Математический анализ 1. Лекция 2.12
Условный экстремум – дополнения

11 декабря 2023 г.

Схема нахождения глобальных экстремумов гладкой функции на компакте с использованием техники нахождения условных экстремумов

В задаче нахождения глобальных экстремумов (или области значений) функции f **на компакте** (надо убедиться, что это компакт!), заданном **неравенствами**
$F_1(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$, $F_2(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$, ..., $F_k(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$
надо перебирать все случаи, в которых:
(а) некоторое подмножество I этих условий (включая $I = \varnothing$ и I – все условия) выполняется **в виде равенств** – их мы используем как *уравнения связи* для отыскания кандидатов в точки экстремумов методом Лагранжа или просто для подстановки, если они задают конечное число точек,
(б) остальные условия выполняются **в виде строгих неравенств** – их мы используем только для исключения кандидатов в точки экстремумов, которые им не удовлетворяют.
Всего надо рассмотреть ... 2^k случаев! (все подмножества $\{1, \ldots, k\}$).

Пример. Найдем область значений функции $f(x, y, z) = x + y - 3z$ на множестве $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 \leqslant 1, x + y + z \geqslant 1\}$.

Схема решения.

1. Находим все стационарные точки функции $f(x, y, z) = x + y - 3z$, отбрасываем те, которые не удовлетворяют $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 < 1 \\ x + y + z > 1. \end{cases}$

   Очевидно, таких нет.

2. Находим все точки экстремума функции $f(x,y,z) = x + y - 3z$ при условии $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. Отбрасываем те, которые не удовлетворяют условию $x + y + z > 1$. Искомых две точки:
$$A\left(\frac{2}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, -\frac{6}{\sqrt{42}}\right) \text{ и } B\left(-\frac{2}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{6}{\sqrt{42}}\right).$$
Обе отбрасываем.
3. Находим все точки экстремума функции $f(x,y,z) = x + y - 3z$ при условии $x + y + z = 1$. Отбрасываем те, которые не удовлетворяют условию $x^2 + 2y^2 + z^2 < 1$. Таких, очевидно, нет.
4. Находим все точки экстремума функции $f(x,y,z) = x + y - 3z$ при обоих условиях $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$ Таких оказывается две:
$$C\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right) \text{ и } D\,(0,0,1)$$
5. Завершаюший этап: выбираем наибольшее и наименьшее значение функции f в найденных на всех предыдущих этапах точках. Это и будут границы искомого сегмента значений функции.

В нашем случае $\max\limits_{Q} f = f(C) = \dfrac{9}{5}$ и $\min\limits_{Q} f = f(D) = -3.$

Следовательно, область значений f на S – это $f(S) = \left[-3, \dfrac{9}{5}\right].$

В задачах оптимизации естественным образом возникают задачи поиска локальных экстремумов числовых функций $f(\mathbf{x})$ при дополнительных условиях на переменные $\mathbf{x}$, т.е. в предположении, что переменная $\mathbf{x}$ пробегает некоторое заранее фиксированное множество S.
Дадим определение **точек локальных экстремумов функции $f(\mathbf{x})$ на множестве S** (не путать с точками глобальных экстремумов функции $f(\mathbf{x})$ на множестве S!).

Пусть дана функция $f : X \to \mathbb{R}$, где $X = D(f) \subset \mathbb{R}^n$, внутренняя точка $\mathbf{x}_0$ множества X и множество S, содержащее точку $\mathbf{x}_0$. Точка $\mathbf{x}_0$ называется:

1. *точкой строгого локального максимума функции f на множестве S*, если $f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{U}^\circ \cap S$, где $\mathcal{U}^\circ$ есть некоторая проколотая окрестность точки $\mathbf{x}_0$.
2. *точкой строгого локального минимума функции f на множестве S*, если $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{U}^\circ \cap S$, где $\mathcal{U}^\circ$ есть некоторая проколотая окрестность точки $\mathbf{x}_0$.
3. *точкой нестрогого локального максимума функции f на множестве S*, если $f(\mathbf{x}_0) \geqslant f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \cap S$, где $\mathcal{U}$ есть некоторая окрестность точки $\mathbf{x}_0$.
4. *точкой нестрогого локального минимума функции f на множестве S*, если $f(\mathbf{x}_0) \leqslant f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \cap S$, где $\mathcal{U}$ есть некоторая окрестность точки $\mathbf{x}_0$.

