مقدمه‌ای بر مشتق و انتگرال

مسیح مزکی*

۱۷ مهر ۱۴۰۰

سلام و خسته نباشید عرض می‌کنم خدمت تمامی برادران و خواهران نودانشجویم در دانشگاه صنعتی امیرکبیر. قبل از ورود به اصل مطلب نیاز دیدم تا شما را با مهم‌ترین نکته دوران تحصیلتان آشنا کنم؛ لطفا دروس را **عمیق** بخوانید. فهمیدن مطالب درسی بسیار بیشتر از نمره برای شما نان و آب خواهد شد. جدا از اینکه با عمیق خواندن قطعا از لحاظ ارزشیابی هم موفق خواهید شد، بدون عمیق خواندن نمی‌توانید پایه‌های پیشرفت آینده خود را محکم کنید. پس، از برادر بزرگترتان این نصیحت را گوش بگیرید و با علاقه و جان و دل به زندگی ۴ سال آینده خود وارد شوید.

هدف از این متن، آشنا کردن دانشجویان نوورود به دانشگاه با مطالب پایه‌ای ریاضیات عمومی است. در این متن به همراه هم در ابتدا مفاهیم مشتق را مرور کرده و سپس به دنیای انتگرال‌ها می‌پردازیم. دانش قبلی از حد و پیوستگی برای درک این مفاهیم می‌تواند بسیار مفید باشد.

مشتق

مشتق به طور کلی ابزاری است برای بررسی نحوه تغییر مقدار توابع. مشتق را می‌توان در یک سوال بنیادین خلاصه کرد: «با تغییر در ورودی تابع، چه تغییری در خروجی آن بوجود خواهد آمد؟»
پاسخ به این سوال در اکثریت حوزه‌های علم امروز حائز اهمیت بسیاری است. از اقتصاددان‌هایی که سعی بر پیش‌بینی متغیرهای اقتصادی دارند گرفته تا مهندس انرژی‌ای که می‌خواهد انتقال حرارت یک پنل خورشیدی را حساب کند و حتی اپیدمیولوژیست‌هایی که تلاش می‌کنند نحوه شیوع بیماری کرونا را بررسی کنند.

برای یادآوری، با یک مثال شروع می‌کنیم. فرض کنید که می‌خواهیم مشتق تابع $f(x) = x^2 + 1$ را حول نقطه‌ای مانند a حساب کنیم (بحث‌های موجود بودن مشتق و یا همگرایی را فعلا کاری نداریم). هدف ما این است که بدون استفاده از تعاریف ریاضی و صرفا با تفکر در مفاهیم، این مشتق را بدست آوریم.
همانطور که گفتیم، مفهوم مشتق با تغییرات خروجی تابع سر و کار دارد. بسیار خب، اگر یک نقطه $(a,\ f(a))$ را داشته باشیم، می‌توانیم میزان تغییر مقدار تابع تا نقطه دیگری نزدیک a مانند $(b,\ f(b))$ را بدست بیاوریم. اگر با نسبت‌های تغییرات (یا به عبارتی، میزان تغییر به ازای هر واحد x) کار کنیم، این تغییر را می‌توانیم به صورت

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

*دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ایمیل

نمایش دهیم. اگر به خاطر داشته باشید، این همان فرمول شیب است که قبلا هم آن را دیده بودیم و مشتق را با استفاده از آن به ما معرفی کرده بودند.
همچنین دقت کنید که b هم نقطه‌ای بر روی محور اعداد است و می‌توانیم آن را به صورت $b = a + h$ نشان دهیم که $h \in \mathbb{R}$ است. پس داریم

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

حال ما می‌خواهیم ببینیم که حول نقطه a، اگر مقدار تابع را تغییر دهیم، در خروجی آن چه تغییری پیش خواهد آمد. بدین منظور نیاز داریم تا نقاط نزدیک به a را بررسی کنیم تا ببینیم مقدار آنان نسبت به مقدار a چه تغییری کرده است. این «بررسی نقاط نزدیک a» همان حد گرفتن به سمت a است. حد گرفتن به سمت a هم که از طریق نزدیک کردن نقطه b یا به عبارتی کوچک کردن مقدار h حاصل می‌شود. پس نهایتا مقدار مطلوب ما برابر با

