Линейная алгебра. Лекция 8. Линейные пространства и линейные операторы

Н. Л. Поляков

Высшая Школа Экономики, Факультет экономических наук, Москва

2022 г.

Линейные пространства

Линейные пространства

Понятие линейного пространства возникло как результат осмысления того факта, что векторный и матричный анализ может быть применен к объектам весьма разнообразной природы (пример: координатизация геометрической плоскости).

Линейные пространства

Понятие линейного пространства возникло как результат осмысления того факта, что векторный и матричный анализ может быть применен к объектам весьма разнообразной природы (пример: координатизация геометрической плоскости). Пусть P есть некоторое поле (действительных чисел, комплексных чисел etc.).

Линейные пространства

Понятие линейного пространства возникло как результат осмысления того факта, что векторный и матричный анализ может быть применен к объектам весьма разнообразной природы (пример: координатизация геометрической плоскости). Пусть P есть некоторое поле (действительных чисел, комплексных чисел etc.). **Линейным пространством** (над полем P) называется непустое множество M (элементы которого называются *векторами*) с операциями сложения "$+$" и умножения "$\cdot$" на элементы поля P, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

Линейные пространства

Понятие линейного пространства возникло как результат осмысления того факта, что векторный и матричный анализ может быть применен к объектам весьма разнообразной природы (пример: координатизация геометрической плоскости). Пусть P есть некоторое поле (действительных чисел, комплексных чисел etc.). **Линейным пространством** (над полем P) называется непустое множество M (элементы которого называются *векторами*) с операциями сложения "$+$" и умножения "$\cdot$" на элементы поля P, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in M$;

Линейные пространства

Понятие линейного пространства возникло как результат осмысления того факта, что векторный и матричный анализ может быть применен к объектам весьма разнообразной природы (пример: координатизация геометрической плоскости). Пусть P есть некоторое поле (действительных чисел, комплексных чисел etc.). **Линейным пространством** (над полем P) называется непустое множество M (элементы которого называются *векторами*) с операциями сложения "$+$" и умножения "$\cdot$" на элементы поля P, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in M$;
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in M$;

Линейные пространства

Понятие линейного пространства возникло как результат осмысления того факта, что векторный и матричный анализ может быть применен к объектам весьма разнообразной природы (пример: координатизация геометрической плоскости). Пусть P есть некоторое поле (действительных чисел, комплексных чисел etc.). **Линейным пространством** (над полем P) называется непустое множество M (элементы которого называются *векторами*) с операциями сложения "$+$" и умножения "$\cdot$" на элементы поля P, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in M$;
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in M$;
3. Существует такой вектор $\mathbf{0}$, что $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$;

Линейные пространства

Понятие линейного пространства возникло как результат осмысления того факта, что векторный и матричный анализ может быть применен к объектам весьма разнообразной природы (пример: координатизация геометрической плоскости). Пусть P есть некоторое поле (действительных чисел, комплексных чисел etc.). **Линейным пространством** (над полем P) называется непустое множество M (элементы которого называются *векторами*) с операциями сложения "$+$" и умножения "$\cdot$" на элементы поля P, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in M$;
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in M$;
3. Существует такой вектор $\mathbf{0}$, что $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$;
4. Для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$ существует такой вектор $(-\boldsymbol{a})\in M$, что $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$.

Линейные пространства

Понятие линейного пространства возникло как результат осмысления того факта, что векторный и матричный анализ может быть применен к объектам весьма разнообразной природы (пример: координатизация геометрической плоскости). Пусть P есть некоторое поле (действительных чисел, комплексных чисел etc.). **Линейным пространством** (над полем P) называется непустое множество M (элементы которого называются *векторами*) с операциями сложения "$+$" и умножения "$\cdot$" на элементы поля P, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in M$;
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in M$;
3. Существует такой вектор $\mathbf{0}$, что $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$;
4. Для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$ существует такой вектор $(-\boldsymbol{a})\in M$, что $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$.
5. $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$;

Линейные пространства

Понятие линейного пространства возникло как результат осмысления того факта, что векторный и матричный анализ может быть применен к объектам весьма разнообразной природы (пример: координатизация геометрической плоскости). Пусть P есть некоторое поле (действительных чисел, комплексных чисел etc.). **Линейным пространством** (над полем P) называется непустое множество M (элементы которого называются *векторами*) с операциями сложения "$+$" и умножения "$\cdot$" на элементы поля P, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in M$;
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in M$;
3. Существует такой вектор $\mathbf{0}$, что $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$;
4. Для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$ существует такой вектор $(-\boldsymbol{a})\in M$, что $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$.
5. $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$;
6. $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$ и каждых элементов $\lambda,\mu\in P$;

Линейные пространства

Понятие линейного пространства возникло как результат осмысления того факта, что векторный и матричный анализ может быть применен к объектам весьма разнообразной природы (пример: координатизация геометрической плоскости). Пусть P есть некоторое поле (действительных чисел, комплексных чисел etc.). **Линейным пространством** (над полем P) называется непустое множество M (элементы которого называются *векторами*) с операциями сложения "$+$" и умножения "$\cdot$" на элементы поля P, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in M$;
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in M$;
3. Существует такой вектор $\mathbf{0}$, что $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$;
4. Для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$ существует такой вектор $(-\boldsymbol{a})\in M$, что $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$.
5. $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$;
6. $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$ и каждых элементов $\lambda,\mu\in P$;
7. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$ и каждых элементов $\lambda,\mu\in P$;

Линейные пространства

Понятие линейного пространства возникло как результат осмысления того факта, что векторный и матричный анализ может быть применен к объектам весьма разнообразной природы (пример: координатизация геометрической плоскости). Пусть P есть некоторое поле (действительных чисел, комплексных чисел etc.). **Линейным пространством** (над полем P) называется непустое множество M (элементы которого называются *векторами*) с операциями сложения "$+$" и умножения "$\cdot$" на элементы поля P, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in M$;
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ для всех векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in M$;
3. Существует такой вектор $\mathbf{0}$, что $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$;
4. Для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$ существует такой вектор $(-\boldsymbol{a})\in M$, что $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$.
5. $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$;
6. $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$ и каждых элементов $\lambda,\mu\in P$;
7. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ для каждого вектора $\boldsymbol{a}\in M$ и каждых элементов $\lambda,\mu\in P$;
8. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ для любых векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in M$ и каждого элемента $\lambda\in P$.

Примеры

- Множество $\mathbb{R}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число.

Примеры

- Множество $\mathbb{R}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число.
- Множество $\mathbb{C}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число

Примеры

- Множество $\mathbb{R}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число.
- Множество $\mathbb{C}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число (можно рассмотреть два случая: умножение допускается только на действительные числа – или и на комплексные тоже).

Примеры

- Множество $\mathbb{R}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число.
- Множество $\mathbb{C}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число (можно рассмотреть два случая: умножение допускается только на действительные числа – или и на комплексные тоже).
- Множество всех решений системы линейных однородных уравнений (с операциями покоординатного сложения и умножения на число).

Примеры

- Множество $\mathbb{R}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число.
- Множество $\mathbb{C}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число (можно рассмотреть два случая: умножение допускается только на действительные числа – или и на комплексные тоже).
- Множество всех решений системы линейных однородных уравнений (с операциями покоординатного сложения и умножения на число).
- Множество геометрических векторов с операциями сложения по правилу параллелограмма и умножения на число.

Примеры

- Множество $\mathbb{R}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число.
- Множество $\mathbb{C}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число (можно рассмотреть два случая: умножение допускается только на действительные числа – или и на комплексные тоже).
- Множество всех решений системы линейных однородных уравнений (с операциями покоординатного сложения и умножения на число).
- Множество геометрических векторов с операциями сложения по правилу параллелограмма и умножения на число.
- Множество многочленов степени не выше n с естественными операциями сложения и умножения на число.

Примеры

- Множество $\mathbb{R}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число.
- Множество $\mathbb{C}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число (можно рассмотреть два случая: умножение допускается только на действительные числа – или и на комплексные тоже).
- Множество всех решений системы линейных однородных уравнений (с операциями покоординатного сложения и умножения на число).
- Множество геометрических векторов с операциями сложения по правилу параллелограмма и умножения на число.
- Множество многочленов степени не выше n с естественными операциями сложения и умножения на число.
- Множество всех определенных на отрезке $[0, 1]$ функций с операциями поточечного сложения и умножения на число.

Примеры

- Множество $\mathbb{R}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число.
- Множество $\mathbb{C}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число (можно рассмотреть два случая: умножение допускается только на действительные числа – или и на комплексные тоже).
- Множество всех решений системы линейных однородных уравнений (с операциями покоординатного сложения и умножения на число).
- Множество геометрических векторов с операциями сложения по правилу параллелограмма и умножения на число.
- Множество многочленов степени не выше n с естественными операциями сложения и умножения на число.
- Множество всех определенных на отрезке $[0, 1]$ функций с операциями поточечного сложения и умножения на число. Здесь можно также ограничиться только каким-либо классом функций, замкнутым относительно линейных операций: классом непрерывных, дифференцируемых, интегрируемых функций, и т.п.

Примеры

- Множество $\mathbb{R}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число.
- Множество $\mathbb{C}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число (можно рассмотреть два случая: умножение допускается только на действительные числа – или и на комплексные тоже).
- Множество всех решений системы линейных однородных уравнений (с операциями покоординатного сложения и умножения на число).
- Множество геометрических векторов с операциями сложения по правилу параллелограмма и умножения на число.
- Множество многочленов степени не выше n с естественными операциями сложения и умножения на число.
- Множество всех определенных на отрезке $[0, 1]$ функций с операциями поточечного сложения и умножения на число. Здесь можно также ограничиться только каким-либо классом функций, замкнутым относительно линейных операций: классом непрерывных, дифференцируемых, интегрируемых функций, и т.п.
- Множество всех матриц размера $m \times n$ с введенными ранее операциями сложения и умножения на число.

Примеры

- Множество $\mathbb{R}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число.
- Множество $\mathbb{C}^n$ с операциями покоординатного сложения и умножения на число (можно рассмотреть два случая: умножение допускается только на действительные числа – или и на комплексные тоже).
- Множество всех решений системы линейных однородных уравнений (с операциями покоординатного сложения и умножения на число).
- Множество геометрических векторов с операциями сложения по правилу параллелограмма и умножения на число.
- Множество многочленов степени не выше n с естественными операциями сложения и умножения на число.
- Множество всех определенных на отрезке $[0, 1]$ функций с операциями поточечного сложения и умножения на число. Здесь можно также ограничиться только каким-либо классом функций, замкнутым относительно линейных операций: классом непрерывных, дифференцируемых, интегрируемых функций, и т.п.
- Множество всех матриц размера $m \times n$ с введенными ранее операциями сложения и умножения на число.
- Etc.

Подпространства линейного пространства

Подпространства линейного пространства

Определение

Подпространства линейного пространства

Определение

Подпространством линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется подмножество множества M с операциями сложения и умножения на элементы поля P (определенными для всех элементов пространства $\mathcal{L}$), если оно само образует линейное пространство.

Подпространства линейного пространства

Определение

Подпространством линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется подмножество множества M с операциями сложения и умножения на элементы поля P (определенными для всех элементов пространства $\mathcal{L}$), если оно само образует линейное пространство.

Утверждение

Подпространства линейного пространства

Определение

Подпространством линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется подмножество множества M с операциями сложения и умножения на элементы поля P (определенными для всех элементов пространства $\mathcal{L}$), если оно само образует линейное пространство.

Утверждение

Линейное пространство $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ над полем P есть подпространство линейного пространства $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ над полем P тогда и только тогда, когда

Подпространства линейного пространства

Определение

Подпространством линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется подмножество множества M с операциями сложения и умножения на элементы поля P (определенными для всех элементов пространства $\mathcal{L}$), если оно само образует линейное пространство.

Утверждение

Линейное пространство $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ над полем P есть подпространство линейного пространства $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ над полем P тогда и только тогда, когда $M_1 \subseteq M_2$ и

Подпространства линейного пространства

Определение

Подпространством линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется подмножество множества M с операциями сложения и умножения на элементы поля P (определенными для всех элементов пространства $\mathcal{L}$), если оно само образует линейное пространство.

Утверждение

Линейное пространство $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ *над полем* P *есть подпространство линейного пространства* $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ *над полем* P *тогда и только тогда, когда* $M_1 \subseteq M_2$ *и множество* M_1 *замкнуто относительно операций* $+$ *и* $\cdot$*,*

Подпространства линейного пространства

Определение

Подпространством линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется подмножество множества M с операциями сложения и умножения на элементы поля P (определенными для всех элементов пространства $\mathcal{L}$), если оно само образует линейное пространство.

