Математический анализ 1. Лекция 9. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Те́йлора – фундаментальный результат математического анализа

Контрольная работа для всего потока по вариантам состоится 19.10.2023 в 13:00-14:20.
В нее войдут как задачи типа решавшихся на лекциях и семинарах, так и вопросы по лекциям (избранные теоретические результаты с обязательными нетривиальными примерами).

Производные высших порядков

Производные высших порядков можно определить рекуррентно. По определению производная 0-го порядка $f^{(0)}(x) = f(x)$ – сама функция. Если производная n-го порядка определена в окрестности точки x и имеет производную в точке x, то $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$.
Первые три производных обозначаются также штрихами, далее латинскими цифрами: $f', f'', f''', f^{\mathrm{IV}}, \ldots$.

Основные свойства. Если функции f и g имеют производную n-го порядка в точке x, то для любых чисел a, b:

1. $(af + bg)^{(n)}(x) = af^{(n)}(x) + bg^{(n)}(x)$.
2. $(fg)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$ **(формула Лейбница)**.

В том числе

$(fg)^{(2)}(x) = f^{(2)}(x)g(x) + 2f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) + f(x)g^{(2)}(x)$,

$(fg)^{(3)}(x) = f^{(3)}(x)g(x) + 3f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) + 3f^{(1)}(x)g^{(2)}(x) + f(x)g^{(3)}(x)$

и т.д.

3. $(f(ax+b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

Примеры.

- $(x^3+\sin x)'' = (x^3)'' + (\sin x)'' = (3x^2)' + (\cos x)' = 6x - \sin x.$
- $(x^3e^{2x})''' = (x^3)'''e^{2x} + 3(x^3)''(e^{2x})' + 3(x^3)'(e^{2x})'' + x^3(e^{2x})''' =$

  $= 6e^{2x} + 36xe^{2x} + 36x^2e^{2x} + 8x^3e^{2x} = (8x^3+36x^2+36x+6)e^{2x}.$
- $(\ln(2x+3))'' = 2^2\ln''(2x+3)$. Поскольку $\ln' x = \dfrac{1}{x}$, то имеем:

  $\ln'' x = -\dfrac{1}{x^2}$. Значит, $(\ln(2x+3))'' = -\dfrac{4}{(2x+3)^2}$.

Замечание. На практике использование формулы Лейбница может быть громоздко. Вычисление производных высокого порядка произведения функций надо стремиться упростить переходом к сумме функций, когда это возможно – ниже даются разные примеры такого сорта.

Примеры. 1. Найти 3-ю производную функции $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+4x-12}$.

a. Раскладываем функцию f на элементарные дроби

$$f(x) = \frac{a}{x+6} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b(x+6)}{x^2+4x-12} = \frac{17}{8} \cdot \frac{1}{x+6} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{x-2}.$$

b. Вычисляем третью производную функции $g(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$:

$$\left(x^{-1}\right)''' = (-1) \cdot (-1-1) \cdot (-1-2) \cdot x^{-1-3} = -\frac{6}{x^4}.$$

c. Окончательно имеем

$$f'''(x) = -\frac{17}{8} \cdot \frac{6}{(x+6)^4} - \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{(x-2)^4} = -\frac{51}{4} \cdot \frac{1}{(x+6)^4} - \frac{21}{4} \cdot \frac{1}{(x-2)^4}.$$

Примеры. 2. Найдите 3-ю производную функции $f(x) = \sin(2x)\cos(4x)$.

- Преобразовываем функцию к сумме синусов $f(x) = \frac{1}{2}(\sin(6x) - \sin(2x))$.
- Вычисляем $f'''(x) = \frac{1}{2}(-6^3\cos(6x) + 2^3\cos(2x)) = 4\cos(2x) - 108\cos(6x)$.

3. Найдите 5-ю производную функции $f(x) = \ln(6x^2 + x - 2)$.

- Имеем $6x^2 + x - 2 = (2x-1)(3x+2) > 0$ при $x < -\frac{2}{3}$ или $x > \frac{1}{2}$ – это область определения функции и ее производных.
- Запишем $f(x) = \ln|(2x-1)(3x+2)| = \ln|2x-1| + \ln|3x+2|$.
- Найдем сначала $f'(x) = \dfrac{2}{|2x-1|}\operatorname{sgn}(2x-1) + \dfrac{3}{|3x+2|}\operatorname{sgn}(3x+2) = \dfrac{2}{2x-1} + \dfrac{3}{3x+2}$. Таким образом, вид $f'(x)$ не зависит от того, $x < -\frac{2}{3}$ или $x > \frac{1}{2}$.
- Далее $f^{V}(x) = (f')^{IV}(x) = \dfrac{2^5 4!}{(2x-1)^5} + \dfrac{3^5 4!}{(3x+2)^5}$.

