



UNIVERSITÀ DI TRENTO

Dipartimento di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

Corso di Laurea in
Informatica

ELABORATO FINALE

INFLUENTIAL SPREADERS IN MULTILAYER NETWORKS

Supervisore

Montresor Alberto

Laureando

Masina Gabriele

Anno accademico 2019/2020

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il mio relatore, il Prof. Montresor, per avermi seguito in questi mesi accompagnandomi nella realizzazione di questa tesi.

Un ringraziamento speciale va alla mia famiglia, ai miei genitori Roberta e Edoardo e a mia sorella Barbara, che mi hanno sempre supportato durante i miei anni di studi.

Ringrazio infine tutti i miei amici, in particolare Francesco e Giovanni con cui ho condiviso questi anni di università, per tutti i momenti passati insieme.

Indice

Sommario	2
1 Introduzione	3
1.1 Influential spreaders in un grafo	3
1.2 Influential spreaders in una multilayer network	3
2 Definizioni	5
3 Algoritmi utilizzati	7
3.1 Algoritmi applicati al grafo aggregato	7
3.1.1 PageRank (aggPR)	7
3.1.2 k -core (aggCore)	8
3.1.3 Degree Centrality (aggDeg)	8
3.2 Algoritmi applicati ad ogni layer	8
3.2.1 Additive PageRank (addPR)	8
3.2.2 Sum k -core (sumCore)	9
3.3 Algoritmi applicati all'intera struttura multilayer	9
3.3.1 Versatility PageRank (verPR)	9
3.3.2 Versatility Betweenness Centrality (verBC)	9
3.3.3 Multiplex k -core (multiCore)	9
3.3.4 Power Community Index (PCI)	10
4 Dataset	11
4.1 Multiplex network	11
4.1.1 Descrizione dei dataset	11
4.1.2 Estrazione delle multiplex network	12
4.2 Multilayer network	12
4.2.1 Descrizione dei dataset	13
4.2.2 Generazione delle multilayer network	13
5 Risultati sperimentali	16
5.1 Simulazioni	16
5.1.1 Spreading process	16
5.1.2 Probabilità di contagio	16
5.2 Valutazione degli algoritmi	17
5.2.1 Metodo di valutazione	17
5.2.2 Confronto dei risultati	17
Bibliografia	27

Sommario

Diversi sistemi reali possono essere modellati tramite una rete, in cui le entità, o *nodi*, sono legate se tra loro c'è una relazione. Attualmente, nella maggior parte dei casi una rete è rappresentata utilizzando un *grafo*, dove è previsto un unico tipo di collegamento tra le entità. In molti casi, però, le relazioni tra i nodi possono essere di varia natura. Questo tipo di sistema può essere rappresentato utilizzando una *multilayer network*.

Lo scopo di questa tesi è l'individuazione degli *influential spreaders* in una multilayer network, ovvero di quei nodi che, durante un processo di diffusione di un'informazione nella rete, permettono di raggiungere la porzione di rete maggiore. Questi nodi sono particolarmente utili in quanto possono essere sfruttati per massimizzare la diffusione dell'informazione o, al contrario, isolati se si vuole che essa resti il più possibile confinata.

Tali nodi sono facilmente identificabili simulando i processi di diffusione, che però risultano computazionalmente molto costosi; questo metodo non è perciò applicabile a reti molto grandi. Pertanto, l'obiettivo è stato quello di verificare se esiste un modo efficace per individuarli a partire dalla topologia della rete, riducendo così la complessità computazionale e, di conseguenza, il tempo richiesto. Una fase di ricerca iniziale ha permesso di raccogliere, studiare e successivamente implementare diversi algoritmi di centralità già utilizzati per risolvere questo problema, sia in grafi che in multilayer network.

Questi algoritmi sono stati applicati a diversi tipi di reti multilayer: reti multiplex estratte a partire da dataset biologici e sociali e reti multilayer generate casualmente a partire da grafi derivati da applicazioni peer-to-peer.

I valori di centralità dei nodi restituiti da ogni algoritmo sono stati confrontati con quelli reali, ottenuti simulando dei processi di diffusione nelle varie reti. In questo modo è stato possibile assegnare ad ogni algoritmo un punteggio ottenuto su ciascuna rete e individuare così quali algoritmi possono essere utilizzati per trovare gli influential spreaders in una multilayer network. Due degli algoritmi testati hanno ottenuto buone performance su tutte le reti analizzate, mentre le prestazioni degli altri sono state scarse o altalenanti.

1 Introduzione

Una rete è una struttura in cui sono presenti diverse entità connesse tra loro da legami di qualche tipo. Molte realtà possono essere modellate utilizzando una rete: alcuni esempi sono le reti di interazione sociale, in cui le persone sono legate da relazioni di amicizia, di collaborazione o di contatto sui social network, le reti dei trasporti, come quelle ferroviaria e aerea che collegano diverse città, e le reti biologiche, come quella alimentare o quella delle interazioni tra molecole all'interno di un organismo.