Утверждение

Линейное пространство $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ над полем P есть подпространство линейного пространства $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ над полем P тогда и только тогда, когда $M_1 \subseteq M_2$ и множество M_1 замкнуто относительно операций $+$ и $\cdot$, т.е. для всех векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M_2$ и элемента $\lambda \in P$

Подпространства линейного пространства

Определение

Подпространством линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется подмножество множества M с операциями сложения и умножения на элементы поля P (определенными для всех элементов пространства $\mathcal{L}$), если оно само образует линейное пространство.

Утверждение

Линейное пространство $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ над полем P есть подпространство линейного пространства $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ над полем P тогда и только тогда, когда $M_1 \subseteq M_2$ и множество M_1 замкнуто относительно операций $+$ и $\cdot$, т.е. для всех векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M_2$ и элемента $\lambda \in P$

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M_1 \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in M_1$,

Подпространства линейного пространства

Определение

Подпространством линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется подмножество множества M с операциями сложения и умножения на элементы поля P (определенными для всех элементов пространства $\mathcal{L}$), если оно само образует линейное пространство.

Утверждение

Линейное пространство $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ над полем P есть подпространство линейного пространства $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ над полем P тогда и только тогда, когда $M_1 \subseteq M_2$ и множество M_1 замкнуто относительно операций $+$ и $\cdot$, т.е. для всех векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M_2$ и элемента $\lambda \in P$

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M_1 \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in M_1$,
2. $\boldsymbol{a} \in M_1 \Rightarrow \lambda \boldsymbol{a} \in M_1$.

Подпространства линейного пространства

Определение

Подпространством линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется подмножество множества M с операциями сложения и умножения на элементы поля P (определенными для всех элементов пространства $\mathcal{L}$), если оно само образует линейное пространство.

Утверждение

Линейное пространство $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ над полем P есть подпространство линейного пространства $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ над полем P тогда и только тогда, когда $M_1 \subseteq M_2$ и множество M_1 замкнуто относительно операций $+$ и $\cdot$, т.е. для всех векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M_2$ и элемента $\lambda \in P$

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M_1 \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in M_1$,
2. $\boldsymbol{a} \in M_1 \Rightarrow \lambda \boldsymbol{a} \in M_1$.

В этом случае говорят, что множество M_1 образует линейное подпространство пространства $\mathcal{L}_2$.

Подпространства линейного пространства

Определение

Подпространством линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется подмножество множества M с операциями сложения и умножения на элементы поля P (определенными для всех элементов пространства $\mathcal{L}$), если оно само образует линейное пространство.

Утверждение

Линейное пространство $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ над полем P есть подпространство линейного пространства $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ над полем P тогда и только тогда, когда $M_1 \subseteq M_2$ и множество M_1 замкнуто относительно операций $+$ и $\cdot$, т.е. для всех векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M_2$ и элемента $\lambda \in P$

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M_1 \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in M_1$,
2. $\boldsymbol{a} \in M_1 \Rightarrow \lambda \boldsymbol{a} \in M_1$.

В этом случае говорят, что множество M_1 образует линейное подпространство пространства $\mathcal{L}_2$.

Доказательство: упражнение (надо проверить, что в условиях утверждения для множества M_1 с операциями сложения и умножения на элементы поля P выполнены все восемь аксиом линейного пространства).

Примеры

Примеры

1. Множество всех векторов $\boldsymbol{x}$ пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, где A есть произвольная матрица (т.е. множество всех решений системы однородных линейных уравнений), образует подпространство пространства $\mathbb{R}^n$.

Примеры

1. Множество всех векторов $\boldsymbol{x}$ пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, где A есть произвольная матрица (т.е. множество всех решений системы однородных линейных уравнений), образует подпространство пространства $\mathbb{R}^n$.
2. Множество всех дважды дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций f, удовлетворяющих условию

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$$

(где a, b – фиксированные числа) образует подпространство пространства дважды дифференцируемых числовых функций одной переменной (вместо указанного можно взять любое другое *линейное дифференциальное уравнение*).

Примеры

1. Множество всех векторов $\boldsymbol{x}$ пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, где A есть произвольная матрица (т.е. множество всех решений системы однородных линейных уравнений), образует подпространство пространства $\mathbb{R}^n$.
2. Множество всех дважды дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций f, удовлетворяющих условию
$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$$
(где a, b – фиксированные числа) образует подпространство пространства дважды дифференцируемых числовых функций одной переменной (вместо указанного можно взять любое другое *линейное дифференциальное уравнение*).
3. Множество всех многочленов p степени не выше n, удовлетворяющих условию
$$p(a) = 0,$$
где a есть некоторое число, образует подпространство пространства всех многочленов степени не выше n.

Примеры

1. Множество всех векторов $\boldsymbol{x}$ пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, где A есть произвольная матрица (т.е. множество всех решений системы однородных линейных уравнений), образует подпространство пространства $\mathbb{R}^n$.
2. Множество всех дважды дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций f, удовлетворяющих условию
$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$$
(где a, b – фиксированные числа) образует подпространство пространства дважды дифференцируемых числовых функций одной переменной (вместо указанного можно взять любое другое *линейное дифференциальное уравнение*).
3. Множество всех многочленов p степени не выше n, удовлетворяющих условию
$$p(a) = 0,$$
где a есть некоторое число, образует подпространство пространства всех многочленов степени не выше n.
4. Множество всех диагональных (симметричных, антисимметричных, верхнетреугольных, нижнетреугольных) матриц $n \times n$ образует подпространство пространства матриц $n \times n$.

Примеры

1. Множество всех векторов $\boldsymbol{x}$ пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, где A есть произвольная матрица (т.е. множество всех решений системы однородных линейных уравнений), образует подпространство пространства $\mathbb{R}^n$.
2. Множество всех дважды дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций f, удовлетворяющих условию
$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$$
(где a, b – фиксированные числа) образует подпространство пространства дважды дифференцируемых числовых функций одной переменной (вместо указанного можно взять любое другое *линейное дифференциальное уравнение*).
3. Множество всех многочленов p степени не выше n, удовлетворяющих условию
$$p(a) = 0,$$
где a есть некоторое число, образует подпространство пространства всех многочленов степени не выше n.
4. Множество всех диагональных (симметричных, антисимметричных, верхнетреугольных, нижнетреугольных) матриц $n \times n$ образует подпространство пространства матриц $n \times n$. **Замечание.** Матрица A симметрична, если $A^T = A$, и антисимметрична, если $A^T = -A$.

Линейная зависимость и независимость. Базис

Линейная зависимость и независимость. Базис

Определение

Линейная зависимость и независимость. Базис

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P. Непустое множество векторов $U \subseteq M$ (или семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов множества M) называется *линейно независимым*, если для любых $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и любых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$ выполнено:

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Линейная зависимость и независимость. Базис

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P. Непустое множество векторов $U \subseteq M$ (или семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов множества M) называется *линейно независимым*, если для любых $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и любых $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in P$ выполнено:

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Если множество $U \subseteq M$ (или семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов множества M) не является линейно независимым, оно называется *линейно зависимым*.

Линейная зависимость и независимость. Базис

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P. Непустое множество векторов $U \subseteq M$ (или семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов множества M) называется *линейно независимым*, если для любых $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и любых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$ выполнено:

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Если множество $U \subseteq M$ (или семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов множества M) не является линейно независимым, оно называется *линейно зависимым*.

Таким образом, множество или семейство $U \subseteq M$ линейно зависимо, если существуют такие векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и элементы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$, что

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0}$$

и среди элементов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ по крайней мере один отличен от нуля.

Определение

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P, множество векторов $U \subseteq M$ (или семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов множества M) и вектор $\boldsymbol{u} \in M$. Вектор $\boldsymbol{u}$ *линейно выражается* через множество (семейство) U, если существуют векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и элементы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$, для которых выполнено:

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k.$$

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P, множество векторов $U \subseteq M$ (или семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов множества M) и вектор $\boldsymbol{u} \in M$. Вектор $\boldsymbol{u}$ *линейно выражается* через множество (семейство) U, если существуют векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и элементы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$, для которых выполнено:

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k.$$

Упражнения

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P, множество векторов $U \subseteq M$ (или семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов множества M) и вектор $\boldsymbol{u} \in M$. Вектор $\boldsymbol{u}$ *линейно выражается* через множество (семейство) U, если существуют векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и элементы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$, для которых выполнено:

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k.$$

Упражнения

Докажите, что

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P, множество векторов $U \subseteq M$ (или семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов множества M) и вектор $\boldsymbol{u} \in M$. Вектор $\boldsymbol{u}$ *линейно выражается* через множество (семейство) U, если существуют векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и элементы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$, для которых выполнено:

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k.$$

Упражнения

Докажите, что

- Если $U \subseteq V$ и множество U линейно зависимо, то и множество V линейно зависимо.

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P, множество векторов $U \subseteq M$ (или семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов множества M) и вектор $\boldsymbol{u} \in M$. Вектор $\boldsymbol{u}$ *линейно выражается* через множество (семейство) U, если существуют векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и элементы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$, для которых выполнено:

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k.$$

Упражнения

Докажите, что

- Если $U \subseteq V$ и множество U линейно зависимо, то и множество V линейно зависимо.
- Если $U \subseteq V$ и множество V линейно независимо, то и множество U линейно независимо.

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P, множество векторов $U \subseteq M$ (или семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов множества M) и вектор $\boldsymbol{u} \in M$. Вектор $\boldsymbol{u}$ *линейно выражается* через множество (семейство) U, если существуют векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и элементы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$, для которых выполнено:

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k.$$

Упражнения

Докажите, что

- Если $U \subseteq V$ и множество U линейно зависимо, то и множество V линейно зависимо.
- Если $U \subseteq V$ и множество V линейно независимо, то и множество U линейно независимо.
- Множество $\{\mathbf{0}\}$ линейно зависимо.

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P, множество векторов $U \subseteq M$ (или семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов множества M) и вектор $\boldsymbol{u} \in M$. Вектор $\boldsymbol{u}$ *линейно выражается* через множество (семейство) U, если существуют векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и элементы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$, для которых выполнено:

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k.$$

Упражнения

Докажите, что

- Если $U \subseteq V$ и множество U линейно зависимо, то и множество V линейно зависимо.
- Если $U \subseteq V$ и множество V линейно независимо, то и множество U линейно независимо.
- Множество $\{\mathbf{0}\}$ линейно зависимо.
- Множество U линейно зависимо тогда и только тогда, когда существует вектор $\boldsymbol{u} \in U$, который линейно выражается через множество $U \setminus \{\boldsymbol{u}\}$.

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P, множество векторов $U \subseteq M$ (или семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов множества M) и вектор $\boldsymbol{u} \in M$. Вектор $\boldsymbol{u}$ *линейно выражается* через множество (семейство) U, если существуют векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и элементы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$, для которых выполнено:

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k.$$

Упражнения

Докажите, что

- Если $U \subseteq V$ и множество U линейно зависимо, то и множество V линейно зависимо.
- Если $U \subseteq V$ и множество V линейно независимо, то и множество U линейно независимо.
- Множество $\{\mathbf{0}\}$ линейно зависимо.
- Множество U линейно зависимо тогда и только тогда, когда существует вектор $\boldsymbol{u} \in U$, который линейно выражается через множество $U \setminus \{\boldsymbol{u}\}$.
- Если множество U линейно независимо, а множество $U \cup \{\boldsymbol{u}\}$ линейно зависимо, то $\boldsymbol{u}$ линейно выражается через U.

Определение

Определение

Базисом линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется непустое упорядоченное семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ векторов из M, для которого выполнены условия:

Определение

Базисом линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется непустое упорядоченное семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ векторов из M, для которого выполнены условия:

1. семейство U линейно независимо;

Определение

Базисом линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется непустое упорядоченное семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ векторов из M, для которого выполнены условия:

1. семейство U линейно независимо;
2. каждый вектор $\boldsymbol{u} \in M$ линейно выражается через U.

Определение

Базисом линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется непустое упорядоченное семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ векторов из M, для которого выполнены условия:

1. семейство U линейно независимо;
2. каждый вектор $\boldsymbol{u} \in M$ линейно выражается через U.

Теорема

Определение

Базисом линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется непустое упорядоченное семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ векторов из M, для которого выполнены условия:

1. семейство U линейно независимо;
2. каждый вектор $\boldsymbol{u} \in M$ линейно выражается через U.

