Математический анализ 1. Лекция 2. Множества и функции. Последовательности и их пределы

6 сентября 2023 г.

Множества и отношение принадлежности

Соответствия и функции

Числовые последовательности

Сходящиеся последовательности и их простейшие свойства

Множества и отношение принадлежности

Основные математические понятия – это *множество* и *отношение принадлежности*. Множества и отношение принадлежности на универсуме всех множеств обычно считаются неопределимыми понятиями. Содержательно, множество X – это произвольная совокупность каких-либо объектов, которые называются его *элементами* (они *принадлежат* множеству X).
Формально свойства множеств и отношения принадлежности задаются с помощью *аксиом*. Основной аксиомой теории множеств является *аксиома объемности* (экстенсиональности):

Множество однозначно определяется своими элементами, иначе говоря, если два множества X и Y имеют одни и те же элементы, то эти множества равны.

Остальные аксиомы декларируют существование некоторых специальных множеств и допустимость различных операций над множествами.

Основные обозначения

- $\in$ – символ отношения принадлежности. Выражение "$x \in X$" означает, что x есть элемент множества X.
- $\varnothing$ – пустое множество, т.е. множество, не содержащее ни одного элемента.
- $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – конечное множество задается перечислением его элементов a_1, a_2, …, a_n.
  Пример: $\{3, 9, 1\}$. По аксиоме объемности такое множество единственно.
- $\{x \in X : \varphi(x)\}$ – множество всех элементов из X, удовлетворяющих условию φ. Если X ясно из контекста, то пишут короче: $\{x : \varphi(x)\}$.
  Пример: $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 < 0\} = (1, 2)$, где $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел.
- $\subset$ – символ отношения включения (не путать с $\in$!). $X \subset Y$ означает, что для любого $x \in X$ также $x \in Y$. Тогда X называют **подмножеством** Y.
  Пример (для подмножеств $\mathbb{R}$): $(1, 2) \subset (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$.
- Логические символы: связки $\vee$ (или), $\wedge$ (и), $\neg$ (отрицание), $\Rightarrow$ (следует) и так называемые кванторы $\forall$ (для всех), $\exists$ (существует).
  Пример (прочитаем сейчас, а осмыслим сегодня позже)

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ |a_n| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N(\varepsilon).$$

Свойства отношения включения

- Если $X \subset Y$ и $Y \subset X$, то $X = Y$ (свойство антисимметричности).
- Если $X \subset Y$ и $Y \subset Z$, то $X \subset Z$ (свойство транзитивности).
- $X \subset X$ (свойство рефлексивности).
- $\varnothing \subset X$.

Операции над множествами

- Объединение: $X \cup Y = \{x : x \in X$ или $x \in Y\} = \{x : x \in X \vee x \in Y\}$.
- Пересечение: $X \cap Y = \{x : x \in X$ и $x \in Y\} = \{x : x \in X \wedge x \in Y\}$.
- Разность: $X \setminus Y = \{x : x \in X$ и $x \notin Y\}$.
- Дополнение (относительно фиксированного универсального множества Ω): $\bar{X} = \Omega \setminus X$ (для множеств $X \subset \Omega$).

  Пример: для множеств на числовой прямой $\Omega = \mathbb{R}$, и для $X = (0, +\infty)$ имеем $\bar{X} = \mathbb{R} \setminus (0, +\infty) = (-\infty, 0]$.
- Симметрическая разность: $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ – множество таких x, которые принадлежат только одному из множеств X или Y. Поэтому $X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

Пример: для $X = (0, 2)$, $Y = (1, 3)$ имеем $X \cup Y = (0, 3)$, $X \cap Y = (1, 2)$, $X \setminus Y = (0, 1]$, $Y \setminus X = [2, 3)$, а также $\overline{X} = \mathbb{R} \setminus X = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$, $X \Delta Y = (0, 1] \cup [2, 3) = (0, 3) \setminus (1, 2)$. ★

