Математический анализ 1. Лекция 2.8. Однородные функции и гомотетичные функции

27 ноября 2023 г.

Нахождение экстремальных точек на границе компакта представляет собой самостоятельную задачу. Она может быть решена **методом параметризации границ** (а также методом Лагранжа). Для простоты ограничимся случаем функций f двух переменных.

Пусть граница ∂K компакта K представляет собой объединение отрезков кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$, причем каждый отрезок Γ_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ задан параметрически (с помощью взаимно-однозначного непрерывного отображения из сегмента в Γ_i):

$$\begin{cases} x = u_i(t), \\ y = v_i(t), \quad a_i \leqslant t \leqslant b_i. \end{cases}$$

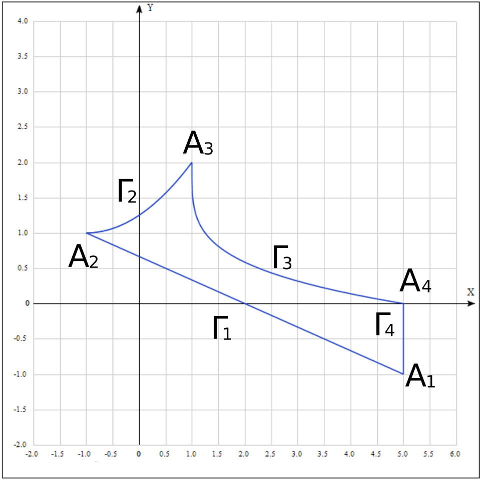
Тогда

$$\max_{\partial K} f(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \max_{[a_i, b_i]} f(u_i(t), v_i(t)),$$

$$\min_{\partial K} f(x, y) = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \min_{[a_i, b_i]} f(u_i(t), v_i(t)).$$

Задача свелась к m задачам нахождения максимального и минимального значений функций $f_i(t) = f(u_i(t), v_i(t))$ одной переменной на сегменте $[a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, m$.

Решение задачи нахождения максимума (минимума) функции f на компакте методом параметризации границ приводит к наименьшему количеству технических сложностей, если, во-первых, функция f и все функции $u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m$ дифференцируемы, во-вторых, компакт K представляет собой криволинейный многоугольник с вершинами $A_1 A_2 \ldots A_m$ и сторонами $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$, т.е.



$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{A_2\},$$
$$\Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \{A_3\},$$
$$\ldots,$$
$$\Gamma_{m-1} \cap \Gamma_m = \{A_m\},$$
$$\Gamma_m \cap \Gamma_1 = \{A_1\}.$$

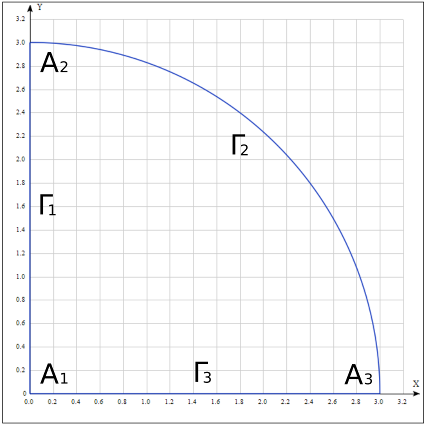
В этом случае **можно не исследовать** стационарные точки на экстремальность (!). А именно, решение может быть таким:

1. Находим множество P значений функции $f(x, y)$ во всех вершинах $A_1, A_2, \ldots, A_m$.
2. Находим все стационарные точки в $\operatorname{int} K$ и множество Q значений функции $z = f(x, y)$ в них.
3. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant m$ находим все стационарные точки функции $z = f_i(t) = f(u_i(t), v_i(t))$ на интервале (a_i, b_i) и множество R_i значений этой функции в них.
4. Тогда
$$\max_K f = \max_{P \cup Q \cup R_1 \cup \ldots \cup R_m} z,$$
$$\min_K f = \min_{P \cup Q \cup R_1 \cup \ldots \cup R_m} z.$$
При этом $\operatorname*{argmax}_K f$ и $\operatorname*{argmin}_K f$ состоят из тех рассмотренных точек, где достигаются $\max_K f$ и $\min_K f$ соответственно.

Пример. Найдем глобальный максимум и глобальный минимум и область значений функции $f(x, y) = 3x + 4y$ на компактном множестве D, заданном условиями

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Область D – криволинейный треугольник (точнее, круговой сектор) $A_1A_2A_3$ с вершинами $A_1(0, 0)$, $A_2(0, 3)$, $A_3(3, 0)$.