Теорема

Если линейное пространство $\mathcal{L}$ содержит хотя бы один ненулевой элемент, то оно имеет базис.

Определение

Базисом линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется непустое упорядоченное семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ векторов из M, для которого выполнены условия:

1. семейство U линейно независимо;
2. каждый вектор $\boldsymbol{u} \in M$ линейно выражается через U.

Теорема

Если линейное пространство $\mathcal{L}$ содержит хотя бы один ненулевой элемент, то оно имеет базис.

Замечание

Эта теорема требует некоторых специального предположения о структуре универсума всех множеств (*аксиомы выбора*).

Определение

Базисом линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется непустое упорядоченное семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ векторов из M, для которого выполнены условия:

1. семейство U линейно независимо;
2. каждый вектор $\boldsymbol{u} \in M$ линейно выражается через U.

Теорема

Если линейное пространство $\mathcal{L}$ содержит хотя бы один ненулевой элемент, то оно имеет базис.

Замечание

Эта теорема требует некоторых специального предположения о структуре универсума всех множеств (*аксиомы выбора*).

Примеры.

Определение

Базисом линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется непустое упорядоченное семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ векторов из M, для которого выполнены условия:

1. семейство U линейно независимо;
2. каждый вектор $\boldsymbol{u} \in M$ линейно выражается через U.

Теорема

Если линейное пространство $\mathcal{L}$ содержит хотя бы один ненулевой элемент, то оно имеет базис.

Замечание

Эта теорема требует некоторых специального предположения о структуре универсума всех множеств (*аксиомы выбора*).

Примеры.

- Упорядоченный набор $(1, x, x^2)$ есть базис линейного пространства многочленов степени не выше 2.

Определение

Базисом линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется непустое упорядоченное семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ векторов из M, для которого выполнены условия:

1. семейство U линейно независимо;
2. каждый вектор $\boldsymbol{u} \in M$ линейно выражается через U.

Теорема

Если линейное пространство $\mathcal{L}$ содержит хотя бы один ненулевой элемент, то оно имеет базис.

Замечание

Эта теорема требует некоторых специального предположения о структуре универсума всех множеств (*аксиомы выбора*).

Примеры.

- Упорядоченный набор $(1, x, x^2)$ есть базис линейного пространства многочленов степени не выше 2.
- Упорядоченный набор $(1, x, x^2, \ldots)$ есть (бесконечный) базис линейного пространства многочленов (произвольной степени).

Определение

Базисом линейного пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P называется непустое упорядоченное семейство $U = (\boldsymbol{u}_\alpha)_{\alpha \in I}$ векторов из M, для которого выполнены условия:

1. семейство U линейно независимо;
2. каждый вектор $\boldsymbol{u} \in M$ линейно выражается через U.

Теорема

Если линейное пространство $\mathcal{L}$ содержит хотя бы один ненулевой элемент, то оно имеет базис.

Замечание

Эта теорема требует некоторых специального предположения о структуре универсума всех множеств (*аксиомы выбора*).

Примеры.

- Упорядоченный набор $(1, x, x^2)$ есть базис линейного пространства многочленов степени не выше 2.
- Упорядоченный набор $(1, x, x^2, \ldots)$ есть (бесконечный) базис линейного пространства многочленов (произвольной степени).
- Линейное пространство $\mathbb{R}^n$ имеет базис $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, ..., $(0, 0, \ldots, 1)$. Этот базис называется *каноническим*.

Определение

Определение

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *конечномерным*, если оно состоит только из одного (нулевого) элемента или имеет хотя бы один конечный базис.

Определение

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *конечномерным*, если оно состоит только из одного (нулевого) элемента или имеет хотя бы один конечный базис.

Теорема (о базисе, расширенная версия)

Определение

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *конечномерным*, если оно состоит только из одного (нулевого) элемента или имеет хотя бы один конечный базис.

Теорема (о базисе, расширенная версия)

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное ненулевое пространство.

Определение

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *конечномерным*, если оно состоит только из одного (нулевого) элемента или имеет хотя бы один конечный базис.

Теорема (о базисе, расширенная версия)

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное ненулевое пространство. Тогда

1. *все его базисы конечны и имеют одну и ту же мощность (количество элементов),*

Определение

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *конечномерным*, если оно состоит только из одного (нулевого) элемента или имеет хотя бы один конечный базис.

Теорема (о базисе, расширенная версия)

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное ненулевое пространство. Тогда

1. *все его базисы конечны и имеют одну и ту же мощность (количество элементов),*
2. *если линейное пространство $\mathcal{L}$ имеет базис из n элементов, то любой линейно независимый набор из n элементов линеного пространства $\mathcal{L}$ есть его базис,*

Определение

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *конечномерным*, если оно состоит только из одного (нулевого) элемента или имеет хотя бы один конечный базис.

Теорема (о базисе, расширенная версия)

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное ненулевое пространство. Тогда

1. *все его базисы конечны и имеют одну и ту же мощность (количество элементов),*
2. *если линейное пространство $\mathcal{L}$ имеет базис из n элементов, то любой линейно независимый набор из n элементов линеного пространства $\mathcal{L}$ есть его базис,*
3. *если $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ есть базис пространства $\mathcal{L}$, то любой вектор $\boldsymbol{u}$ из $\mathcal{L}$ однозначно представляется в виде линейной комбинации $\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n$ векторов базиса.*

Определение

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *конечномерным*, если оно состоит только из одного (нулевого) элемента или имеет хотя бы один конечный базис.

Теорема (о базисе, расширенная версия)

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное ненулевое пространство. Тогда

1. *все его базисы конечны и имеют одну и ту же мощность (количество элементов),*
2. *если линейное пространство $\mathcal{L}$ имеет базис из n элементов, то любой линейно независимый набор из n элементов линеного пространства $\mathcal{L}$ есть его базис,*
3. *если $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ есть базис пространства $\mathcal{L}$, то любой вектор $\boldsymbol{u}$ из $\mathcal{L}$ однозначно представляется в виде линейной комбинации $\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n$ векторов базиса.*

Свойство 1. позволяет дать следующее определение.

Определение

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *конечномерным*, если оно состоит только из одного (нулевого) элемента или имеет хотя бы один конечный базис.

Теорема (о базисе, расширенная версия)

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное ненулевое пространство. Тогда

1. *все его базисы конечны и имеют одну и ту же мощность (количество элементов),*
2. *если линейное пространство $\mathcal{L}$ имеет базис из n элементов, то любой линейно независимый набор из n элементов линеного пространства $\mathcal{L}$ есть его базис,*
3. *если $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ есть базис пространства $\mathcal{L}$, то любой вектор $\boldsymbol{u}$ из $\mathcal{L}$ однозначно представляется в виде линейной комбинации $\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n$ векторов базиса.*

Свойство 1. позволяет дать следующее определение.

Определение

Определение

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *конечномерным*, если оно состоит только из одного (нулевого) элемента или имеет хотя бы один конечный базис.

Теорема (о базисе, расширенная версия)

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное ненулевое пространство. Тогда

1. *все его базисы конечны и имеют одну и ту же мощность (количество элементов),*
2. *если линейное пространство $\mathcal{L}$ имеет базис из n элементов, то любой линейно независимый набор из n элементов линеного пространства $\mathcal{L}$ есть его базис,*
3. *если $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ есть базис пространства $\mathcal{L}$, то любой вектор $\boldsymbol{u}$ из $\mathcal{L}$ однозначно представляется в виде линейной комбинации $\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n$ векторов базиса.*

Свойство 1. позволяет дать следующее определение.

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное линейное пространство. Если пространство $\mathcal{L}$ ненулевое, то *размерностью* $\dim \mathcal{L}$ пространства $\mathcal{L}$ называется число элементов в каком-либо (любом) его базисе. Размерность нулевого пространства полагают равной нулю.

Свойство 3. позволяет дать следующее определение.

Свойство 3. позволяет дать следующее определение.

Определение

Свойство 3. позволяет дать следующее определение.

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное пространство размерности n и семейство $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ есть его базис. Тогда *координатами* вектора $\boldsymbol{u}$ пространства $\mathcal{L}$ называется набор $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ коэффициентов линейной комбинации $\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{u}_n$ векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, которая равна $\boldsymbol{u}$.

Свойство 3. позволяет дать следующее определение.

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное пространство размерности n и семейство $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ есть его базис. Тогда *координатами* вектора $\boldsymbol{u}$ пространства $\mathcal{L}$ называется набор $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ коэффициентов линейной комбинации $\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{u}_n$ векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, которая равна $\boldsymbol{u}$.

Координаты вектора $\boldsymbol{u}$ обычно записываются в столбик.

Свойство 3. позволяет дать следующее определение.

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное пространство размерности n и семейство $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ есть его базис. Тогда *координатами* вектора $\boldsymbol{u}$ пространства $\mathcal{L}$ называется набор $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ коэффициентов линейной комбинации $\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n$ векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, которая равна $\boldsymbol{u}$.

Координаты вектора $\boldsymbol{u}$ обычно записываются в столбик.

Пример

Свойство 3. позволяет дать следующее определение.

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное пространство размерности n и семейство $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ есть его базис. Тогда *координатами* вектора $\boldsymbol{u}$ пространства $\mathcal{L}$ называется набор $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ коэффициентов линейной комбинации $\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{u}_n$ векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, которая равна $\boldsymbol{u}$.

Координаты вектора $\boldsymbol{u}$ обычно записываются в столбик.

Пример

Дан вектор $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ пространства $\mathbb{R}^3$. Найдите его координаты (а) в каноническом базисе, (б) в базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$, предварительно убедившись, что семейство $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ действительно базис пространства $\mathbb{R}^3$.

Свойство 3. позволяет дать следующее определение.

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное пространство размерности n и семейство $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ есть его базис. Тогда *координатами* вектора $\boldsymbol{u}$ пространства $\mathcal{L}$ называется набор $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ коэффициентов линейной комбинации $\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n$ векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, которая равна $\boldsymbol{u}$.

Координаты вектора $\boldsymbol{u}$ обычно записываются в столбик.

Пример

Дан вектор $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ пространства $\mathbb{R}^3$. Найдите его координаты (а) в каноническом базисе, (б) в базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$, предварительно убедившись, что семейство $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ действительно базис пространства $\mathbb{R}^3$.

(а) $\boldsymbol{u} = 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1)$. Координаты вектора $\boldsymbol{u}$ в каноническом базисе есть $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Свойство 3. позволяет дать следующее определение.

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное пространство размерности n и семейство $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ есть его базис. Тогда *координатами* вектора $\boldsymbol{u}$ пространства $\mathcal{L}$ называется набор $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ коэффициентов линейной комбинации $\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n$ векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, которая равна $\boldsymbol{u}$.

Координаты вектора $\boldsymbol{u}$ обычно записываются в столбик.

Пример

Дан вектор $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ пространства $\mathbb{R}^3$. Найдите его координаты (а) в каноническом базисе, (б) в базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$, предварительно убедившись, что семейство $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ действительно базис пространства $\mathbb{R}^3$.

(а) $\boldsymbol{u} = 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1)$. Координаты вектора $\boldsymbol{u}$ в каноническом базисе есть $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Замечание.

Свойство 3. позволяет дать следующее определение.

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное пространство размерности n и семейство $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ есть его базис. Тогда *координатами* вектора $\boldsymbol{u}$ пространства $\mathcal{L}$ называется набор $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ коэффициентов линейной комбинации $\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n$ векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, которая равна $\boldsymbol{u}$.

Координаты вектора $\boldsymbol{u}$ обычно записываются в столбик.

Пример

Дан вектор $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ пространства $\mathbb{R}^3$. Найдите его координаты (а) в каноническом базисе, (б) в базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$, предварительно убедившись, что семейство $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ действительно базис пространства $\mathbb{R}^3$.

(а) $\boldsymbol{u} = 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1)$. Координаты вектора $\boldsymbol{u}$ в каноническом базисе есть $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Замечание. Элементы пространства $\mathbb{R}^n$ обычно записываются в строку. Однако каждый вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ корректно записать и в столбик, если воспринимать его как **вектор его координат в каноническом базисе**.

(б) Поскольку векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ три, они образуют базис в $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда они линейно независимы. Это можно выяснить, проверив матрицу со строками $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ (или столбцами $\boldsymbol{e}_1^T, \boldsymbol{e}_2^T, \boldsymbol{e}_3^T$) на невырожденность.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

значит, векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ линейно независимы.