Более сложные операции над множествами

Объединения и пересечения семейств множеств

- Если дано семейство множеств X_α, где α пробегает некоторое множество индексов A, то аналогично вводятся

$$\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha = \{x : x \in X_\alpha \text{ при некотором } \alpha \in A\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : x \in X_\alpha \text{ при всех } \alpha \in A\}.$$

Пример: пусть $X_i = \{x \in \mathbb{R} : x \in (i, +\infty)\}$, где i пробегает множество неотрицательных целых чисел $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Найдите $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} X_i$ и $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} X_i$. ★

Упорядоченные пары, декартово произведение

Из аксиомы объемности следует, что элементы принадлежат множеству "без учета порядка": $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.
Можно ввести упорядоченную пару (x, y) элементов $x \in X$ и $y \in Y$. Для таких пар

$$(x, y) = (x', y') \text{ тогда и только тогда, когда } x = x' \text{ и } y = y'.$$

Пример: для упорядоченных пар $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Декартово (или прямое) **произведение** множеств X и Y – это множество упорядоченных пар

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}.$$

Пример: произведение интервалов $(a, b) \times (c, d)$ можно отождествить с прямоугольником на плоскости. ★
Аналогично вводится декартово произведение n множеств $X_1 \times \ldots \times X_n$.

В частности, **декартова n-я степень** множества X – это множество

$$X^n = \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ раз}}.$$

Его элементы отождествляют с упорядоченными n-ками элементов X.
Пример (очень важный): $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

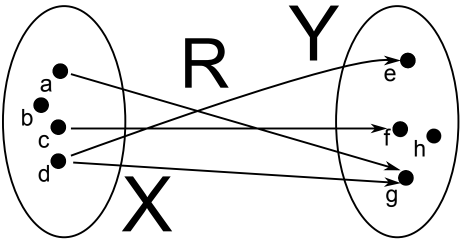
Соответствия и функции

Соответствие из множества X в множество Y – это любое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Это обобщение понятия функции. Для иллюстрации соответствия $R \subset X \times Y$ иногда изображают в виде схем, состоящих из элементов X и Y и стрелок, которые соединяют элементы x и y для каждой пары $(x, y) \in R$.

Пример. На картинке изображено соответствие

$$R = \{(a, g), (c, f), (d, e), (d, g)\}$$

из множества $X = \{a, b, c, d\}$ в множество $Y = \{e, f, g, h\}$.



Обратным к соответствию $R \subset X \times Y$ называется соответствие

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \colon (x, y) \in R\}.$$

из множества Y в множество X. В нашем примере

$$R^{-1} = \{(g, a), (f, c), (e, d), (g, d)\}$$

Соответствие f называется *функциональным* или просто **функцией** из множества X в множество Y, если **каждому** элементу $x \in X$ поставлен в соответствие **ровно один** элемент $y \in Y$, т.е.

1. для каждого $x \in X$ существует такой $y \in Y$, что $(x, y) \in f$;
2. для всех $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, если $(x, y_1) \in f$ и $(x, y_2) \in f$, то $y_1 = y_2$.

Обозначения:

$$f : X \to Y, \quad y = f(x) \,(\text{вместо } (x, y) \in f).$$

В примере выше соответствия R и R^{-1} функциональными не являются. ★
Еще пример: соответствие из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ вида $\{(x, \operatorname{tg} x) : x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ и обратное к нему функциональными также не являются.

Графиком функции $f : X \to Y$ называют множество пар $\{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$.

Замечание: данное определение функции соответствует *классическому* определению функции. В нем фактически понятия "функция" и "график функции" тождественны.
Но чаще функцию "определяют" как способ получения по каждому $x \in X$ некоторого $y = f(x) \in Y$. Такое определение больше соответствует интуиции, однако понятие *способа* с трудом поддается строгой формализации.

