Математический анализ 1. Лекция 2.7 Необходимые условия и достаточные условия экстремума функций нескольких вещественных переменных. Метод параметризации границы поиска глобального минимума и максимума

23 ноября 2023 г.

Необходимые условия экстремума
- Определения

Достаточные условия экстремума
- Квадратичные формы
- Достаточные условия локального экстремума

Глобальные экстремумы
- Нахождение глобальных экстремумов функции на компакте (метод параметризации границ)

Локальные экстремумы

Пусть дана скалярная функция $f : X \to \mathbb{R}$, где $X = D(f) \subset \mathbb{R}^n$.
Пусть $\mathbf{x}_0$ – внутренняя точка X. Точка $\mathbf{x}_0$ называется:

1. **точкой строгого локального минимума**, если $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$ из некоторой *проколотой* окрестности точки $\mathbf{x}_0$,
2. **точкой строгого локального максимума**, если $f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$ из некоторой *проколотой* окрестности точки $\mathbf{x}_0$,
3. **точкой (нестрогого) локального минимума**, если $f(\mathbf{x}_0) \leqslant f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$ из некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$,
4. **точкой (нестрогого) локального максимума**, если $f(\mathbf{x}_0) \geqslant f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$ из некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$.

Точка $\mathbf{x}_0$, удовлетворяющая одному из этих условий, называется **точкой экстремума** (строгого или нестрогого).
Значение функции f в такой точке $\mathbf{x}_0$ называется, соответственно, *строгим локальным максимумом, строгим локальным минимумом, (нестрогим) локальным максимумом, (нестрогим) локальным минимумом*; обобщенно, *экстремумом (строгим или нестрогим).*
Точки (множества) локального максимума и минимума функции f иногда обозначают через $\operatorname{argmax} f$ и $\operatorname{argmin} f$ соответственно.

Определение экстремума не использует ни непрерывность, ни дифференцируемость функции f.

В силу элементарных свойств неравенств:
$\mathbf{x}_0$ – точка (строгого) локального минимума функции $f(\mathbf{x}) \Leftrightarrow$
$\mathbf{x}_0$ – точка (строгого) локального максимума функции $-f(\mathbf{x})$.

Примеры. 1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ $(n = 2)$, $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ $(n \geqslant 1)$.

2. $f(x, y) = -x^2 - y^2$ $(n = 2)$, $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - \ldots - x_n^2$ $(n \geqslant 1)$.

3. $f(x, y) = (x - y)^2$ $(n = 2)$, $f(\mathbf{x}) = (x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n)^2$ $(n \geqslant 2)$.

4. $f(x, y) = -(x - y)^2$ $(n = 2)$, $f(\mathbf{x}) = -(x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n)^2$ $(n \geqslant 2)$.

Необходимое условие локального экстремума.

Теорема (обобщенная теорема Ферма)

Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$, где $X = D(f) \subset \mathbb{R}^n$, имеет частные производные в точке $\mathbf{a} \in X$. Если $\mathbf{a}$ – точка локального экстремума функции f, то

$$f'_{x_1}(\mathbf{a}) = 0, \dots, f'_{x_n}(\mathbf{a}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla f(\mathbf{a}) = 0.$$

Если f дифференцируема в точке $\mathbf{a} \in X$, то $df(\mathbf{a}) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию одной переменной

$$g_1(x_1) = f(x_1, a_2, \dots, a_n).$$

Точка $x_1 = a_1$ является ее точкой локального экстремума. По определению частной производной и теореме Ферма для функций одной переменной

$$f'_{x_1}(\mathbf{a}) = g'_1(a_1) = 0.$$

Равенства $f'_{x_i}(\mathbf{a}) = 0$ при $2 \leqslant i \leqslant n$ доказываются аналогично.

Замечание. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$, где $X = D(f) \subset \mathbb{R}^n$, имеет производную по направлению $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{a})$ в точке $\mathbf{a} \in X$, $\mathbf{e} \neq 0$. Если $\mathbf{a}$ – точка локального экстремума функции f, то

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{a}) = 0.$$

Важно: необходимые условия экстремума

$$f'_{x_1}(\mathbf{x}) = 0, \ldots, f'_{x_n}(\mathbf{x}) = 0$$

следует рассматривать как **нелинейную систему** n **уравнений для** n **координат точек локального экстремума** $x_1, \ldots, x_n$. Она может как иметь несколько решений, так и не иметь их совсем.

Определения. Если $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$, то $\mathbf{a} \in X$ называется **стационарной точкой** функции f.
Если стационарная точка не является точкой экстремума, то она называется **седловой**. В сколь угодно малой окрестности седловой точки функция принимает значения как больше, так и меньше $f(\mathbf{a})$.