(б) Поскольку векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ три, они образуют базис в $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда они линейно независимы. Это можно выяснить, проверив матрицу со строками $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ (или столбцами $\boldsymbol{e}_1^T, \boldsymbol{e}_2^T, \boldsymbol{e}_3^T$) на невырожденность.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

значит, векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ линейно независимы. Для получения координат вектора $\boldsymbol{u}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ решаем уравнение

$$x_1(1,1,1) + x_2(0,1,1) + x_3(0,0,1) = (1,2,3),$$

что приводит к системе

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

(б) Поскольку векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ три, они образуют базис в $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда они линейно независимы. Это можно выяснить, проверив матрицу со строками $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ (или столбцами $\boldsymbol{e}_1^T, \boldsymbol{e}_2^T, \boldsymbol{e}_3^T$) на невырожденность.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

значит, векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ линейно независимы. Для получения координат вектора $\boldsymbol{u}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ решаем уравнение

$$x_1(1,1,1) + x_2(0,1,1) + x_3(0,0,1) = (1,2,3),$$

что приводит к системе

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Координаты вектора $\boldsymbol{u}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ есть $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Переход к новому базису

Переход к новому базису

Пусть векторы “нового” базиса $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ линейного пространства $\mathcal{L}$ размерности n выражены через “старый” базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}'_2 = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n \\ \ldots \\ \boldsymbol{e}'_n = a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

Переход к новому базису

Пусть векторы "нового" базиса $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \ldots, \boldsymbol{e}_n'$ линейного пространства $\mathcal{L}$ размерности n выражены через "старый" базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}_2' = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n \\ \ldots \\ \boldsymbol{e}_n' = a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

Тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}^T$$

называется матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \ldots, \boldsymbol{e}_n'$.

Переход к новому базису

Пусть векторы “нового” базиса $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ линейного пространства $\mathcal{L}$ размерности n выражены через “старый” базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}'_2 = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n \\ \ldots \\ \boldsymbol{e}'_n = a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

Тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}^T$$

называется матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$.

Замечание

Переход к новому базису

Пусть векторы "нового" базиса $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \ldots, \boldsymbol{e}_n'$ линейного пространства $\mathcal{L}$ размерности n выражены через "старый" базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}_2' = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n \\ \ldots \\ \boldsymbol{e}_n' = a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

Тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}^T$$

называется матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \ldots, \boldsymbol{e}_n'$.

Замечание

Матрица перехода невырождена. **Упражнение:** почему?

Символическая запись:

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \cdot A.$$

Символическая запись:

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \cdot A.$$

Теорема

Символическая запись:

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) \cdot A.$$

Теорема

Пусть матрица A есть матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$ пространства $\mathcal{L}$ (размерности n).

Символическая запись:

$$(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \ldots, \boldsymbol{e}_n') = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \cdot A.$$

Теорема

Пусть матрица A есть матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \ldots, \boldsymbol{e}_n'$ пространства $\mathcal{L}$ (размерности n). Тогда для любого вектора $\boldsymbol{x}$ пространства $\mathcal{L}$ его координаты $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}$ в (новом) базисе $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \ldots, \boldsymbol{e}_n'$ и его координаты $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ в (старом) базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Символическая запись:

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \cdot A.$$

Теорема

Пусть матрица A есть матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ пространства $\mathcal{L}$ (размерности n). Тогда для любого вектора $\boldsymbol{x}$ пространства $\mathcal{L}$ его координаты $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$ в (новом) базисе $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ и его координаты $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ в (старом) базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Внимание! При решении задач не перепутайте, где «новый» базис, а где «старый».

Доказательство.

Доказательство. Пусть x есть произвольный вектор пространства $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}$ есть произвольный вектор пространства $\mathcal{L}$. Разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по базисам $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$, и приравняем результаты:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + x'_n\boldsymbol{e}'_n$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}$ есть произвольный вектор пространства $\mathcal{L}$. Разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по базисам $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$, и приравняем результаты:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + x'_n\boldsymbol{e}'_n$$

Заменим в этом равенстве векторы $\boldsymbol{e}'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ на их разложение

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}'_2 = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n \\ \ldots \\ \boldsymbol{e}'_n = a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$:

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}$ есть произвольный вектор пространства $\mathcal{L}$. Разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по базисам $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$, и приравняем результаты:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + x'_n\boldsymbol{e}'_n$$

Заменим в этом равенстве векторы $\boldsymbol{e}'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ на их разложение

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}'_2 = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n \\ \ldots \\ \boldsymbol{e}'_n = a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = & x'_1(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n) + \\ & x'_2(a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n) + \\ & \ldots \\ & x'_n(a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n). \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}$ есть произвольный вектор пространства $\mathcal{L}$. Разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по базисам $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$, и приравняем результаты:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + x'_n\boldsymbol{e}'_n$$

Заменим в этом равенстве векторы $\boldsymbol{e}'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ на их разложение

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}'_2 = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n \\ \ldots \\ \boldsymbol{e}'_n = a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = & x'_1(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n) + \\ & x'_2(a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n) + \\ & \ldots \\ & x'_n(a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при векторах базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, получаем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Утверждение

Утверждение

1. *Если* X *есть матрица перехода от базиса* B_1 *к базису* B_2*, а* Y *есть матрица перехода от базиса* B_2 *к базису* B_3*, то матрица* XY *есть матрица перехода от базиса* B_1 *к базису* B_3*.*

Утверждение

1. *Если X есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_2, а Y есть матрица перехода от базиса B_2 к базису B_3, то матрица XY есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_3.*
2. *Если X есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_2, то X^{-1} есть матрица перехода от базиса B_2 к базису B_1.*

Утверждение

1. *Если* X *есть матрица перехода от базиса* B_1 *к базису* B_2*, а* Y *есть матрица перехода от базиса* B_2 *к базису* B_3*, то матрица* XY *есть матрица перехода от базиса* B_1 *к базису* B_3*.*
2. *Если* X *есть матрица перехода от базиса* B_1 *к базису* B_2*, то* X^{-1} *есть матрица перехода от базиса* B_2 *к базису* B_1*.*
3. *В пространстве* $\mathbb{R}^n$ *матрица перехода от канонического базиса к базису* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *есть матрица со столбцами* $\boldsymbol{e}_1^T, \boldsymbol{e}_2^T, \ldots, \boldsymbol{e}_n^T$*.*

Утверждение

1. *Если X есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_2, а Y есть матрица перехода от базиса B_2 к базису B_3, то матрица XY есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_3.*
2. *Если X есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_2, то X^{-1} есть матрица перехода от базиса B_2 к базису B_1.*
3. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ матрица перехода от канонического базиса к базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ есть матрица со столбцами $\boldsymbol{e}_1^T, \boldsymbol{e}_2^T, \ldots, \boldsymbol{e}_n^T$.*

Доказательство.

Утверждение

1. *Если X есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_2, а Y есть матрица перехода от базиса B_2 к базису B_3, то матрица XY есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_3.*
2. *Если X есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_2, то X^{-1} есть матрица перехода от базиса B_2 к базису B_1.*
3. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ матрица перехода от канонического базиса к базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ есть матрица со столбцами $\boldsymbol{e}_1^T, \boldsymbol{e}_2^T, \ldots, \boldsymbol{e}_n^T$.*

Доказательство.

1. Пусть $B_1 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, $B_2 = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ и $B_3 = (\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2, \ldots, \boldsymbol{e}''_n)$. Тогда

$$(\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2, \ldots, \boldsymbol{e}''_n) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n) \cdot Y = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \cdot X \cdot Y.$$

Утверждение

1. *Если* X *есть матрица перехода от базиса* B_1 *к базису* B_2*, а* Y *есть матрица перехода от базиса* B_2 *к базису* B_3*, то матрица* XY *есть матрица перехода от базиса* B_1 *к базису* B_3*.*
2. *Если* X *есть матрица перехода от базиса* B_1 *к базису* B_2*, то* X^{-1} *есть матрица перехода от базиса* B_2 *к базису* B_1*.*
3. *В пространстве* $\mathbb{R}^n$ *матрица перехода от канонического базиса к базису* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *есть матрица со столбцами* $\boldsymbol{e}_1^T, \boldsymbol{e}_2^T, \ldots, \boldsymbol{e}_n^T$*.*

Доказательство.

1. Пусть $B_1 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, $B_2 = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ и $B_3 = (\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2, \ldots, \boldsymbol{e}''_n)$. Тогда
$$(\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2, \ldots, \boldsymbol{e}''_n) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n) \cdot Y = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \cdot X \cdot Y.$$
2. Легко проверить, что матрица перехода от базиса B к самому себе есть единичная матрица E. Пусть X есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_2, а Y есть матрица перехода от базиса B_2 к базису B_1. Тогда по предыдущему пункту имеем: $XY = E$. Значит, $Y = X^{-1}$.

Утверждение

1. *Если X есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_2, а Y есть матрица перехода от базиса B_2 к базису B_3, то матрица XY есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_3.*
2. *Если X есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_2, то X^{-1} есть матрица перехода от базиса B_2 к базису B_1.*
3. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ матрица перехода от канонического базиса к базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ есть матрица со столбцами $\boldsymbol{e}_1^T, \boldsymbol{e}_2^T, \ldots, \boldsymbol{e}_n^T$.*

Доказательство.

1. Пусть $B_1 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, $B_2 = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ и $B_3 = (\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2, \ldots, \boldsymbol{e}''_n)$. Тогда
$$(\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2, \ldots, \boldsymbol{e}''_n) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n) \cdot Y = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \cdot X \cdot Y.$$
2. Легко проверить, что матрица перехода от базиса B к самому себе есть единичная матрица E. Пусть X есть матрица перехода от базиса B_1 к базису B_2, а Y есть матрица перехода от базиса B_2 к базису B_1. Тогда по предыдущему пункту имеем: $XY = E$. Значит, $Y = X^{-1}$.
3. **Упражнение.**

Пример

Пример

Найти матрицу перехода от базиса $B = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к базису $B' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ пространства $\mathbb{R}^3$, если

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,1,1) \qquad \boldsymbol{e}_2 = (1,2,3) \quad \boldsymbol{e}_3 = (1,0,1)$$

$$\boldsymbol{e}'_1 = (-1,0,1) \quad \boldsymbol{e}'_2 = (1,3,3) \quad \boldsymbol{e}'_3 = (1,-1,-1)$$

Пример

Найти матрицу перехода от базиса $B = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к базису $B' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ пространства $\mathbb{R}^3$, если

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 1) \qquad \boldsymbol{e}_2 = (1, 2, 3) \quad \boldsymbol{e}_3 = (1, 0, 1)$$

$$\boldsymbol{e}'_1 = (-1, 0, 1) \quad \boldsymbol{e}'_2 = (1, 3, 3) \quad \boldsymbol{e}'_3 = (1, -1, -1)$$

Запишем матрицы X и X' перехода от канонического базиса к базисам B и B' соответственно:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Пример

Найти матрицу перехода от базиса $B = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к базису $B' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ пространства $\mathbb{R}^3$, если

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,1,1) \qquad \boldsymbol{e}_2 = (1,2,3) \qquad \boldsymbol{e}_3 = (1,0,1)$$

$$\boldsymbol{e}'_1 = (-1,0,1) \qquad \boldsymbol{e}'_2 = (1,3,3) \qquad \boldsymbol{e}'_3 = (1,-1,-1)$$

Запишем матрицы X и X' перехода от канонического базиса к базисам B и B' соответственно:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

искомая матрица перехода есть

$$X^{-1}X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Линейные отображения и операторы

Линейные отображения и операторы

В дальнейшем под функциями $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ мы будем понимать функции $\mathcal{A} : M_1 \to M_2$. Аналогично, мы будем писать $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$ вместо $\boldsymbol{x} \in M_1$ и т.д.

Линейные отображения и операторы

В дальнейшем под функциями $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ мы будем понимать функции $\mathcal{A} : M_1 \to M_2$. Аналогично, мы будем писать $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$ вместо $\boldsymbol{x} \in M_1$ и т.д.

Определение

Линейные отображения и операторы

В дальнейшем под функциями $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ мы будем понимать функции $\mathcal{A} : M_1 \to M_2$. Аналогично, мы будем писать $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$ вместо $\boldsymbol{x} \in M_1$ и т.д.

