# Математический анализ 1. Лекция 3.
# Предел последовательности (продолжение).

11 сентября 2023 г.

Предел последовательности. Продолжение

- Напоминание: сходящиеся последовательности и их простейшие свойства. Построение отрицаний определений
- Второй замечательный предел. Число Эйлера $e$ и его экономический смысл
- Дальнейшие свойства пределов
- Предельный переход в неравенствах
- Бесконечные пределы
- Теорема Кантора о вложенных сегментах
- Теорема Больцано-Вейерштрасса
- Фундаментальные последовательности и критерий Коши

## Напоминание: сходящиеся последовательности

Фундаментальное определение:
последовательность $(a_n)$ называется **сходящейся** к числу $c$, если для любого (достаточно малого) $\varepsilon > 0$ существует (достаточно большой) номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $|a_n - c| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.

Это свойство записывается как $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, а число $c$ называется **пределом** последовательности $(a_n)$.
Формальная запись:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant N\ |a_n - c| < \varepsilon.$$

Для чего она нужна: что означает, что $c$ **не является пределом** последовательности $(a_n)$?

Формальное построение отрицания: выполнение замен $\forall\ \to \exists$, $\exists\ \to \forall$ и $|a_n - c| < \varepsilon\ \to |a_n - c| \geqslant \varepsilon_0$ (только в основном свойстве!) дает

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall N \in \mathbb{N}:\ \exists n \geqslant N\ |a_n - c| \geqslant \varepsilon_0.$$

Прочитаем: число $c$ **не является пределом** последовательности $(a_n)$, если существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого номера $N$ найдется номер $n \geqslant N$ такой, что $|a_n - c| \geqslant \varepsilon_0$.
Короче (без $N$): если существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что найдется сколь угодно большой номер $n$ такой, что $|a_n - c| \geqslant \varepsilon_0$.

**Напоминание: простейшие свойства сходящихся последовательностей**

A. Единственность предела.

B. Независимость предела от конечного числа элементов последовательности.

C. Ограниченность сходящейся последовательности.

D. Равенство пределов последовательности и ее подпоследовательности.

E. Существование пределов монотонных ограниченных последовательностей и формулы для таких пределов.

# Второй замечательный предел

## Теорема

*Последовательность* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *– сходящаяся, т.е. существует число Эйлера* $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in (2,3]$ *(второй замечательный предел).*

**Доказательство.** Достаточно показать, что $a_n$ возрастает и ограничена сверху. Воспользуемся формулой *бинома Ньютона*:

$$(1+x)^n = 1+\frac{n}{1!}x^1+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}x^n.$$

Подставив $x=\frac{1}{n}$, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

При замене $n$ на $n+1$ каждое слагаемое (начиная с третьего) увеличивается и, к тому же, добавляется еще одно (положительное) слагаемое, следовательно,

$$a_n < a_{n+1},$$

т.е. $(a_n)$ возрастает.

Для доказательства ограниченности $a_n$ сверху в выписанной формуле воспользуемся неравенствами

$$\frac{1}{l!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot l} \leqslant \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{l-1}}, \quad 1 - \frac{k}{n} \leqslant 1 \text{ при } k \geqslant 0.$$

Тогда с использованием формулы суммы геометрической прогрессии

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

Теорема доказана.

Как говорят, мы раскрыли неопределенность $[1^\infty]$:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = [1^\infty].$$

Для практического вычисления пределов обычно используется существенное обобщение теоремы о втором замечательном пределе:

если существуют $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n c_n)$, то

$$\lim_{n\to\infty}(1+b_n)^{c_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n c_n)}.$$

В исходной теореме $b_n = \frac{1}{n}$, $c_n = n$ и $b_n c_n = 1$.
*Примеры.*
1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$ для любого $a$.

$$2.\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{3n+1} = e^3,$$

т.к. (здесь мы чуть забегаем вперед)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2n-1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2(3n+1)}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(3+\frac{1}{n})}{2-\frac{1}{n}} = \frac{2(3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})}{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 3.$$

# Дальнейшие свойства пределов

## Теорема

*Если* $(a_n)$ *– бесконечно малая, а* $(b_n)$ *– ограниченная последовательности, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

*Как следствие, если* $(a_n)$ *– бесконечно малая, а* $(c_n)$ *– бесконечно большая последовательность,то* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{c_n}$ *существует и равен нулю.* ★

*Пример.* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\cos n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0.$

*Доказательство.* По условию для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|a_n| < \varepsilon$ при $n \geqslant N(\varepsilon)$, а $|b_n| \leqslant C$ при $n \geqslant 1$. Тогда

$$|a_n b_n| < C\varepsilon.$$

Можно в качестве любого $\varepsilon > 0$ взять $\varepsilon' = C\varepsilon$ и тогда $N' = N(\varepsilon'/C)$.