Формулы для высших производных некоторых функций – рекомендуется знать наизусть, хотя они легко выводятся по индукции

1. $(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m\cdot(m-1)\cdot\ldots(m-n+1)\cdot x^{m-n} \text{ при } n<m \\ n! \text{ при } m=n \\ 0 \text{ при } n>m \end{cases}$

   где m и n – натуральные числа.
2. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n}$ при $x>0$, α – любое вещественное число.
3. $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$ при $a>0$.
4. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ при $x>0$, $n\in\mathbb{N}$.
5. $(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x, \text{ если } n=4k \\ \cos x, \text{ если } n=4k+1 \\ -\sin x, \text{ если } n=4k+2 \\ -\cos x, \text{ если } n=4k+3 \end{cases} = \sin(x+\frac{\pi n}{2}),\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$
6. $(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x, \text{ если } n=4k \\ -\sin x, \text{ если } n=4k+1 \\ -\cos x, \text{ если } n=4k+2 \\ \sin x, \text{ если } n=4k+3 \end{cases} = \cos(x+\frac{\pi n}{2}),\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

Дифференциалы высших порядков

Если функция f имеет n-ю производную в точке x, то ее дифференциал n-ого порядка в точке x – это функция

$$df^n(x,h) = f^{(n)}(x)h^n,$$

где h – приращение аргумента x.

Дифференциал n-го порядка функции f обычно записывают короче: $d^n f(x)$, и вместо h часто пишут dx – как и в случае дифференциала 1-го порядка. Тогда можно записать:

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Отсюда в предположении $dx \neq 0$ получаем формулу для n-ой производной: $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ или $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n}{dx^n} f(x)$.

Формула Тéйлора. Наводящие соображения 1

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0.

- Функция f **непрерывна** в точке x_0, если

$$f(x_0+h) = f(x_0) + o(1) \text{ при } \ h \to 0.$$

- Функция f **дифференцируема** в точке x_0, если

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \text{ при } \ h \to 0.$$

- Если функция f **имеет n-ю производную** $(n \geqslant 2)$ в точке x_0, то логично предположить, что верно разложение

$$f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + a_n h^n + o(h^n) \text{ при } \ h \to 0.$$

  для некоторого многочлена $a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + a_n h^n$ от h, причем ожидается, что $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$.

Последнее нетрудно проверить. По правилам действия с символом o упрощениями этого разложения являются

$$f(x_0+h) = a_0 + o(1), \quad f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + o(h) \text{ при } \ h \to 0,$$

откуда последовательно следует, что $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$.

Теорема (о единственности многочлена в искомом разложении)

Если функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует разложение

$$f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + o(h^n) \text{ при } h \to 0,$$

то коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ определены единственным образом.

Доказательство. Пусть существует второе разложение

$$f(x_0+h) = b_0 + b_1 h + \ldots + b_n h^n + o(h^n) \text{ при } h \to 0.$$

Тогда вычитание разложений дает

$$0 = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)h + \ldots + (a_n - b_n)h^n + o(h^n) \text{ при } h \to 0,$$

т.е.

$$a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)h + \ldots + (a_n - b_n)h^n = o(h^n) \text{ при } h \to 0.$$

Если бы среди коэффициентов $a_0 - b_0, a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n$ были ненулевые, то

$$a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)h + \ldots + (a_n - b_n)h^n \sim (a_k - b_k)h^k \text{ при } h \to 0,$$

где k – минимальный из индексов ненулевых коэффициентов. Однако формула $(a_k - b_k)h^k = o(h^n)$ при $h \to 0$ при $0 \leqslant k \leqslant n$ выполняться не может, противоречие.