Определение

Линейное отображение $\mathcal{A}$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2$ (оба над полем P) есть функция $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, удовлетворяющая условиям:

Линейные отображения и операторы

В дальнейшем под функциями $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ мы будем понимать функции $\mathcal{A} : M_1 \to M_2$. Аналогично, мы будем писать $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$ вместо $\boldsymbol{x} \in M_1$ и т.д.

Определение

Линейное отображение $\mathcal{A}$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2$ (оба над полем P) есть функция $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, удовлетворяющая условиям:

1. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1$,

Линейные отображения и операторы

В дальнейшем под функциями $\mathcal{A}:\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1 = (M_1;+,\cdot)$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2 = (M_2;+,\cdot)$ мы будем понимать функции $\mathcal{A}: M_1 \to M_2$. Аналогично, мы будем писать $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$ вместо $\boldsymbol{x} \in M_1$ и т.д.

Определение

Линейное отображение $\mathcal{A}$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2$ (оба над полем P) есть функция $\mathcal{A}:\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, удовлетворяющая условиям:

1. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1$,
2. $\mathcal{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$, $\lambda \in P$.

Линейные отображения и операторы

В дальнейшем под функциями $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ мы будем понимать функции $\mathcal{A} : M_1 \to M_2$. Аналогично, мы будем писать $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$ вместо $\boldsymbol{x} \in M_1$ и т.д.

Определение

Линейное отображение $\mathcal{A}$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2$ (оба над полем P) есть функция $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, удовлетворяющая условиям:

1. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1$,
2. $\mathcal{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$, $\lambda \in P$.

Линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется **линейным оператором** (иногда и произвольное линейное отображение тоже).

Линейные отображения и операторы

В дальнейшем под функциями $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ мы будем понимать функции $\mathcal{A} : M_1 \to M_2$. Аналогично, мы будем писать $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$ вместо $\boldsymbol{x} \in M_1$ и т.д.

Определение

Линейное отображение $\mathcal{A}$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2$ (оба над полем P) есть функция $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, удовлетворяющая условиям:

1. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1$,
2. $\mathcal{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$, $\lambda \in P$.

Линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется **линейным оператором** (иногда и произвольное линейное отображение тоже).

Замечания.

Линейные отображения и операторы

В дальнейшем под функциями $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ мы будем понимать функции $\mathcal{A} : M_1 \to M_2$. Аналогично, мы будем писать $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$ вместо $\boldsymbol{x} \in M_1$ и т.д.

Определение

Линейное отображение $\mathcal{A}$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2$ (оба над полем P) есть функция $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, удовлетворяющая условиям:

1. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1$,
2. $\mathcal{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$, $\lambda \in P$.

Линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется **линейным оператором** (иногда и произвольное линейное отображение тоже).

Замечания.

- Символы сложения и умножения на элемент поля P, вообще говоря, разные в разных частях этих равенств.

Линейные отображения и операторы

В дальнейшем под функциями $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ мы будем понимать функции $\mathcal{A} : M_1 \to M_2$. Аналогично, мы будем писать $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$ вместо $\boldsymbol{x} \in M_1$ и т.д.

Определение

Линейное отображение $\mathcal{A}$ из линейного пространства $\mathcal{L}_1$ в линейное пространство $\mathcal{L}_2$ (оба над полем P) есть функция $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, удовлетворяющая условиям:

1. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1$,
2. $\mathcal{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$, $\lambda \in P$.

Линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется **линейным оператором** (иногда и произвольное линейное отображение тоже).

Замечания.

- Символы сложения и умножения на элемент поля P, вообще говоря, разные в разных частях этих равенств.
- Из определения следует равенство

$$\mathcal{A}(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n) = \lambda_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2) + \ldots + \lambda_n \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)$$

  для всех $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathcal{L}_1$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in P$.

Примеры

Примеры

- линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y)$,

Примеры

- линейный оператор $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x,y)=(x+y,x-y)$,
- линейное отображение $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\mathcal{A}(x,y)=2x+3y$,

Примеры

- линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y)$,
- линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(x, y) = 2x + 3y$,
- линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x) = (x, 2x)$,

Примеры

- линейный оператор $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x,y)=(x+y,x-y)$,
- линейное отображение $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\mathcal{A}(x,y)=2x+3y$,
- линейное отображение $\mathcal{A}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x)=(x,2x)$,
- линейный оператор $\mathcal{D}$ (дифференцирования) из пространства $\mathcal{P}_n$ многочленов степени не выше n в себя, который ставит в соответствие каждому многочлену $p\in\mathcal{P}_n$ его производную p', например, $\mathcal{A}(x^2-3x+1)=2x-3$,

Примеры

- линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y)$,
- линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(x, y) = 2x + 3y$,
- линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x) = (x, 2x)$,
- линейный оператор $\mathcal{D}$ (дифференцирования) из пространства $\mathcal{P}_n$ многочленов степени не выше n в себя, который ставит в соответствие каждому многочлену $p \in \mathcal{P}_n$ его производную p', например, $\mathcal{A}(x^2 - 3x + 1) = 2x - 3$,
- линейное отображение $\mathcal{S}$ из пространства $\mathcal{F}$ функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, которое ставит в соответствие каждой функции $f \in \mathcal{F}$ ее значение в нуле, например $\mathcal{S}(\cos(x)) = 1$.

Примеры

- линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y)$,
- линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(x, y) = 2x + 3y$,
- линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x) = (x, 2x)$,
- линейный оператор $\mathcal{D}$ (дифференцирования) из пространства $\mathcal{P}_n$ многочленов степени не выше n в себя, который ставит в соответствие каждому многочлену $p \in \mathcal{P}_n$ его производную p', например, $\mathcal{A}(x^2 - 3x + 1) = 2x - 3$,
- линейное отображение $\mathcal{S}$ из пространства $\mathcal{F}$ функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, которое ставит в соответствие каждой функции $f \in \mathcal{F}$ ее значение в нуле, например $\mathcal{S}(\cos(x)) = 1$.
- линейное отображение trace из пространства M_{nn} квадратных матриц размера $n \times n$ в $\mathbb{R}$, которое ставит в соответствие каждой матрице $A \in M_{nn}$ ее *след*, т.е. сумму элементов, стоящих на главной диагонали, например $\mathrm{trace}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 + 4 = 5$.

Образ и ядро линейного отображения

Образ и ядро линейного отображения

Определение

Образ и ядро линейного отображения

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

Образ и ядро линейного отображения

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_2 : (\exists \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1)\, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ называется *образом* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.

Образ и ядро линейного отображения

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_2 : (\exists \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1)\, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ называется *образом* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.
- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1 : \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$ называется *ядром* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Образ и ядро линейного отображения

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_2 : (\exists \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1)\, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ называется *образом* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.
- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1 : \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ называется *ядром* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Теорема

Образ и ядро линейного отображения

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_2 : (\exists \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1)\, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ называется *образом* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.
- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1 : \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$ называется *ядром* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Теорема

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

Образ и ядро линейного отображения

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_2 : (\exists \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1)\, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ называется *образом* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.
- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1 : \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$ называется *ядром* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Теорема

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$. Тогда

Образ и ядро линейного отображения

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_2 : (\exists \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1)\, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ называется *образом* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.
- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1 : \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$ называется *ядром* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Теорема

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$. Тогда

- $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ *образует подпространство в пространстве $\mathcal{L}_2$;*

Образ и ядро линейного отображения

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_2 : (\exists \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1)\, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ называется *образом* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.
- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1 : \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ называется *ядром* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Теорема

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$. Тогда

- $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ *образует подпространство в пространстве $\mathcal{L}_2$;*
- $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ *образует подпространство в пространстве $\mathcal{L}_1$.*

Образ и ядро линейного отображения

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_2 : (\exists \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1)\, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ называется *образом* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.
- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1 : \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ называется *ядром* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Теорема

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$. Тогда

- $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ *образует подпространство в пространстве $\mathcal{L}_2$;*
- $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ *образует подпространство в пространстве $\mathcal{L}_1$.*

Доказательство.

Образ и ядро линейного отображения

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_2 : (\exists \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1)\, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ называется *образом* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.
- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1 : \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ называется *ядром* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Теорема

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$. Тогда

- $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ *образует подпространство в пространстве $\mathcal{L}_2$;*
- $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ *образует подпространство в пространстве $\mathcal{L}_1$.*

Доказательство.

- $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{A} \Rightarrow \boldsymbol{y}_1 = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{y}_2 = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2)$ для некоторых $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{L}_1$.
Значит, $\lambda_1 \boldsymbol{y}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{y}_2 = \lambda_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2) = \mathcal{A}(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$.

Образ и ядро линейного отображения

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_2 : (\exists \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1)\, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ называется *образом* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.
- Множество $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_1 : \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ называется *ядром* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Теорема

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$. Тогда

- $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ *образует подпространство в пространстве $\mathcal{L}_2$;*
- $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ *образует подпространство в пространстве $\mathcal{L}_1$.*

Доказательство.

- $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{A} \Rightarrow \boldsymbol{y}_1 = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{y}_2 = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2)$ для некоторых $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{L}_1$. Значит, $\lambda_1 \boldsymbol{y}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{y}_2 = \lambda_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2) = \mathcal{A}(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$.
- $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$. Значит, $\mathcal{A}(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$. Следовательно, $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Теорема (о размерности образа и ядра линейного отображения)

Теорема (о размерности образа и ядра линейного отображения)

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *из пространства* $\mathcal{L}_1$ *размерности* $n < \infty$ *в пространство* $\mathcal{L}_2$*. Тогда*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n.$$

Теорема (о размерности образа и ядра линейного отображения)

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *из пространства* $\mathcal{L}_1$ *размерности* $n < \infty$ *в пространство* $\mathcal{L}_2$. *Тогда*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n.$$

Замечание

Теорема (о размерности образа и ядра линейного отображения)

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *из пространства* $\mathcal{L}_1$ *размерности* $n < \infty$ *в пространство* $\mathcal{L}_2$*. Тогда*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n.$$

Замечание

Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, заданное формулой $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, где A есть матрица размера $m \times n$, а векторы из $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ записываются в столбик.

Теорема (о размерности образа и ядра линейного отображения)

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *из пространства* $\mathcal{L}_1$ *размерности* $n < \infty$ *в пространство* $\mathcal{L}_2$. *Тогда*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n.$$

Замечание

Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, заданное формулой $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, где A есть матрица размера $m \times n$, а векторы из $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ записываются в столбик. Тогда

Теорема (о размерности образа и ядра линейного отображения)

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *из пространства* $\mathcal{L}_1$ *размерности* $n < \infty$ *в пространство* $\mathcal{L}_2$*. Тогда*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n.$$

Замечание

Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, заданное формулой $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, где A есть матрица размера $m \times n$, а векторы из $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ записываются в столбик. Тогда

- $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ есть совокупность всех линейных комбинаций (*линейная оболочка*) столбцов матрицы A.

Теорема (о размерности образа и ядра линейного отображения)

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из пространства $\mathcal{L}_1$ размерности $n < \infty$ в пространство $\mathcal{L}_2$. Тогда

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n.$$

Замечание

Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, заданное формулой $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, где A есть матрица размера $m \times n$, а векторы из $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ записываются в столбик. Тогда

- $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ есть совокупность всех линейных комбинаций (*линейная оболочка*) столбцов матрицы A. В качестве базиса пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ можно выбрать любой максимальный по включению набор линейно независимых столбцов матрицы A.

Теорема (о размерности образа и ядра линейного отображения)

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *из пространства* $\mathcal{L}_1$ *размерности* $n < \infty$ *в пространство* $\mathcal{L}_2$*. Тогда*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n.$$

Замечание

Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, заданное формулой $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, где A есть матрица размера $m \times n$, а векторы из $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ записываются в столбик. Тогда

- $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ есть совокупность всех линейных комбинаций (*линейная оболочка*) столбцов матрицы A. В качестве базиса пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ можно выбрать любой максимальный по включению набор линейно независимых столбцов матрицы A. Размерность пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ равна рангу матрицы A.

Теорема (о размерности образа и ядра линейного отображения)

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *из пространства* $\mathcal{L}_1$ *размерности* $n < \infty$ *в пространство* $\mathcal{L}_2$*. Тогда*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n.$$

Замечание

Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, заданное формулой $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, где A есть матрица размера $m \times n$, а векторы из $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ записываются в столбик. Тогда

- $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ есть совокупность всех линейных комбинаций (*линейная оболочка*) столбцов матрицы A. В качестве базиса пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ можно выбрать любой максимальный по включению набор линейно независимых столбцов матрицы A. Размерность пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ равна рангу матрицы A.
- $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ есть множество всех решений с. л. о. у. $A\boldsymbol{x} = 0$.