## Теорема (пределы алгебраических операций над последовательностями)

*Пусть существуют* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. *Тогда существуют также пределы следующих алгебраических операций над* $(a_n)$ *и* $(b_n)$*:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, *где предполагается, что* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

*Замечание.* По индукции п. 1 и 3 теоремы обобщаются на любое число слагаемых и сомножителей.

*Доказательство.* 1. Пусть $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $d = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. По условию для любого $\varepsilon > 0$ имеем $|a_n - c| < \varepsilon$ при $n \geqslant N_a$ и $|b_n - d| < \varepsilon$ при $n \geqslant N_b$. Тогда

$$|a_n + b_n - (c + d)| \leqslant |a_n - c| + |b_n - d| < 2\varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant \max\{N_a, N_b\}.$$

П.2 доказывается точно также.

3. Запишем $b_n = d + b_n - d$, $a_n = a_n - c + c$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot d) + \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot (b_n - d)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(a_n - c)d + cd + \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot (b_n - d)) = 0 + cd + 0 = cd. \bigstar$$

*Примеры.* 1. Если существует $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, то $\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha c$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n^k = c^k$ при всех $k \in \mathbb{N}$ $\bigstar$.

2. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - 5\frac{1}{n} + 6\frac{1}{n^2}}{1 + 7\frac{1}{n} + 10\frac{1}{n^2}} = \frac{1 - 5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 6\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1 + 7\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 10\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1.$$

## Теорема (предельный переход в неравенствах)

*1. Если $a_n \leqslant b_n$ при достаточно больших $n$ и существуют $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

*2. Пусть для последовательностей $a_n, b_n, c_n$ выполнены неравенства $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ при всех достаточно больших $n$. Пусть также существуют $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. Тогда существует и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.*

*3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то $a_n < b_n$ при достаточно больших $n$.*

**Вопрос**: верно ли, что если $a_n < b_n$ для всех $n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$? ★

*Примеры.* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. Докажем эквивалентный результат $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ для $a_n = \sqrt[n]{2} - 1$. Ясно, что $\sqrt[n]{2} > 1$, т.е. $a_n > 0$. По неравенству Бернулли

$$2 = (1 + a_n)^n \geqslant 1 + na_n \quad \Rightarrow \quad a_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

Таким образом, верны неравенства $0 < a_n \leqslant \dfrac{1}{n}$, и предельный переход в них дает $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Доказательство.** 2. По условию для любого $\varepsilon > 0$ имеем $-\varepsilon < a_n - c < \varepsilon$ при $n \geqslant N_a$ и $-\varepsilon < b_n - c < \varepsilon$ при $n \geqslant N_b$, а также $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ при $n \geqslant N_0$. Тогда

$$c - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < c + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |c_n - c| < \varepsilon$$

при $n \geqslant \max\{N_a, N_b, N_0\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

*Еще один важный пример.* Пусть $a > 1$, а $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

– *показательная функция растет быстрее любой степенной.*
Для доказательства положим $\alpha = a - 1$. Тогда $\alpha > 0$ и $a = 1 + \alpha$. Из формулы бинома Ньютона имеем, что при $n > k$

$$a^n = (1+\alpha)^n > C_n^{k+1}\alpha^{k+1}.$$

Пусть $n > 2k$. Тогда

$$C_n^{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!} = \frac{n}{(k+1)!}(n-1)\dots(n-k) > \frac{n}{(k+1)!}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^k$$

и далее

$$0 < \frac{n^k}{a^n} = \frac{n^k}{(1+\alpha)^n} < \frac{n^k}{C_n^{k+1}\alpha^{k+1}} < \frac{2^k(k+1)!}{\alpha^{k+1}}\cdot\frac{1}{n}.$$

Осталось применить п. 2 теоремы о предельном переходе в неравенствах.

Как следствие, верен более общий результат: пусть по-прежнему $a > 1$, а $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$ (при $\alpha \leqslant 0$ это очевидно).

Еще один полезный результат.

**Свойство.** Если $a_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ при $|q| < 1$ либо $a_n$ – бесконечно большая при $|q| > 1$.

*Примеры.* 1. Пусть $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$ и снова $a_n = \frac{n^k}{a^n}$. Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{a} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a} < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

2. Пусть $a > 1$ и $a_n = \frac{a^n}{n!}$. Тогда (*факториал растет быстрее показательной функции*)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

*Пример. Степенная функция растет быстрее логарифмической:*
пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha > 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n^\alpha} = 0$. Достаточно взять $a > 1$.
Для любого номера $n$ найдем целое $k = k_n \geqslant 0$ такое, что $a^k \leqslant n < a^{k+1}$.
Ясно, что последовательность $(k_n)$ не убывает и бесконечно большая.
Верны неравенства

$$0 \leqslant \frac{\log_a n}{n^\alpha} < \frac{k_n+1}{a^{\alpha k_n}} = \frac{k_n+1}{q^{k_n}}, \quad q = a^\alpha > 1.$$

По доказанному выше в примере 1 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k+1}{q^k} = 0$, поэтому и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n+1}{q^{k_n}} = 0$.
Предельный переход в неравенствах дает нужный результат.