1. $f(A_1) = 0$, $f(A_2) = 12$, $f(A_3) = 9$.
2. Стационарных точек у функции f нет.
3. Границу области D можно естественным образом разделить на два прямолинейных отрезка Γ_1, Γ_2 и криволинейный отрезок Γ_3. Отдельно исследуем функцию f на каждом участке границы.
   3.1 Отрезок $\Gamma_1 = A_1A_2$ лежит на оси Oy, он естественным образом параметризуется так:
   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ 0 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$
   Функция $f_1(t) = f(0, t) = 4t$ стационарных точек не имеет.
   3.2 Отрезок $\Gamma_3 = A_1A_3$ лежит на оси Ox, он естественным образом параметризуется так:
   $$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ 0 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$
   Функция $f_3(t) = f(t, 0) = 3t$ стационарных точек также не имеет.

3.3 Наконец, криволинейный отрезок $\Gamma_2 = A_2A_3$ есть дуга окружности и естественным образом параметризуется так:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

На интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ функция

$$f_2(t) = f(3\cos t, 3\sin t) = 9\cos t + 12\sin t$$

имеет единственную стационарную точку t_0, которая является решением уравнения $\operatorname{tg} t = \frac{4}{3}$. Легко проверить, что $x(t_0) = \frac{9}{5}$ и $y(t_0) = \frac{12}{5}$. Значит, еще одним кандидатом на экстремум является точка $f\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right) = 15$.

4. Окончательно находим глобальные экстремумы:

$$\max_D f = \max\{0, 12, 9, 15\} = 15,$$

он достигается в точке $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$,

$$\min_D f = \min\{0, 12, 9, 15\} = 0,$$

он достигается в точке $(0, 0)$; последнее очевидно геометрически. Тем самым область значений f на D – это сегмент $[0, 15]$.

Однородные функции

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *конусом*, если

$$\mathbf{x} \in X \Rightarrow t\mathbf{x} \in X \quad \text{при всех } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ и всех } t > 0.$$

Например, это множество на плоскости между любыми двумя прямыми, проходящими через начало координат; в том числе замкнутый и открытый квадранты

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

Конус может быть не открытым и не замкнутым множеством и может быть не связным множеством.

Определение. Функция $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^m$, где множество $X = D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$ – конус, называется **однородной степени** α, если выполнено свойство

$$\mathbf{f}(t\mathbf{x}) = t^\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{при всех } \mathbf{x} \in X \text{ и всех } t > 0.$$

Здесь α – вещественное число.

Примеры

- Линейная функция $f(x,y) = 2x + 3y$ – однородная степени 1.
- Квадратичная функция $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ – однородная степени 2.
- Функция-дробь $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ – однородная степени (-1).
- Иррациональная функция $f(x,y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$ – однородная степени $\frac{1}{2}$.

Здесь области определения этих функций – естественные.

- Функция $f(x,y) = x + y^2$ (на конусе $\mathbb{R}^2$) не однородная.

Как это доказать? Пусть для любых x, y, любого $t > 0$ и для некоторого α выполнено

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y) \;\Rightarrow\; tx + (ty)^2 = t^\alpha (x + y^2).$$

Положим $x = 1, y = 0$. Тогда $t = t^\alpha$ для всех $t > 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 1$.
Положим $x = 0, y = 1$. Тогда $t^2 = t^\alpha$ для всех $t > 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 2$.
Противоречие.

Упражнение: что представляет собой дифференциал k-го порядка в плане однородности?

Экономический пример

Пусть дано бюджетное множество $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \leqslant P \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

и функция полезности $U(x_1, \ldots, x_n)$. Здесь $p_1 > 0, \ldots, p_n > 0, P > 0$ – параметры.

Пусть при каждом наборе параметров $p_1, \ldots, p_n, P$ функция полезности достигает на бюджетном множестве своего максимального значения

$$F(p_1, \ldots, p_n, P) = \max_B U(\mathbf{x}).$$

Это заведомо выполнено, если $U(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна на B.

Что можно сказать про однородность или неоднородность функции $F(p_1, p_2, \ldots, p_n, P)$?

