0,\ y=kx}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

и зависят от k.

Пример 2. Рассмотрим дробно-линейную функцию $f(x,y) = \frac{ax+by}{cx+dy}$, где $c \neq 0$, $d \neq 0$. Имеем

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{ax+by}{cx+dy} = \lim_{y\to 0}\frac{by}{dy} = \frac{b}{d}, \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{ax+by}{cx+dy} = \lim_{x\to 0}\frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}.$$

Поэтому при $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$ двойной предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует.

Пример 3. Рассмотрим $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$. Т.к. $|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}| \leqslant |x| + |y|$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$, то существует двойной предел

$$\lim_{(x,y)\to 0, x\neq 0, y\neq 0}(x+y)\sin\tfrac{1}{x}\sin\tfrac{1}{y} = 0.$$

Вместе с тем

$$(x+y)\sin\tfrac{1}{x}\sin\tfrac{1}{y} = \left(x\sin\tfrac{1}{x}\right)\sin\tfrac{1}{y} + \left(y\sin\tfrac{1}{y}\right)\sin\tfrac{1}{x}$$

и $x\sin\frac{1}{x} \to 0$ при $x \to 0$, $y\sin\frac{1}{y} \to 0$ при $y \to 0$, но внутренние пределы

$$\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\tfrac{1}{x}\sin\tfrac{1}{y}, \ y \neq 0, \tfrac{1}{\pi k}, \quad \lim_{y\to 0}(x+y)\sin\tfrac{1}{x}\sin\tfrac{1}{y}, \ x \neq 0, \tfrac{1}{\pi k},$$

где k — целое, $k \neq 0$, не существуют. Тем более не существуют оба повторных предела.

Предел по направлению

Любой вектор $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{E} \neq 0$ задает направление в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Пусть дана функция $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^m$, где $X = D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$, определенная в некоторой проколотой окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.
Пределом функции $\mathbf{f}$ по направлению $\mathbf{E}$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ называется предел

$$\lim_{t\to 0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}), \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|}, \quad |\mathbf{e}| = 1.$$

Очевидно, что если существует $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, то существует и предел $\lim\limits_{t\to 0} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e})$ по любому направлению $\mathbf{e}$, $|\mathbf{e}| = 1$, причем эти пределы совпадают.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.
Для $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ и любого направления $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$, $|\mathbf{e}| = 1$ имеем

$$\lim_{t\to 0} f(t\mathbf{e}) = \lim_{t\to 0} \frac{e_1^2 e_2 t^3}{e_1^4 t^4 + e_2^2 t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{e_1^2 e_2 t}{e_1^4 t^2 + e_2^2} = 0.$$

Однако $\lim\limits_{t\to 0} f(t, t^2) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^4}{t^4 + t^4} = \dfrac{1}{2}$, и предела в $(0, 0)$ не существует.

Непрерывные функции

Определение

Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{f}: X \to \mathbb{R}^m$, $X = D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbf{x}_0$ – предельная точка множества $X = D(\mathbf{f})$ и $\mathbf{x}_0 \in D(\mathbf{f})$. Вектор-функция $\mathbf{f}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$ вдоль X, если

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0, \mathbf{x}\in X} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Эквивалентные формы записи

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + o(1) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x} \in X,$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + o(1) \quad \text{при} \quad \mathbf{h} \to 0,\ \mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in X.$$

Утверждение (эквивалентное определение непрерывности по Гейне)

Введенная вектор-функция $\mathbf{f}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$ вдоль $X = D(\mathbf{f})$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

для любой последовательности $(\mathbf{x}_k) \subset D(\mathbf{f})$ такой, что $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathrm{x}_0$.

