

Front matter

title: "Отчёт по лабораторной работе №8

Математическое моделирование" subtitle: "Модель конкуренции двух фирм. Вариант №59"

author: "Выполнила: Куденко Максим

НФИбд-02-21, 1032217048"

Generic otions

lang: ru-RU toc-title: "Содержание"

Bibliography

bibliography: bib/cite.bib csl: pandoc/csl/gost-r-7-0-5-2008-numeric.csl

Pdf output format

toc: true # Table of contents toc-depth: 2 lof: true # List of figures fontsize: 12pt linestretch: 1.5
papersize: a4 documentclass: scrreprt

l18n polyglossia

polyglossia-lang: name: russian options: - spelling=modern - babelshorthands=true polyglossia-
otherlangs: name: english

l18n babel

babel-lang: russian babel-otherlangs: english

Fonts

mainfont: Times New Roman romanfont: Times New Roman sansfont: Times New Roman monofont:
Times New Roman mainfontoptions: Ligatures=TeX romanfontoptions: Ligatures=TeX
sansfontoptions: Ligatures=TeX,Scale=MatchLowercase monofontoptions:
Scale=MatchLowercase,Scale=0.9

Biblatex

biblatex: true biblio-style: "gost-numeric" biblatexoptions:

- parenttracker=true
- backend=biber
- hyperref=auto
- language=auto
- autolang=other*
- citestyle=gost-numeric

Pandoc-crossref LaTeX customization

figureTitle: "Рис." tableTitle: "Таблица" listingTitle: "Листинг" lofTitle: "Список иллюстраций" lolTitle: "Листинги"

Misc options

indent: true header-includes:

- `\usepackage{indentfirst}`
- `\usepackage{float} # keep figures where there are in the text`
- `\floatplacement{figure}{H} # keep figures where there are in the text`

Цель работы

Изучить и построить модель конкуренции двух фирм.

Теоретическое введение. Построение математической модели.

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт длительного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

N - число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е.

производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия

τ – длительность производственного цикла

p – рыночная цена товара

\tilde{p} – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции

δ – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек

k – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p . Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k \frac{p}{p_{cr}} = q(1 - \frac{p}{p_{cr}})$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = Sq/k$. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса является пороговой (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M \delta}{\tau} + NQp - k = -\frac{M \delta}{\tau} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - k$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma (-\frac{M \delta}{\tau \tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}))$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу. Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ . При заданном M уравнение описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M \delta}{\tau \tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0$$

равновесное значение цены p равно

$$\dot{p} = p_{cr} \left(1 - \frac{M\delta}{\tau p_{cr}}\right) Nq$$

Тогда уравнения динамики оборотных средств приобретает вид

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} \left(\frac{p}{p_{cr}} - 1\right) - M^2 \left(\frac{\delta}{\tau p_{cr}}\right)^2 - \frac{p_{cr}}{Nq} - k$$

Это уравнение имеет два стационарных решения, соответствующих условию $dM/dt=0$

$$\tilde{M}_{1,2} = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$a = Nq \left(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}} \frac{\tau}{\delta}\right), \quad b = kNq \frac{\tau^2}{\tilde{p}^2 p_{cr} \delta^2}$$

Получается, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b \ll a^2$) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы.

При $b \ll a^2$ стационарные значения M равны

$$\tilde{M}_{+} = Nq \frac{\tau}{\delta} \left(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\right), \quad \tilde{M}_{-} = k \frac{\tau}{\delta (p_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние \tilde{M}_{+} устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние \tilde{M}_{-} неустойчиво, так, что при $M < \tilde{M}_{-}$ оборотные средства падают ($dM/dt < 0$), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу \tilde{M}_{-} соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр δ всюду входит в сочетании с τ . Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: $\delta = 1$, а параметр τ будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

