

Front matter

title: "Отчёт по лабораторной работе №5

Математическое моделирование" subtitle: "Модель хищник-жертва. Вариант №59" author:
"Выполнил: Куденко Максим

НФИбд-02-21, 1032217048"

Generic options

lang: ru-RU toc-title: "Содержание"

Bibliography

bibliography: bib/cite.bib csl: pandoc/csl/gost-r-7-0-5-2008-numeric.csl

Pdf output format

toc: true # Table of contents toc-depth: 2 lof: true # List of figures fontsize: 12pt linestretch: 1.5
papersize: a4 documentclass: scrreprt

l18n polyglossia

polyglossia-lang: name: russian options: - spelling=modern - babelshorthands=true polyglossia-
otherlangs: name: english

l18n babel

babel-lang: russian babel-otherlangs: english

Fonts

mainfont: Times New Roman romanfont: Times New Roman sansfont: Times New Roman monofont:
Times New Roman mainfontoptions: Ligatures=TeX romanfontoptions: Ligatures=TeX
sansfontoptions: Ligatures=TeX,Scale=MatchLowercase monofontoptions:
Scale=MatchLowercase,Scale=0.9

Biblatex

biblatex: true biblio-style: "gost-numeric" biblatexoptions:

- parenttracker=true
- backend=biber
- hyperref=auto
- language=auto
- autolang=other*
- citestyle=gost-numeric

Pandoc-crossref LaTeX customization

figureTitle: "Рис." tableTitle: "Таблица" listingTitle: "Листинг" lofTitle: "Список иллюстраций" lolTitle: "Листинги"

Misc options

indent: true header-includes:

- `\usepackage{indentfirst}`
- `\usepackage{float} # keep figures where there are in the text`
- `\floatplacement{figure}{H} # keep figures where there are in the text`

Цель работы

Изучить жесткую модель хищник-жертва и построить эту модель.

Теоретическое введение

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами. [4]

Данная двухвидовая модель основывается на следующих предположениях [4]:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dx(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y – число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке $x_0 = \frac{c}{d}$, $y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0)$, $y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

Задачи

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
2. Построить график зависимости численности хищников и численности жертв от времени
3. Найти стационарное состояние системы

Задание

Вариант 59:

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.48x(t) + 0.053y(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.52y(t) - 0.048y(t)x(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0=6$, $y_0=21$ Найдите стационарное состояние системы.

Выполнение лабораторной работы

Построение математической модели. Решение с помощью программ

Julia

Код программы для нестационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations

x0 = 6
y0 = 21

a = 0.48
b = 0.52
c = 0.053
d = 0.048

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + c * u[1] * u[2]
    du[2] = b * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi=300,
    legend=false)
```

```
plot!(
    plt,
    X,
    Y,
    label="Зависимость численности хищников от численности жертв",
    color=:blue)

savefig(plt, "julia1-1.png")

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

plot!(
    plt2,
    T,
    X,
    label="Численность жертв",
    color=:green)

plot!(
    plt2,
    T,
    Y,
    label="Численность хищников",
    color=:red)

savefig(plt2, "julia1-2.png")
```

Код программы для стационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.48
b = 0.52
c = 0.053
d = 0.048

x0 = c / d
y0 = a / b

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + c * u[1] * u[2]
    du[2] = b * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
```

```

prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

```

```

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

```

```

plot!(
    plt2,
    T,
    X,
    label="Численность жертв",
    color=:green)

```

```

plot!(
    plt2,
    T,
    Y,
    label="Численность хищников",
    color=:red)

```

```

savefig(plt2, "julia2.png")


```

В стационарном состоянии решение вида $y(x) = \text{some function}$ будет представлять собой точку.

Результаты работы кода на Julia

 График численности хищников от численности жертв{ #fig:001 width=70% height=70% }

 График численности жертв и хищников от времени{ #fig:002 width=70% height=70% }

 Стационарное состояние{ #fig:003 width=70% height=70% }

OpenModelica

Код программы для нестационарного состояния:

```

model lab51
    Real a = 0.48;
    Real b = 0.52;
    Real c = 0.053;
    Real d = 0.048;
    Real x;
    Real y;

    initial equation

```

```

x = 6;
y = 21;
equation
der(x) = -a*x + c*x*y;
der(y) = b*y - d*x*y;
annotation(
  experiment(StartTime = 0, StopTime = 60, Tolerance = 1e-06, Interval = 0.05));
end lab51;

```

Код программы для стационарного состояния:

```

model lab51
  Real a = 0.48;
  Real b = 0.52;
  Real c = 0.053;
  Real d = 0.048;
  Real x;
  Real y;
initial equation
  x = c/d;
  y = a/b;
equation
  der(x) = -a*x + c*x*y;
  der(y) = b*y - d*x*y;
  annotation(
    experiment(StartTime = 0, StopTime = 60, Tolerance = 1e-06, Interval = 0.05));
end lab51;

```

В стационарном состоянии решение вида $y(x)=\text{some function}$ будет представлять собой точку.

Результаты работы кода на OpenModelica

 График численности хищников от численности жертв{ #fig:004 width=70% height=70% }

 График численности жертв и хищников от времени{ #fig:005 width=70% height=70% }

 Стационарное состояние{ #fig:006 width=70% height=70% }

Анализ полученных результатов. Сравнение языков.

В итоге проделанной работы мы построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв на языках Julia и OpenModelica. Построение модели хищник-жертва на языке openModelica занимает меньше строк, чем аналогичное построение на Julia.

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель хищник-жертва и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

Список литературы. Библиография

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>
- [4] Модель Лотки—Вольтерры: https://math-it.petrus.ru/users/semenova/MathECO/Lectures/Lotka_Volterra.pdf