# Практическое вычисление пределов

Указанные свойства пределов позволяют вычислять многие сложные (на первый взгляд) из них.

*Пример.* Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n\sin(3n) + \ln n}{(2n^2-1)(n+1)}.$$

Непосредственно воспользоваться пределами алгебраических операций нельзя, возникает неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Определяем порядок роста/убывания числителя и знаменателя – это $n^3$. Делим их на $n^3$, “распределив” $n^3$ между сомножителями в знаменателе:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n\sin(3n) + \ln n}{(2n^2-1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3\sin(3n)}{n^2} + \frac{\ln n}{n^3}}{\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\sin(3n)}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^3}}{\left(2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)} = \frac{1+0+0}{(2-0)(1+0)} = \frac{1}{2}.$$

Для того чтобы провести рассуждение совсем строго, надо идти от конца к началу, начав с существования и значений входящих в эту формулу простых пределов. На практике такие детали можно опускать.

Для вычисления пределов последовательностей полезны специальные приемы, а также сведения о непрерывности функций.
*Пример.*

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = [\infty-\infty] = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1} \stackrel{?}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Что не было обосновано: предельный переход под знаком корня

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}x_n} \text{ для } x_n = 1+\frac{1}{n}.$$

Он следует из **непрерывности** функции $y=\sqrt{x}$ при $x=1$, на самом деле, при всех $x>0$. Пределы и непрерывность функций – наши следующие темы.

Здесь несколько забегая вперед, можно пользоваться тем, что если элементарные ("школьные") функции $f$ определены в окрестности некоторой точки $b$, то они непрерывны в этой точке, и при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ **возможен предельный переход под знаком функции** $f$:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(b).$$

*Примеры.* Функции $x^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $e^x$, $\sin x$ непрерывны в любой точке $x$, функция $\frac{1}{x}$ – в любой точке $x \neq 0$, $\operatorname{tg} x$ – в точках $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Бесконечно большие (б.б.) последовательности**

Последовательность $(a_n)$ называется:

- **б.б.**, если для любого (сколь угодно большого) $C > 0$ выполнено $|a_n| > C$ при всех (достаточно больших) $n \geqslant N = N(C)$;
- **б.б. и положительной при достаточно больших** $n$, если для любого (сколь угодно большого) $C > 0$ выполнено $a_n > C$ при всех (достаточно больших) $n \geqslant N = N(C)$;
- **б.б. и отрицательной при достаточно больших** $n$, если для любого (сколь угодно большого) $C > 0$ выполнено $a_n < -C$ при всех (достаточно больших) $n \geqslant N = N(C)$;

Эти последовательности **не являются сходящимися** и **не имеют предела**. Тем не менее эти свойства принято и (как мы увидим позже) удобно записывать в аналогичном виде соответственно

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

## Теорема (Кантора о вложенных сегментах)

*Пусть дана последовательность сегментов (отрезков)* $\Delta_1 = [a_1, b_1]$ *(*$a_1 < b_1$*),* $\Delta_2 = [a_2, b_2]$ *(*$a_2 < b_2$*),* $\ldots$*,* $\Delta_n = [a_n, b_n]$ *(*$a_n < b_n$*),* $\ldots$ *такая, что*

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$$

*Тогда существует точка* $c$*, принадлежащая всем сегментам* $\Delta_n$*, т.е.* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n \neq \varnothing$.

*Если при этом* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$*, то* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ *состоит ровно из одной точки.*

**Вопрос:** верна ли аналогичная теорема "о вложенных интервалах"? ★
**Доказательство.** Последовательность $a_n$ не убывает и ограничена сверху, а последовательность $b_n$ не возрастает и ограничена снизу и $a_n \leqslant b_n$ для всех $n \geqslant 1$. Значит, в этом неравенстве можно перейти к пределу и получить

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geqslant 1} a_n \leqslant \inf_{n\geqslant 1} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Поэтому сегмент $[\sup\limits_{n\geqslant 1} a_n, \inf\limits_{n\geqslant 1} b_n]$ не пуст (хотя может состоять из одной точки), и если $\sup\limits_{n\geqslant 1} a_n \leqslant c \leqslant \inf\limits_{n\geqslant 1} b_n$, то $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ и поэтому $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, что доказывает первую часть теоремы.

Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ и $c, d \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, где $c \leqslant d$. Значит, для всех $n$

$$a_n \leqslant c \leqslant d \leqslant b_n,$$

откуда $b_n - a_n \geqslant d - c$. Переход к пределу в этом неравенстве дает

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \geqslant d - c,$$

и т.к. $d - c \geqslant 0$, то $c = d$.

## Теорема (Больцано-Вейерштрасса)

*Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

*Доказательство* выполняется *методом бисекции* сегмента (его деления пополам). Пусть дана ограниченная числовая последовательность $(x_n)$. Тогда все её элементы принадлежат некоторому сегменту $\Delta_1 = [a_1, b_1]$, где $a_1 < b_1$. Положим $x_{i_1} = x_1 \in \Delta_1$.
Разделим сегмент $[a_1, b_1]$ пополам на два равных сегмента. По крайней мере один из них содержит бесконечное множество элементов последовательности. Обозначим его $\Delta_2 = [a_2, b_2]$ и выберем $x_{i_2} \in \Delta_2$, $i_2 > i_1$.
Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных сегментов

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n = [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

в которой длина $b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$, и элементов $x_{i_n} \in \Delta_n$, где $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_n < \ldots$
Ясно, что $b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$. В силу теоремы Кантора о вложенных сегментах существует единственная точка $c$, принадлежащая всем сегментам $\Delta_n$.

Кроме того, т.к. расстояние между двумя точками сегмента не превосходит его длины, то

$$|x_{i_n} - c| \leqslant b_n - a_n,$$

и т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{i_n} - c| = 0$, эквивалентно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i_n} = c$.

# Фундаментальные последовательности и критерий Коши

**Определение.** Последовательность $(a_n)$ называется **фундаментальной**, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер (натуральное число) $N = N(\varepsilon)$, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N, m \geqslant N$.

Формальная запись:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \; |a_n - a_m| < \varepsilon \; \forall n \geqslant N, m \geqslant N.$$

Для чего она нужна:

отрицание этого свойства (потребуется ниже): последовательность $(a_n)$ **не является фундаментальной**, если существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого номера $N$ найдутся такие номера $n \geqslant N, m \geqslant N$, что $|a_n - a_m| \geqslant \varepsilon_0$.

Формальное построение отрицания: выполнение замен $\forall \; \to \exists$, $\exists \; \to \forall$ и $|a_n - a_m| < \varepsilon \; \to |a_n - a_m| \geqslant \varepsilon_0$ (только в основном свойстве!) дает

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} : \; |a_n - a_m| \geqslant \varepsilon_0 \; \exists n \geqslant N, m \geqslant N.$$

## Теорема (критерий Коши сходимости последовательности)

*Последовательность сходится (т.е. имеет предел) тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Ценность этого критерия в том, что в нем – в отличие от определения сходимости последовательности – не участвует предел.

*Пример (важный).* Последовательность сумм $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ не имеет предела (расходится) и т.к. она возрастает, то является бесконечно большой положительной.
Для обоснования этого для каждого $N$ положим $n = 2N$ и $m = N$. Тогда

$$|a_n - a_m| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{2N} \geqslant N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Значит, выполнено отрицание свойства фундаментальности при $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$.
**Доказательство теоремы.** 1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N$, что для всех $n \geqslant N$ выполнено

$$|a_n - c| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для всех $n \geqslant N, m \geqslant N$ выполнено:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - c) - (a_m - c)| \leqslant |a_n - c| + |a_m - c| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Обратно, пусть теперь последовательность $(a_n)$ фундаментальная. Покажем сначала, что она ограничена. Положим $\varepsilon = 1$. Тогда для некоторого номера $N$

$$|a_n - a_m| \leqslant 1 \ \text{ при всех } \ n \geqslant N, m \geqslant N$$

В частности, $a_N - 1 \leqslant a_n \leqslant a_N + 1$ при всех $n \geqslant N$. Поэтому

$$|a_n| \leqslant \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N - 1|, |a_N + 1|\} \ \text{ при всех } \ n \geqslant N.$$

Теперь по теореме Больцано-Вейерштрасса из $(a_n)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $a_{i_n}$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n} = c$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.
Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно.

1. Поскольку последовательность $(a_n)$ фундаментальна, то существует номер $N_1$ такой, что при всех $n, m \geqslant N_1$ выполнено
$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
2. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n} = c$, то существует номер $N_2$ такой, что при всех $n \geqslant N_2$ выполнено
$$|a_{i_n} - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$
3. Поскольку $i_n \geqslant n$, то при всех $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$ выполнено
$$|a_n - c| = |a_n - a_{i_n} + a_{i_n} - c| \leqslant |a_n - a_{i_n}| + |a_{i_n} - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$