Теорема (о размерности образа и ядра линейного отображения)

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из пространства $\mathcal{L}_1$ размерности $n < \infty$ в пространство $\mathcal{L}_2$. Тогда

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n.$$

Замечание

Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, заданное формулой $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, где A есть матрица размера $m \times n$, а векторы из $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ записываются в столбик. Тогда

- $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ есть совокупность всех линейных комбинаций (*линейная оболочка*) столбцов матрицы A. В качестве базиса пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ можно выбрать любой максимальный по включению набор линейно независимых столбцов матрицы A. Размерность пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ равна рангу матрицы A.
- $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ есть множество всех решений с. л. о. у. $A\boldsymbol{x} = 0$. В качестве базиса пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ можно выбрать любой ФНР этой системы.

Теорема (о размерности образа и ядра линейного отображения)

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из пространства $\mathcal{L}_1$ размерности $n < \infty$ в пространство $\mathcal{L}_2$. Тогда

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n.$$

Замечание

Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, заданное формулой $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, где A есть матрица размера $m \times n$, а векторы из $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ записываются в столбик. Тогда

- $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ есть совокупность всех линейных комбинаций (*линейная оболочка*) столбцов матрицы A. В качестве базиса пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ можно выбрать любой максимальный по включению набор линейно независимых столбцов матрицы A. Размерность пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ равна рангу матрицы A.
- $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ есть множество всех решений с. л. о. у. $A\boldsymbol{x} = 0$. В качестве базиса пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ можно выбрать любой ФНР этой системы. Размерность пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ равна $n - \operatorname{rang} A$ (это число иногда называется *коранг* матрицы A).

Матрица линейного отображения (оператора) и ее преобразование при переходе к новым базисам

Матрица линейного отображения (оператора) и ее преобразование при переходе к новым базисам

Утверждение

Матрица линейного отображения (оператора) и ее преобразование при переходе к новым базисам

Утверждение

Линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *однозначно определяется своими значениями на произвольном фиксированном базисе пространства* $\mathcal{L}_1$*.*

Матрица линейного отображения (оператора) и ее преобразование при переходе к новым базисам

Утверждение

Линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ однозначно определяется своими значениями на произвольном фиксированном базисе пространства $\mathcal{L}_1$.

Доказательство: упражнение.

Матрица линейного отображения (оператора) и ее преобразование при переходе к новым базисам

Утверждение

Линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *однозначно определяется своими значениями на произвольном фиксированном базисе пространства* $\mathcal{L}_1$.

Доказательство: упражнение.

Определение

Матрица линейного отображения (оператора) и ее преобразование при переходе к новым базисам

Утверждение

Линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ однозначно определяется своими значениями на произвольном фиксированном базисе пространства $\mathcal{L}_1$.

Доказательство: упражнение.

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из пространства $\mathcal{L}_1$ размерности $n < \infty$ в пространство $\mathcal{L}_2$ размерности $m < \infty$.

Матрица линейного отображения (оператора) и ее преобразование при переходе к новым базисам

Утверждение

Линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ однозначно определяется своими значениями на произвольном фиксированном базисе пространства $\mathcal{L}_1$.

Доказательство: упражнение.

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из пространства $\mathcal{L}_1$ размерности $n < \infty$ в пространство $\mathcal{L}_2$ размерности $m < \infty$. *Матрицей* A линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисах $B_1 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ пространства $\mathcal{L}_1$ и $B_2 = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m)$ пространства $\mathcal{L}_2$ называется матрица размера $m \times n$, составленная из векторов-столбцов координат векторов $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1)$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2)$, ..., $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)$ в базисе B_2.

Матрица линейного отображения (оператора) и ее преобразование при переходе к новым базисам

Утверждение

Линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ однозначно определяется своими значениями на произвольном фиксированном базисе пространства $\mathcal{L}_1$.

Доказательство: упражнение.

Определение

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из пространства $\mathcal{L}_1$ размерности $n < \infty$ в пространство $\mathcal{L}_2$ размерности $m < \infty$. *Матрицей* A линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисах $B_1 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ пространства $\mathcal{L}_1$ и $B_2 = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m)$ пространства $\mathcal{L}_2$ называется матрица размера $m \times n$, составленная из векторов-столбцов координат векторов $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1)$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2)$, ..., $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)$ в базисе B_2.

Если $\mathcal{A}$ есть линейный оператор из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}$, то базисы B_1 и B_2, как правило, выбирают одинаковыми. В этом случае говорят просто о матрице линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $B = B_1 = B_2$.

Пример

Пример

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, действующий по закону

$$\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y).$$

Пример

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, действующий по закону

$$\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y).$$

Его матрица в каноническом базисе есть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, действующий по закону

$$\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y).$$

Его матрица в каноническом базисе есть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения его матрицы в базисе, допустим, $\boldsymbol{f}_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0, 1)$ надо вычислить значения $\mathcal{A}(1, 1)$ и $\mathcal{A}(0, 1)$ **и разложить их по базису** $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$.

Пример

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, действующий по закону

$$\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y).$$

Его матрица в каноническом базисе есть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения его матрицы в базисе, допустим, $\boldsymbol{f}_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0, 1)$ надо вычислить значения $\mathcal{A}(1, 1)$ и $\mathcal{A}(0, 1)$ **и разложить их по базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$.**

$$\mathcal{A}(1, 1) = (2, 0) = 2 \cdot (1, 1) - 2 \cdot (0, 1),$$

Пример

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, действующий по закону

$$\mathcal{A}(x,y)=(x+y,x-y).$$

Его матрица в каноническом базисе есть

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Для нахождения его матрицы в базисе, допустим, $\boldsymbol{f}_1=(1,1)$, $\boldsymbol{f}_2=(0,1)$ надо вычислить значения $\mathcal{A}(1,1)$ и $\mathcal{A}(0,1)$ **и разложить их по базису** $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2$.

$$\mathcal{A}(1,1)=(2,0)=2\cdot(1,1)-2\cdot(0,1),$$

$$\mathcal{A}(0,1)=(1,-1)=1\cdot(1,1)-2\cdot(0,1),$$

Пример

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, действующий по закону

$$\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y).$$

Его матрица в каноническом базисе есть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения его матрицы в базисе, допустим, $\boldsymbol{f}_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0, 1)$ надо вычислить значения $\mathcal{A}(1, 1)$ и $\mathcal{A}(0, 1)$ **и разложить их по базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$.**

$$\mathcal{A}(1, 1) = (2, 0) = 2 \cdot (1, 1) - 2 \cdot (0, 1),$$

$$\mathcal{A}(0, 1) = (1, -1) = 1 \cdot (1, 1) - 2 \cdot (0, 1),$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Координаты образа вектора при линейном отображении с матрицей A

Координаты образа вектора при линейном отображении с матрицей A

Теорема

Координаты образа вектора при линейном отображении с матрицей A

Теорема

Пусть дана матрица A *линейного отображение* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *в базисах* $B_1 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ *пространства* $\mathcal{L}_1$ *и* $B_2 = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m)$ *пространства* $\mathcal{L}_2$*.*

Координаты образа вектора при линейном отображении с матрицей A

Теорема

Пусть дана матрица A линейного отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ в базисах $B_1 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ пространства $\mathcal{L}_1$ и $B_2 = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m)$ пространства $\mathcal{L}_2$. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_1$ с вектором-столбцом координат

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

в базисе B_1 вектор $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ имеет вектор-столбец координат

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

в базисе B_2.

Пример

Пример

Дан линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

в каноническом базисе и вектор $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Пример

Дан линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

в каноническом базисе и вектор $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Найдите вектор $\mathcal{A}(\boldsymbol{u})$.

Пример

Дан линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

в каноническом базисе и вектор $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Найдите вектор $\mathcal{A}(\boldsymbol{u})$.

Координаты вектора $\boldsymbol{u}$ в каноническом базисе есть $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Пример

Дан линейный оператор $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

в каноническом базисе и вектор $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$.

Найдите вектор $\mathcal{A}(\boldsymbol{u})$.

Координаты вектора $\boldsymbol{u}$ в каноническом базисе есть $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Поэтому координаты вектора $\mathcal{A}(\boldsymbol{u})$ в каноническом базисе есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Пример

Дан линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

в каноническом базисе и вектор $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Найдите вектор $\mathcal{A}(\boldsymbol{u})$.

Координаты вектора $\boldsymbol{u}$ в каноническом базисе есть $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Поэтому координаты вектора $\mathcal{A}(\boldsymbol{u})$ в каноническом базисе есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Искомый вектор – $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Переход к новому базису

Переход к новому базису

Теорема

Переход к новому базису

Теорема

Пусть дана матрица A линейного оператора $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ в базисе B (пространства $\mathcal{L}$).

Переход к новому базису

Теорема

Пусть дана матрица A *линейного оператора* $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ *в базисе* B *(пространства* $\mathcal{L}$*). Пусть* C *есть матрица перехода от базиса* B *к базису* B' *(пространства* $\mathcal{L}$*). Тогда матрица* A' *линейного оператора* $\mathcal{A}$ *в базисе* B' *есть*

$$C^{-1}AC.$$

Переход к новому базису

Теорема

Пусть дана матрица A *линейного оператора* $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ *в базисе* B *(пространства* $\mathcal{L}$*). Пусть* C *есть матрица перехода от базиса* B *к базису* B' *(пространства* $\mathcal{L}$*). Тогда матрица* A' *линейного оператора* $\mathcal{A}$ *в базисе* B' *есть*

$$C^{-1}AC.$$

Доказательство в приложении.

Переход к новому базису

Теорема

Пусть дана матрица A линейного оператора $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ в базисе B (пространства $\mathcal{L}$). Пусть C есть матрица перехода от базиса B к базису B' (пространства $\mathcal{L}$). Тогда матрица A' линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе B' есть

$$C^{-1}AC.$$

Доказательство в приложении.
Пример.

Переход к новому базису

Теорема

Пусть дана матрица A линейного оператора $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ в базисе B (пространства $\mathcal{L}$). Пусть C есть матрица перехода от базиса B к базису B' (пространства $\mathcal{L}$). Тогда матрица A' линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе B' есть

$$C^{-1}AC.$$

Доказательство в приложении.
Пример. Дан линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

в каноническом базисе.

Переход к новому базису

Теорема

Пусть дана матрица A линейного оператора $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ в базисе B (пространства $\mathcal{L}$). Пусть C есть матрица перехода от базиса B к базису B' (пространства $\mathcal{L}$). Тогда матрица A' линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе B' есть

$$C^{-1}AC.$$

Доказательство в приложении.

Пример. Дан линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

в каноническом базисе. Найдите его координаты в базисе $\boldsymbol{f}_1 = (1,1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0,1)$.

Переход к новому базису

Теорема

Пусть дана матрица A линейного оператора $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ в базисе B (пространства $\mathcal{L}$). Пусть C есть матрица перехода от базиса B к базису B' (пространства $\mathcal{L}$). Тогда матрица A' линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе B' есть

$$C^{-1}AC.$$

Доказательство в приложении.
Пример. Дан линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

в каноническом базисе. Найдите его координаты в базисе $\boldsymbol{f}_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0, 1)$.

Решение.

Переход к новому базису

Теорема

Пусть дана матрица A линейного оператора $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ в базисе B (пространства $\mathcal{L}$). Пусть C есть матрица перехода от базиса B к базису B' (пространства $\mathcal{L}$). Тогда матрица A' линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе B' есть

$$C^{-1}AC.$$

Доказательство в приложении.

Пример. Дан линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

в каноническом базисе. Найдите его координаты в базисе $\boldsymbol{f}_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0, 1)$.

Решение. Матрица перехода: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Переход к новому базису

Теорема

Пусть дана матрица A линейного оператора $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ в базисе B (пространства $\mathcal{L}$). Пусть C есть матрица перехода от базиса B к базису B' (пространства $\mathcal{L}$). Тогда матрица A' линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе B' есть

$$C^{-1}AC.$$

Доказательство в приложении.
Пример. Дан линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

в каноническом базисе. Найдите его координаты в базисе $\boldsymbol{f}_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0, 1)$.

Решение. Матрица перехода: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Искомая матрица

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(как и было вычислено раньше другим способом).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

- Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г. Линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебник для вузов, 2010.
- Fuad Aleskerov, Hasan Ersel, Dmitri Piontkovski. Linear Algebra for Economists. Springer (2011).