Локальные свойства непрерывных функций

1. Вектор-функция $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$ вдоль $X = D(\mathbf{f})$ тогда и только тогда, когда все скалярные функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ непрерывны в точке $\mathbf{x}_0$ вдоль $X = D(\mathbf{f})$.
2. Пусть вектор-функции $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{g} : Y \to \mathbb{R}^m$ непрерывны в точке $\mathbf{x}_0 \in X \cap Y$ вдоль $X \cap Y$ (где $\mathbf{x}_0$ – предельная точка $X \cap Y$). Тогда функция $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$ вдоль $X \cap Y$.
3. Пусть вектор-функция $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^n$ и скалярная функция $g : Y \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $\mathbf{x}_0 \in X \cap Y$ вдоль $X \cap Y$ (где $\mathbf{x}_0$ – предельная точка $X \cap Y$). Тогда функция $h_1 = \mathbf{f}g$ и, если $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то и функция $h_2 = \frac{\mathbf{f}}{g}$, непрерывны в точке $\mathbf{x}_0$ вдоль $X \cap Y$.
4. Если функция $\mathbf{g}$ непрерывна в точке $\mathbf{b}$ и существует $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, то
$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}\Big(\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})\Big) = \mathbf{g}(\mathbf{b})$$
(переход к пределу под знаком непрерывной функции).
5. В частности, если функция $\mathbf{f}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$, точка $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in D(\mathbf{g})$, и функция $\mathbf{g}$ непрерывна в точке $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, то функция $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$.
6. Элементарная функция нескольких вещественных переменных непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения.

Пример 1. Если $g(t_1, t_2) = \frac{t_1}{t_2}$, $t_2 \neq 0$ и $f_1(\mathbf{x}) = \sin(x_1 \dots x_n)$, $f_2(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, то функция-композиция

$$g(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})) = g(t_1, t_2)|_{t_1 = f_1(\mathbf{x}),\, t_2 = f_2(\mathbf{x})} = \frac{\sin(x_1 \dots x_n)}{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad \mathbf{x} \neq 0,$$

непрерывна в любой точке $\mathbf{x} \neq 0$. При применении теоремы нужно из области определения функций $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})$ исключить точку $\mathbf{x} = 0$.

Пример 2. Пусть функции $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})$ определены на множестве $S \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывны в точке $\mathbf{a} \in S$, являющейся предельной точкой S, вдоль S. Тогда функции

$$\min\{f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})\}, \quad \max\{f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})\}$$

непрерывны в точке $\mathbf{a}$ вдоль S. Это следует из непрерывности функций

$$\min\{t_1, \dots, t_m\}, \quad \max\{t_1, \dots, t_m\}$$

в любой точке $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ (докажите ее самостоятельно).

Глобальные свойства непрерывных функций

Теорема

Пусть дана непрерывная функция $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *и множество* $U \subset \mathbb{R}^m$*. Рассмотрим его* ***прообраз*** *– множество* $\mathbf{f}^{-1}(U) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in U\}$*.*

1. *Если множество* U *открыто, то и* $\mathbf{f}^{-1}(U)$ *открыто.*
2. *Если множество* U *замкнуто, то и* $\mathbf{f}^{-1}(U)$ *замкнуто.*

Доказательство. 1. Пусть сначала множество U открыто, и точка $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in U$. Тогда существует некоторая ее окрестность $B_\varepsilon(\mathbf{y}_0)$, целиком лежащая в U. По свойству непрерывности функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}_0$ существует такая окрестность $B_\delta(\mathbf{x}_0)$, $\delta = \delta_{\mathbf{x}_0} > 0$ точки $\mathbf{x}_0$, что

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(\mathbf{y}_0) \text{ для всех } \mathbf{x} \in B_{\delta_{\mathbf{x}_0}}.$$

Это означает, что $B_{\delta_{\mathbf{x}_0}}(\mathbf{x}_0) \subset \mathbf{f}^{-1}(U)$. Следовательно,

$$\mathbf{f}^{-1}(U) = \bigcup_{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in U} B_{\delta_{\mathbf{x}_0}}(\mathbf{x}_0).$$

Поэтому множество $\mathbf{f}^{-1}(U)$ открыто как объединение открытых множеств.

2. Пусть теперь множество U замкнуто. Тогда множество U^c открыто. Значит, множество $f^{-1}(U^c)$ открыто. Тогда множество

$$f^{-1}(U) = \left(f^{-1}(U^c)\right)^c$$

замкнуто.

Следствие

- *Для любой непрерывной скалярной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ множество решений неравенств $f(\mathbf{x}) < 0$ или $f(\mathbf{x}) > 0$ открыто.*

  Кроме того, открыты любые объединения и конечные пересечения таких множеств, задаваемых системами неравенств указанного вида для различных функций f.