Utilizzando questi modelli è particolarmente utile lo studio dei processi di diffusione di un'informazione in una rete per comprendere le dinamiche di diversi scenari. Tra questi, la diffusione di un virus in una società, di una notizia in una rete di contatti, di una fake news in un social network e l'accumulo di un ritardo nelle stazioni di una rete dei trasporti.

In questi processi, inizialmente un *nodo* (così sono chiamate le entità all'interno di una rete) è 'infetto'; in ogni istante un nodo infetto può 'contagiare' con una certa probabilità i nodi con cui è in relazione, rendendoli a loro volta infetti. Di particolare interesse è l'individuazione dei cosiddetti *influential spreaders*, ovvero dei nodi che, se infettati, permettono di contagiare una grossa parte della rete. Tali nodi, infatti, possono essere sfruttati per garantire un'efficace diffusione di un'informazione nella rete o, al contrario, per evitarne la propagazione. Ad esempio, per diffondere una notizia importante in un social network sarà opportuno che questa venga pubblicata da un account molto seguito, mentre per fermare un'epidemia può essere utile isolare i luoghi o le persone che hanno un ruolo più centrale nella società.

1.1 Influential spreaders in un grafo

Generalmente, una rete viene modellata con un *grafo*, ossia una struttura in cui i *nodi* sono connessi da un *arco* se tra loro esiste una relazione.

Il modo più affidabile per l'individuazione degli influential spreaders in un grafo consiste nel simulare un processo di diffusione, detto anche *spreading process*, partendo da ogni nodo e classificare come nodi più influenti quelli da cui si riesce ad infettare la porzione di rete maggiore. Tuttavia, poiché la trasmissione tra un nodo e un suo vicino è probabilistica, occorrerebbe effettuare un gran numero di simulazioni prima di avere una stima accurata dell'influenza di un nodo sulla rete e ciò rende questo metodo computazionalmente molto costoso.

Un problema molto studiato è quello dell'individuazione degli influential spreaders tramite l'analisi della topologia delle rete. Diversi studi mostrano come alcuni algoritmi di centralità possono fornire una buona indicazione di quali sono i nodi più influenti nella diffusione [4][11][14]. Tra questi, alcuni richiedono una conoscenza globale della topologia della rete come *PageRank*, *Betweenness Centrality* e *k-core*, mentre per altri come *Degree Centrality* o μ -*PCI* ogni nodo ha bisogno solo di una conoscenza locale.

1.2 Influential spreaders in una multilayer network

In molti degli scenari reali, tuttavia, i nodi sono potenzialmente collegati da diversi tipi di relazione, che non possono essere rappresentati in un singolo grafo. Tra questi troviamo la rete dei profili online

collegati dalle loro interazioni in diversi social network (follow, amicizie, condivisioni, ecc.) e la rete delle stazioni di una città connesse da tratte di diversi mezzi di trasporto (rete ferroviaria, rete degli autobus, piste ciclabili, ecc.).

Strutture che permettono di rappresentare queste realtà sono dette *multilayer network*, ossia reti in cui sono presenti differenti tipi di relazione tra i nodi. Fornendo un modello più fedele delle reti reali, la loro analisi può dare risultati più accurati rispetto a quelli ottenibili rappresentando la realtà con un grafo.

In questa tesi viene affrontato il problema dell'individuazione degli influential spreaders in una multilayer network, calcolando diverse misure di centralità e confrontando i risultati con quelli ottenuti simulando degli spreading process.

2 Definizioni

Definizione 1 (Multilayer network). Una *multilayer network* è una coppia $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ dove $\mathcal{G} = \{G_i \mid i \in \{1, 2, \dots, L\}\}$ è un insieme di grafi detti *layer* dove un nodo può appartenere ad uno o più layer ed $\mathcal{E} = \{E_{ij} \subseteq V_i \times V_j \mid i, j \in \{1, 2, \dots, L\}, i \neq j\}$ è l'insieme delle *inter-conessioni* tra nodi appartenenti a layer differenti.

Definizione 2. Data una multilayer network $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{E})$ indichiamo con $|V|$ il numero totale di nodi, ossia la cardinalità dell'insieme $V = \bigcup_i V_i$, con N la somma del numero di nodi di ogni layer, ossia $N = \sum_i |V_i|$ e con E il numero totale di archi, $E = \sum_i |E_i| + \sum_{i \neq j} |E_{ij}|$.