Условные экстремумы

В случае, если множество S задается уравнением $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, т.е.

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\},$$

где $\mathbf{F}$ – функция из открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в множество $\mathbb{R}^k$, то точка локального экстремума (строгого/нестрогого максимума/минимума) функции f на множестве S называется точкой **условного** локального экстремума (строгого/нестрогого максимума/минимума) функции f **при условии** $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ или, иногда, **при условиях**

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{x}) = 0 \\ F_2(\mathbf{x}) = 0 \\ \dots \\ F_k(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

где $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_k)$, а F_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, есть функции из G в $\mathbb{R}$.

Пример. Точка $(0, 0, 0, 0)$ есть точка условного локального минимума функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Упражнения: почему? Строгого или нестрогого?

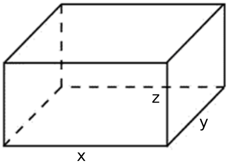
Уравнения $F_i(\mathbf{x}) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, в задаче об условных экстремумах функции $f(\mathbf{x})$ при условиях $F_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, F_k(\mathbf{x}) = 0$ называются *уравнениями связей* или просто *связями*.

Примеры

В приложениях задача о нахождении условных локальных экстремумов обычно является составной частью задачи о нахождении **глобальных экстремумов** на некотором множестве S.

- Как построить прямоугольный контейнер без крышки фиксированного объема $V > 0$, используя минимальное количество материала (толщиной стенок пренебречь)?

Надо минимизировать площадь внешней боковой поверхности.



Пусть измерения основания есть x и y, а высота есть z. Следовательно, надо найти точку глобального минимума функции

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

в области $\begin{cases} xyz = V \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \end{cases}$

Искомая точка есть точка (одна из точек) **условного локального минимума** функции $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ при условии $xyz = V$.

- **Максимизация полезности.** Найдите максимум функции полезности $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при бюджетных ограничениях

$$\begin{cases} p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \leqslant P \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \end{cases}$$

где $p_1 > 0, \ldots, p_n > 0, P > 0$ – параметры.

Комментарий. Естественные условия на функцию полезности U – гладкость и строгое возрастание по каждому из аргументов. Поэтому функция U достигает максимума на бюджетном множестве при условии

$$p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = P.$$

Таким образом, нам надо найти $\max\limits_{\Gamma} U$ на множестве Γ, которое задается условиями

$$\begin{cases} p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = P \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

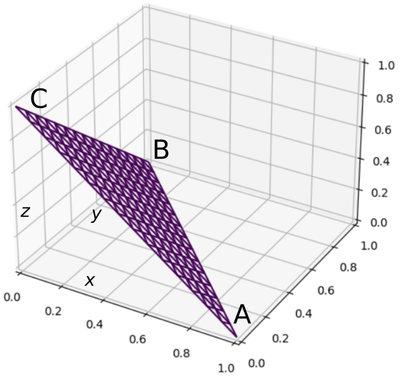
Поясним стратегию решения такой задачи для случая трех переменных: x, y, z (если никакие другие ограничения на функцию U не наложены).

Итак, мы ищем максимум функции $U(x, y, z)$ в области Γ, которая задается условиями

$$\begin{cases} p_1 x + p_2 y + p_n z = P \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \end{cases}$$

Область Γ есть треугольник ABC в пространстве $\mathbb{R}^3$. Его стороны определяются условиями

- AB: $\begin{cases} p_1 x + p_2 y + p_3 z = P \\ z = 0, x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{cases}$
- BC: $\begin{cases} p_1 x + p_2 y + p_3 z = P \\ x = 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \end{cases}$
- CA: $\begin{cases} p_1 x + p_2 y + p_3 z = P \\ y = 0, x \geqslant 0, z \geqslant 0 \end{cases}$



А вершины имеют координаты:

$$A\left(\frac{P}{p_1}, 0, 0\right), B\left(0, \frac{P}{p_2}, 0\right), C\left(0, 0, \frac{P}{p_3}\right).$$

Алгоритм решения может быть, например, следующим.