Примеры. 1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ $(n = 2)$, $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ $(n \geqslant 1)$.

2. $f(x, y) = -x^2 - y^2$ $(n = 2)$, $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - \ldots - x_n^2$ $(n \geqslant 1)$.

3. $f(x,y)=xy$ $(n=2)$, $f(\mathbf{x})=x_1\dots x_n$ $(n\geqslant 2)$.

4. Пусть $f(x,y)=x^2+cxy+y^2$, где c — параметр. Уравнения для стационарных точек таковы:

$$\begin{cases} 2x+cy=0 \\ cx+2y=0 \end{cases}.$$

При $c\neq\pm 2$ эта система уравнений линейная однородная и невырожденная, поэтому $(x,y)=(0,0)$ — единственная точка возможного экстремума. Дальнейший анализ алгебраическими методами теории квадратичных форм показывает, что при при $|c|<2$ это точка строгого локального минимума, а при $|c|>2$ это седловая точка (см. ниже).

Если же $c=\pm 2$, то система однородная и вырожденная и ее общее решение имеет вид $(a,\mp a)$ с произвольным a. В этом случае имеем $f(x,y)=(x\pm y)^2$ и поэтому любая точка $(a,\mp a)$ — точка (нестрогого) локального минимума.

Квадратичные формы. Рассмотрим квадратичную форму

$$(A\mathbf{h},\mathbf{h})_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_j h_i \quad \text{с матрицей} \quad A = \{a_{ij}\}_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}.$$

Она называется: 1) **положительно определенной** $\Leftrightarrow$ $A > 0$, если

$$(A\mathbf{h},\mathbf{h})_{\mathbb{R}^n} > 0 \quad \text{при всех} \quad \mathbf{h}\in\mathbb{R}^n, \ \mathbf{h}\neq 0$$

(почему исключается $\mathbf{h} = \mathbf{0}$?)
2) **отрицательно определенной** $\Leftrightarrow$ $A < 0$, если

$$(A\mathbf{h},\mathbf{h})_{\mathbb{R}^n} < 0 \quad \text{при всех} \quad \mathbf{h}\in\mathbb{R}^n, \ \mathbf{h}\neq 0,$$

3) **закопеременной,** если она принимает как положительные, так и отрицательные значения при некоторых $\mathbf{h}$.

Необходимые условия положительной и отрицательной определенности и достаточное условие знакопеременности квадратичной формы.
1. Если $A > 0$, то $a_{11} > 0, \ldots, a_{mm} > 0$.
2. Если $A < 0$, то $a_{11} < 0, \ldots, a_{mm} < 0$.
3. Если среди $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ есть числа разных знаков, то $(A\mathbf{h},\mathbf{h})_{\mathbb{R}^n}$ — знакопеременная квадратичная форма.

Доказательство. Результат следует из определений анализируемых свойств и формул

$$(A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n}|_{\mathbf{h}=\mathbf{e}_1} = a_{11}, ..., (A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n}|_{\mathbf{h}=\mathbf{e}_n} = a_{nn},$$

где $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — стандартный координатный базис в $\mathbb{R}^n$ (проведите рассуждение самостоятельно).

Напомним два алгебраических критерия положительной и отрицательной определенности квадратичной формы и сделаем дополнения об условиях ее знакопеременности.

Теорема (критерий Сильвестра положительной и отрицательной определенности квадратичной формы с дополнением)

Пусть $(A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n}$ *— квадратичная форма с симметричной матрицей* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$. *Пусть*

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, A_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*— **главные угловые миноры** матрицы A. Тогда:*
1) квадратичная форма $(A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n}$ *положительно определена (т.е.* $A > 0$*)* $\Leftrightarrow A_1 = a_{11} > 0,\ A_2 > 0, \dots, A_n > 0$*;*
2) квадратичная форма $(A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n}$ *отрицательно определена (т.е.* $A < 0$*)* $\Leftrightarrow A_1 = a_{11} < 0,\ A_2 > 0, \dots, (-1)^n A_n > 0$.
3) дополнительно если $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0, \dots, A_n \neq 0$ *и поведение знаков* $A_1, \dots, A_n$ *отлично от указанных в пунктах 1 и 2, то* $(A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n}$ *— знакопеременная квадратичная форма.*