Приложение 1. Дополнительные сведения о линейных подпространствах и линейных операторах

Дополнения о подпространствах

Дополнения о подпространствах

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P и множество $U \subseteq M$. Множество всех линейных комбинаций векторов из U с коэффициентами из поля P называется *линейной оболочкой* множества U и обозначается $\operatorname{Span} U$:
$\operatorname{Span} U = \{\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in P, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in U, n \in \mathbb{N}\}$.

Дополнения о подпространствах

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P и множество $U \subseteq M$. Множество всех линейных комбинаций векторов из U с коэффициентами из поля P называется *линейной оболочкой* множества U и обозначается $\operatorname{Span} U$:
$\operatorname{Span} U = \{\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in P, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in U, n \in \mathbb{N}\}$.

Пример. Каждое линейное пространство есть линейная оболочка любого своего базиса.

Дополнения о подпространствах

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P и множество $U \subseteq M$. Множество всех линейных комбинаций векторов из U с коэффициентами из поля P называется *линейной оболочкой* множества U и обозначается $\operatorname{Span} U$:
$\operatorname{Span} U = \{\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in P, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in U, n \in \mathbb{N}\}.$

Пример. Каждое линейное пространство есть линейная оболочка любого своего базиса.

Утверждение

Линейная оболочка любого множества $U \subseteq M$ образует линейное подпространство пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$, которое также обозначается $\operatorname{Span} U$ (также говорят, что пространство $\operatorname{Span} U$ натянуто на множество U или на векторы из U). Если пространство $\mathcal{L}$ конечномерное, то размерность пространства $\operatorname{Span} U$ равна максимальному (по количеству) множеству линейно независимых векторов в U.

Дополнения о подпространствах

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ над полем P и множество $U \subseteq M$. Множество всех линейных комбинаций векторов из U с коэффициентами из поля P называется *линейной оболочкой* множества U и обозначается $\operatorname{Span} U$:
$\operatorname{Span} U = \{\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in P, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in U, n \in \mathbb{N}\}.$

Пример. Каждое линейное пространство есть линейная оболочка любого своего базиса.

Утверждение

Линейная оболочка любого множества $U \subseteq M$ образует линейное подпространство пространства $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$, которое также обозначается $\operatorname{Span} U$ (также говорят, что пространство $\operatorname{Span} U$ натянуто на множество U или на векторы из U). Если пространство $\mathcal{L}$ конечномерное, то размерность пространства $\operatorname{Span} U$ равна максимальному (по количеству) множеству линейно независимых векторов в U.

Доказательство: упражнение.

Дополнения о подпространствах

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M;+,\cdot)$ над полем P и множество $U \subseteq M$. Множество всех линейных комбинаций векторов из U с коэффициентами из поля P называется *линейной оболочкой* множества U и обозначается $\operatorname{Span} U$:
$\operatorname{Span} U = \{\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in P, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in U, n \in \mathbb{N}\}$.

Пример. Каждое линейное пространство есть линейная оболочка любого своего базиса.

Утверждение

Линейная оболочка любого множества $U \subseteq M$ образует линейное подпространство пространства $\mathcal{L} = (M;+,\cdot)$, которое также обозначается $\operatorname{Span} U$ (также говорят, что пространство $\operatorname{Span} U$ натянуто на множество U или на векторы из U). Если пространство $\mathcal{L}$ конечномерное, то размерность пространства $\operatorname{Span} U$ равна максимальному (по количеству) множеству линейно независимых векторов в U.

Доказательство: упражнение.

Следствие

Если множество $U \subseteq M$ конечно и в пространстве $\mathcal{L} = (M;+,\cdot)$ задан базис B, то размерность пространства $\operatorname{Span} U$ равна рангу матрицы, составленной из координат векторов $\mathbf{u} \in U$ в базисе B.

Пример

Найдите размерность подпространства пространства $\mathbb{R}^3$, натянутого на векторы $\mathbf{u}_1 = (-1, -3, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (4, -1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (3, -4, 3)$, $\mathbf{u}_4 = (1, -10, 7)$.

Пример

Найдите размерность подпространства пространства $\mathbb{R}^3$, натянутого на векторы $\mathbf{u}_1 = (-1, -3, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (4, -1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (3, -4, 3)$, $\mathbf{u}_4 = (1, -10, 7)$.

Ответ: $\dim \operatorname{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 & -10 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$

Пример

Найдите размерность подпространства пространства $\mathbb{R}^3$, натянутого на векторы $\mathbf{u}_1 = (-1, -3, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (4, -1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (3, -4, 3)$, $\mathbf{u}_4 = (1, -10, 7)$.

Ответ: $\dim \operatorname{Span} \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 & -10 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$

Утверждение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ и подмножества M_1 и M_2 множества M, каждое из которых образует подпространство пространства $\mathcal{L}$. Тогда множество $M_1 \cap M_2$ образует подпространство пространство $\mathcal{L}$. Это подпространство называется пересечением подпространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, образованных множествами M_1 и M_2, и обозначается $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

Пример

Найдите размерность подпространства пространства $\mathbb{R}^3$, натянутого на векторы $\mathbf{u}_1 = (-1, -3, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (4, -1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (3, -4, 3)$, $\mathbf{u}_4 = (1, -10, 7)$.

Ответ: $\dim \operatorname{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 & -10 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$

Утверждение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ и подмножества M_1 и M_2 множества M, каждое из которых образует подпространство пространства $\mathcal{L}$. Тогда множество $M_1 \cap M_2$ образует подпространство пространство $\mathcal{L}$. Это подпространство называется пересечением подпространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, образованных множествами M_1 и M_2, и обозначается $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

Пример

Пусть $\mathcal{L}_1$ есть пространство всех векторов из $\mathbb{R}^3$, которые удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, а $\mathcal{L}_2$ есть пространство всех векторов из $\mathbb{R}^3$, которые удовлетворяют условию $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Тогда $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ есть пространство всех векторов из $\mathbb{R}^3$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Объединение носителей линейных подпространств пространства $\mathcal{L}$ в общем случае не образует подпространства пространства $\mathcal{L}$ (**упражнение**).

Объединение носителей линейных подпространств пространства $\mathcal{L}$ в общем случае не образует подпространства пространства $\mathcal{L}$ (**упражнение**). Зато на линейных подпространствах пространства $\mathcal{L}$ определена операция **суммы**.

Объединение носителей линейных подпространств пространства $\mathcal{L}$ в общем случае не образует подпространства пространства $\mathcal{L}$ (**упражнение**). Зато на линейных подпространствах пространства $\mathcal{L}$ определена операция **суммы**.

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ и его подпространства $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ и $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$. Тогда множество $\{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in M_1, \mathbf{y} \in M_2\}$ образует подпространство в $\mathcal{L}$, называемое *суммой* подпространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ и обозначаемое $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$.

Объединение носителей линейных подпространств пространства $\mathcal{L}$ в общем случае не образует подпространства пространства $\mathcal{L}$ (**упражнение**). Зато на линейных подпространствах пространства $\mathcal{L}$ определена операция **суммы**.

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ и его подпространства $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ и $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$. Тогда множество $\{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in M_1, \mathbf{y} \in M_2\}$ образует подпространство в $\mathcal{L}$, называемое *суммой* подпространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ и обозначаемое $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$.

Замечание

Иначе сумма подпространств $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ и $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ пространства $\mathcal{L}$ может быть определена как $\mathrm{Span}\,(M_1 \cup M_2)$.

Объединение носителей линейных подпространств пространства $\mathcal{L}$ в общем случае не образует подпространства пространства $\mathcal{L}$ (**упражнение**). Зато на линейных подпространствах пространства $\mathcal{L}$ определена операция **суммы**.

Определение

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L} = (M; +, \cdot)$ и его подпространства $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ и $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$. Тогда множество $\{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in M_1, \mathbf{y} \in M_2\}$ образует подпространство в $\mathcal{L}$, называемое *суммой* подпространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ и обозначаемое $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$.

Замечание

Иначе сумма подпространств $\mathcal{L}_1 = (M_1; +, \cdot)$ и $\mathcal{L}_2 = (M_2; +, \cdot)$ пространства $\mathcal{L}$ может быть определена как $\operatorname{Span}(M_1 \cup M_2)$.

Замечание

$$\operatorname{Span} M_1 + \operatorname{Span} M_2 = \operatorname{Span}(M_1 \cup M_2).$$

Теорема

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L}$ конечной размерности, и его подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Тогда

$$\dim \mathcal{L}_1 + \dim \mathcal{L}_2 = \dim (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) + \dim (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2).$$

Теорема

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L}$ конечной размерности, и его подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Тогда

$$\dim \mathcal{L}_1 + \dim \mathcal{L}_2 = \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) + \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2).$$

Пример

Найдите размерность пересечения линейной оболочки векторов $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, -1, 0, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (4, 0, -2, 3)$ и линейной оболочки векторов $\mathbf{v}_1 = (2, -2, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 2, 1, 3)$.

Теорема

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L}$ конечной размерности, и его подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Тогда

$$\dim \mathcal{L}_1 + \dim \mathcal{L}_2 = \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) + \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2).$$

Пример

Найдите размерность пересечения линейной оболочки векторов $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, -1, 0, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (4, 0, -2, 3)$ и линейной оболочки векторов $\mathbf{v}_1 = (2, -2, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 2, 1, 3)$.

$$\dim \mathrm{Span}\,\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \mathrm{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\dim \mathrm{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \mathrm{rang} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\dim(\mathrm{Span}\,\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} + \mathrm{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}) = \mathrm{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\dim(\mathrm{Span}\,\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \cap \mathrm{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Операции над линейными отображениями и их матрицами

Операции над линейными отображениями и их матрицами

Теорема

Операции над линейными отображениями и их матрицами

Теорема

1. *Пусть даны линейные отображения* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *и* $\mathcal{B} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$. *Тогда композиция*
$$\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3$$
есть линейное отображение.

Операции над линейными отображениями и их матрицами

Теорема

1. *Пусть даны линейные отображения* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *и* $\mathcal{B} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$. *Тогда композиция*
$$\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3$$
есть линейное отображение.

2. *Пусть дано взаимно-однозначное линейное отображение* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$. *Тогда обратная функция*
$$\mathcal{A}^{-1} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$$
есть линейное отображение.

Операции над линейными отображениями и их матрицами

Теорема

1. *Пусть даны линейные отображения* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *и* $\mathcal{B} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$. *Тогда композиция*
$$\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3$$
есть линейное отображение.

2. *Пусть дано взаимно-однозначное линейное отображение* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$. *Тогда обратная функция*
$$\mathcal{A}^{-1} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$$
есть линейное отображение.

Доказательство в приложении.

Теорема

Теорема

1. *Пусть даны линейные отображения* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *и* $\mathcal{B} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$ *с матрицами* A *и* B *(базисы в пространствах* $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ *фиксированы). Тогда композиция* $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3$ *имеет матрицу* BA*.*

Теорема

1. *Пусть даны линейные отображения* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *и* $\mathcal{B} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$ *с матрицами* A *и* B *(базисы в пространствах* $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ *фиксированы). Тогда композиция* $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3$ *имеет матрицу* BA.
2. *Пусть дано взаимно-однозначный линейное отображение* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *и в пространствах* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *фиксированы некоторые базисы. Тогда* $\dim \mathcal{L}_1 = \dim \mathcal{L}_2$, *матрица оператора* $\mathcal{A}$ *обратима и обратное отображение* $\mathcal{A}^{-1}$ *имеет матрицу* A^{-1}.

Теорема

1. *Пусть даны линейные отображения $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{B} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$ с матрицами A и B (базисы в пространствах $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ фиксированы). Тогда композиция $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3$ имеет матрицу BA.*
2. *Пусть дано взаимно-однозначный линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ и в пространствах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ фиксированы некоторые базисы. Тогда $\dim \mathcal{L}_1 = \dim \mathcal{L}_2$, матрица оператора $\mathcal{A}$ обратима и обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}$ имеет матрицу A^{-1}.*

Доказательство.

1. Для каждого вектора $\boldsymbol{u} \in \mathcal{L}_1$ координаты вектора $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{u}))$ есть $BA \cdot \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}$ есть вектор-столбец координат вектора $\boldsymbol{u}$.

Теорема

1. *Пусть даны линейные отображения* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *и* $\mathcal{B} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$ *с матрицами* A *и* B *(базисы в пространствах* $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ *фиксированы). Тогда композиция* $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3$ *имеет матрицу* BA.
2. *Пусть дано взаимно-однозначный линейное отображение* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *и в пространствах* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *фиксированы некоторые базисы. Тогда* $\dim \mathcal{L}_1 = \dim \mathcal{L}_2$, *матрица оператора* $\mathcal{A}$ *обратима и обратное отображение* $\mathcal{A}^{-1}$ *имеет матрицу* A^{-1}.