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

خواهد بود. آیا این قشنگ نیست؟ می‌توانیم صرفا با برداشتن مفهوم مشتق و مرحله به مرحله طی کردن قدم‌های منطقی برای رسیدن به مطلوب، فرمول‌ها را بازسازی کنیم. در این مثال خاص، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 + 1 - (a^2 + 1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 2a + h \\
&= 2a.
\end{aligned}$$

که یادآور همان فرمول معروف مشتق یک چندجمله‌ای است:

$$(x^n)' = n \times x^{n-1}$$

یادتان نمی‌آید؟ بسیار خب، این فرمول را ثابت می‌کنیم!

اثبات

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^n + na^{n-1}h + \cdots + h^n - a^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} na^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} h + \cdots + h^{n-1} \right) \\
&= na^{n-1}
\end{aligned}$$

$\square$

یادآوری

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

که در آن

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

حال به چند تمرین از مشتق‌ها می‌پردازیم:

تمرین ۱ مشتق تابع $f(x)=\sin x$ را بدست آورید.

یادآوری

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\,(\cos h - 1) + \cos x\sin h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\,\underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\cos x\,\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}\right)\\ &= \cos x.\end{aligned}$$

یادآوری

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= -\sin x\\ (\tan x)' &= 1+\tan^2 x.\end{aligned}$$

همچنین ما روابطی مربوط به خود عمل مشتق را نیز یاد گرفتیم، به عنوان مثال مشتق جمع دو تابع برابر با جمع مشتق‌های دو تابع است:

$$
\begin{aligned}
(f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f'(x)+g'(x).
\end{aligned}
$$

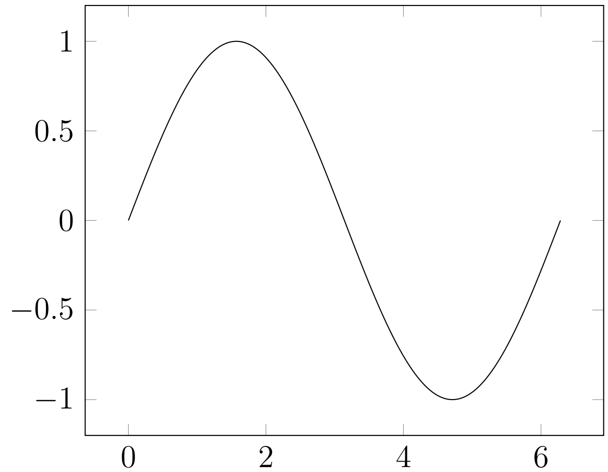
یادآوری

$$
\begin{gathered}
(fg)' = f'g + g'f\\
\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}\\
(f\circ g)'(x) = g'(x)\times f'(g(x))
\end{gathered}
$$

با این قاعده آخر می‌توانیم تکنیکی به نام تغییر متغیر را ایجاد کنیم. اگر $y=f(x)$ را داشته باشیم و قرار دهیم $u=g(x)$ آنگاه $y(x)=f\circ g=f(g(x))$ و $y'=u'f'(u)$. سپس با جایگذاری به جواب به ازای x می‌رسیم. به عنوان مثال، مشتق تابع $y=\sin^2 x$ را بدست می‌آوریم: در ابتدا قرار دهید $u=\sin x$ آنگاه $y=(u(x))^2$، و

$$
\begin{aligned}
y' &= u'f'(u)\\
&= u'\times 2u = \cos x\times 2\sin x\\
&= 2\sin x\cos x
\end{aligned}
$$

حال می‌خواهیم کمی در مورد انواع نقاط مهم توابع صحبت کنیم. در هر تابع، نقاطی که مشتق در آنها برابر با صفر است و یا مشتق ناموجود می‌باشد برای ما اهمیت خاصی دارند. اگر خود را به دنیای توابع پیوسته محدود کنیم، این نقاط به ما اکسترمم‌های تابع را می‌دهند. به بزرگترین این اکسترمم‌ها، ماکزیمم کلی می‌گوییم و به کوچک‌ترینشان مینیمم کلی. بقیه اکسترمم‌ها هم در بازه‌های خود یا ماکزیمم محلی هستند یا مینیمم محلی. همینقدر ساده. حال یک تابع به صورت زیر را تصور کنید:



در این تابع، می‌توانیم ببینیم که دو نقطه اکسترمم، همان نقاطی هستند که در آنها مقدار مشتق تابع برابر با صفر است. همچنین، دقت کنید که می‌توانیم صعودی یا نزولی بودن تابع را با توجه به مقدار مشتق در اطراف نقاط بحرانی مشخص کنیم. اگر نقطه بحرانی ما $c \in [a, b]$ باشد:

- اگر در بازه (a, c) مقدار مشتق تابع مثبت باشد و در (c, b) منفی باشد، آنگاه نقطه c یک ماکزیمم نسبی است.
- اگر در بازه (a, c) مقدار مشتق تابع منفی باشد و در (c, b) مثبت باشد، آنگاه نقطه c یک مینیمم نسبی است.

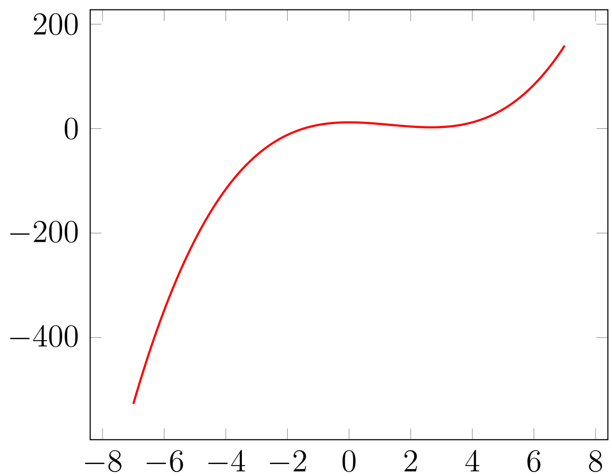
همچنین به طور کلی اگر در یک بازه مقدار مشتق صرفا مثبت باشد، این تابع اکیدا صعودی است و اگر منفی باشد، اکیدا نزولی.

با استفاده از مشتق دوم هم می‌توانیم جهت تقعر یک نمودار را بدست آوریم. اگر مشتق دوم مثبت باشد تقعر رو به بالا داریم و اگر منفی باشد، تقعر رو به پایین داریم. برای به خاطر سپردن این نکته فقط کافی است یکبار مشتق دوم تابع $y = x^2$ را با خود مرور کنید. مشتق این تابع برابر با عدد ثابت ۲ است، و تابع $y = x^2$ نیز در همه جا صرفا تقعر رو به بالا دارد. نقاط عطف نیز نقاطی هستند که در آنها جهت تقعر نمودار تابع تغییر می‌کند و با بررسی $f'' = 0$ بدست می‌آیند.

به عنوان مثال تابع $f = x^3 - 4x^2 + 12$ را در بازه $[-7, 7]$ در نظر بگیرید.

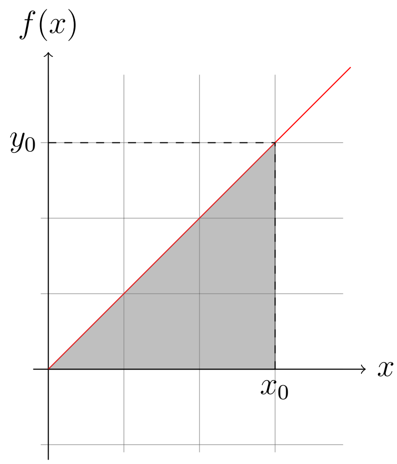
$$f' = 3x^2 - 8x$$
$$f'' = 6x - 8$$

که نشان می‌دهد این تابع یک نقطه عطف در $x = \frac{4}{3}$ دارد، دو اکسترمم نسبی نیز موجود می‌باشند که در کنار دو نقطه سر بازه ها نقاط اکسترمم ما را تشکیل می‌دهند. مشخص کردن تقعر را به عهده شما می‌سپاریم.



