Математический анализ 1. Лекция 11
Односторонние свойства функций.
Выпуклые и вогнутые функции. Точки перегиба

9 октября 2023 г.

Односторонняя непрерывность

Определения. 1. Пусть функция f определена на полусегменте $[x_0, x_0 + \delta)$. Тогда она **непрерывна справа** в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

2. Пусть функция f определена на полусегменте $(x_0 - \delta, x_0]$. Тогда она **непрерывна слева** в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Эти понятия уже использовались в основных теоремах о функциях, непрерывных на сегменте.

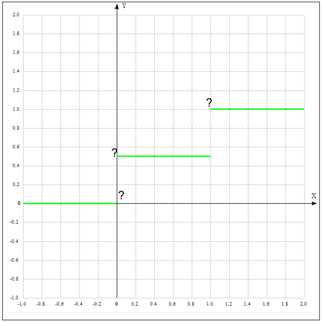
Примеры. 1. Функция $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$
в точке $x_0 = 0$ непрерывна справа, но не непрерывна слева.
2. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке $x_0 = 0$.

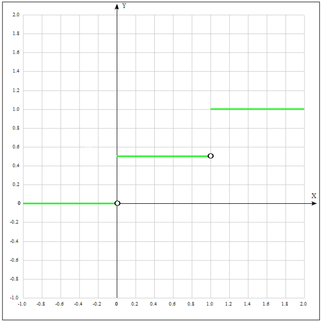
На свойства непрерывности справа и слева переносятся основные свойства обычной непрерывности, например, непрерывности арифметических действий над непрерывными функциями.

Односторонняя непрерывность функций имеет важное значение в некоторых разделах *теории вероятностей*. Пусть X – некоторая случайная величина. С ней связана ее функция распределения

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x).$$

Рассмотрим в качестве примера случайную величину, принимающую только два значения: 0 и 1 с равными вероятностями $\frac{1}{2}$. Как выглядит функция распределения этой случайной величины?





Эта функция непрерывна справа (в любой точке $x \in \mathbb{R}$). Оказывается, что **любая** функция распределения $F(x)$ непрерывна справа.

Односторонние производные и касательные

Определения. 1. Пусть функция f определена на полусегменте $[x_0, x_0+\delta)$.
Правая производная функции f в точке x_0 – это

$$f'(\mathbf{x}+\mathbf{0}) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

2. Пусть функция f определена на полусегменте $(x_0-\delta, x_0]$.
Левая производная функции f в точке x_0 – это

$$f'(\mathbf{x}-\mathbf{0}) = \lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to -0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}.$$

Пример. Правая производная функции $f(x)=|x|$ в точке 0 – это

$$|x|'(+0) = \lim_{h \to +0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to +0} 1 = 1,$$

а ее левая производная в точке 0 – это

$$|x|'(-0) = \lim_{h \to -0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to -0} (-1) = -1.$$

Свойства.

1. Функция f имеет $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда она имеет $f'(x-0)$ и $f'(x+0)$, и они совпадают.
2. *Определение.* Функция f **дифференцируема справа** в точке x_0, если для некоторого числа A

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + o(h) \text{ при } h \to +0.$$

   Это свойство эквивалентно существованию правой производной $f'(x+0)$, причем $A = f'(x_0+0)$.
3. *Определение.* Функция f **дифференцируема слева** в точке x_0, если для некоторого числа A

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + o(h) \text{ при } h \to -0.$$

   Это свойство эквивалентно существованию левой производной $f'(x-0)$, причем $A = f'(x_0-0)$.

Пример. Пусть $f(x) = x^{x+1}$. Поскольку $\lim\limits_{h\to+0} h^h = \lim\limits_{h\to+0} e^{h\ln h} = 1$, то

$$h^{h+1} = h \cdot h^h \sim h \text{ при } h \to +0,$$

т.е. $f(h) = 1 \cdot h + o(h)$ при $h \to +0$. Значит, $f'(+0) = 1$ (левая же производная $f'(-0)$ не существует, т.к. $f(x)$ не определена при $x < 0$).