1. Находим значения функции $U(x, y, z)$ в угловых точках A, B, C области Γ.
2. Находим *условные локальные максимумы* функции $U(x, y, z)$ при условии

$$p_1x + p_2y + p_3z = P,$$

точки которых лежат во внутренности области Γ.

Замечание. Точки лежат во внутренности области Γ тогда и только тогда, когда удовлетворяют условию:

$$x > 0, y > 0, z > 0.$$

Если среди найденных точек условных локальных максимумов функции $U(x, y, z)$ при условии $p_1x + p_2y + p_3z = P$ попадаются точки с неположительными координатами, просто отбрасываем их.

Но это еще не все!

3. Рассматриваем интервалы AB, BC, AC (фактически это двумерные задачи с одним условием связи, которое можно исключить!).
   Находим
   - *условные локальные максимумы* функции $U(x, y, z)$ при условиях
     $$\begin{cases} p_1x + p_2y + p_3z = P \\ z = 0 \end{cases}$$
     точки которых лежат в области $x > 0, y > 0$.
   - *условные локальные максимумы* функции $U(x, y, z)$ при условиях
     $$\begin{cases} p_1x + p_2y + p_3z = P \\ x = 0 \end{cases}$$
     точки которых лежат в области $y > 0, z > 0$.
   - *условные локальные максимумы* функции $U(x, y, z)$ при условиях
     $$\begin{cases} p_1x + p_2y + p_3z = P \\ y = 0 \end{cases}$$
     точки которых лежат в области $x > 0, z > 0$.
4. Выбираем максимальное значение из всех найденных.

Замечание. При некоторых дополнительных предположениях существуют более эффективные алгоритмы.

- **Портфель Марковица.** Имеются ценные бумаги $V_1, \ldots, V_n$, обеспечивающие средний доход $a_1, \ldots, a_n$ с риском (волатильностью) $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ соответственно.

  Как составить портфель (т.е. приобрести ценные бумаги $V_1, \ldots, V_n$ в долях $x_1, \ldots, x_n$ соответственно) так, чтобы обеспечить фиксированный средний доход a с минимальным риском?

  Вероятностные (или статистические) соображения приводят к тому, что при условии независимости ценных бумаг $V_1, \ldots, V_n$ средняя доходность составит составит $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, а волатильность портфеля равна $\sqrt{\sigma_1^2x_1^2 + \ldots + \sigma_n^2x_n^2}$. Задача сводится к нахождению глобального минимума функции $R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sigma_1^2x_1^2 + \ldots + \sigma_n^2x_n^2$ (**упражнение:** почему от корня можно избавиться?) в области

$$\begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a \\ x_1 + \ldots + x_n = 1 \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

  Решение задачи вновь сводится к последовательному нахождению точек *условных локальных экстремумов*. Можно получить ряд упрощений из соображений выпуклости.

  Замечание. Задача имеет много обобщений, в том числе на случай зависимых ценных бумаг.

- **Минимизация затрат.** Пусть дана производственная функция f, например, функция Кобба-Дугласа

$$f(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta},$$

где $A > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ – параметры.

Пусть также дана функция расходов T, например,

$$T(x, y) = ax + by,$$

где $a > 0, b > 0$ – параметры.

Требуется найти **глобальный минимум** функции расходов $T(x, y)$ при фиксированном уровне производства $Q > 0$.
Это глобальный минимум функции $T(x, y) = ax + by$ на множестве

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Ax^{\alpha}y^{\beta} = Q,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

При $\alpha + \beta < 1$ можно показать, что глобальный минимум существует и равен условному локальному минимуму функции $T(x, y) = ax + by$ при условии $Ax^{\alpha}y^{\beta} = Q$.

Прямой метод отыскания точек условного экстремума

Если уравнения связи равносильны некоторой совокупности формул, выражающих одни переменные через другие, то задачу нахождения точек условного экстремума можно свести к задаче нахождения обычного (безусловного) экстремума.

Пример

Исследуйте на условные локальные экстремумы функцию

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

- Выражаем из уравнений связи переменные x_3 и x_4 через переменные x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_3 = 2 - 3x_1 - x_2 \\ x_4 = -1 + x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

- Подставляем найденные выражения в функцию f, получаем некоторую числовую функцию g от переменных x_1 и x_2:

$$g(x_1, x_2) = f(x_1,\, x_2,\, 2 - 3x_1 - x_2,\, -1 + x_1 - 3x_2) =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + (2 - 3x_1 - x_2)^2 + (-1 + x_1 - 3x_2)^2.$$

- Находим **безусловные** экстремумы функции g.

