

# Лабораторная работа номер 5

---

Malkov Roman Sergeevich

01.03.2024

Изучить жесткую модель хищник-жертва и построить эту модель.

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами. [4]

Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв  $x$  и хищников  $y$  зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dx(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели  $x$  – число жертв,  $y$  – число хищников. Коэффициент  $a$  описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников ( $xy$ ). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены  $-bxy$  и  $dxy$  в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке  $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$ . Если начальные значения задать в стационарном состоянии  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ , то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей  $x(0), y(0)$ . Колебания совершаются в противофазе.

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
2. Построить график зависимости численности хищников и численности жертв от времени
3. Найти стационарное состояние системы

Вариант 59:

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.48x(t) + 0.053y(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.52y(t) - 0.048y(t)x(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:  $x_0 = 6$ ,  $y_0 = 21$  Найдите стационарное состояние системы.



# Выполнение лабораторной работы

Код программы для нестационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations

x0 = 5
y0 = 21

a = 0.48
b = 0.52
c = 0.893
d = 0.848

function ode_fn(du, u, p, t)
    X, Y = u
    du[1] = -a*u[1] + c*u[1]*u[2]
    du[2] = b*u[2] - d*u[1]*u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
t = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi=300,
    legend=false)

plot!(
    plt,
    X,
    Y,
    label="зависимость численности хищников от численности жертв",
    color=:blue)

savefig(plt, "julia1-1.png")

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

plot!(
    plt2,
    T,
    X,
    label="численность жертв",
    color=:green)

plot!(
    plt2,
    T,
    Y,
    label="численность хищников",
    color=:red)

savefig(plt2, "julia1-2.png")
```

Рис. 1: График численности хищников от численности жертв

# Выполнение лабораторной работы

Код программы для стационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.48
b = 0.52
c = 0.053
d = 0.048

x0 = c / d
y0 = a / b

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + c * u[1] * u[2]
    du[2] = b * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
x = [u[1] for u in sol.u]
y = [u[2] for u in sol.u]
t = [t for t in sol.t]

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

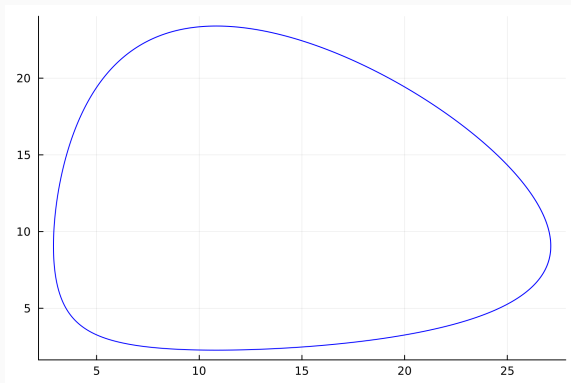
plot!(
    plt2,
    t,
    x,
    label="численность жертв",
    color=:green)

plot!(
    plt2,
    t,
    y,
    label="численность хищников",
    color=:red)

savefig(plt2, "julia2.png")
```

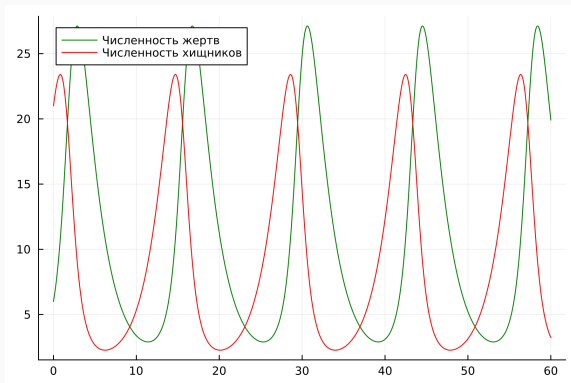
Рис. 2: График численности хищников от численности жертв