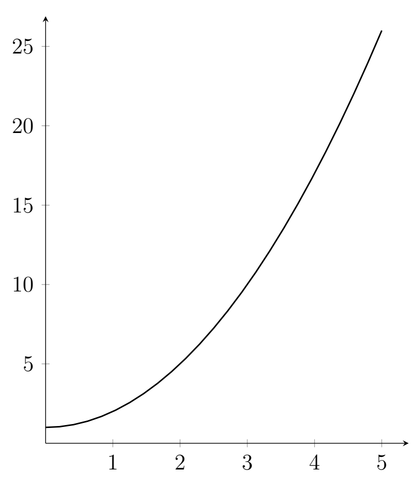
انتگرال

انتگرال مفهومی بسیار گره خورده با مشتق است، از جهات بسیاری هم آن را «برعکس» مشتق می‌دانند. همانطور که برای مشتق یک سوال بنیادین تعریف کردیم، برای انتگرال هم می‌توانیم یک سوال بنیادین پیدا کنیم: «مساحت سطح زیر یک نمودار دلخواه را چطور می‌توان بدست آورد؟»
این سوال در مورد نمودارهای ساده مانند شکل زیر به شکلی هندسی قابل پاسخ دادن است:



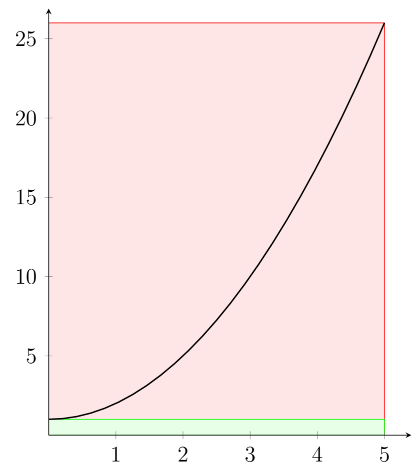
شکل ۱: مساحت محصور در بازه $[0,\ x_0]$ به صورت یک مثلث است و به راحتی محاسبه می‌شود.

ولی وقتی که نمودارها پیچیده تر می‌شوند باید چکار کرد؟ مثلا شکل ۲ را در نظر بگیرید.

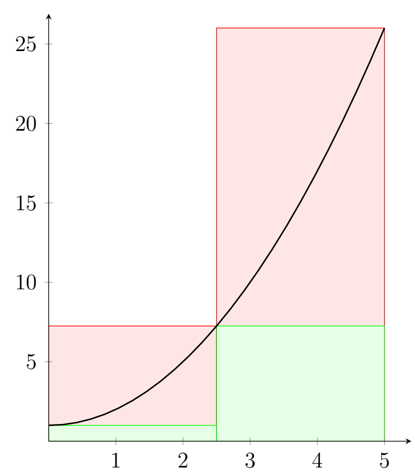


شکل ۲: نمودار $y = x^2 + 1$

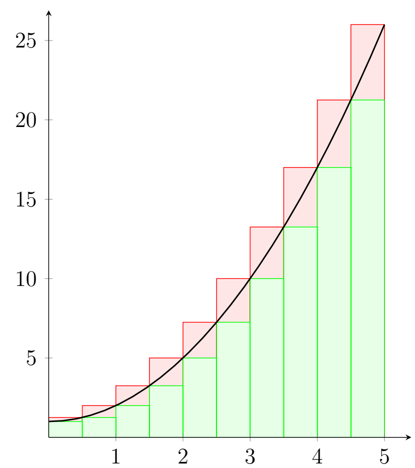
این شکل نمودار تابع $y = x^2 + 1$ است. برای محاسبه سطح زیر این نمودار باید چکار کنیم؟ بگذارید یک مرحله مسئله را ساده‌تر کنیم، بهترین تخمینی که می‌توانید از سطح زیر این نمودار معرفی کنید چیست؟ می‌توان یک تخمین را به شکل زیر معرفی کرد:



مشخص است که مقدار واقعی سطح زیر نمودار عددی است بین مساحت مستطیل قرمز و مستطیل سبز. اما، قبول دارید که می‌توان این تخمین را بهتر کرد؟ احتمالا تا الان این تخمین را حدس زده‌اید:



در اینجا، علاوه بر ابتدا و انتهای بازه، یک نقطه را در وسط بازه نیز انتخاب کردیم و دو مستطیل قرمز و سبز را تشکیل دادیم. اگر بازه‌ها را کوچکتر کنیم می‌توانیم تخمین‌های بهتری بسازیم:



در هر مرحله تخمین ما از مقدار واقعی سطح زیر نمودار بهتر می‌شود. به جمع مساحت مستطیل‌های قرمز این شکل، مجموع بالای ریمان می‌گویند، همچنین به مستطیل‌های سبز مجموع پایین ریمان گفته می‌شود. در ادامه این ایده را به شکلی ریاضیاتی فرمول‌بندی می‌کنیم.

فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه $[a,\, b]$ تعریف شده باشد. حال این بازه را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم [۱]. واضح است که هر کدام از این قسمت‌ها طولی برابر با $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ دارد. نقاط این بازه را می‌توانیم به صورت مجموعه زیر نشان دهیم:

$$a,\, a+\Delta x,\, a+2\Delta x, \ldots, a+(n-1)\Delta x,\, b$$

یا به عبارتی، بازه $[a,\, b]$ را به زیربازه‌های

$$[a,\, a+\Delta x],\, [a+\Delta x,\, a+2\Delta x], \ldots, [a+(n-1)\Delta x,\, b]$$

تقسیم می‌کنیم. یک جمع ریمانی به صورت

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x \tag{۱}$$

تعریف می‌شود که در آن هر x_i نقطه‌ای در بازه $[a+(i-1)\Delta x,\, a+i\Delta x]$ می‌باشد. اگر هر x_i را بیشترین مقدار تابع در بازه در نظر بگیریم به جمع بالای ریمان می‌رسیم (مستطیل‌های قرمز) و اگر این مقدار را کمترین مقدار تابع در بازه بگیریم به جمع پایین ریمان می‌رسیم (همان مستطیل‌های سبز). در واقع داریم

$$u_i = \sup f([a+(i-1)\Delta x,\, a+i\Delta x])$$
$$l_i = \inf f([a+(i-1)\Delta x,\, a+i\Delta x])$$

[۱] این بازه‌ها می‌توانند یکسان هم نباشند اما در تعریف‌های ما تفاوتی بوجود نمی‌آورد. می‌توانید ریاضیات حالت کلی تر را خودتان مطالعه کنید.

و همچنین

$$\textit{Sum of red rectangles } = U_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \, \Delta x$$
$$\textit{Sum of green rectangles } = L_n = \sum_{i=1}^{n} l_i \, \Delta x$$

یادآوری سوپریمم یا $\sup$ برابر با کوچکترین کران بالای یک مجموعه و اینفیمم یا $\inf$ برابر با بزرگترین کران پایین یک مجموعه می‌باشد. به عنوان مثال برای مجموعه $A = [2, 3)$ داریم

$$\sup A = 3, \; \inf A = 2.$$

کمی تفکر کنید و متوجه می‌شوید که مجموع بالای ریمان همیشه در حال دست بالا گرفتن مقدار تابع است و مجموع پایین ریمان برعکس. حال، اگر تعداد بازه‌ها را زیاد کنیم (تعداد مستطیل‌ها را زیاد کنیم) و این کار را به صورت حدی انجام دهیم، یا به عبارتی تعداد بازه‌ها را به سمت بی‌نهایت میل دهیم، خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x, \; \Delta x = \frac{b-a}{n}. \tag{۲}$$

اگر این حد برای دو مجموع بالا و پایین ریمان موجود و متناهی و برابر باشد می‌گوییم که تابع در این بازه انتگرال پذیر است و انتگرال آن برابر با جمع ریمانی (نوع جمع فرقی نمی‌کند چون همه انواع جمع‌های ریمان در صورت همگرایی به یک مقدار همگرا هستند) می‌باشد. یا در واقع باید

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n \neq \pm\infty$$

برقرار باشد. به عنوان یک مثال، ثابت می‌کنیم که تابع $y = x^2$ در بازه $[0, \; a]$ انتگرال پذیر است و انتگرال آن را حساب می‌کنیم.