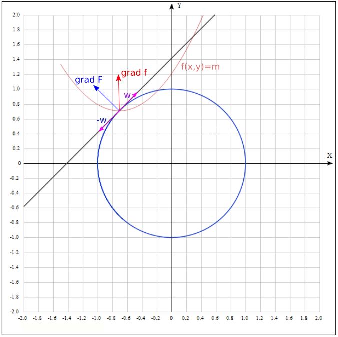
  Функция g имеет единственную точку локального экстремума $A\left(\dfrac{7}{11}, -\dfrac{1}{11}\right)$; это точка строгого локального минимума, который равен $\dfrac{5}{11}$.

- Возвращаемся к исходной задаче, не забывая, что точкой условного экстремума должна быть точка пространства $\mathbb{R}^4$, удовлетворяющая уравнениям связи.

  Находим значения x_3 и x_4, соответствующие найденной точке A:
  $x_3 = 2 - 3 \cdot \dfrac{7}{11} + \dfrac{1}{11} = \dfrac{2}{11}$, $x_4 = -1 + \dfrac{7}{11} + 3 \cdot \dfrac{1}{11} = -\dfrac{1}{11}$.
  Итак, точка локального условного экстремума функции f есть $\left(\dfrac{7}{11}, -\dfrac{1}{11}, \dfrac{2}{11}, -\dfrac{1}{11}\right)$. Значение функции f в этой точке есть $\dfrac{5}{11}$.

Метод множителей Лагранжа – наводящие соображения

Пусть функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) условный локальный экстремум S при условии $F(x, y) = 0$. Пренебрегая малыми величинами второго порядка, заменим кривую $F(x, y) = 0$ касательной прямой в точке (x_0, y_0). Эта прямая ортогональна градиенту $\nabla F(x_0, y_0)$ функции F в точке (x_0, y_0). Значит, смещаясь на малую величину от точки (x_0, y_0) по кривой $F(x, y) = 0$, мы приблизительно смещаемся в одном из направлений $\pm\mathbf{w}$, каждое из которых ортогонально $\nabla F(x_0, y_0)$.



Производная функции f по направлению $\mathbf{w}$, которое образует угол α с градиентом $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ функции f в точке (x_0, y_0), равна $|\nabla f(x_0, y_0)| \cos\alpha$. Следовательно, если $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, то эта производная по направлению не равна 0 и можно как уменьшить, так и увеличить значение функции f, двигаясь в направлениях $\mathbf{w}$ и $-\mathbf{w}$ из точки (x_0, y_0), и она не может быть точкой экстремума. Следовательно, вектор $\mathbf{w}$ должен быть ортогонален вектору $\nabla f(x_0, y_0)$. Значит, векторы $\nabla f(x_0, y_0)$ и $\nabla F(x_0, y_0)$ должны быть параллельны.

Итак, в точке (x_0, y_0) условного локального экстремума функции $f(x, y)$ при условии $F(x, y) = 0$ векторы $\nabla f(x_0, y_0)$ и $\nabla F(x_0, y_0)$ должны быть параллельны, т.е. пропорциональны. Обозначим коэффициент пропорциональности $-\lambda$. Значит,

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla F(x_0, y_0) = 0. \qquad (*)$$

Рассмотрим функцию

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y)$$

Тогда условие $(*)$ равносильно выполнению условий $L'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ и $L'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$.

Вспомним, что точка (x_0, y_0) лежит на кривой $F(x, y) = 0$. Это означает, что имеет место равенство $F(x_0, y_0) = 0$, которое можно переписать в виде $L'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$. Итак, если (x_0, y_0) есть точка условного локального экстремума функции $f(x, y)$ при условии $F(x, y) = 0$, то для некоторого λ_0 выполнено

$$\begin{cases} L'_x(x_0, y_0, \lambda) = 0 \\ L'_y(x_0, y_0, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x_0, y_0, \lambda) = 0 \end{cases}$$

т.е. точка (x_0, y_0, λ) есть стационарная точка функции L.