Формула Тейлора. Наводящие соображения 2

Пусть дан многочлен

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

степени не выше n. Легко подсчитать, что

$$p_n^{(k)}(0) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^{(k)}(0) = k! a_k \quad \text{при всех} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Отсюда получаем такую новую форму записи многочлена

$$p_n(x) = p_n(0) + \frac{p_n'(0)}{1!}x + \frac{p_n''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p_n^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_n^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Аналогично, более общая запись для любого числа x_0 такова

$$p_n(x) = p_n(x_0) + \frac{p_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{p_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Многочлены Те́йлора

Определение. Пусть функция f имеет n-ю производную в точке x_0. **Многочленом Те́йлора** степени не выше n функции f в точке x_0 называется многочлен $T_n[f](x)$ такой, что

$$T_n[f](x_0) = f(x_0),\ (T_n[f])'(x_0) = f'(x_0),\ \ldots,\ (T_n[f])^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

В силу наводящих соображений 2 многочлен Тейлора записывается в виде

$$T_n[f](x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Он и будет искомым многочленом в изучаемом разложении функции f. В частном случае $x_0 = 0$ его называют также **многочленом Маклорена**. Важно, что многочлены Тейлора можно строить рекуррентно:

$$T_{k+1}[f] = T_k[f](x) + \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$$

и, как проверяется дифференцированием, они обладают важным свойством

$$(T_n[f])^{(k)}(x) = T_{n-k}[f^{(k)}])(x),\ 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Остаточным членом формулы Тейлора функции f в точке x_0 называется разность $r_{n+1}(x) = f(x) - T_n[f](x)$.

Несколько важных теорем основано на следующем вспомогательном результате, вытекающем из теоремы Коши о конечных приращениях.

Лемма

Пусть функции g и h определены в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ точки x_0 и удовлетворяют следующим условиям:

1. *функции g и h имеют $(n+1)$-ю производную в каждой точке $x \in \mathcal{O}$,*
2. $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$,
   $h(x_0) = h'(x_0) = \ldots = h^{(n)}(x_0) = 0$,
3. $h^{(k)}(x) \neq 0$ *для всех* $k = 0, 1, \ldots, n+1$ *и* $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$

Тогда для каждого $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$ существует точка c, лежащая строго между x_0 и x такая, что

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g^{(n+1)}(c)}{h^{(n+1)}(c)}.$$

Доказательство. Пусть для определенности $x > x_0$. Тогда, применяя теорему Коши о конечных приращениях к функциям f и g на сегменте $[x_0, x]$, имеем

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{g'(c_1)}{h'(c_1)},$$

где $c_1 \in (x_0, x)$. Аналогично, применяя теорему Коши о конечных приращениях к функциям f' и g' на сегменте $[x_0, c_1]$, имеем

$$\frac{g'(c_1)}{h'(c_1)} = \frac{g'(c_1) - g'(x_0)}{h'(c_1) - h'(x_0)} = \frac{g''(c_2)}{h''(c_2)},$$

где $c_2 \in (x_0, c_1)$.
Продолжая рассуждения (используя принцип математической индукции), имеем

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(c_1)}{h'(c_1)} = \ldots = \frac{g^{(n+1)}(c_{n+1})}{h^{(n+1)}(c_{n+1})},$$

где $x_0 < c_{n+1} < c_n < \ldots < c_1 < \ldots < x$. Остается положить $c = c_{n+1}$.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

Пусть функция f определена в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ точки x_0 и имеет все производные до n-го порядка включительно в точке x_0. Тогда

$$f(x) = T_n[f](x) + o((x-x_0)^n) =$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$
$$+ o((x-x_0)^n) \ \text{ при } \ x \to x_0.$$

Иначе говоря, остаточный член $r_{n+1}(x)$ формулы Тейлора $T_n[f](x)$ функции f в точке x_0 может быть представлен в ***форме Пеано***

$$r_{n+1}(x) = o((x-x_0)^n) \ \text{ при } \ x \to x_0.$$

Эквивалентная более компактная запись формулы Тейлора

$$f(x_0+h) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+o(h^n) \ \text{ при } h \to 0.$$

Запись с помощью дифференциалов

$$f(x+h) = f(x_0)+\frac{1}{1!}df(x_0,h)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0,h)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,h)+o(h^n) \ \text{ при } h \to 0.$$

Доказательство. Из условия следует, что функция f определена и имеет производные до $(n-1)$ порядка включительно в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ точки x_0. Легко проверить, что функции $g(x) = r_{n+1}(x)$ и $h(x) = (x-x_0)^n$ удовлетворяют условиям доказанной леммы (в которой $n+1$ мы заменяем на $n-1$). Тогда по лемме для всех $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$ имеем

$$\frac{r_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{r_{n+1}^{(n-1)}(c)}{n!(c-x_0)} = \frac{r_{n+1}^{(n-1)}(c) - r_{n+1}^{(n-1)}(x_0)}{n!(c-x_0)},$$

где $c = c(x)$ и c лежит между x и x_0.