# Выполнение лабораторной работы



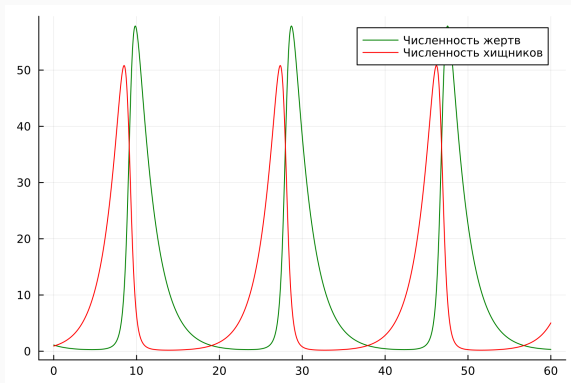
**Рис. 3:** График численности хищников от численности жертв

# Выполнение лабораторной работы



**Рис. 4:** График численности жертв и хищников от времени

# Выполнение лабораторной работы



**Рис. 5:** Стационарное состояние

Код программы для нестационарного состояния:

```
model lab51
  Real a = 0.48;
  Real b = 0.52;
  Real c = 0.053;
  Real d = 0.048;
  Real x;
  Real y;

  initial equation
    x = 6;
    y = 21;
  equation
    der(x) = -a*x + c*x*y;
    der(y) = b*y - d*x*y;
    annotation(
      experiment(StartTime = 0, StopTime = 60, Tolerance = 1e-06, Interval = 0.05));
end lab51;
```

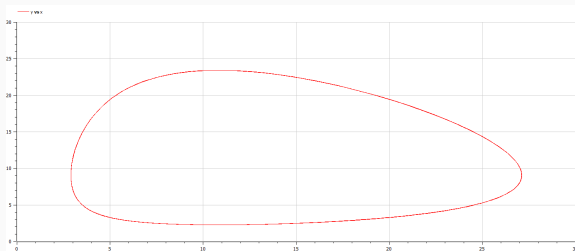
**Рис. 6:** График численности хищников от численности жертв

# Выполнение лабораторной работы

Код программы для стационарного состояния:

```
model lab51
  Real a = 0.48;
  Real b = 0.52;
  Real c = 0.053;
  Real d = 0.048;
  Real x;
  Real y;
  initial equation
    x = c/d;
    y = a/b;
  equation
    der(x) = -a*x + c*x*y;
    der(y) = b*y - d*x*y;
  annotation(
    experiment(StartTime = 0, StopTime = 60, Tolerance = 1e-06, Interval = 0.05));
end lab51;
```

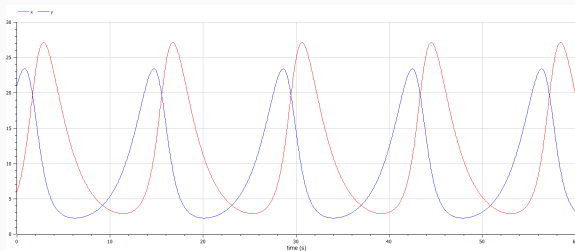
**Рис. 7:** График численности хищников от численности жертв



**Рис. 8:** График численности хищников от численности жертв

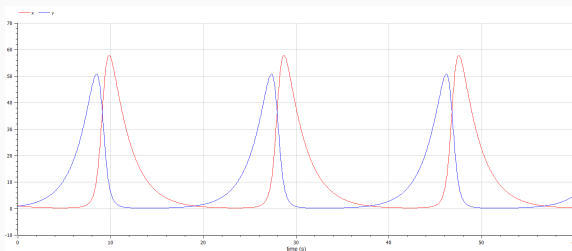


# Выполнение лабораторной работы



**Рис. 9:** График численности жертв и хищников от времени

# Выполнение лабораторной работы



**Рис. 10:** Стационарное состояние

В итоге проделанной работы мы построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв на языках Julia и OpenModelica. Построение модели хищник-жертва на языке openModelica занимает меньше строк, чем аналогичное построение на Julia.

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель хищник-жертва и построена модель на языках Julia и Open Modelica.