Определение

Для данной функции $f : X \to \mathbb{R}$ от n действительных переменных и условий $F_1(\mathbf{x}) = 0$, $F_2(\mathbf{x}) = 0$, …, $F_k(\mathbf{x}) = 0$ **функцией Лагранжа** называется функция $L : X \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Пример

В задаче нахождения условных экстремумов функции

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

функция Лагранжа есть

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ &+ \lambda_1(2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 1) \\ &+ \lambda_2(4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 3). \end{aligned}$$

Теорема

Пусть $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *есть точка экстремума функции* f *при условии* $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ *(т.е. при условиях* $F_1(\mathbf{x}) = 0$*,* $F_2(\mathbf{x}) = 0$*, …,* $F_k(\mathbf{x}) = 0$*),* $k < n$*. Пусть также:*

1. *функции* f*,* F_1*,* F_2*, …,* F_k *принадлежат классу* $C^1(\mathcal{U})$ *для некоторой окрестности* $\mathcal{U}$ *точки* $\mathbf{x}_0$ *(равносильно, функция* $\mathbf{F}$ *принадлежит классу* $C^1(\mathcal{U})$ *для некоторой окрестности* $\mathcal{U}$ *точки* $\mathbf{x}_0$*.)*
2. *матрица Якоби* $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)$ *имеет ранг* k*.*

Тогда существует единственный вектор $\boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_k^0)$*, такой что точка* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_k^0)$ *есть стационарная точка функции Лагранжа*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример

Найдите точки условных локальных экстремумов функции

$$f(x,y) = 3x + 4y$$

при условии

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Функция Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda) = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Для нахождения точек возможного условного экстремума составляем систему

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 3 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = 4 + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем: $x = -\dfrac{3}{2\lambda}$, $y = -\dfrac{2}{\lambda}$. Подставляем в третье уравнение: $\left(\dfrac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^2 = 1$. Отсюда $4\lambda^2 = 25$, $\lambda = \pm\dfrac{5}{2}$.

Система имеет два решения: $A_0\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{2}\right)$ и $B_0\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{2}\right)$.
Отбрасывая последние координаты, получаем точки:

$$A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ и } B\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

В данной задаче можно обойтись без анализа достаточного условия экстремума, заметив, что множество

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

есть компакт. Непрерывная функция f достигает своего минимального и максимального значения на S в некоторых точках из S (теорема Вейерштрасса). Выберем какие-либо точки P и Q глобального минимума и глобального максимума функции f на множестве S соответственно. Заметим, что точки глобальных экстремумов на множестве S являются и точками локальных экстремумов на нем. По необходимому условию экстремума, точками локальных экстремумов могут быть только точки A и B. Значит,

$$\{P, Q\} = \{A, B\},$$

Таким образом, одна из точек A, B есть точка минимума (глобального, а следовательно, и локального), а другая есть точка максимума (глобального, а следовательно, и локального). Поскольку

$$f(A) = 5 > -5 = f(B),$$

получаем, что A – точка максимума, B – точка минимума.

Замечание

Условие "матрица Якоби $F'(\mathbf{x}_0)$ имеет ранг k" существенно.

Пример

Рассмотрим задачу нахождения точек условных локальных экстремумов функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ при условии $x^2 - y^2 = 0$.

Очевидно, по крайней мере одна из таких точек это точка $(0,0)$ (поскольку это точка глобального минимума функции f, удовлетворяющая условию $x^2 - y^2 = 0$.).

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 - y^2).$$

Приравниваем к нулю частные производные функции Лагранжа.

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 2x + 2\lambda x = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = 2y - 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Все точки $(0,0,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, являются решениями этой системы. Заключение теоремы не выполнено! Причина: матрица Якоби функции $x^2 - y^2$ в точке $(0,0)$ есть $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, ее ранг равен нулю.