Поскольку по определению производной

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_{n+1}^{(n-1)}(c) - r_{n+1}^{(n-1)}(x_0)}{n!(c-x_0)} = \lim_{c\to x_0} \frac{r_{n+1}^{(n-1)}(c) - r_{n+1}^{(n-1)}(x_0)}{n!(c-x_0)} = \frac{r_{n+1}^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

то имеем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

т.е. $r_{n+1}(x) = o((x-x_0)^n)$.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)

Пусть функция f определена и $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ точки x_0. Тогда для каждого $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$ существует точка c, лежащая строго между x_0 и x такая, что

$$f(x) = T_n[f](x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

(При $x = x_0$ формула также верна с любым $c \in \mathcal{O}$ и тривиальна).
*Иначе говоря, остаточный член $r_{n+1}(x)$ формулы Тейлора $T_n[f](x)$ функции f в точке x_0 можно представить в **форме Лагранжа***

$$r_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Остаточный член в этой форме очень похож на $n+1$-е слагаемое многочлена Тейлора, только $n+1$-я производная берется в другой точке.

Доказательство. Легко проверить, что функции $g(x) = r_{n+1}(x)$ и $h(x) = (x - x_0)^{n+1}$ удовлетворяют условиям Леммы. Следовательно, для каждой точки $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$

$$\frac{r_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g^{(n+1)}(c)}{h^{(n+1)}(c)}$$

для некоторой точки c, лежащей между x и x_0.
Непосредственным вычислением находим:

$$g^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) \text{ и } h^{(n+1)}(c) = (n+1)!$$

Отсюда

$$r_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

что и требовалось доказать.

Формулы Маклорена некоторых элементарных функций – рекомендуется знать наизусть, хотя они легко следуют из формул для производных

1. $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + $
$+ r_{n+1}(x),\ x > -1$
2. $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + r_{n+1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_{n+1}(x)$
3. $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + r_{n+1}(x) =$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + r_{n+1}(x),\ \ x > -1$
4. $\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + r_{2n+2}(x) =$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + r_{2n+2}(x)$
5. $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + r_{2n+1}(x) =$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + r_{2n+1}(x)$

Важное замечание. 1. Для функции f, нечетной на интервале $(-\delta, \delta)$, имеем

$$f(x) = -f(-x) \;\Rightarrow\; f'(x) = f'(-x) \;\Rightarrow\; f''(x) = -f''(-x) \;\Rightarrow\; \dots$$

при $|x| < \delta$ и поэтому для функции и производных четного порядка $f(0) = f''(0) = \ldots = 0$ в предположении, что указанные производные существуют. Поэтому для разложений Маклорена таких функций в

$$T_{2n+2}[f] = T_{2n+1}[f], \quad r_{2n+2}(x) = r_{2n+3}(x) = o(|x|^{2n+2}) \text{ при } x \to 0,$$

т.е. можно дать оценку остаточного члена на 1 более высокого порядка.
К ним относятся $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$ и т.д.
2. Для функции f, четной на интервале $(-\delta, \delta)$, имеем

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(x) = -f'(-x) \Rightarrow f''(x) = f''(-x) \Rightarrow f'''(x) = -f'''(-x) \Rightarrow \dots$$

и поэтому для производных нечетного порядка $f'(0) = f'''(0) = \ldots = 0$ в предположении, что указанные производные существуют. Поэтому для разложений Маклорена таких функций

$$T_{2n+1}[f] = T_{2n}[f], \quad r_{2n+1}(x) = r_{2n+2}(x) = o(|x|^{2n+1}) \text{ при } x \to 0.$$

т.е. опять можно дать оценку остаточного члена на 1 более высокого порядка.
К ним относятся $\cos x$ и др.

Пример. Рассмотрим функцию $g(x) = \ln(1 + x^2)$ и получим для нее формулу Маклорена вместе со значениями производных любого порядка в 0.
Запишем табличную формулу Маклорена для функции $f(x) = \ln(1 + x)$ при $x > -1$:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n) \text{ при } x \to 0.$$

Как следствие, для $g(x)$ формула Маклорена такова

$$\ln(1 + x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n} + o(x^{2n}) \text{ при } x \to 0.$$

Более того, в силу четности $g(x)$ остаточный член $o(x^{2n})$ можно усилить до $o(x^{2n+1})$.
Эквивалентно (!), для этой функции

$$g^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, \text{ если } n = 2k + 1, \\ \dfrac{(-1)^{k+1}(2k)!}{k}, \text{ если } n = 2k \end{cases}, \ k \in \mathbb{N}.$$