Она однородна степени 0. Действительно, при замене набора параметров $p_1, p_2, \ldots, p_n, P$ на $tp_1, tp_2, \ldots, tp_n, tP$ бюджетное множество не меняется. Следовательно,

$$F(tp_1, tp_2, \ldots, tp_n, tP) = F(p_1, p_2, \ldots, p_n, P).$$

Замечание

В литературе иногда определение однородной функции дается без условия $t > 0$. В экономике однородные в этом более узком смысле функции практически не используются.

Утверждение

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ – конус, а функции $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^{m_1}$ и $\mathbf{g} : X \to \mathbb{R}^{m_2}$ однородны степеней α и β соответственно на X. Тогда:

1. *Если одна из функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ скалярная, то функция $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ однородна степени $\alpha + \beta$ на конусе X.*
2. *Если функция g – скалярная и $g \neq 0$ на X, то функция $\dfrac{\mathbf{f}}{g}$ однородна степени $\alpha - \beta$ на конусе X.*
3. *Если $m_1 = m_2$ и $\alpha = \beta$, то функция $a\mathbf{f} + b\mathbf{g}$ при любых $a, b \in \mathbb{R}$ однородна степени α на конусе X.*

Утверждение

Пусть множества $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ – конусы, функция $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}^m$ однородна степени α на X, функция $\mathbf{g} : Y \to \mathbb{R}^k$ однородна степени β на Y и $\mathbf{f}(X) \subset Y$. Тогда функция $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ однородна степени $\alpha\beta$ на X.

Упражнение: докажите.

Примеры

- Функция $h(x) = (x^2 + 3xy + 7y^2)(\sqrt{x+3y} - \sqrt{3x-y})$ однородна степени $\frac{5}{2}$.
- Функция $h(x) = \dfrac{x+2y}{2x+y}$ однородна степени 0.
- Функция $h(x) = 5\sqrt{x-y} + 7\sqrt[4]{x^2+3y^2}$ однородна степени $\frac{1}{2}$.
- Функция
$$h(x) = (x^2 + 3y^2)^3 - 7(9x^2 + xy + y^2)^3$$
однородна степени $2 \cdot 3 = 6$. Эту функцию можно представить в виде композиции $g \circ \mathbf{f}$ однородных функций
$$g(x,y) = x^3 - 7y^3$$
степени 3 и
$$\mathbf{f}(x,y) = (x^2 + 3y^2, 9x^2 + xy + y^2)$$
степени 2.

Теорема

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ – открытый конус, а функция $f : X \to \mathbb{R}$ однородна степени α и принадлежит классу гладкости $C^1(X)$. Тогда ее частные производные $f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}$ определены и однородны степени $\alpha - 1$ на X.

Доказательство. По условию

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \ldots, x_n)$$

при всех $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ и $t > 0$.
Продифференцируем это тождество по переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
Получим:

$$t f'_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) = t^\alpha f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n).$$

Отсюда

$$f'_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) = t^{\alpha-1} f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n).$$

Пример. Функция $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ однородна степени $\frac{3}{2}$. Тогда функция

$$f'_x(x, y) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}$$

однородна степени $\frac{1}{2}$.

Теорема Эйлера об однородных функциях

Теорема (критерий Эйлера однородности функции)

1. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ – открытый конус, а $f : X \to \mathbb{R}$ – функция класса $C^1(X)$. Функция f ***однородна степени*** *α тогда и только тогда, когда выполнено тождество*

$$x_1 f'_{x_1}(\mathbf{x}) + \ldots + x_n f'_{x_n}(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \quad \text{при всех } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X.$$

2. Переформулировка в экономических терминах. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ – открытый конус, а $f : X \to \mathbb{R}$ – функция класса $C^1(X)$, $f(\mathbf{x}) \neq 0$ на X. Функция f ***однородна степени*** *α тогда и только тогда, когда выполнено тождество*

$$E[f]_{x_1}(\mathbf{x}) + \ldots + E[f]_{x_n}(\mathbf{x}) = \alpha \quad \text{при всех } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X.$$

Схема доказательства. 1. Пусть функция f однородна степени α:

$$f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x}) \iff f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \ldots, x_n)$$

при всех $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ и $t > 0$. Продифференцируем это тождество по t и получим

$$x_1 f'_{x_1}(t\mathbf{x}) + \ldots + x_n f'_{x_n}(t\mathbf{x}) = \alpha t^{\alpha-1} f(\mathbf{x}).$$