Замечание. Пункты 1 и 2 этой теоремы опять эквивалентны друг другу, поскольку рассматриваемые миноры матриц A и $-A$ связаны равенством $(-A)_k = (-1)^k A_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Второй критерий. Напомним **задачу на собственные значения** для матрицы A: найти вектор $\mathbf{e} \neq 0$ и число λ такие, что

$$A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}.$$

Симметричная матрица A порядка n имеет ровно n вещественных **собственных значений** $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (с учетом кратности). Они – корни **характеристического многочлена** матрицы A:

$$\det(A - \lambda I) = 0, \text{ где } I \text{ — единичная матрица порядка } n.$$

2-й критерий положительной и отрицательной определенности и знакопеременности квадратичн. формы:

Теорема. Пусть $(A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n}$ — квадратичная форма с матрицей $A = A^T$ порядка n, а $\lambda_1, ..., \lambda_n$ — ее собственные значения. Тогда:
1) квадратичная форма $(A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n}$ положительно определенная (т.е. $A > 0$) тогда и только тогда, когда $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$;
2) квадратичная форма $(A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n}$ отрицательно определенная (т.е. $A < 0$) тогда и только тогда, когда $\lambda_1 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$;
3) квадратичная форма $(A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n}$ знакопеременная тогда и только тогда, когда среди $\lambda_1, ..., \lambda_n$ есть числа разных знаков.

Пункты 1 и 2 этой теоремы тоже эквивалентны (почему?).
Нетрудно дать и аналогичные критерии неотрицательности и неположительности квадратичной формы.

Достаточные условия экстремума функции при $n = 1$ даются в терминах 2-й производной в стационарной точке, а при $n \geqslant 1$ – 2-го дифференциала в такой точке.

Теорема (достаточные условия локального экстремума)

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ имеет 2-й дифференциал в точке $\mathbf{a}$ и в ней выполнено необходимое условие экстремума $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$. Этот 2-й дифференциал — квадратичная форма

$$d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = (A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_j h_i, \; A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n} = \left\{f''_{x_i x_j}(\mathbf{a})\right\}_{i,j=1}^{n},$$

где $A = H_f$ — введенная ранее матрица Гессе.
1. Если эта квадратичная форма положительно определенная, т.е. $(A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n} > 0$ при всех $\mathbf{h} \neq 0$, то $\mathbf{a}$ — точка строгого локального минимума.
2. Если эта квадратичная форма отрицательно определенная, т.е. $(A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n} < 0$ при всех $\mathbf{h} \neq 0$, то $\mathbf{a}$ — точка строгого локального максимума.
3. Если эта квадратичная форма знакопеременная, т.е. $(A\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbb{R}^n}$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то точка $\mathbf{a}$ – седловая и экстремума в ней нет.

Свойства положительной и отрицательной определенности квадратичной формы записывают также как свойства положительной и отрицательной определенности ее матрицы: $A > 0$ и $A < 0$. Очевидно также, что $A > 0 \ \Leftrightarrow \ -A < 0$. Поэтому в теореме пункты 1 и 2 следуют друг из друга (после замены f на $-f$).

Идея доказательства состоит в использовании формулы Тейлора 2-го порядка с остаточным членом в форме Пеано

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a},\mathbf{h}) + \frac{1}{2}d^2 f(\mathbf{a},\mathbf{h}) + o(|\mathbf{h}|^2).$$

При выполнении необходимого условия экстремума $df(\mathbf{a},\mathbf{h}) = 0$ и

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}|\mathbf{h}|^2\big((A\hat{\mathbf{h}},\hat{\mathbf{h}})_{\mathbb{R}^m} + o(1)\big) \ \text{ при } \ \mathbf{h} \to 0, \quad \mathbf{h} \neq 0,$$

где $A = H_f$ — матрица Гессе и $\hat{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$.
При $(A\hat{\mathbf{h}},\hat{\mathbf{h}})_{\mathbb{R}^n} \neq 0$ отсюда вытекает, что знак разности $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})$ совпадает со знаком $(A\hat{\mathbf{h}},\hat{\mathbf{h}})_{\mathbb{R}^n}$ при достаточно малом $\mathbf{h} \neq 0$ (т.е. как если бы остаточный член отсутствовал вовсе).

Контрпримеры. Рассмотрим функции $f(x, y) = x^3 \pm y^3$ и $f(x, y) = x^4 + y^4$. Легко проверить, что обе имеют единственную стационарную точку $(0, 0)$. В ней для обеих функций матрицы Гессе $A = 0$, и последняя теорема неприменима.
При этом для первой из функций точка $(0, 0)$ не является точкой локального экстремума, а для второй она является точкой строгого локального (и глобального) минимума.

Для функции двух переменных теорема о достаточных условиях экстремума и дополненный критерий Сильвестра легко приводят к следующим явным достаточным условиям экстремума в терминах 2-х частных производных.