На правые и левые производные переносятся основные свойства производных, например, формулы для производных арифметических действий над дифференцируемыми функциями.

Если функция f имеет правую производную $f'(x_0+0)$, то ее график имеет правую **касательную** в точке x_0, которая задается уравнением

$$y - f(x_0) = f'(x_0+0)(x - x_0).$$

Если функция f имеет левую производную $f'(x_0-0)$, то ее график имеет левую **касательную** в точке x_0, которая задается уравнением

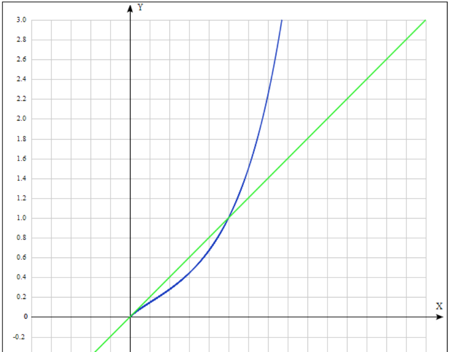
$$y - f(x_0) = f'(x_0-0)(x - x_0).$$

Пример.

Прямая $y = x$ есть правая касательная к графику функции

$$f(x) = x^{x+1}$$

в точке 0.



Односторонние вертикальные асимптоты.

Определения. 1. Пусть функция f определена на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$. Прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции f, если

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty.$$

2. Пусть функция f определена на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$. Прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции f, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty.$$

Примеры. 1. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x) = \ln x$, определенной на $(0, +\infty)$, т.к. $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$.

2. Для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, рассматриваемой только на основном периоде $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, прямые $x = \pm\frac{\pi}{2}$ являются вертикальными асимптотами ее графика, т.к. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = +\infty$.

Чем качественно отличаются графики функций $f(x) = e^x$ и $f(x) = \ln x$? ★

Выпуклые и вогнутые функции.

Рассмотрим функцию $f : Y \to \mathbb{R}$, где $Y \subset \mathbb{R}$, и промежуток $X \subset Y$.
Определения. 1. Она называется **выпуклой** на X, если для любых чисел $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

(Заметим, что для любой f неравенство переходит в равенство и выполнено автоматически при $x_1 = x_2$ или $\alpha = 0$ или 1).

Она называется **строго выпуклой** на X, если указанное неравенство строгое для любых чисел $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ и $\alpha \in (0, 1)$.

2. Она называется **вогнутой** на X, если для любых чисел $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Она называется **строго вогнутой** на X, если указанное неравенство строгое для любых чисел $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ и $\alpha \in (0, 1)$.

Вместо "выпукла" в учебной литературе пишут также "выпукла вниз", а вместо "вогнута" – "выпукла вверх". ★

Очевидны свойства

$$f \text{ выпукла на } X \iff -f \text{ вогнута на } X,$$

$$f \text{ строго выпукла на } X \iff -f \text{ строго вогнута на } X.$$

Это позволяет в дальнейшем доказывать свойства только выпуклых и строго выпуклых функций.

Примеры. 1. Для $f(x) = x^2$ имеем

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) - f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) =$$

$$= \alpha x_1^2 + (1-\alpha) x_2^2 - (\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)^2 =$$

$$= (\alpha - \alpha^2) x_1^2 - 2\alpha(1-\alpha) x_1 x_2 + (1 - \alpha - (1-\alpha)^2) x_2^2 =$$

$$= \alpha(1-\alpha)(x_1 - x_2)^2 > 0 \text{ при } x_1 \neq x_2, \quad \alpha \in (0,1),$$

и эта функция строго выпукла на $\mathbb{R}$.

2. Аффинная функция $f(x) = cx + d$ – единственный тип функции, *одновременно и выпуклой, и вогнутой* на промежутке X. Это будет совсем наглядно видно из геометрического определения выпуклости и вогнутости.

Геометрическое определение выпуклости и вогнутости

1. Функция f называется **выпуклой** на промежутке X, если отрезок, соединяющий любые две точки графика функции f на X, лежит не ниже дуги графика функции f, соединяющей эти точки. ★

Она называется **строго выпуклой** на X, если указанный отрезок лежит **выше** дуги графика функции f за исключением его концов.