2. Пусть теперь выполнено тождество

$$x_1 f'_{x_1}(\mathbf{x}) + \ldots + x_n f'_{x_n}(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \text{ при всех } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X.$$

Фиксируем любой вектор $\mathbf{x} \in X$ и введем вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(t\mathbf{x}) - t^\alpha f(\mathbf{x}).$$

Надо показать, что $\varphi(t) = 0$ для всех $t > 0$. Во-первых, заметим, что $\varphi(1) = 0$. Во-вторых, найдем производную функции $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= x_1 f'_{x_1}(t\mathbf{x}) + \ldots + x_n f'_{x_n}(t\mathbf{x}) - \alpha t^{\alpha-1} f(\mathbf{x}) = \\ &= \frac{1}{t}\left(t x_1 f'_{x_1}(t\mathbf{x}) + \ldots + t x_n f'_{x_n}(t\mathbf{x}) - \alpha t^\alpha f(\mathbf{x})\right) = \\ &= \frac{1}{t}\left(\alpha f(t\mathbf{x}) - \alpha t^\alpha f(\mathbf{x})\right) = \frac{\alpha}{t}\varphi(t). \end{aligned}$$

Мы получили **дифференциальное уравнение** $\varphi'(t) = \dfrac{\alpha}{t}\varphi(t)$.

Это так называемое уравнение с разделяющимися переменными. Найдем общее решение при $\varphi(t) \neq 0$ при $t > 0$:

$$\varphi'(t) = \frac{\alpha}{t}\varphi(t) \Rightarrow \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow (\ln|\varphi(t)|)' = (\alpha \ln t)' \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \ln|\varphi(t)| = \alpha \ln t + C \Rightarrow |\varphi(t)| = Dt^\alpha$ для некоторой константы D. Поскольку $\varphi(1) = 0$, то $D = 0$ и $\varphi(t) = 0$ для всех $t > 0$.

Следствие

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ – открытый конус, а функция $f : X \to \mathbb{R}$ однородна степени α и принадлежит классу гладкости $C^2(X)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j f''_{x_i x_j}(\mathbf{x}) = \alpha(\alpha-1)f(\mathbf{x})$$

при всех $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X$.

Доказательство. По теореме Эйлера

$$tx_1 f'_{x_1}(t\mathbf{x}) + \ldots + tx_n f'_{x_n}(t\mathbf{x}) = \alpha f(t\mathbf{x}) = \alpha t^{\alpha} f(\mathbf{x})$$

при всех $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ и $t > 0$. Следовательно,

$$x_1 f'_{x_1}(t\mathbf{x}) + \ldots + x_n f'_{x_n}(t\mathbf{x}) = \alpha t^{\alpha-1} f(\mathbf{x}).$$

Остается продифференцировать это тождество по t

$$x_1 \sum_{j=1}^{n} f'_{x_1 x_j}(t\mathbf{x})x_j + \ldots + x_n \sum_{j=1}^{n} f'_{x_n x_j}(t\mathbf{x})x_j = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} f(\mathbf{x}).$$

и положить $t = 1$.

Примеры

1. Функция $f(x, y) = x^2y + xy^2$ однородна степени 3. Вычислим выражение

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = x(2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy) = 3x^2y + 3xy^2.$$

Как и утверждает теорема Эйлера, оно равно $3f(x, y)$. Вычислим теперь выражение

$$x^2f''_{xx}(x, y) + 2xyf''_{xy}(x, y) + y^2f''_{yy}(x, y) =$$

$$= x^2 \cdot 2y + 2xy \cdot (2x + 2y) + 2y^2 \cdot x = 6x^2y + 6xy^2.$$

Как и утверждает следствие теоремы Эйлера, оно равно $6f(x)$.

2. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x + y^2$. Вычислим выражение

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = x \cdot 1 + y \cdot 2y = x + 2y^2.$$

Получилось выражение, которое не равно $\alpha f(x, y)$ ни для одного $\alpha \in \mathbb{R}$ (**упражнение:** почему?). По теореме Эйлера можно сделать вывод, что функция $f(x, y)$ не однородна.

3. Рассмотрим производственную функцию $f(\mathbf{x}) = Ax_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ на конусе $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$, где $A > 0$, $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$ – параметры. Эластичности этой функции по переменным $x_1, \dots, x_n$ равны $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ соответственно, а их сумма равна $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ – степени однородности этой функции, как и должно быть в соответствии с последней теоремой.

