**Математический анализ 1.**
**Направление 38.03.01 Экономика**
**Семинар 7. Непрерывность (продолжение) и производные.**

1. Приведите пример функции $f$, определенной на некотором сегменте $[a, b]$ $(a < b)$, непрерывной во всех точках $[a, b]$, за исключением одной точки $c \in (a, b)$ и такой, что:

   (1) функция $f$ не ограничена на $[a, b]$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, но уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней на $[a, b]$;

   (2) функция $f$ ограничена на $[a, b]$, но не достигает на $[a, b]$ ни своей нижней, ни своей верхней граней;

   (3) функция $f$ разрывна в точке $c$, но ограничена на $[a, b]$, достигает на $[a, b]$ свои нижнюю и верхнюю грани, а также принимает на $[a, b]$ все промежуточные значения между своими минимумом и максимумом.

2. Приведите пример функции $f$, определенной и непрерывной на некотором полусегменте $(a, b]$ и такой, что:

   (1) функция $f$ не ограничена на $(a, b]$ ни сверху, ни снизу;

   (2) функция $f$ ограничена на $(a, b]$, но не достигает на $(a, b]$ ни своей нижней, ни своей верхней граней;

   (3) функция $f$ ограничена и не постоянна на $(a, b]$, достигает на $(a, b]$ свои нижнюю и верхнюю грани, а также принимает на $(a, b]$ все промежуточные значения между своими минимумом и максимумом.

3. Пусть функция $\varphi(x)$ определена в некоторой окрестности нуля. Какое дополнительное условие на функцию $\varphi(x)$ равносильно тому, что функция $f(x) = x\varphi(x)$ дифференцируема в нуле? Чему при этом равна производная функции $f(x)$ в нуле?

4. Докажите, что если функция $\varphi(x)$ определена и ограничена в окрестности нуля, то функция $f(x) = x^2\varphi(x)$ дифференцируема в нуле. Чему равна производная $f'(0)$?

5. Использовав таблицу производных, найдите производную и дифференциал функции $f(x)$:

   (1) $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x} + \dfrac{x}{\cos(3x)}$; (2) $f(x) = \sin^3(\sqrt[3]{x})$; (3) $f(x) = \log_{\sqrt{e^x}} 4$;

   (4) $f(x) = x^x$; (5) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; (6) $f(x) = \sqrt[\sin x]{2}$;

   (7) $f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x^2}\ln(\cos x)}{e^{x^2}\sin(4x)}$ (используйте логарифмическую производную);

   (8) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ (используйте логарифмическую производную);

   (9) $f(x) = \arcsin \dfrac{x-1}{x+1}$; (10) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2+1}$; (11) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

   (12) $f(x) = x|x|$; (13) $f(x) = x^{e^x}$.

6. Использовав логарифмическую производную, вычислите производную функции $f(x) = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$ в точках $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$.

7. Использовав логарифмическую производную, найдите производную функции:

   (1) $f(x) = \dfrac{x^2 \sin(2x)}{(\ln x)\arcsin x}$; (2) $f(x) = (\cos(2x))^{\ln x}$.

8. Найдите эластичность функции $f(x) = x^5 e^{2x}$ при $x = 1$.

9. Найдите эластичность функции $f(x)$ (с использованием определения и свойств эластичности):

   (1) $f(x) = x^5$; (2) $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$; (3) $f(x) = a^x$, $a > 0$; (4) $f(x) = x^x$;

   (5) $f(x) = \dfrac{x^{0.3}\ln x}{e^x(1+x)}$; (6) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$; (7) $f(x) = (x^3+1)^{10}$; (8) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^5+1}$;

   (9) $f(x) = e^x \ln(2023x)$.

10. Воспользовавшись тем, что эластичность функции сама является функцией, найдите *эластичность эластичности функции* $f(x) = 5x^2$. Обсудите *экономический смысл* эластичности эластичности функции.

11. Функция $y(x)$ задана неявно уравнением $y^3 + x^2y - 3x = 7$ и условием $y(1) = 2$. Найдите производную функции $y(x)$ при $x = 1$.

12. Функция $y(x)$ задана неявно уравнением $y^2 + \ln(x+y+1) - x = 2$ и условием $y(2) = -2$. Найдите эластичность функции $y(x)$ в точке $x = 2$.

13. Найдите производную функции $y(x)$, заданной неявно уравнением:

    (1) $y^5 + y^3 + y - x = 0$; (2) $5x^2 + 9y^2 + 18y - 30x + 9 = 0$ $(y > -1)$.

14. Запишите уравнение касательной к графику функции $f$ в заданной точке $x_0$:

    (1) $f(x) = x^3 - x + 1$, $x_0 = 1$; (2) $f(x) = \sin(3x)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; (3) $f(x) = \cos(2x)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

    (4) $y = \ln\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$, $x_0 = 0$; (5) $y = \sqrt[3]{x-1}$, $x_0 = 1$;

    (6) $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$, $y > -3$, $x_0 = 0$.

15. Запишите уравнение касательной к кривой $\gamma$ в точке $A$:

    (1) $\gamma : x^2 + y^2 = 1$, $A\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ и $A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$; (2) $\gamma : x^3 - 2x^2y + xy^2 - x + y = 0$, $A(1,0)$;

    (3) $\gamma : x^y = y^x$, $A(2,4)$; (4) $\gamma : 2x + 2y = 3\sin(\pi xy)$, $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$;

    (5) $\gamma : x^3 + xy + y^3 = 3$ в точке $A(1,1)$.

16. Функция $g(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0 = 7$ является обратной к функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$ (заметьте, что $f(1) = 7$). Найдите производную $g'(7)$.

17. Пусть цена на определенный товар составляет $p$ у.е. за единицу, а спрос на него составляет $q$ единиц, где $p$ и $q$ связаны формулой $q^2 + 3pq = 22$.

    (1) Найдите эластичность спроса на этот товар.

    (2) При цене на товар в 3 у.е. является ли спрос эластичным, неэластичным или имеет единичную эластичность?

18. Пусть спрос $q$ на определенный товар в зависимости от его цены $p$ составляет $q(p) = b - ap$, где $a$, $b$ – положительные постоянные и $0 \leqslant p \leqslant \dfrac{b}{a}$.

    (1) Выразите эластичность спроса как функцию от $p$.

    (2) Покажите, что единичная эластичность спроса достигается в середине $p_* = \dfrac{b}{2a}$ сегмента $\left[0, \dfrac{b}{a}\right]$.

    (3) При каких значениях $p$ спрос эластичен? При каких неэластичен?

19. Пусть спрос $q$ на определенный товар в зависимости от его цены $p$ составляет $q(p) = \dfrac{a}{p^m}$, где $a$ и $m$ – положительные постоянные. Покажите, что эластичность спроса равна $m$ при всех значениях $p$. Дайте интерпретацию этого результата в зависимости от $m$.