- *Для любой непрерывной скалярной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ множество решений неравенств $f(\mathbf{x}) \leqslant 0$ или $f(\mathbf{x}) \geqslant 0$ замкнуто.*

  Кроме того, замкнуты конечные объединения и любые пересечения таких множеств, задаваемых системами неравенств указанного вида для различных функций f.

  В частности, для любых непрерывных скалярных функций $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ множество решений системы уравнений

  $$f_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, f_k(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{– замкнутое.}$$

  (поскольку эта система эквивалентна системе $f_1(\mathbf{x}) \geqslant 0, f_1(\mathbf{x}) \leqslant 0, \ldots, f_k(\mathbf{x}) \geqslant 0, f_k(\mathbf{x}) \leqslant 0$).

Примеры

- Множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} \ln(1+x^2+y^2) < x+2y \\ x^3 - 3xy + 2xy^2 > e^{-x} \end{cases}$$

  открыто.

- Множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} xyz \geqslant 1 \\ x+y+z \leqslant 10 \\ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,\ \ z \geqslant 0 \end{cases}$$

  замкнуто.

Замечание. К сожалению, это следствие не переносится на функции f с $D(f) \neq \mathbb{R}^n$. Например, для неравенства $\sqrt{x+y} < 1$ множество решений $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x+y < 1\}$ не открыто и не замкнуто.

Функции, непрерывные на компактном множестве

Теорема

Пусть вектор-функция $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^m$*, где* $X = D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$*, непрерывна на компактном множестве* $S \subset X$*, т.е. в каждой точке* $\mathbf{x} \in S$ *вдоль* S*. Тогда образ* $\mathbf{f}(S) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\}$ *– также компактное множество.*
Кратко: непрерывная функция переводит компактные множества в компактные.

Доказательство. Вспомним теорему о характеризации компактных множеств. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда
U – компактное множество $\Leftrightarrow$ из любой последовательности (x_n) точек из U можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из U.
Ниже используется сначала свойство $\Rightarrow$, а затем $\Leftarrow$.

Пусть $(\mathbf{y}_k)$ – произвольная последовательность точек множества $\mathbf{f}(S)$. Ей соответствует последовательность $(\mathbf{x}_k)$ точек множества S таких, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k$. Выберем из нее подпоследовательность $(\mathbf{x}_{k_l})$, $l \in \mathbb{N}$ сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{b} \in S$. Поскольку функция $\mathbf{f}$ непрерывна, имеем

$$\lim_{l\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k_l}) = \mathbf{f}\left(\lim_{l\to\infty} \mathbf{x}_{k_l}\right) = \mathbf{f}(\mathbf{b}).$$

Значит, из последовательности $(\mathbf{y}_k)$ выбрана подпоследовательность $\mathbf{y}_{k_l} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k_l})$, сходящуюся к точке из $\mathbf{f}(S)$. Следовательно, $\mathbf{f}(S)$ – компактное множество.

Вопросы.

1. Верно ли, что непрерывная функция переводит ограниченные множества в ограниченные?
Нет!

2. Верно ли, что непрерывная функция переводит замкнутые множества в замкнутые?
Нет!

3. Верно ли, что непрерывная функция переводит открытые множества в открытые?
Нет!

4. Верно ли, что непрерывная функция переводит открытые ограниченные множества в открытые ограниченные?
Нет!

Пусть функция f определена на множестве $S \subset \mathbb{R}^n$. К важным задачам математического анализа относятся различные **экстремальные задачи**, в том числе задачи о поиске минимума и максимума функции $f(\mathbf{x})$ на S:

$$\min_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \max_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x}).$$

Они включают в себя и поиск **точек (глобального) минимума** $\mathbf{x}_1 \in S$ и/или **точек (глобального) максимума** $\mathbf{x}_2 \in S$ таких, что

$$f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}_2) = \max_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x}),$$

т.е. для которых $f(\mathbf{x}_1) \leqslant f(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_2)$ для всех $\mathbf{x} \in S$.

Необходимыми условиями существования решения этих задач являются соответственно **ограниченность снизу** и **ограниченность сверху** значений функции $f(\mathbf{x})$ на S, т.е. существование постоянных m и M таких, что $m \leqslant f(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x}) \leqslant M$ при всех $\mathbf{x} \in S$.