Задание

Вариант 59

Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника

путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\Theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\Theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$
 где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \widetilde{p}^1 N_q} \quad a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \widetilde{p}^2 N_q}$$

$$b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \widetilde{p}_1^1 \tau_2^2 \widetilde{p}_2^2 N_q}$$

$$c_1 = \frac{p_{cr} - \widetilde{p}_1}{\tau_1 \widetilde{p}_1} \quad c_2 = \frac{p_{cr} - \widetilde{p}_2}{\tau_2 \widetilde{p}_2}$$

также введена нормировка $t = c_1 \Theta$

Случай 2

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\Theta} = M_1 - \left(\frac{b}{c_1} + 0.00049 \right) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\Theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами

$$M_0^1 = 8.8 : M_0^2 = 9.9 \quad p_{cr} = 30 : N = 80 : q = 1 \quad \tau_1 = 10.1 : \tau_2 = 11.5$$

$$\widetilde{p}_1 = 10.1 : \widetilde{p}_2 = 11.5$$

Задачи

1. Изучить модель конкуренции двух фирм
2. Построить графики изменения оборотных средств двух фирм для обоих случаев

Выполнение лабораторной работы

Решение с помощью программ

Julia

Код программы для первого случая:

```
using Plots
using DifferentialEquations

p_cr = 40
tau1 = 25
p1 = 8
tau2 = 20
p2 = 8.5
N = 45
q = 1

a1 = p_cr / (tau1 * tau1 * p1 * p1 * N * q)
a2 = p_cr / (tau2 * tau2 * p2 * p2 * N * q)
b = p_cr / (tau1 * tau1 * tau2 * tau2 * p1 * p2 * p2 * N * q)
c1 = (p_cr - p1) / (tau1 * p1)
c2 = (p_cr - p2) / (tau2 * p2)

function ode_fn(du, u, p, t)
    M1, M2 = u
    du[1] = u[1] - b / c1*u[1] * u[2] - a1 / c1*u[1] * u[1]
    du[2] = c2 / c1*u[2] - b / c1*u[1] * u[2] - a2 / c1*u[2] * u[2]
end

v0 = [7, 8.9]
tspan = (0.0, 30.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
M1 = [u[1] for u in sol.u]
M2 = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi = 300,
    legend = true)

plot!(
    plt,
    T,
    M1,
    label = "Оборотные средства фирмы 1",
    color = :blue)

plot!(
    plt,
```

```

T,
M2,
label = "Оборотные средства фирмы 2",
color = :green)

savefig(plt, "j11.png")

```

Код программы для второго случая:

```

using Plots
using DifferentialEquations

p_cr = 40
tau1 = 25
p1 = 8
tau2 = 20
p2 = 8.5
N = 45
q = 1

a1 = p_cr / (tau1 * tau1 * p1 * p1 * N * q)
a2 = p_cr / (tau2 * tau2 * p2 * p2 * N * q)
b = p_cr / (tau1 * tau1 * tau2 * tau2 * p1 * p1 * p2 * p2 * N * q)
c1 = (p_cr - p1) / (tau1 * p1)
c2 = (p_cr - p2) / (tau2 * p2)

function ode_fn(du, u, p, t)
    M1, M2 = u
    du[1] = u[1] - (b / c1 + 0.00049)*u[1] * u[2] - a1 / c1*u[1] * u[1]
    du[2] = c2 / c1*u[2] - b / c1*u[1] * u[2] - a2 / c1*u[2] * u[2]
end

v0 = [7, 8.9]
tspan = (0.0, 30.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
M1 = [u[1] for u in sol.u]
M2 = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi = 300,
    legend = :topright)


plot!(
    plt,
    T,
    M1,
    label = "Оборотные средства фирмы 1",
    color = :blue)


```

```
plot!(
    plt,
    T,
    M2,
    label = "Оборотные средства фирмы 2",
    color = :green)

savefig(plt, "jl2.png")
```

