Промежуточный экзамен 2017-2018

БЭК182, Шушпанова Мария

Июнь 2020

Промежуточный экзамен 2017-2018
Ответы: AECBA ?BCEB BBCCA BBCCC ABCBA EA?AC

Решение:

1. X^2 - неотрицательная случайная величина.
   Тогда согласно неравенству Маркова:
   $$\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^2)}{100}$$
   Находим необходимое математическое ожидание и вычисляем ответ:
   $$(\mathbb{E}(X^2) = \operatorname{Var}(X) + \mathbb{E}(X))^2 = 10$$
   $$\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100) \leqslant \frac{10}{100} = 0.1$$
   Следовательно, $\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100)$ принадлежит промежутку $[0, 0.1]$
   Ответ: A

2. По определению распределения Пуассона с параметром λ:
   $$\mathbb{E}(\xi) = \lambda$$
   $$\operatorname{Var}\xi) = \lambda$$
   Тогда по свойству дисперсии:
   $$\mathbb{E}(\xi^2) = \operatorname{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda \cdot (1 + \lambda)$$
   Ответ: E

3. Вычислим неизвестные дисперсию и ковариацию:
   $$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2 \cdot \operatorname{Cov}(X,Y) = 4 + 9 + 2 \cdot (-3) = 7$$
   $$\operatorname{Cov}(X+Y,Y) = \operatorname{Cov}(X,Y) + \operatorname{Cov}(Y,Y) = -3 + 9 = 6$$
   Тогда по формуле корреляции:
   $$\operatorname{Corr}(X+Y,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X+Y,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X+Y) \cdot \operatorname{Var}(Y)}} = \frac{6}{\sqrt{63}} = \frac{6}{3\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$
   Ответ: C

4. Функция плотности нормально распределенной случайной величины:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Известно, что для стандартного нормального распределения $\mu = 0$, а $\sigma^2 = 1$. Тогда его функция плотности:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Для вычисления искомой вероятности нужно проинтегрировать полученное выражение на промежутке [-1; 2]

Ответ: B

5. Координаты вершин соответсвующего треугольника: $(0;0), (2;0), (0;4)$ Тогда его площадь $S_\triangle = 4$

Для равномерного распределения:

$$f_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{S_\triangle} = \frac{1}{4}$$

Ответ: A

6. По определению события A, B и C независимы в совокупности, если:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

Ответ: B, D

7. Для определения искомой вероятности вычислим интеграл:

$$\mathbb{P}(\xi \in [3;6]) = \int_3^4 \frac{1}{4} dx = \frac{x}{4}\Big|_3^4 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Ответ: B

8. Заметим, что для каждого значения с.в. Y существует только одно значение с.в. X, удовлетворяющее заданному условию:

$$Y = -1; X = 1$$
$$Y = 0; X = 2$$
$$Y = 1; X = 1$$

Тогда искомая вероятность равна сумме вероятностей этих событий. Вследствие независимости данных сулчайных величин получаем:

$$\mathbb{P}(X + Y^2 = 2) = (\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3}) \cdot 3 = \frac{1}{11}$$

Ответ: C

9. Длина окружности с единичным радиусом равна 2π. Тогда всего Вася может попасть в один из шести секторов

   По классическому определению вероятности:

$$\mathbb{P}(\text{«Красный»}) = \frac{1}{6}$$

   Ответ: E

10. По теореме сложения:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) \ - \mathbb{P}(A) = 0.6 + 0.2 - 0.3 = 0.5$$

   Ответ: B

11. По свойствам дисперсии:

$$\mathrm{Var}(2X - Y + 1) = 4 \cdot \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 4 \cdot \mathrm{Cov}(X,Y)$$
$$\mathrm{Var}(2X - Y + 1) = 4 \cdot 4 + 9 - 4 \cdot (-3) = 37$$

   Ответ: B

12. По закону больших чисел данный предел равен $\mathbb{E}(X^2)$ В свою очередь для стандартного нормального распределения:

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = 1 + 0 = 1$$

   Ответ: B

13. Из определения условной функции плотности с.в. X при Y $= 1/2$:

$$f\left(x \mid y = \frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(x, \frac{1}{2}\right)}{f_y\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{6x \cdot 0.25}{0.75} = 2x$$

$$f_y(y) = \int_0^1 6 \cdot x \cdot y^2 dx = 3 \cdot y^2 \cdot x^2\Big|_0^1 = 3 \cdot y^2, y \in [0; 1]$$

   Ответ: C

14. Из искомой вероятности устанавливаем, что $n = 100$ Тогда:

$$\bar{X} \sim \mathbb{N}\,(4{,}1)$$

Стандартизируем случайную величину и, пользуясь таблицей, получаем ответ:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-4}{\sqrt{1}} \leqslant \frac{5-4}{1}\right) = \mathbb{P}(\mathbb{Z} \leqslant 1) = 0.84$$