Разумеется, эти условия отнюдь не являются достаточными.

Следствие (теоремы Вейерштрасса). Пусть **скалярная** функция f непрерывна на компактном (замкнутом и ограниченном) множестве S. Тогда она:

1) ограничена на S (первая теорема Вейерштрасса);
2) принимает свое наибольшее и наименьшее значение на S, т.е. существует точка $\mathbf{x}_1 \in S$ такая, что $f(\mathbf{x}_1) = \min\limits_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$,

и точка $\mathbf{x}_2 \in S$ такая, что $f(\mathbf{x}_2) = \max\limits_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$

(вторая теорема Вейерштрасса).

Доказательство. По доказанной теореме множество $f(S)$ компактно, поэтому, во-первых, оно ограничено и верна первая теорема Вейерштрасса. Значит, $f(S)$ имеет точную нижнюю и точную верхнюю грани.

Во-вторых, $f(S)$ замкнуто, поэтому эти точная нижняя и точная верхняя грани принадлежат $f(S)$, т.е. существуют $\min\limits_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$ и $\max\limits_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$ и точки $\mathbf{x}_1 \in S$ и $\mathbf{x}_2 \in S$, где эти минимум и максимум достигаются. Т.е. верна и вторая теорема Вейерштрасса.

Экономическое следствие. Непрерывная функция полезности принимает свое максимальное значение в одной (или нескольких) из точек бюджетного множества.

Первая теорема Вейерштрасса содержит три условия:

1) ограниченность S;
2) замкнутость S;
3) непрерывность $f(\mathbf{x})$ на S.

Простые примеры показывают, что при отбрасывании любого из них теорема теряет силу. Достаточно рассмотреть, например:
1) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ на $S = \mathbb{R}^n$;
2) $f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2}$ на $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leqslant 1\} \backslash \{\mathbf{0}\}$;
3) $f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2}$ при $\mathbf{x} \neq 0$, $f(\mathbf{0}) = 0$ на $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leqslant 1\}$.

Эта теорема дает довольно широкие достаточные условия ограниченности функции. Вместе с тем ни одно из них необходимым условием для этого, конечно, не является, и нетрудно построить примеры разрывных (т.е. не являющихся непрерывными) функций, определенных на множествах S, не являющихся ни ограниченными, ни замкнутыми, и при этом ограниченных на S – сделайте это самостоятельно.

Вторая теорема Вейерштрасса содержит те же самые три условия, что и первая:
1) ограниченность S;
2) замкнутость S;
3) непрерывность $f(\mathbf{x})$ на S.

Простые примеры показывают, что при отбрасывании любого из них эта теорема теряет силу. Достаточно рассмотреть, например:

1) $f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2} > 0$ на $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \geqslant 1\}$;
2) $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 > 0$ на $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\} \backslash \{\mathbf{0}\}$;
3) $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 > 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$, $f(\mathbf{0}) = \frac{1}{2}$ на $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leqslant 1\}$.

Эта теорема дает широкие и очень часто используемые достаточные условия существования решения экстремальных задач

$$f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}_2) = \max_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}).$$

Вместе с тем ни одно из них необходимым условием для этого не является, и нетрудно построить примеры разрывных функций, определенных на множествах S, не являющихся ни ограниченными, ни замкнутыми, для которых определены и достигаются и $\min\limits_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$, и $\max\limits_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$ – сделайте это самостоятельно.

Теорема

Образ связного множества при непрерывном отображении – связное множество.

Доказательство основано на том, что образ непрерывной кривой при непрерывном отображении – непрерывная кривая.

Следствие

Образ ***связного*** *компактного множества при непрерывном скалярном отображении –* ***сегмент****.*
Подробнее говоря, непрерывная скалярная функция на ***связном компактном множестве*** S *ограничена и принимает свои наименьшее и наибольшее значения на* S*, а также все промежуточные между ними значения в некоторых точках* S*.*

Условие связности S здесь существенно: в качестве контрпримера достаточно рассмотреть функцию, определенную на объединении двух замкнутых непересекающихся шаров и принимающих на них **разные** постоянные значения.

При $n = 1$ аналогичный результат был верен потому, что в нем непрерывные функции рассматривались только на сегменте $[a, b]$, а это компактное связное множество на $\mathbb{R}$.