Обозначения. Пусть дана функция $f : X \to Y$. Тогда:

1. **область определения** X обозначают через $\operatorname{dom} f, D(f), D_f$.
2. **образ множества** $A \subset X$ посредством функции f обозначают через $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$.
3. **область значений** $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ обозначают через $\operatorname{ran} f, R(f), R_f, E(f), E_f$.

Пример: $\sin x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $D(\sin x) = \mathbb{R}$, $\sin([0, \pi]) = [0, 1]$, $R(\sin x) = [-1, 1]$.

Понятие соответствия важно потому, что нередко стандартного определения функции недостаточно, его приходится расширять, и рассматривать “функции” с $D(f) \neq X$, многозначные функции и т.д.

Определения. Функция $f : X \to Y$ называется:

1. *сюръективной* (или из X **на** Y), если для каждого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $f(x) = y$; это эквивалентно тому, что $R(f) = Y$;
2. *инъективной* (или вложением), если $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ для всех $x_1, x_2 \in X$;
3. *биективной* (взаимно однозначной), если она инъективна и сюръективна одновременно, т.е. для каждого $y \in Y$ существует единственный $x \in X$ такой, что $f(x) = y$;
4. *обратимой*, если обратное соответствие f^{-1} функционально.

Свойства. 1. Если функция $f : X \to Y$ является вложением, то функция $f : X \to R(f)$ биективна (взаимно однозначна). ★
2. Функция $f : X \to Y$ обратима тогда и только тогда, когда она взаимно однозначна. ★

Примеры: 1. $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, но не **на** $\mathbb{R}$ и не вложение.
$x^2 : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ – функция **на** $[0, +\infty)$, но не вложение.
$x^2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ – функция **на** $[0, +\infty)$ и вложение $\Leftrightarrow$ она взаимно однозначна, а $\sqrt{x} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ – обратная к ней функция. ★
2. $\operatorname{arctg} x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, но не **на** $\mathbb{R}$, но вложение. ★
$\operatorname{arctg} x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ функция из $\mathbb{R}$ **на** $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ и вложение $\Leftrightarrow$ она взаимно однозначна,

Композиция функций

Пусть даны функции $f : X \to Y$ и $g : U \to V$, причем $R(f) \cap U \neq \varnothing$. Тогда определена их **композиция** $g \circ f : X_0 \to V$ такая, что $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ для любого $x \in D(g \circ f) = X_0 \subset X$, где $X_0 = \{x \in X : f(x) \in U\}$.
Композицию числовых функций часто называют **сложной функцией**.

Пример. Пусть $f(x) = 1 - x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а $g(x) = \sqrt{x} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Тогда
$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - x^2} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.
Можно рассмотреть и другую композицию
$(f \circ g)(x) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Теорема

Пусть функция $f : X \to Y$ обратима. Тогда

1. *$f \circ f^{-1}$ есть тождественная функция из множества Y в множество Y, т.е. $f(f^{-1}(y)) = y$ для всех $y \in Y$.* ★
2. *$f^{-1} \circ f$ есть тождественная функция из множества X в множество X, т.е. $f^{-1}(f(x)) = x$ для всех $x \in X$.*

Пример. Пусть $f(x) = e^x : X = \mathbb{R} \to Y = (0, +\infty)$. Тогда
$f^{-1}(x) = \ln x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ и
$(f \circ f^{-1})(x) = e^{\ln x} = x : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$,
$(f^{-1} \circ f)(x) = \ln(e^x) = x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Принципы супремума и инфимума

Определения.

- Число $d \in \mathbb{R}$ называется **верхней гранью** множества $X \subset \mathbb{R}$, если $x \leqslant d$ для всех $x \in X$.
- Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным сверху**, если оно имеет верхнюю грань. В противном случае в X имеются сколь угодно большие элементы.
- Число $d_* \in \mathbb{R}$ называется **точной верхней гранью** (супремумом) множества $X \subset \mathbb{R}$, если d_* есть верхняя грань множества X и $d_* \leqslant d$ для всех верхних граней d (т.е. d_* есть наименьшая верхняя грань; иными словами, любое число $d_1 < d_*$ уже не является верхней гранью множества X). Обозначение: $d_* = \sup X$.