Примеры. 1. Функция $f(x) = \max\{|x| - 1, 0\}$ – выпуклая на $\mathbb{R}$. ★
2. Если функция f – выпуклая на $[a, b]$, а функция g отвечает любой ломаной на $[a, b]$, график которой вписан в график f на $[a, b]$, то g также выпуклая на $[a, b]$. ★
3. Функции $f(x) = x^{2n}$, где $n \in \mathbb{N}$, и $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$ – строго выпуклые на $\mathbb{R}$.

2. Функция f называется **вогнутой** на X, если отрезок, соединяющий любые две точки графика функции f на X, лежит не выше дуги графика функции f, соединяющей эти точки.

Она называется **строго вогнутой** на X, если указанный отрезок лежит **ниже** дуги графика функции f за исключением его концов.

Примеры. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ – строго вогнутая на $[0, +\infty)$, и $f(x) = \ln x$ – строго вогнутая на $(0, +\infty)$.

Аналитическая запись геометрического определения.

Условие выпуклости

$$f(x) \leqslant f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ \text{ для всех } \ x_1 \leqslant x \leqslant x_2,$$

где $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Справа стоит знакомое уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, и оно легко проверяется.

Условие строгой выпуклости

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ \text{ для всех } \ x_1 < x < x_2,$$

где $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$.

Теорема. Исходное и геометрическое определения выпуклости (строгой выпуклости, вогнутости, строгой вогнутости) **эквивалентны.**

Доказательство. Перепишем геометрическое условие выпуклости в виде

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \ \text{ для всех } \ x_1 \leqslant x \leqslant x_2.$$

Подстановкой $x = x_1, x_2$ проверяется то, что справа стоит новое важное уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$.

Положим $\alpha = \alpha(x) = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in [0, 1]$. Тогда

$$\alpha + (1 - \alpha) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1,$$

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 = \frac{(x_2 - x)x_1 + (x - x_1)x_2}{x_2 - x_1} = x.$$

В новых обозначениях выписанное неравенство принимает знакомый вид

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2).$$

Между $x \in [x_1, x_2]$ и $\alpha \in [0, 1]$ имеется взаимно однозначное соответствие. Поэтому исходное определение выпуклости эквивалентно геометрическому.

То же верно и для свойства строгой выпуклости, поскольку $\alpha = 0$ соответствует $x = x_2$, а $\alpha = 1$ соответствует $x = x_1$.

Критерии выпуклости и вогнутости дифференцируемой функции

Теорема

Пусть X *– промежуток* $(a,b),[a,b),(a,b]$ *или* $[a,b]$*. Пусть функция* f *непрерывна на* X *и имеет* f' *на* (a,b)*. Тогда:*

1) $f'(x)$ *не убывает на* (a,b) $\Leftrightarrow$ *функция* $f(x)$ *выпукла на* X*;*

2) $f'(x)$ *возрастает на* (a,b) $\Leftrightarrow$ *функция* $f(x)$ *строго выпукла на* X*;*

3) $f'(x)$ *не возрастает на* (a,b) $\Leftrightarrow$ *функция* $f(x)$ *вогнута на* X*;*

4) $f'(x)$ *убывает на* (a,b) $\Leftrightarrow$ *функция* $f(x)$ *строго вогнута на* X*.*

Доказательство. 1. Сначала перепишем другим эквивалентным образом геометрическое условие выпуклости при $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x < x_2$:

$$f(x) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \;\Leftrightarrow$$

$$\alpha(f(x) - f(x_1)) \leqslant (1-\alpha)(f(x_2) - f(x)) \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}(f(x) - f(x_1)) \leqslant \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x)) \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Для свойства строгой выпуклости это неравенство строгое.