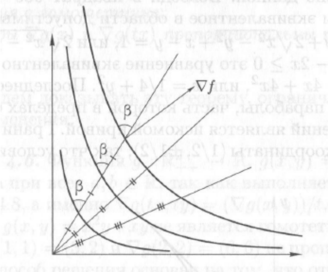
Линии уровня однородной функции и гомотетичные функции

Определение

Отображение (функция) $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ вида $\theta(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ называется *гомотетией* (подобием) при $\lambda \neq 0$.
Множества M_1, M_2 *гомотетичны* (подобны), если $M_2 = \theta(M_1)$ для некоторой гомотетии θ.

Теорема

Все непустые поверхности уровня $f(\mathbf{x}) = C$, $C > 0$ однородной функции f гомотетичны. Каждый луч, исходящий из начала координат, пересекает все поверхности уровня под одинаковым углом, точнее: угол между любым лучом l, исходящим из начала координат, и градиентом функции f в точке $\mathbf{x} \in l$ не зависит от выбора точки $\mathbf{x}$.



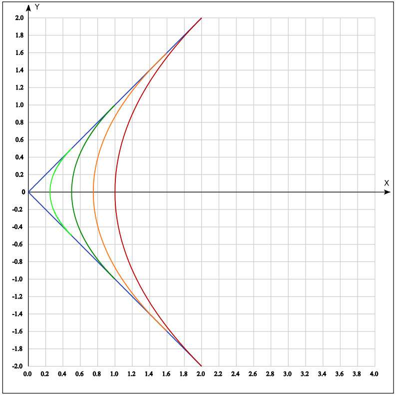
Пример

Пусть дана функция
$f(x,y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$,
определенная на конусе
$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leqslant y \leqslant x\}$.
Она однородна степени $\frac{1}{2}$.
Ее линия уровня $f(x,y) = 1$ – кривая, заданная уравнением

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 1,$$

которое эквивалентно уравнению

$$x = \frac{1}{4} + y^2, \quad x \leqslant \frac{1}{2}$$



(**упражнение:** докажите!).

Остальные линии уровня $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{C}}$, $C > 0$ можно построить, проводя гомотетичные кривые

$$Cx = \frac{1}{4} + (Cy)^2, \quad x \leqslant \frac{1}{2C}.$$

Определение

Функция f называется *гомотетичной*, если $f = g \circ h$, где h – однородная функция, определенная на конусе $X \subset \mathbb{R}^n$, а g – монотонно возрастающая функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Замечание

Гомотетичная функция не обязательно однородна, но заключение теоремы о линиях уровня для нее остается верным.

Утверждение

Если функция $f(x,y) = (g \circ h)(x,y)$ двух переменных гомотетична с однородной функцией h с $h'_x(x,y) \neq 0$ и возрастающей функцией g с $g'(t) \neq 0$, то функция $\dfrac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$ однородна степени 0.

Доказательство.

$$\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = \frac{g'(h(x,y)) \cdot h'_x(x,y)}{g'(h(x,y)) \cdot h'_y(x,y)} = \frac{h'_x(x,y)}{h'_y(x,y)}.$$

Остается вспомнить, что если функция h однородна степени α, то ее частные производные однородны степени $\alpha - 1$, и что частное однородных функций однородно.

Пример

Гомотетична ли функция $f(x, y) = x + xy$? Нет, поскольку функция $\dfrac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = \dfrac{1+y}{x}$ не однородна.

Теорема (критерий гомотетичности функции)

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ – открытый конус, а функция $f : X \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $C^1(X)$. Функция f ***гомотетична*** *тогда и только тогда, когда градиенты функции f в точках $\mathbf{x}$ и $t\mathbf{x}$ пропорциональны при всех $\mathbf{x} \in X$ и $t > 0$ с коэффициентом пропорциональности, который может зависить от $\mathbf{x}$ и t.*

Пример

Функция $f(x, y) = e^{x+2y}$ гомотетична (но, конечно, не однородна) на $\mathbb{R}^2$, поскольку:

- ее градиент в точке $\mathbf{x} = (x, y)$ равен $\left(e^{x+2y}, 2e^{x+2y}\right) = e^{x+2y}(1, 2)$,
- а ее градиент в точке $t\mathbf{x} = (tx, ty)$ равен $\left(e^{t(x+2y)}, 2e^{t(x+2y)}\right) = e^{t(x+2y)}(1, 2)$;

эти векторы пропорциональны.