  Примеры: 1. $\sup(a,b) = \sup(a,b] = b$.

  2. $\sup\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{arctg} x\} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

  $\Rightarrow$ тем самым не обязательно, чтобы $\sup X \in X$.

  Если же $\sup X \in X$, то $\sup X = \max X$ является **максимумом** (максимальным элементом) X таким, что $x \leqslant \max X$ при всех $x \in X$.

Определение (продолжение).

- Число $c \in \mathbb{R}$ называется **нижней гранью** множества $X \subset \mathbb{R}$, если $x \geqslant c$ для всех $x \in X$.
- Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным снизу**, если оно имеет нижнюю грань.

  В противном случае в X имеются сколь угодно большие по модулю отрицательные элементы.
- Число $c_* \in \mathbb{R}$ называется **точной нижней гранью** (инфимумом) множества $X \subset \mathbb{R}$, если c_* есть нижняя грань множества X и $c_* \geqslant c$ для всех нижних граней c множества X (т.е. c_* есть наибольшая верхняя грань; иными словами, любое число $c_1 > c_*$ уже не является нижней гранью X). Обозначение: $c_* = \inf X$.

Пример: 1. $\inf(a, b) = \inf[a, b) = a$.
2. $\inf\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{arctg} x\} = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.
$\Rightarrow$ тем самым снова не обязательно, чтобы $\inf X \in X$.

Если же $\inf X \in X$, то $\inf X = \min X$ является **минимумом** (минимальным элементом) X таким, что $x \geqslant \min X$ при всех $x \in X$.

Принцип супремума.

Каждое ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань (супремум) $\sup X \in \mathbb{R}$.

Принцип инфимума.

Каждое ограниченное снизу множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет точную нижнюю грань (инфимум) $\inf X \in \mathbb{R}$.

Справедлива простая формула, связывающая точную верхнюю и точную нижнюю грани (если одна из них существует, то существует и вторая)

$$-\sup X = \inf(-X), \quad \text{где} \quad (-X) = \{-x : x \in X\}.$$

Пример: пусть $X = R(\sin x + 1) = [0, 2]$, тогда $\sup X = 2$, а $(-X) = R(-\sin x - 1) = [-2, 0]$ и $\inf(-X) = -2$.

Принципы супремума и инфимума, в частности, обеспечивают возможность извлекать квадратные корни из натуральных чисел, а возводить натуральные числа в произвольную вещественную степень

$$\sqrt{2} = \sup\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} = \inf\{q \in \mathbb{Q} : q^2 > 2\},$$

$$2^\pi = \sup\{2^q : q \in \mathbb{Q},\ q < \pi\} = \inf\{2^q : q \in \mathbb{Q},\ q > \pi\},$$

а также определять различные более сложные операции.

Числовые последовательности

Последовательности – это функции $a : \mathbb{N} \to Y$. Последовательности $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называются **числовыми**.

Обычно пишут a_n вместо $a(n)$. Последовательность “целиком” записывают как a, или (a_n) или, для наглядности, $a_1, a_2, \ldots$.

Примеры:

- последовательность $1, 2, 3, \ldots \;\Leftrightarrow\; a_n = n$
- последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \;\Leftrightarrow\; a_n = \frac{1}{n}$
- последовательность $1, 1, 1, \ldots \;\Leftrightarrow\; a_n = 1$.

Замечание: иногда для удобства элементы последовательности нумеруют не с a_1, а с a_0 или a_{n_0} для некоторого натурального числа n_0.