Definizione 3 (Multiplex network). Una *multiplex network* è un tipo di multilayer network dove le uniche inter-conessioni ammesse sono tra un nodo e le sue controparti negli altri layer, ossia $E_{ij} \subseteq \{(v, v) \mid v \in V_i \cap V_j\}$

Definizione 4 (Grafo aggregato). Sia $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{E})$ una multilayer network. Il *grafo aggregato* derivato da \mathcal{M} è il grafo $G_{agg} = (V_{agg}, E_{agg})$ dove $V_{agg} = V$ ed $E_{agg} = \left(\bigcup_i E_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \neq j} E_{ij}\right)$

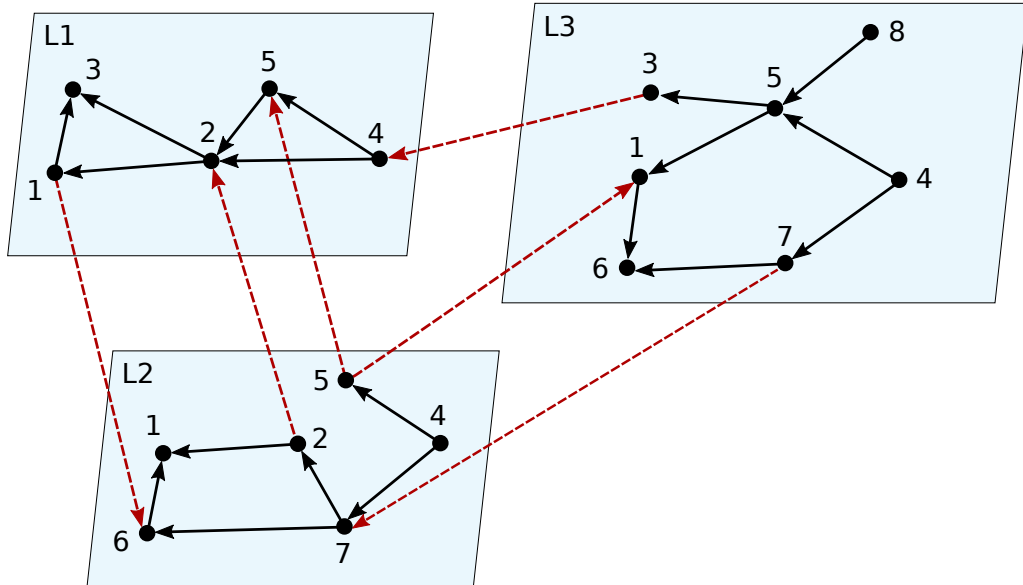


Figura 1: Rappresentazione di una multilayer network con tre layer: L1, L2 e L3. In rosso sono evidenziate le inter-conessioni, ossia gli archi che collegano nodi in layer differenti.

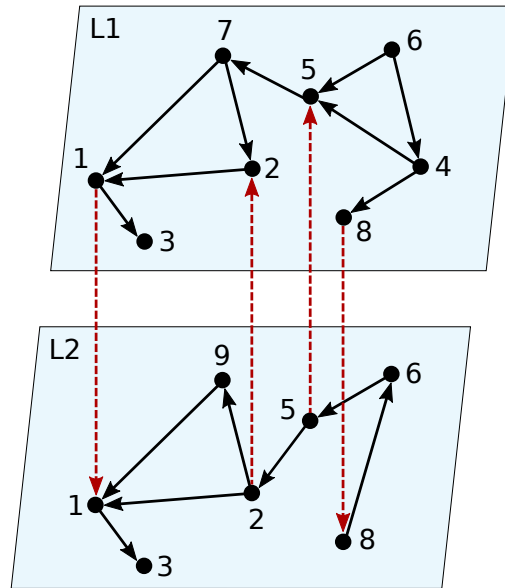


Figura 2: Rappresentazione di una multiplex network con due layer: L1 e L2. In questo tipo di rete le uniche inter-conessioni possibili sono tra un nodo e le sue controparti negli altri layer.

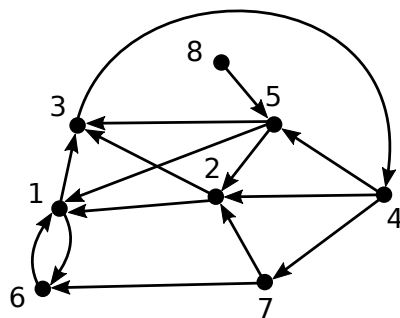


Figura 3: Grafo aggregato derivato dalla multilayer network rappresentata in Figura 1.

3 Algoritmi utilizzati

Dopo una fase di ricerca, sono stati selezionati ed implementati alcuni algoritmi di centralità solitamente usati per l'individuazione degli influential spreaders. Tali algoritmi assegnano ad ogni nodo un valore proporzionale alla sua centralità secondo metriche differenti e quindi all'influenza esercitata da tale nodo sulla rete.