Результаты работы кода на Julia

 График конкуренции двух фирм для первого случая, построенный на языке Julia{ #fig:001 width=70% height=70% }

 График конкуренции двух фирм для второго случая, построенный на языке Julia{ #fig:002 width=70% height=70% }

OpenModelica

Код программы для первого случая:

```
model lab08_1
  Real p_cr = 40;
  Real tau1 = 25;
  Real p1 = 8;
  Real tau2 = 20;
  Real p2 = 8.5;
  Real N = 45;
  Real q = 1;

  Real a1 = p_cr / (tau1 * tau1 * p1 * p1 * N * q);
  Real a2 = p_cr / (tau2 * tau2 * p2 * p2 * N * q);
  Real b = p_cr / (tau1 * tau1 * tau2 * tau2 * p1 * p1 * p2 * p2 * N * q);
  Real c1 = (p_cr - p1) / (tau1 * p1);
  Real c2 = (p_cr - p2) / (tau2 * p2);

  Real M1;
  Real M2;
initial equation
  M1 = 7;
  M2 = 8.9;
equation
  der(M1) = M1 - b/c1*M1*M2 - a1/c1*M1*M1;
  der(M2) = c2/c1*M2 - b/c1*M1*M2 - a2/c1*M2*M2;
  annotation(
    experiment(StartTime = 0, StopTime = 30, Tolerance = 1e-06, Interval = 0.05));
end lab08_1;
```



Код программы для второго случая:


```
model lab08_2
  Real p_cr = 40;
  Real tau1 = 25;
  Real p1 = 8;
  Real tau2 = 20;
  Real p2 = 8.5;
  Real N = 45;
  Real q = 1;

  Real a1 = p_cr / (tau1 * tau1 * p1 * p1 * N * q);
  Real a2 = p_cr / (tau2 * tau2 * p2 * p2 * N * q);
  Real b = p_cr / (tau1 * tau1 * tau2 * tau2 * p1 * p1 * p2 * p2 * N * q);
  Real c1 = (p_cr - p1) / (tau1 * p1);
  Real c2 = (p_cr - p2) / (tau2 * p2);

  Real M1;
  Real M2;
initial equation
  M1 = 7;
  M2 = 8.9;
equation
  der(M1) = M1 - (b / c1 + 0.00049) * M1 * M2 - a1 / c1 * M1 * M1;
  der(M2) = c2 / c1 * M2 - b / c1 * M1 * M2 - a2 / c1 * M2 * M2;
  annotation(
    experiment(StartTime = 0, StopTime = 30, Tolerance = 1e-06, Interval = 0.05));
end lab08_2;
```

Результаты работы кода на OpenModelica

 График конкуренции двух фирм для первого случая, построенный с помощью OpenModelica{
#fig:004 width=70% height=70% }

 График конкуренции двух фирм для второго случая, построенный с помощью OpenModelica{
#fig:005 width=70% height=70% }

Анализ полученных результатов. Сравнение языков.

В итоге проделанной работы на языках Julia и OpenModelica мы построили графики изменения оборотных средств для двух фирм для случаев, когда конкурентная борьба ведётся только рыночными методами и когда, помимо экономического фактора влияния, используются еще и социально-психологические факторы.

Построение модели конкуренции двух фирм на языке OpenModelica занимает значительно меньше строк кода, чем аналогичное построение на Julia.

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель конкуренции двух фирм и в дальнейшем построена модель на языках Julia и Open Modelica.

Список литературы. Библиография.

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>
- [4] Мальтузианская модель роста:
<https://www.stolaf.edu/people/mckelvey/envision.dir/malthus.html>
- [5] Математические модели конкурентной среды:
https://dspace.spbu.ru/bitstream/11701/12019/1/Gorynya_2018.pdf
- [6] Разработка математических моделей конкурентных процессов:
<https://www.academia.edu/9284004/>
Наумейко *РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНКУРЕНТНЫХ ПРОЦЕССОВ*