Теорема (случай функции двух переменных)

Пусть функция $f(x, y)$ *имеет 2-й дифференциал в точке* (x_0, y_0) *и в ней выполнено необходимое условие экстремума* $(\nabla f)(x_0, y_0) = \mathbf{0}$. *Рассмотрим матрицу Гессе функции* $f(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0)*:*

$$A = H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

1. Если $\det A = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 > 0$, *то* (x_0, y_0) *— точка строгого локального экстремума. Более точно:*
а) если $a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, *то* (x_0, y_0) *— точка строгого локального минимума;*

б) если $a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, *то* (x_0, y_0) *— точка строгого локального максимума.*

2. Если $\det A < 0$, *то* (x_0, y_0) *– седловая точка и экстремума в ней нет.*

Указание. Для обоснования п. 2 запишите характеристический многочлен матрицы A и примените теорему Виета и второй критерий свойств форм.

Отметим, что в случае $\det A = 0$ данная теорема не дает ответа на вопрос о наличии или отсутствии экстремума в точке (x_0, y_0), и необходимо дальнейшее исследование с использованием специфики функции $f(x, y)$.

Пример. Вернемся к уже возникавшему примеру $f(x, y) = x^2 + cxy + y^2$, где c — параметр. Здесь матрица Гессе постоянна и такова $A = \begin{pmatrix} 2 & c \\ c & 2 \end{pmatrix}$, откуда $\det A = 4 - c^2$. Поэтому согласно последней теореме стационарная точка $(x_0, y_0) = (0, 0)$ при $|c| < 2$ является точкой строгого локального минимума, а при $|c| > 2$ она является седловой точкой.
Случай $|c| = 2$, когда $\det A = 0$, был рассмотрен выше и дает контрпример к этой теореме.

Отметим также, что характеристическое уравнение матрицы A имеет вид $(2 - \lambda)^2 - c^2 = 0$, откуда $\lambda_1 = 2 - |c|$, $\lambda_2 = 2 + |c| > 0$, и поэтому 2-й критерий приводит к тем же самым выводам, что и последняя теорема.

Пример. Найдем и классифицируем (строгий/нестрогий максимум/минимум) все точки локальных экстремумов функции $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.
Для нахождения стационарных точек находим первые частные производные функции f и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \equiv 3x^2 - 3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \equiv 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Решением системы являются точки:

$$(-1,-1),\ (-1,1),\ (1,-1) \text{ и } (1,1).$$

Для классификации стационарных точек находим 2-й дифференциал функции f в произвольной точке (x, y):

$$d^2 f(x, y)(h_1, h_2) = 6xh_1^2 + 6yh_2^2.$$

В каждой из стационарных точек исследуем эту квадратичную форму. Получаем:

1. квадратичная форма $d^2 f(-1, -1)(h_1, h_2) = -6h_1^2 - 6h_2^2$ отрицательно определенная, следовательно, $(-1, -1)$ – точка строгого локального максимума,
2. квадратичная форма $d^2 f(-1, 1)(h_1, h_2) = -6h_1^2 + 6h_2^2$ знакопеременная, следовательно, $(-1, 1)$ – седловая точка.
3. квадратичная форма $d^2 f(1, -1)(h_1, h_2) = 6h_1^2 - 6h_2^2$ снова знакопеременная, следовательно, $(1, -1)$ – седловая точка.
4. квадратичная форма $d^2 f(1, 1)(h_1, h_2) = 6h_1^2 + 6h_2^2$ положительно определенная, следовательно, $(1, 1)$ – точка строгого локального минимума,

Глобальные экстремумы

Пусть дана функция $f : X \to \mathbb{R}$, где $X = D(f) \subset \mathbb{R}^n$, и множество $Y \subset X$. Точка $\mathbf{a}$ называется:

1. **точкой строгого глобального минимума** функции f на множестве Y, если $f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in Y$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$,
2. **точкой строгого глобального максимума** функции f на множестве Y, если $f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in Y$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$,
3. **точкой (нестрогого) глобального минимума** функции f на множестве Y, если $f(\mathbf{a}) \leqslant f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in Y$,
4. **точкой (нестрогого) глобального максимума** функции f на множестве Y, если $f(\mathbf{a}) \geqslant f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in Y$,

Значение функции f в точке $\mathbf{a}$ глобального максимума (минимума) на множестве Y называется глобальным максимумом (соответственно, глобальным минимумом) функции f на Y. Обычно они обозначаются через $\max\limits_Y f$ (соответственно, $\min\limits_Y f$), а точка (или множество точек) максимума (минимума) символом $\operatorname*{argmax}\limits_Y f$ (соответственно, символом $\operatorname*{argmin}\limits_Y f$).