2. Если функция f выпукла на X, то в полученном неравенстве перейдем к пределу, во-первых, при $x \to x_1 + 0$ и получим

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{при всех} \quad x_1 < x_2.$$

Во-вторых, при $x \to x_2 - 0$ получим

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2),$$

Следовательно, $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$, т.е. $f'(x)$ не убывает на X.
Если f строго выпукла на X, но $f'(x_1) = f'(x_2)$ при некоторых $a < x_1 < x_2 < b$, то $f'(x) = f'(x_1)$ при всех $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Отсюда вытекает, что $f(x) = f'(x_1)x + d$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, что противоречит строгой выпуклости f. Значит, f' возрастает на (a, b).

3. Обратно, возьмем любые $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x < x_2$. Применим формулу Лагранжа к функции $f(x)$ сначала на сегменте $[x_1, x]$, а затем на сегменте $[x, x_2]$. Тогда для некоторых $c_1 \in (x_1, x)$ и $c_2 \in (x, x_2)$ выполнено

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

Если производная $f'(x)$ не убывает на X, то $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$ и поэтому $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, т.е. f выпукла на X.
Если производная $f'(x)$ возрастает на X, то $f'(c_1) < f'(c_2)$ и предыдущее неравенство строгое и поэтому f строго выпукла на X.

Примеры. 1. Пусть $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Имеем $f'(x) = 2nx^{2n-1}$ возрастает на $\mathbb{R} \ \Rightarrow$ эта функция f строго выпукла на $\mathbb{R}$. ★

2. Пусть $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$. Имеем $f'(x) = ae^{ax}$ возрастает на $\mathbb{R} \ \Rightarrow$ эта функция f строго выпукла на $\mathbb{R}$.

3. Пусть $f(x) = \ln x$. Имеем $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ убывает на $(0, +\infty) \Rightarrow$ эта функция f строго вогнута на $(0, +\infty)$.

Свойства выпуклости и вогнутости дважды дифференцируемой функции

Теорема

Пусть функция f имеет f'' на интервале X. Тогда

1. $f''(x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in X \Leftrightarrow$ *функция* f *выпукла на* X.
2. $f''(x) > 0$ *для всех* $x \in X \Rightarrow$ f *строго выпукла на* X.
3. $f''(x) \leqslant 0$ *для всех* $x \in X \Leftrightarrow$ *функция* f *вогнута на* X.
4. $f''(x) < 0$ *для всех* $x \in X \Rightarrow$ f *строго вогнута на* X.

Доказательство. Имеем $(f')'(x) = f''(x)$. В силу свойств монотонности дифференцируемой функции

$$f''(x) \geqslant 0 \text{ для всех } x \in X \;\Leftrightarrow\; f'(x) \text{ не убывает на } X,$$

$$f''(x) > 0 \text{ для всех } x \in X \;\Rightarrow\; f'(x) \text{ возрастает на } X.$$

Остается воспользоваться предыдущей теоремой.

Примеры. 1. Пусть $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Имеем $f''(x) = 2n(2n-1)x^{2(n-1)} \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ эта функция f выпукла на $\mathbb{R}$.

2. Пусть $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$. Имеем $f''(x) = a^2 e^{ax} > 0$ на $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ эта функция f строго выпукла на $\mathbb{R}$.

3. Пусть $f(x) = \ln x$. Имеем $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ на $(0, +\infty)$ $\Rightarrow$ эта функция f строго вогнута на $(0, +\infty)$.

Точки перегиба

Определение. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 и непрерывна (часто дополнительно требуют ее дифференцируемость) в точке x_0. Точка x_0 называется **точкой перегиба** функции f, если f строго выпукла на одном из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ при достаточно малом $\delta > 0$, а на другом – вогнута.
При этом точка $(x_0, f(x_0))$ — точка перегиба графика функции f.

Пример. Функция $f(x) = (\operatorname{sgn} x)|x|^{3/2}$ имеет $f'(x) = \frac{3}{2}|x|^{1/2}$. Далее $f''(x) = \frac{3}{4}(\operatorname{sgn} x)|x|^{1/2}$ при $x \neq 0 \;\Rightarrow\;$ функция $f(x)$ строго вогнута на $(-\infty, 0)$ и строго выпукла на $(0, +\infty) \;\Rightarrow\; x = 0$ – единственная точка перегиба. ★

Как найти точки перегиба?