Ответ: C

15. По свойствам ковариации:

$$\mathrm{Cov}(X+2Y, 2X+3) = \mathrm{Cov}(X, 2X)+\mathrm{Cov}(2Y, 2X) = 2\,\mathrm{Var}(X)+4\cdot\mathrm{Cov}(X{,}Y)$$
$$\mathrm{Cov}(X+2Y, 2X+3) = 2\cdot 4 + 4\cdot(-3) = 8 - 12 = -4$$

Ответ: A

16. По свойствам математического ожидания:

$$\mathbb{E}((X-1)Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) + \mathrm{Cov}(X{,}Y) - \mathbb{E}(Y)$$
$$\mathbb{E}((X-1)Y) = -2 - 3 - 2 = -7$$

Ответ: B

17. Случайная величина X_i имеет распределение Бернулли.
Причем $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{6}$
Тогда:

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0; X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1; X_2 = 0)$$
$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_1 + X_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 0 \cap X_1 + X_2 = 1)}{X_1 + X_2 = 1}) = \frac{1}{2}$$

Тогда найденный условный закон распределения случайной величины X_1 совпадает с распределением Бернулли с параметром $p = \frac{1}{2}$

Ответ: B

18. Стандартизируя случайную величину $X + Y$ получаем:

$$\mathbb{P}(X+Y<3) = \mathbb{P}\left(\frac{X+Y-3}{\sqrt{7}} < \frac{3-3}{\sqrt{7}}\right) = (\mathbb{Z} \leqslant 0) = 0.5$$

Ответ: C

19. Существуют 3 доступные функции кнопок:

    Честные кубики ($\mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{2}$)

    Увеличенная вероятность шестерки ($\mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{2}$)

    Увеличенная вероятность единицы ($\mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{10}$)

    Тогда:

$$\mathbb{P}(\text{«Честный кубик»} \mid \text{«6»}) = \frac{\mathbb{P}(i = 1{,}2{,}3 \cap \text{«6»})}{\mathbb{P}(\text{«6»})} = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{11}{50}} = \frac{5}{11}$$

    Ответ: C

20. Из всех данных матриц только матрица C обладает свойствами симметричности и неотрицательности определителя

    Ответ: C

21. По свойствам математического ожидания:

$$\mathbb{E}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \alpha\,\mathbb{E}(X) + (1-\alpha)\,\mathbb{E}(Y) = \alpha \cdot (-1) + (1-\alpha) \cdot 2 = 0$$

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

    Ответ: A

22. Для биноминального распределения:

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = (1-p)^n = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$$

    Ответ: B

23. Для распределение Пуассона с параметром $\lambda = 4$:

$$\mathbb{P}(x = k) = \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(k = 0) = 1 - e^{-4}$$

    Обратите внимание, что приведенная формула работает только для маленьких вероятностей

    Ответ: C

24. Для распределения Бернулли с параметром p:

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \operatorname{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = p \cdot (1-p) + p^2 = p$$

    Ответ: B

25. Для экспоненциального распределения:

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$
$$\operatorname{Var}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \operatorname{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Ответ: A

26. При всех стараниях Васе никак не удастся попасть дротиком одновременно и в красный, и в синий сектор, поэтому события A и B несовместны

Ответ: E

27. Для нахождения искомого м.о. вычислим соответствующий интеграл:

$$\mathbb{E}(XY) = 6 \cdot \int_0^1 dx \int_0^1 x \cdot y \cdot x \cdot y^2 dy = \int_0^1 2 \cdot x^3 \cdot y^3 \Big|_0^1 dy = \frac{2 \cdot y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ответ: A

28. По свойствам дисперсии:

$$\operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \alpha^2 \operatorname{Var}(X) + (1-\alpha)^2 \operatorname{Var}(Y) + 2 \cdot \operatorname{Cov}(X,Y) \cdot \alpha \cdot (1-\alpha)$$

$$\operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = 4 \cdot \alpha^2 + 9 \cdot (1-\alpha)^2 - 6 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) = 19 \cdot \alpha^2 - 24 \cdot \alpha + 9$$

Тогда точка минимума параболы, ветви которой направленны вверх:

$$\alpha = \frac{24}{2 \cdot 19} = \frac{12}{19}$$

Ответ: 12/19

29. Для ответа на вопрос вычислим ряд условных вероятностей:

$$\mathbb{P}(\text{«без багажа»}) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(\text{«с рюкзаком»} \mid \text{«без багажа»}) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(\text{«с рюкзаком»} \mid \text{«с багажом»}) = \frac{55}{150}$$

Тогда $\mathbb{P}(\text{«без рюкзака»})$:

$$\mathbb{P}(\text{«без рюкзака»}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{95}{150} \cdot \frac{3}{4} = 0.6$$

Ответ: A

30. Согласно неравенству Маркова:

$$\mathbb{P}(|X-2| \geqslant 10) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{100}$$

Тогда искомая вероятность:

$$\mathbb{P}(|X-2| \leqslant 10) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{100} = 0.94$$

Ответ: C