Математический анализ 1. Направление 38.03.01 Экономика
Тема 2. Функции нескольких переменных
Семинар 2.11. Задачи на условный экстремум с одним условием связи

1. Найдите все точки экстремума заданной функции $f(x,y)$ при указанном условии связи $F(x,y)=0$ методом Лагранжа, включая проверку выполнения достаточных условий экстремума.

   Постройте также графические иллюстрации к решениям, позволяющие их проверить:

   (1) $f(x,y)=x^2+y^2$, $F(x,y)\equiv x+y-2=0$; (2) $f(x,y)=xy$, $F(x,y)\equiv x+y-2=0$;

   (3) $f(x,y)=x+y$, $F(x,y)\equiv x^2+y^2-2=0$; (4) $f(x,y)=x+y$, $F(x,y)\equiv xy-1=0$;

   (5) $f(x,y)=x+y$, $F(x,y)\equiv x^2+y^2-2x=0$; (6) $f(x,y)=x+y$, $F(x,y)\equiv x^2-2y=0$;

   (7) $f(x,y)=y-x^2$, $F(x,y)\equiv x^2+y^2-4=0$;

   (8) $f(x,y)=xy$, $F(x,y)\equiv x^3+y^3-2xy=0$; (9) $f(x,y)=xy^2$, $F(x,y)\equiv x+2y-3=0$;

   (10) $f(x,y)=xy^2$, $F(x,y)\equiv x+y-3=0$;

   (11) $f(x,y)=x^2y^3$, $F(x,y)\equiv 2x+3y-5=0$;

   (12) $f(x,y)=x^2y^3$, $F(x,y)\equiv x+y-900=0$.

2. Найдите все точки экстремума заданной функции $f(x,y,z)$ при указанном условии связи $F(x,y,z)=0$ методом Лагранжа, включая проверку выполнения достаточных условий экстремума:

   (1) $f(x,y,z)=x^2y^3z^4$, $F(x,y,z)\equiv 2x+3y+4z-9=0$;

   (2) $f(x,y,z)=xyz$, $F(x,y,z)\equiv x+y+z-3=0$;

   (3) $f(x,y,z)=x+y+z$, $F(x,y,z)\equiv xyz-1=0$;

   (4) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3$, $F(x,y,z)\equiv x+y+z=0$;

   (5) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $F(x,y,z)\equiv x+y+z-3=0$;

   (6) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $F(x,y,z)\equiv xyz-1=0$;

   (7) $f(x,y,z)=xyz$, $F(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-3=0$;

   (8) $f(x,y)=x+y+z$, $F(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-3=0$;

   (9) $f(x,y,z)=2x+3y+4z$, $F(x,y,z)\equiv x^2y^3z^4-1=0$;

   (10) $f(x,y,z)=x^2y^3z^4$, $F(x,y,z)\equiv x+y+z-18=0$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

3. Найдите все точки экстремума заданной функции $f(x,y)$ при указанном условии связи $F(x,y)=0$ с помощью метода Лагранжа, включая проверку выполнения достаточных условий экстремума:

   (1) $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, $F(x,y)\equiv \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-1=0$;

   (2) $f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y$, $F(x,y)\equiv x-y-\dfrac{\pi}{4}=0$.

4. Найдите все точки экстремума заданной функции $f(x,y,z)$ при указанном условии связи $F(x,y,z)=0$ с помощью метода Лагранжа, включая проверку выполнения достаточных условий экстремума:

   (1) $f(x,y,z)=(\sin x)(\sin y)\sin z$, $F(x,y,z)\equiv x+y+z-\dfrac{\pi}{2}$, $x>0,\ y>0,\ z>0$;

   (2) $f(x,y,z)=x\sqrt{yz},\ \ F(x,y,z)\equiv x+y+z-1=0$;

   (3) $f(x,y,z)=\dfrac{xy}{z},\ \ F(x,y,z)\equiv x+y+z-z^4=0$.

Экономические приложения

5. При затратах на оплату труда в x тыс. у.е. и на приобретение оборудования в y тыс. у.е. производство определенного предприятия составляет $Q(x,y)=60x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ единиц. Бюджет предпринимателя составляет 120 000 у.е. Как необходимо распределить средства между трудом и оборудованием так, чтобы максимизировать производство?

6. У потребителя имеется 280 у.е., которые он хочет потратить на два товара, первый из которых стоит 2 у.е. за единицу, а второй – 5 у.е. за единицу. Пусть полезность, получаемая потребителем от x единиц первого товара и y единиц второго товара, задается функцией Кобба-Дугласа $U(x,y)=100x^{0.25}y^{0.75}$. Сколько единиц каждого товара должен приобрести потребитель, чтобы максимизировать полезность?

7. У потребителя имеется k у.е., которые он хочет потратить на два товара, первый из которых стоит a у.е. за единицу, а второй – b у.е. за единицу. Пусть полезность, получаемая потребителем от x единиц первого товара и y единиц второго товара, задается функцией Кобба-Дугласа $U(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$, где $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ и $\alpha+\beta=1$. Покажите, что полезность максимальна при $x=\dfrac{k\alpha}{a}$ и $y=\dfrac{k\alpha}{b}$.

8. Пусть $Q(x,y)$ — производственная функция, где x и y представляют собой соответственно единицы труда и капитала. При себестоимости единиц труда и капитала соответственно в p и q у.е. общая себестоимость производства равна $px+qy$, где $p\neq 0$ и $q\neq 0$.

   (1) Покажите, что при фиксированном уровне производства c общие издержки минимальны при $\dfrac{Q'_x}{p}=\dfrac{Q'_y}{q}$ и $Q(x,y)=c$ при условии, что Q'_x и Q'_y не обращаются одновременно в нуль. Эту задачу часто называют **задачей на минимальные издержки**, а ее решение – **комбинацией факторов с минимальными издержками**.

   (2) Покажите, что факторы производства x и y, которые максимизируют уровень производства $Q(x,y)$ при фиксированной себестоимости k, удовлетворяют системе уравнений $\dfrac{Q'_x}{p}=\dfrac{Q'_y}{q}$, $px+qy=k$. Эту задачу называют **задачей с фиксированным бюджетом**.

   (3) Покажите, что при фиксированном уровне производства $Ax^{\alpha}y^{\beta}=k$, где k – постоянная, а $\alpha>$ и $\beta>0$ с $\alpha+\beta=1$, общая себестоимость $C(x,y)=px+qy$ минимальна при $x=\dfrac{k}{A}\Big(\dfrac{\alpha q}{\beta p}\Big)^{\beta}$, $y=\dfrac{k}{A}\Big(\dfrac{\beta p}{\alpha q}\Big)^{\alpha}$.