Конечно, в общем случае точек максимума/минимума функции f на множестве Y может не существовать.

Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$, где $X = D(f) \subset \mathbb{R}^n$, **непрерывна** на компакте $K \subset X$. По теоремам Вейерштрасса $f(K)$ – образ K при отображении f

$$f(K) = \{y \in \mathbb{R} : \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \text{ при некотором } \mathbf{x} \in K\}$$

ограничен (на самом деле это компакт), и существуют точки $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in K$ такие, что

$$f(\mathbf{a}) = \min_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{b}) = \max_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}).$$

Таким образом, глобальный максимум и глобальный минимум непрерывной функции f на компакте всегда существуют.

Для нахождения глобального максимума (минимума) функции f на компакте представим компакт K в виде объединения его внутренней части и границы: $K = \operatorname{int} K \cup \partial K$. Точки глобального минимума и максимума либо принадлежат $\operatorname{int} K$ и тогда являются точками локального минимума и максимума, либо принадлежат ∂K.

Нахождение экстремальных точек на границе компакта представляет собой самостоятельную задачу. Она может быть решена **методом параметризации границ** (а также методом Лагранжа). Для простоты ограничимся случаем функций f двух переменных.

Пусть граница ∂K компакта K представляет собой объединение отрезков кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$, причем каждый отрезок Γ_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ задан параметрически (с помощью взаимно-однозначного непрерывного отображения из сегмента в Γ_i):

$$\begin{cases} x = u_i(t), \\ y = v_i(t), \quad a_i \leqslant t \leqslant b_i. \end{cases}$$

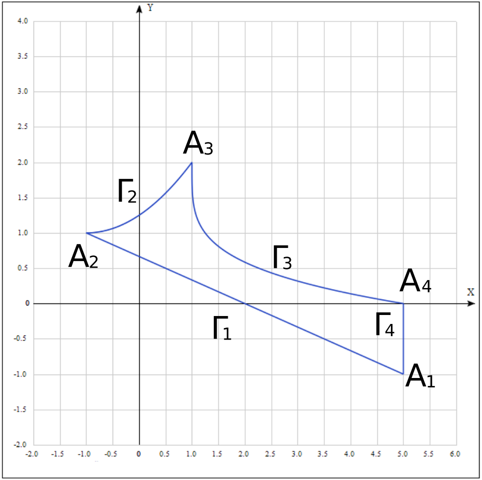
Тогда

$$\max_{\partial K} f(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \max_{[a_i, b_i]} f(u_i(t), v_i(t)),$$

$$\min_{\partial K} f(x,y) = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \min_{[a_i, b_i]} f(u_i(t), v_i(t)).$$

Задача свелась к m задачам нахождения максимального и минимального значений функций $f_i(t) = f(u_i(t), v_i(t))$ одной переменной на сегменте $[a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, m$.

Решение задачи нахождения максимума (минимума) функции f на компакте методом параметризации границ приводит к наименьшему количеству технических сложностей, если, во-первых, функция f и все функции $u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m$ дифференцируемы, и, во-вторых, компакт K представляет собой криволинейный многоугольник с вершинами $A_1 A_2 \ldots A_m$ и сторонами $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$, т.е.



$$
\begin{aligned}
&\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{A_2\},\\
&\Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \{A_3\},\\
&\ldots,\\
&\Gamma_{m-1} \cap \Gamma_m = \{A_m\},\\
&\Gamma_m \cap \Gamma_1 = \{A_1\}.
\end{aligned}
$$

В этом случае **можно не исследовать** стационарные точки на экстремальность (!). А именно, решение может быть таким:

1. Находим множество P значений функции $f(x, y)$ во всех вершинах $A_1, A_2, \ldots, A_m$.
2. Находим все стационарные точки в $\mathrm{int} K$ и множество Q значений функции $z = f(x, y)$ в них.
3. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant m$ находим все стационарные точки функции $z = f_i(t) = f(u_i(t), v_i(t))$ на интервале (a_i, b_i) и множество R_i значений этой функции в них.
4. Тогда

$$\max_K f = \max_{P \cup Q \cup R_1 \cup \ldots \cup R_m} z,$$

$$\min_K f = \min_{P \cup Q \cup R_1 \cup \ldots \cup R_m} z.$$

При этом $\operatorname*{argmax}_K f$ и $\operatorname*{argmin}_K f$ состоят из тех рассмотренных точек, где достигаются $\max_K f$ и $\min_K f$.