Типы последовательностей

Последовательность (a_n) называется:

- (строго) **возрастающей**, если $a_n < a_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
  Эквивалентно, если $a_n < a_m$ для всех натуральных $n < m$.
  Примеры: $a_n = n$; $b_n = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \Leftrightarrow 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$.
- **неубывающей**, если $a_n \leqslant a_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
  Эквивалентно, если $a_n \leqslant a_m$ для всех натуральных $n < m$.
  Пример: $a_n = \left[\frac{n}{2}\right] \Leftrightarrow 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$.
- (строго) **убывающей**, если $a_n > a_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
  Эквивалентно, если $a_n > a_m$ для всех натуральных $n < m$.
  Примеры: $a_n = -n$; $b_n = \frac{1}{n}$.
- **невозрастающей**, если $a_n \geqslant a_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
  Эквивалентно, если $a_n \geqslant a_m$ для всех натуральных $n < m$.
  Пример: $a_n = -\left[\frac{n}{2}\right]$.

Замечание: последовательность a_n возрастающая $\Leftrightarrow -a_n$ убывающая (т.к. $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow -a_n > -a_{n+1}$).
Последовательность a_n неубывающая $\Leftrightarrow -a_n$ невозрастающая (т.к. $a_n \leqslant a_{n+1} \Leftrightarrow -a_n \geqslant -a_{n+1}$).

Эти простые факты важны, т.к. позволяют легко сводить результаты для убывающих или невозрастающих последовательностей к аналогичным результатам для возрастающих или неубывающих последовательностей.

Последовательность (a_n) называется:

- **ограниченной сверху** (числом C), если $a_n \leqslant C$ при всех $n \geqslant 1$
- **ограниченной снизу** (числом C), если $C \leqslant a_n$ при всех $n \geqslant 1$
- **ограниченной**, если $|a_n| \leqslant C$ при всех $n \geqslant 1$,

  т.е. если она ограничена и сверху, и снизу.

Примеры. Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ ограничена сверху (единицей) и снизу (нулем); последовательность $a_n = n$ – только снизу (единицей); последовательность $a_n = (-1)^n n$ не ограничена ни снизу, ни сверху.

Замечание:
неубывающая последовательность (a_n) ограничена снизу числом a_1,
невозрастающая последовательность (a_n) ограничена сверху числом a_1.

Последовательность (a_n) называется:

- **бесконечно малой**, если для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ выполнено $|a_n| < \varepsilon$ при всех (достаточно больших) $n \geqslant N = N(\varepsilon)$;
  Пример: $a_n = \dfrac{1}{n}$ (здесь $\dfrac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, что выполнено при $n \geqslant N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$).
  Формальная запись этого свойства была использована в начале лекции
  $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ |a_n| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N(\varepsilon).$$
- **бесконечно большой**, если для любого (сколь угодно большого) $C > 0$ выполнено $|a_n| > C$ при всех (достаточно больших) $n \geqslant N = N(C)$;
  Пример: $a_n = (-1)^n n$ (здесь $|a_n| = n > C$ при $n \geqslant N(C) = [C] + 1$).
  Поскольку $0 < |a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n| > C = \dfrac{1}{\varepsilon}$, то:
  последовательность $a_n \neq 0$ является бесконечно малой $\Leftrightarrow$
  последовательность $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ определена и является бесконечно большой.

Сходящиеся последовательности

Окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – это любой интервал (a, b), содержащий точку x.
Эпсилон–окрестность (ε–окрестность) точки x – это интервал $O_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Фундаментальное определение:
последовательность (a_n) называется **сходящейся** к числу c, если для любого (достаточно малого) $\varepsilon > 0$ существует (достаточно большой) номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $|a_n - c| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.
Это свойство записывается как $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, а число c называется **пределом** последовательности (a_n).

Геометрически, последовательность (a_n) **сходится** к числу c, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $a_n \in O_\varepsilon(x)$ при всех $n \geqslant N$.

Бесконечно малая последовательность (a_n) – это последовательность, сходящаяся к 0 (имеющая $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$).

Непосредственно из определений следует, что последовательность (a_n) сходится к числу $c \Leftrightarrow$ последовательность $(a_n - c)$ – бесконечно малая.