اثبات داریم $\Delta x = \frac{a-0}{n} = \frac{a}{n}$ حال

$$\textit{points: } 0, \, \frac{a}{n}, \, \frac{2a}{n}, \ldots, \, \frac{(n-1)a}{n}, \, a$$
$$\textit{lower riemann sum: } l_1 = 0, \, l_2 = \frac{a^2}{n^2}, \ldots, \, l_n = \frac{(n-1)^2 a^2}{n^2}$$
$$\textit{upper riemann sum: } u_1 = \frac{a^2}{n^2}, \, u_2 = \frac{4a^2}{n^2}, \ldots, \, u_n = a^2$$

حال جمع‌های بالا و پایین را محاسبه می‌کنیم:

$$L_n = \frac{a}{n}\left(0 + \frac{a^2}{n^2} + \frac{4a^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2a^2}{n^2}\right)$$
$$U_n = \frac{a}{n}\left(\frac{a^2}{n^2} + \frac{4a^2}{n^2} + \frac{9a^2}{n^2} + \cdots + a^2\right)$$

یادآوری

$$\sum_1^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}.$$

حال نتیجه نهایی را محاسبه می‌کنیم

$$L_n = \frac{(n-1)(2n-1)a^3}{6n^2}$$
$$U_n = \frac{(n+1)(2n+1)a^3}{6n^2}$$

نهایتا داریم

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \frac{a^3}{3}.$$

□

یک مثال معروف از توابع انتگرال ناپذیر تابع زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

فرض کنید می‌خواهیم $\int_0^1 f(x)$ را بدست آوریم. بازه $[0,\, 1]$ را تقسیم می‌کنیم. به هر صورت که این تقسیم را انجام دهیم در هر بازه ما هم اعداد گویا قرار می‌گیرند و هم غیرگویا، بدین ترتیب تمامی u_i ها برابر با ۱ و تمامی l_i ها برابر با صفر خواهند بود، پس واضح است که حد این دو جمع به هم همگرا نمی‌شود و این تابع در این بازه انتگرال پذیر نمی‌باشد.

حال وقت خوبی است تا گذری بر انتگرال‌های نامعین داشته باشیم. تا الان، انتگرال در یک بازه معین را حساب می‌کردیم، حال می‌خواهیم به ادعای «انتگرال برعکس مشتق است» کمی رنگ و روی ریاضیاتی دهیم. قسمت اول **قضیه اساسی حسابان** به ما می‌گوید که اگر تابع f بر بازه $[a,\, b]$ پیوسته باشد، تابعی به صورت

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{۳}$$

موجود است که برای هر $x \in [a,\, b]$ تعریف شده است بر روی $(a,\, b)$ مشتق پذیر است و داریم $F'(x) = f(x)$.
همچنین، قسمت دوم این قضیه به ما می‌گوید که اگر f انتگرال پذیر باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{۴}$$

دقت کنید که ما هیچ گونه شرط یکتا بودن بر روی F قرار ندادیم، در واقع، اگر یک F وجود داشته باشد آنگاه بی‌نهایت تابع وجود دارند که به فرم $F + c,\ c \in \mathbb{R}$ هستند. به عنوان مثال، می‌دانیم که $(\sin x)' = \cos x$. پس

$$f(x) = \cos x,\ F(x) = \sin x + c,\ F'(x) = f(x).$$

تمرین ۲ نشان دهید که اگر تابع انتگرال پذیر و پیوسته f بر روی $[a,\, b]$ تعریف شده باشد و $c \in [a,\, b]$ باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

اثبات اول داریم

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),\\
&\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a),\ \textit{and}\\
&\int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c),
\end{aligned}$$

و داریم

$$F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c).$$

□

تمرین ۳ انتگرال تابع $f(x) = x^n$ را بدست آورید

اثبات دقت کنید که داشتیم $(x^n)' = nx^{n-1}$. حال از این نکته استفاده می‌کنیم و داریم

$$\begin{aligned}
&(x^{n+1})' = (n+1)x^n\\
&\Rightarrow x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}\\
&\Rightarrow F(x) = \int f(x)\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

□

تمرین ۴ انتگرال $f(x) = \sin ax$ را حساب کنید.

تمرین ۵ انتگرال $f(x) = \sin 2x + x^3$ را حساب کنید.