Теорема

Пусть функция f имеет f'' на интервале X и $x_0 \in X$. Тогда:

1. *если x_0 – точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$ (**необходимое условие перегиба**).*
2. *если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 – точка перегиба (**первое достаточное условие перегиба**).*
3. *если же $f''(x)$ неположительна или неотрицательна в некоторой окрестности точки x_0, то x_0 не является точкой перегиба.*

Примеры. 1. Функция $f(x) = x^3$ имеет $f''(x) = 6x$, и $f''(x) = 0$ при $x = 0$ и $\operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn} x$ меняется при переходе через $x = 0 \Rightarrow x = 0$ – единственная точка перегиба. ★

2. Функция $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ имеет $f''(x) = 2n(2n-1)x^{2(n-1)}$, и $f''(x) = 0$ при $x = 0$, но $f''(x) \geqslant 0 \Rightarrow$ эта функция точек перегиба не имеет. ★

3. Функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ имеет $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, и $f''(x) = 0$ при $x = 0$ и $\operatorname{sgn} f''(x) = -\operatorname{sgn} x$ меняется при переходе через $x = 0 \Rightarrow x = 0$ – единственная точка перегиба. ★

4. Функция $f(x) = \sin x$ имеет $f''(x) = -\sin x$, и $f''(x) = 0$ при $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ и $\operatorname{sgn} f''(x)$ меняется при переходе через $x = k\pi \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ – (все) точки перегиба. ★

Теорема (второе достаточное условие перегиба)

Пусть функция f имеет f'' на интервале X и $x_0 \in X$. Пусть $f''(x_0) = 0$ и существует $f'''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 – точка перегиба f.

Доказательство. Функция f'' дифференцируема в точке $x_0 \in X$ и $f''(x_0) = 0$, поэтому

$$f''(x) = f''(x_0)+f'''(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) = (f'''(x_0)+o(1))(x-x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Поскольку $f'''(x_0) \neq 0$, то $f'''(x_0) + o(1)$ имеет тот же знак, что и $f'''(x_0)$ в достаточно малой окрестности x_0. Тогда в силу выведенной формулы, наоборот, $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 и поэтому x_0 – точка перегиба f.

Примеры. 1. Функция $f(x) = x^3$ имеет $f''(x) = 6x$, и $f''(x) = 0$ при $x = 0$, а $f'''(x) = 6 \neq 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ – единственная точка перегиба.

2. Функция $f(x) = \sin x$ имеет $f''(x) = -\sin x$, и $f''(x) = 0$ при $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Далее $f'''(x) = -\cos x$ и $-\cos(k\pi) = (-1)^{k+1} \neq 0 \Rightarrow \; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ – (все) точки перегиба.

Как расположена касательная в такой точке перегиба графика функции?

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \frac{1}{6}(f'''(x_0) + o(1))(x - x_0)^3 \;\Rightarrow$$

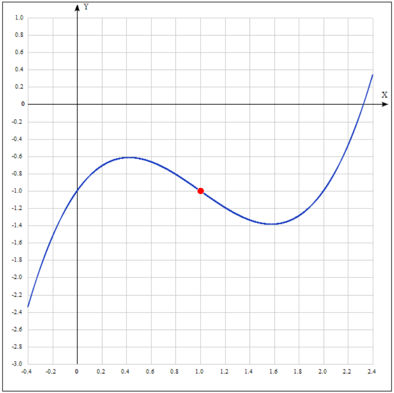
Ответ: по разные стороны от графика функции в точках x слева и справа от x_0 и достаточно близких к x_0.

Пример. Найдем промежутки строгой выпуклости и строгой вогнутости и точки перегиба функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Вычисляем производную

$$f''(x) = 6x - 6$$

и приравниваем ее к нулю: находим $x = 1$.
Анализируем знак $f''(x)$: он меняется с - на $+$ при переходе через $x = 1$:

x	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	строго вогнута	строго выпукла



Значит, $x = 1$ – единственная точка перегиба.