Свойства сходящихся последовательностей и пределов

A. **Единственность предела** (даже над таким свойством надо задуматься!). Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует, то он единствен.
Геометрическое доказательство от противного: ★

B. **Независимость предела от конечного числа элементов последовательности.** Существование и значение $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не зависят от любого конечного числа элементов последовательности (a_n).
Иначе говоря, пусть $a_n = b_n$ для всех $n \geqslant N_0$. Тогда пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют или не существуют одновременно и, если они существуют, то равны.

   Это свойство сразу ясно из определения, и оно подчеркивает, что сходимость (a_n) – это свойство ее элементов при больших n.

C. **Ограниченность сходящейся последовательности.** Если последовательность сходится (т.е. имеет предел), то она ограничена (сверху и снизу).
Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$, например, пусть $\varepsilon = 1$. Тогда по определению существует такое число N, что для всех $n \geqslant N$ выполнено $|a_n - c| < 1$ и поэтому
$|a_n| \leqslant |a_n - c| + |c| < |c| + 1$. Следовательно,
$|a_n| \leqslant C := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |c| + 1\}$ при всех $n \geqslant 1$.

D. Пусть дана последовательность a_n. Если часть ее элементов (конечную или счетную) удалить, так чтобы осталось счетное множество элементов, то эти оставшиеся элементы будут образовывать **подпоследовательность** элементов a_n.

Элементы подпоследовательности, не изменяя их порядка, можно заново перенумеровать натуральными числами $1, 2, 3, \ldots$.

Примеры: $b_n = a_{2n-1}$ (все элементы с нечетными номерами), $b_n = a_{2n}$ (все элементы с четными номерами), $b_n = a_{n^2}$.

Иными словами, подпоследовательность – это последовательность элементов вида $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}, \ldots$ с возрастающей последовательностью номеров (i_n), т.е. $1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_n < \ldots$.

Обратим внимание на то, что $i_n \geqslant n$ при всех $n \geqslant 1$.

Равенство пределов последовательности и ее подпоследовательностей. Пусть последовательность (a_n) – сходящаяся, а (b_n) – ее подпоследовательность. Тогда и (b_n) – сходящаяся и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Примеры: 1. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то существуют и пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n^2}$, и все они равны $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ не существует (от противного) ★

Доказательство: если (i_n) – возрастающая последовательность номеров, и некоторое свойство элементов последовательности (a_n) верно при $n \geqslant N$, то оно тем более верно при $i_n \geqslant N$.

E. Более глубокое свойство.

Пределы монотонных ограниченных последовательностей.

1. Если последовательность (a_n) – неубывающая и ограничена сверху, то она сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\geqslant 1} a_n$.

Пример: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

2. Если последовательность (a_n) – невозрастающая и ограничена снизу, то она сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\geqslant 1} a_n$.

Пример: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Доказательство. 1. Пусть $d = \sup\limits_{n\geqslant 1} a_n$. Во-первых, т.к. d есть верхняя грань множества $\{a_n : n \geqslant 1\}$, то $a_n \leqslant d$ при всех $n \geqslant 1$. Во-вторых, фиксируем любое $\varepsilon > 0$. Тогда найдется хотя бы один элемент a_N (с $N = N(\varepsilon)$) такой, что $d - \varepsilon < a_N < d$: в противном случае число $d - \varepsilon$ было бы верхней гранью множества $\{a_n : n \geqslant 1\}$, а это противоречит тому, что d есть его точная верхняя грань. Далее, последовательность (a_n) – неубывающая, поэтому $d - \varepsilon < a_N \leqslant a_n$ при $n \geqslant N$. Значит, для всех $n \geqslant N$ выполнено $d - \varepsilon < a_n \leqslant d < d + \varepsilon$, т.е. $|a_n - d| < \varepsilon$, что и требовалось.

2. Вторую часть утверждения можно доказать аналогично или свести к первой, поскольку тогда $(-a_n)$ – невозрастающая последовательность и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\sup_{n\geqslant 1}(-a_n) = \inf_{n\geqslant 1} a_n.$$