

Front matter

title: "Отчёт по лабораторной работе №6

Математическое моделирование" subtitle: "Задача об эпидемии. Вариант №51" author:
"Выполнил: Куденко Максим

НФИбд-02-21, 1032217048"

Generic otions

lang: ru-RU toc-title: "Содержание"

Bibliography

bibliography: bib/cite.bib csl: pandoc/csl/gost-r-7-0-5-2008-numeric.csl

Pdf output format

toc: true # Table of contents toc-depth: 2 lof: true # List of figures fontsize: 12pt linestretch: 1.5
papersize: a4 documentclass: scrreprt

l18n polyglossia

polyglossia-lang: name: russian options: - spelling=modern - babelshorthands=true polyglossia-
otherlangs: name: english

l18n babel

babel-lang: russian babel-otherlangs: english

Fonts

mainfont: Times New Roman romanfont: Times New Roman sansfont: Times New Roman monofont:
Times New Roman mainfontoptions: Ligatures=TeX romanfontoptions: Ligatures=TeX
sansfontoptions: Ligatures=TeX,Scale=MatchLowercase monofontoptions:
Scale=MatchLowercase,Scale=0.9

Biblatex

biblatex: true biblio-style: "gost-numeric" biblatexoptions:

- parenttracker=true
- backend=biber
- hyperref=auto
- language=auto
- autolang=other*
- citestyle=gost-numeric

Pandoc-crossref LaTeX customization

figureTitle: "Рис." tableTitle: "Таблица" listingTitle: "Листинг" lofTitle: "Список иллюстраций" lolTitle: "Листинги"

Misc options

indent: true header-includes:

- `\usepackage{indentfirst}`
- `\usepackage{float} # keep figures where there are in the text`
- `\floatplacement{figure}{H} # keep figures where there are in the text`

Цель работы

Изучить и построить модель эпидемии.

Теоретическое введение. Построение математической модели.

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначаемая через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения I^* , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & \text{если } I(t) > I^* \\ 0 & \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, то есть:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & \text{если } I(t) > I^* \\ -\beta I & \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t=0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0)=0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

Задание

Вариант 51

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N=17854$) в момент начала эпидемии ($t=0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0)=199$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0)=35$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0)=N-I(0)-R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. $I(0) \leq I^*$
2. $I(0) > I^*$

Задачи

Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп S , I , R . Рассмотреть, как будет протекать эпидемия в случаях:

1. $I(0) \leq I^*$
2. $I(0) > I^*$

Выполнение лабораторной работы

Решение с помощью программ

Julia

Код программы для случая $I(0) \leq I^*$:

```
using Plots
using DifferentialEquations

N = 17854
I0 = 199 # заболевшие особи
R0 = 35 # особи с иммунитетом
S0 = N - I0 - R0 # здоровые, но восприимчивые особи
alpha = 0.4 # коэффициент заболеваемости
beta = 0.3 # коэффициент выздоровления

# I0 <= I*
function ode_fn(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = 0
    du[2] = -beta*u[2]
    du[3] = beta*I
end

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi = 300,
    legend = :topright)

plot!(
    plt,
```

```

T,
S,
label = "Восприимчивые особи",
color = :blue)

plot!(
    plt,
    T,
    I,
    label = "Инфицированные особи",
    color = :green)

plot!(
    plt,
    T,
    R,
    label = "Особь с иммунитетом",
    color = :red)

savefig(plt, "6_1.png")

```

Код программы для случая $I(0) > I^*$:

```

using Plots
using DifferentialEquations

N = 17854
I0 = 199 # заболевшие особи
R0 = 35 # особи с иммунитетом
S0 = N - I0 - R0 # здоровые, но восприимчивые особи
alpha = 0.4 # коэффициент заболеваемости
beta = 0.3 # коэффициент выздоровления

#I0 > I*
function ode_fn(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = -alpha*u[1]
    du[2] = alpha*u[1] - beta*u[2]
    du[3] = beta*I
end

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(

```

```


        dpi = 300,
        legend = :right)

plot!(
    plt,
    T,
    S,
    label = "Восприимчивые особи",
    color = :blue)
plot!(
    plt,
    T,
    I,
    label = "Инфицированные особи",
    color = :green)
plot!(
    plt,
    T,
    R,
    label = "Особь с иммунитетом",
    color = :red)


savefig(plt, "6_2.png")

```

Результаты работы кода на Julia

 Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные изолированы

{ #fig:001 width=70% height=70% }

 Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные могут заражать особей группы S

{ #fig:002 width=70% height=70% }

OpenModelica

Код программы для случая $I(0) \leq I^*$:

```

model lab06_1
  Real N = 17854;
  Real I;
  Real R;
  Real S;
  Real alpha = 0.4;
  Real beta = 0.3;
  initial equation
    I = 199;
    R = 35;

```

```

S = N - I - R;
equation
der(S) = 0;
der(I) = -beta*I;
der(R) = beta*I;
annotation(
  experiment(StartTime = 0, StopTime = 100, Tolerance = 1e-6, Interval = 0.05));
end lab06_1;

```


Код программы для случая $I(0) > I^*$:

```

model lab06_2
Real N = 17854;
Real I;
Real R;
Real S;
Real alpha = 0.4;
Real beta = 0.3;
initial equation
I = 199;
R = 35;
S = N - I - R;
equation
der(S) = -alpha*S;
der(I) = alpha*S - beta*I;
der(R) = beta*I;
annotation(
  experiment(StartTime = 0, StopTime = 60, Tolerance = 1e-6, Interval = 0.05));
end lab06_2;

```

Результаты работы кода на OpenModelica

 Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные в OpenModelica, для случая, когда больные изолированы

{ #fig:003 width=70% height=70% }

 Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные в OpenModelica, для случая, когда больные могут заражать особей группы S

{ #fig:004 width=70% height=70% }

Анализ полученных результатов. Сравнение языков.

В итоге проделанной работы мы построили графики зависимости численности особей трех групп S, I, R для случаев, когда больные изолированы и когда они могут заражать особей группы S.

Построение модели эпидемии на языке OpenModelica занимает значительно меньше строк, чем аналогичное построение на Julia. Кроме того, построения на языке OpenModelica проводятся относительно значения времени t по умолчанию, что упрощает нашу работу.

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель эпидемии и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

Список литературы. Библиография.

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>
- [4] Конструирование эпидемиологических моделей: <https://habr.com/ru/post/551682/>