Теорема (достаточное условие локального экстремума в форме Лагранжа – более алгебраическая формулировка)

Пусть функции f и $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_k)$, $k < n$ принадлежат классу $C^2(\mathcal{U})$ в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки $\mathbf{x}_0$. Пусть также:

1. *точка $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_k^0)$ есть стационарная точка функции Лагранжа*

   $$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x_1, \ldots, x_n),$$

   причем матрица Якоби $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)$ имеет ранг k,
2. *пусть $H_{L_0}(\mathbf{x})$ – матрица Гессе функции $L_0(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_0)$,*
   E – подпространство в $\mathbb{R}^n$, состоящее из множества решений однородной системы линейных уравнений $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$,
   а $Q : E \to \mathbb{R}$ – квадратичная форма на подпространстве E, определенная формулой

   $$Q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T H_{L_0}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h}$$

   для всех векторов-столбцов $\mathbf{h} \in E$.

Тогда

i. если Q – положительно определенная квадратичная форма, то $\mathbf{x}_0$ есть точка строгого локального условного минимума функции f при условии $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$,

ii. если Q – отрицательно определенная квадратичная форма, то $\mathbf{x}_0$ есть точка строгого локального условного максимума функции f при условии $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$,

iii. если Q – знакопеременная квадратичная форма, то точка $\mathbf{x}_0$ не есть точка условного экстремума функции f при условии $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Пример. Найдем точки локальных экстремумов функции

$$f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$$

при условии $xyz = 4$ в области $x > 0, y > 0, z > 0$.

1. Проверка применимости: матрица Якоби функции $F(x,y,z) = xyz - 4$ есть

$$\begin{pmatrix} yz & xz & xy \end{pmatrix}.$$

   В области $x > 0, y > 0, z > 0$ это ненулевой вектор, метод множителей Лагранжа применим.

2. Функция Лагранжа:

$$L(x,y,z,\lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 4).$$

3. Стационарные точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z,\lambda) = y + 2z + \lambda yz = 0 \\ L'_y(x,y,z,\lambda) = x + 2z + \lambda xz = 0 \\ L'_z(x,y,z,\lambda) = 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ L'_\lambda(x,y,z,\lambda) = xyz - 4 = 0. \end{cases}$$

Первые три уравнения умножим на x, y и z соответственно, воспользуемся четвертым уравнением и получим

$$\begin{cases} xy + 2xz + 4\lambda = 0 \\ xy + 2yz + 4\lambda = 0 \\ 2xz + 2yz + 4\lambda = 0 \\ xyz = 4. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем $x = y$, из второго и третьего получаем $y = 2z$. Теперь из четвертого $x^3 = 8$, откуда $x = 2$ и, далее, $y = 2$ и $z = 1$. Наконец, $\lambda = -2$.

Итак, единственная стационарная точка функции Лагранжа есть

$$A(2, 2, 1, -2).$$

4. Матрица Гессе функции L_0:

- $$\begin{array}{lll} L''_{0xx} = 0 & L''_{0xy} = 1 + \lambda_0 z & L''_{0xz} = 2 + \lambda_0 y \\ L''_{0yx} = 1 + \lambda_0 z & L''_{yy} = 0 & L''_{0yz} = 2 + \lambda_0 x \\ L''_{0zx} = 2 + \lambda_0 y & L''_{0zy} = 2 + \lambda_0 x & L''_{0zz} = 0 \end{array}$$

- $$\Rightarrow \ H_{L_0}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1+\lambda_0 z & 2+\lambda_0 y \\ 1+\lambda_0 z & 0 & 2+\lambda_0 x \\ 2+\lambda_0 y & 2+\lambda_0 x & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

- $$H_{L_0}(2,2,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Подпространство E:

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\nabla F(2,2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\nabla F(2,2,1)(h_1,h_2,h_3)^T = 2h_1 + 2h_2 + 4h_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$h_1 = -h_2 - 2h_3$$

6. Квадратичная форма Q:

$$Q(h_2,h_3) = \begin{pmatrix} -h_2 - 2h_3 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h_2 - 2h_3 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} =$$

$$= -2(-h_2 - 2h_3)h_2 - 4(-h_2 - 2h_3)h_3 - 4h_2h_3 = 2h_2^2 + 4h_2h_3 + 8h_3^2.$$

Используем критерий Сильвестра: $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 12 > 0 \Rightarrow Q$ – положительно определенная форма.

7. Окончательный вывод: точка $A(2,2,1)$ – единственная точка условного строгого локального минимума функции $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ при условии $xyz = 4$ в области $x > 0, y > 0, z > 0$.