Математический анализ 1. Направление 38.03.01 Экономика
Тема 2. Функции нескольких переменных
Семинар 2.2. Линии уровня. Векторные функции

Линии уровня

1. Нарисуйте семейство линий уровня функции двух переменных:

   (1) $f(x,y) = x + y$; (2) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$; (3) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$; (4) $f(x,y) = xy$;

   (5) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2x}$.

2. Нарисуйте семейство линий уровня функции двух переменных:

   (1) $f(x,y) = 2x + 3y$; (2) $f(x,y) = x^2 + y^2$; (3) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$; (4) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2y}$;

   (5) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$; (6) $f(x,y) = \Big(x + \dfrac{1}{x}\Big)y$.

3. Нарисуйте семейство линий уровня функции двух переменных:

   (1) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$; (2) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$; (3) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$;

   (4) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2x+2y}$.

4. Нарисуйте семейство линий уровня функции двух переменных:

   (1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$; (2) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$; (3) $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$;

   (4) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2x-2y}$.

5. Нарисуйте семейство линий уровня функции двух переменных:

   (1) $f(x,y) = |x| + |y|$; (2) $f(x,y) = |x| - |y|$; (3) $f(x,y) = |x+y| - |x-y|$.

6. Нарисуйте семейство линий уровня функции двух переменных:

   (1) $f(x,y) = |x| + y$; (2) $f(x,y) = \big||x| - |y|\big|$; (3) $f(x,y) = |x+y| + |x-y|$.

7. Нарисуйте семейство линий уровня функции двух переменных:

   (1) $f(x,y) = \min\{x, x+y\}$; (2) $f(x,y) = \min\{y-x, y\}$; (3) $f(x,y) = \min\{x^2+y^2, 2xy\}$;

   (4) $f(x,y) = \min\{x^2 - 2xy + y^2, 1 - 2xy\}$; (5) $f(x,y) = \min\{x^2 + y^2, 1 - 2xy\}$;

   (6) $f(x,y) = \min\{x^2 + y^2, y + y^2\}$.

8. Нарисуйте семейство линий уровня функции двух переменных:

   (1) $f(x,y) = \min\{x, x-y\}$; (2) $f(x,y) = \min\{x+y, x-y\}$;

   (3) $f(x,y) = \min\{x^2+2xy+y^2, 2xy+1\}$; (4) $f(x,y) = \min\{x^2-2xy+y^2, x^2+y^2-1\}$;

   (5) $f(x,y) = \min\{x^2 + 2x + y, 2x + 2y\}$.

Векторные функции

9. Запишите явными формулами композицию $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ вектор-функций $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ таких, что:

$$(1)\ \mathbf{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ xy \end{pmatrix},\ \mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y-z \end{pmatrix};$$

$$(2)\ \mathbf{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x-y} \\ -e^{-x} \end{pmatrix},\ \mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy+z^2 \\ xz+yz \end{pmatrix}.$$

10. Дана функция $h(x)$. Представьте ее естественным образом в виде композиции $f \circ \mathbf{g}$, где f – скалярная функция нескольких вещественных переменных, а $\mathbf{g}$ – векторная функция одного вещественного переменного:

(1) $h(x) = \dfrac{\sin x + 2\cos x - \ln x}{(\sin x)\ln^2 x}$; (2) $h(x) = (\sin x)^{2\cos x}$; (3) $h(x) = \dfrac{(\operatorname{tg} x)\ln x}{1 + \operatorname{tg} x - 2\ln x}$;
(4) $h(x) = (\sin 2x)^{\sin x}$.