Доказательство.

1. Для каждого вектора $\boldsymbol{u} \in \mathcal{L}_1$ координаты вектора $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{u}))$ есть $BA \cdot \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}$ есть вектор-столбец координат вектора $\boldsymbol{u}$.
2. Поскольку отображение $\mathcal{A}$ инъективное, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 0$. Поскольку оно еще и сюръективное, $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \mathcal{L}_2$. По теореме о ядре и образе имеем $\dim \mathcal{L}_2 = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \mathcal{L}_1 - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \dim \mathcal{L}_1$. Далее, матрица тождественного отображения есть единичная матрица E. Обозначим символом B матрицу оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Тогда по предыдущему пункту $AB = E$. Значит, $|B| \neq 0$ (матрица B невырожденная) и $B = A^{-1}$.

Приложение 2. Доказательства некоторых теорем

Теорема о базисе

Утверждение

Пусть каждый из векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ выражаются через семейство $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l$, причем

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 = a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{12}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_{1l}\boldsymbol{v}_l \\ \boldsymbol{u}_2 = a_{21}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_{2l}\boldsymbol{v}_l \\ \ldots \\ \boldsymbol{u}_k = a_{k1}\boldsymbol{v}_1 + a_{k2}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_{kl}\boldsymbol{v}_l \end{cases}$$

Пусть при этом векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ линейно независимы. Тогда строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kl} \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Доказательство. Допустим, нетривиальная линейная комбинация строк матрицы A с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ равна нулевой строке. Тогда

$$\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{u}_k = \mathbf{0},$$

противоречие.

Теорема

Пусть линейное пространство $\mathcal{L}$ имеет базис из l элементов. Тогда любое семейство, содержащее более чем l элементов, линейно зависимо.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай конечных семейств. Пусть набор $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ есть базис пространства $\mathcal{L}$, и пусть $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ есть семейство векторов из $\mathcal{L}$, причем $k > l$. Векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ можно выразить через базис:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 = a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{12}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_{1l}\boldsymbol{v}_l \\ \boldsymbol{u}_2 = a_{21}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_{2l}\boldsymbol{v}_l \\ \ldots \\ \boldsymbol{u}_k = a_{k1}\boldsymbol{v}_1 + a_{k2}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_{kl}\boldsymbol{v}_l \end{cases}$$

Предположим, что семейство $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ линейно независимо. Тогда по предыдущему утверждению матрица $A = (a_{ij})$ имеет ранг $k > l$. Противоречие с теоремой о ранге матрицы: размер любого минора не превосходит количества столбцов l матрицы A.

Определение

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *конечномерным*, если оно состоит только из одного (нулевого) элемента или имеет хотя бы один конечный базис.

Теорема (о базисе)

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное ненулевое пространство. Тогда все его базисы конечны и имеют одну и ту же мощность (количество элементов).

Доказательство. Пусть B_1 есть конечный базис пространства $\mathcal{L}$, который содержит l элементов. Пусть B_2 есть какой-либо иной базис пространства $\mathcal{L}$. Если B_2 содержит больше элементов, чем B_1, получаем противоречие с предыдущей теоремой. Если B_2 содержит меньше элементов, чем B_1, поменяем базисы местами, и вновь придем к противоречию с предыдущей теоремой.

Это позволяет дать следующее определение.

Определение

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное линейное пространство. Если пространство $\mathcal{L}$ ненулевое, то *размерностью* $\dim \mathcal{L}$ пространства $\mathcal{L}$ называется число элементов в каком-либо (любом) его базисе. Размерность нулевого пространства полагают равной нулю.

Теорема

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное пространство размерности n. Тогда любое линейно независимое семейство $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ (мощности n) векторов пространства $\mathcal{L}$ есть базис $\mathcal{L}$.

Доказательство. Семейство $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ линейно независимо, и для любого вектора $\boldsymbol{u}$ пространства $\mathcal{L}$ семейство $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}$ линейно зависимо. Значит, вектор $\boldsymbol{u}$ линейно выражается через $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$. Все свойства базиса выполнены.

Теорема

Пусть $\mathcal{L}$ есть конечномерное пространство размерности n, и пусть семейство $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ есть его базис. Тогда для каждого вектора $\boldsymbol{u}$ пространства $\mathcal{L}$ коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ линейной комбинации $\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n$ векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, которая равна $\boldsymbol{u}$, определены однозначно.

Доказательство. Пусть

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n = \lambda'_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda'_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda'_n \boldsymbol{u}_n.$$

Тогда

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)\boldsymbol{u}_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)\boldsymbol{u}_2 + \ldots + (\lambda_n - \lambda'_n)\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}.$$

Значит, $\lambda_1 = \lambda'_1$, $\lambda_2 = \lambda'_2$, …, $\lambda_n = \lambda'_n$ поскольку семейство $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ линейно независимо.

Теорема о сумме размерностей подпространств

Теорема

Пусть дано линейное пространство $\mathcal{L}$ конечной размерности, и его подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Тогда

$$\dim \mathcal{L}_1 + \dim \mathcal{L}_2 = \dim (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) + \dim (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2).$$

Доказательство. Вначале докажем следующее вспомогательное утверждение.

Любое линейно независимое семейство $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ векторов линейного пространства $\mathcal{L}$ размерности $n < \infty$ можно дополнить до базиса $U^+ = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$ пространства $\mathcal{L}$.

Действительно, если $k = n$, то U уже базис. В противном случае U не базис и, следовательно, существует вектор $\mathbf{v}$ пространства $\mathcal{L}$, который не выражается через U. Положим $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{v}$. Тогда семейство $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1})$ линейно независимо. Продолжая процесс, приходим к линейно независимому семейству из n векторов. Оно является базисом. Далее, если $\mathcal{L}_1$ есть подпространство пространства $\mathcal{L}_2$ или $\mathcal{L}_2$ есть подпространство пространства $\mathcal{L}_1$, формула очевидна (т.к. в этом случае $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2$). Исключим этот случай.

Пусть U_0 есть базис пространства $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ (или пустое множество, если пространство $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ нулевое). Дополним его семействами U_1 и U_2 до базисов пространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно. В рамках сделанных допущений множества U_1, U_2 не пусты. Покажем, что семейство $U_0 \cup U_1 \cup U_2$ линейно независимо. Предположим, что, напротив, существует нетривиальная линейная комбинация векторов из $U_0 \cup U_1 \cup U_2$, равная нулевому вектору. Представим эту линейную комбинацию в виде

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z},$$

где $\mathbf{x}$ - сумма всех слагаемых вида $\lambda \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} \in U_0$, $\mathbf{y}$ - сумма всех слагаемых вида $\lambda \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} \in U_1$ и $\mathbf{z}$ - сумма всех слагаемых вида $\lambda \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} \in U_2$ (если множество U_0 пусто, считаем, что первого слагаемого в этой сумме нет).
Если $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, получаем противоречие с линейной независимостью множества $U_0 \cup U_2$. Если $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, получаем противоречие с линейной независимостью множества $U_0 \cup U_1$. Значит, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Но тогда вектор $\mathbf{y} = -\mathbf{x} - \mathbf{z}$ выражается через векторы из $U_0 \cup U_2$, т.е. является вектором пространства $\mathcal{L}_2$ и, следовательно, вектором пространства $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Значит, вектор $\mathbf{y}$ может быть представлен как линейная комбинация векторов из U_0. Подставив это представление в равенство

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{0},$$

мы получим линейную комбинацию векторов из $U_0 \cup U_2$, равную нулевому вектору. Кроме того, она нетривиальна, поскольку $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Противоречие.

Из доказанного мы можем извлечь следующие равенства:

$$\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = |U_0| + |U_1| + |U_2|$$
$$\dim \mathcal{L}_1 = |U_0| + |U_1|$$
$$\dim \mathcal{L}_2 = |U_0| + |U_2|.$$

Следовательно, $\dim \mathcal{L}_1 + \dim \mathcal{L}_2 = \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) + \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)$.

Теорема об образе и ядре линейного отображения

Теорема

Пусть дано линейное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ из пространства $\mathcal{L}_1$ размерности $n < \infty$ в пространство $\mathcal{L}_2$. Тогда

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n.$$

Доказательство. Если пространство $\mathcal{L}_1$ нулевое, теорема очевидна, поскольку в этом случае оба пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ и $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ тоже нулевые. Если пространство $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ нулевое, теорема тоже очевидна, поскольку в этом случае $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \mathcal{L}_1$. Будем считать, что пространства $\mathcal{L}_1$ и $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ ненулевые. Пространство $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ есть подпространство конечномерного пространства $\mathcal{L}_1$, поэтому оно само конечномерно. Пусть $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = k$. Выберем базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ (будем считать его пустым, если $k = 0$). Дополним его до базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ пространства $\mathcal{L}_1$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что семейство

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_{k+1}), \mathcal{A}(\mathbf{e}_{k+2}), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{e}_n)$$

есть базис пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.

- Пусть $\mathbf{y}$ есть произвольный вектор пространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Тогда $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ для некоторого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_1$. Разложим вектор $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{e}_k + \lambda_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n.$$

  Тогда
$$\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda_{k+1}\mathcal{A}(\mathbf{e}_{k+1}) + \ldots + \lambda_n\mathcal{A}(\mathbf{e}_n)$$
  (используем то, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ принадлежат ядру оператора $\mathcal{A}$).

- Допустим, что векторы $\mathcal{A}(\mathbf{e}_{k+1}), \mathcal{A}(\mathbf{e}_{k+2}), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{e}_n)$ образуют линейно зависимое множество. Тогда для некоторой нетривиальной линейной комбинации $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ имеем

$$\lambda_{k+1}\mathcal{A}(\mathbf{e}_{k+1}) + \ldots + \lambda_n\mathcal{A}(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}.$$

  Значит,
$$\mathcal{A}(\lambda_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$$
  и, следовательно, ненулевой вектор $\lambda_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n$ принадлежит ядру оператора $\mathcal{A}$, что противоречит выбору векторов $\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Действия над линейными операторами.

Теорема

1. *Пусть даны линейные операторы* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *и* $\mathcal{B} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$*. Тогда композиция*
$$\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3$$
есть линейный оператор.
2. *Пусть дан взаимно-однозначный линейный оператор* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$*. Тогда обратная функция*
$$\mathcal{A}^{-1} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$$
есть линейный оператор.

Доказательство.
1. **Упражнение.**
2. Пусть $\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{L}_2$. Тогда для некоторых $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in \mathcal{L}_1$ выполнено: $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_2$ и $\mathcal{A}(\mathbf{y}_1) = \mathbf{y}_2$ или, что то же самое, $\mathbf{x}_1 = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{x}_2)$ и $\mathbf{y}_1 = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Тогда
$$\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{y}_1)) =$$
$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1)) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{x}_2) + \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2).$$

Преобразование координат вектора при линейном отображении

Теорема

Пусть дана матрица A *линейного оператора* $\mathcal{A} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *в базисах* $B_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ *пространства* $\mathcal{L}_1$ *и* $B_2 = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m)$ *пространства* $\mathcal{L}_2$. *Тогда для любого вектора* $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_1$ *с вектором-столбцом координат*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

в базисе B_1 *вектор* $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ *имеет вектор-столбец координат*

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

в базисе B_2.

Пусть

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{m1}\mathbf{f}_m \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{m2}\mathbf{f}_m \\ \ldots \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_n) = a_{1n}\mathbf{f}_1 + a_{2n}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{f}_m \end{cases}$$

и $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{x}) = & x_1(a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{m1}\mathbf{f}_m) + \\ & x_2(a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{m2}\mathbf{f}_m) + \\ & \ldots \\ & x_n(a_{1n}\mathbf{f}_1 + a_{2n}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{f}_m). \end{aligned}$$

Отсюда $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ в базисе $B_2 = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m)$ имеет координаты:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Переход к новому базису

Теорема

Пусть дана матрица A линейного оператора $\mathcal{A}: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ в базисе B (пространства $\mathcal{L}$). Пусть C есть матрица перехода от базиса B к базису B' (пространства $\mathcal{L}$). Тогда матрица A' линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе B' есть $C^{-1}AC$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}$ есть произвольный вектор пространства $\mathcal{L}$ с координатами $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ в базисе B и $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$ в базисе B'. Тогда $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ в базисе B есть $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = AC \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$, а в базисе B' они есть $C^{-1}AC \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$.