Questi possono essere divisi in tre categorie:

- algoritmi applicati al grafo aggregato;
- algoritmi applicati separatamente ad ogni layer;
- algoritmi applicati all'intera struttura multilayer.

3.1 Algoritmi applicati al grafo aggregato

Diverse misure di centralità sono utilizzate per identificare gli influential spreaders in grafi 'classici', detti anche *monoplex* siccome hanno un solo layer [4][11][14]. Essendo definite per grafi ad un solo layer, sono state applicate al grafo aggregato derivato da ogni multilayer network. Le misure utilizzate sono state *PageRank* [13], *k-core* [5] e *Degree Centrality*.

3.1.1 PageRank (aggPR)

Definizione 5 (PageRank). Dato un grafo $G = (V, E)$, il valore di *PageRank* di un nodo v è definito come

$$PR(v) = \alpha \sum_{w:v \in G.adj(w)} \frac{PR(w)}{G.outdegree(w)} + (1 - \alpha) \frac{1}{|V|}$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$.

Questa misura di centralità fu originariamente definita per misurare l'importanza di una pagina web. Secondo questo criterio, una pagina è tanto più importante quante più pagine importanti hanno un link verso di essa. PageRank può essere visto come un modello di comportamento di un utente che, trovandosi inizialmente in una pagina casuale, continua a visitare i link che trova, ma occasionalmente riparte da un'altra pagina casuale. Analogamente, questo algoritmo può essere utilizzato per misurare più genericamente l'influenza di un nodo in un grafo. Il parametro α , detto *damping factor*, regola la probabilità che si continui la navigazione dei link ed è stato impostato a 0.85.

Questa definizione ricorsiva è stata così calcolata in modo iterativo:

$$PR_0(v) = \frac{1}{n}$$
$$PR_i(v) = \alpha \sum_{w:v \in G.adj(w)} \frac{PR_{i-1}(w)}{G.outdegree(w)} + (1 - \alpha) \frac{1}{|V|}$$

finché $\|PR_i - PR_{i-1}\|_1 < \epsilon$. Secondo Page et al., il numero di iterazioni è proporzionale a $\log |V|$ [13]. Dunque, la complessità dell'algoritmo è $O((|V| + |E|) \log |V|)$.

3.1.2 k -core (aggCore)

Definizione 6 (k -core). Dato un grafo $G = (V, E)$, un k -core di G è un sottografo $G' = (V', E')$ tale che

$$G'.indegree(v) \geq k \quad \forall v \in V'$$

Un nodo appartenente ad un k -core con k elevato è considerato un nodo centrale nella rete, e quindi potenzialmente classificato tra gli influential spreaders. Questa definizione può essere calcolata con complessità $O(|V| + |E|)$ [5].

3.1.3 Degree Centrality (aggDeg)

Questa misura di centralità assegna ad ogni nodo un valore pari al suo *outdegree*, per cui un nodo con tanti vicini si assume possa avere una certa rilevanza in un processo di diffusione. Può essere calcolata con complessità $O(|V|)$.

3.2 Algoritmi applicati ad ogni layer

Alcune delle misure sono state estese alle reti multilayer calcolando la centralità dei nodi in ogni layer separatamente e poi sommando i punteggi ottenuti in ogni layer. In questa categoria rientrano *additive PageRank* [9] e *sum k -core* [3].

3.2.1 Additive PageRank (addPR)

Definizione 7 (additive PageRank). Data una multilayer network $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{E})$ ed un ordinamento dei layer (X_1, \dots, X_L) , l'*additive PageRank* di un nodo $v \in V$ è il valore $addPR(v) = addPR_L(v)$, dove:

$$addPR_1(v) = PR(v) \text{ in } X_1$$

$$addPR_l(v) = \alpha \sum_{w: v \in X_l.adj(w)} \frac{addPR_l(w)}{X_l.outdegree(w)} + (1 - \alpha) \frac{addPR_{l-1}(v)}{|V| \langle addPR_{l-1} \rangle}$$

Questa estensione dell'algoritmo di PageRank alle reti multilayer richiede un ordinamento dei layer. I layer sono stati ordinati in modo decrescente per autovalore di modulo massimo della rispettiva matrice di adiacenza [3], guidati dal fatto che autovalore più grande significa maggiore capacità di diffusione [18]. Infatti, per questa definizione i layer ultimi nell'ordinamento incidono maggiormente nel calcolo del valore finale; inoltre, nei layer con capacità di diffusione molto elevata non è facile riconoscere gli influential spreaders, in quanto si riesce a raggiungere una vasta porzione di rete indipendentemente dal nodo di partenza.

Come algoritmo, è stato utilizzato un approccio analogo a quello della versione classica di PageRank descritto nella Sezione 3.1.1 nella pagina precedente. Poiché è necessario calcolare il PageRank su ogni layer, il costo dell'algoritmo è $O(\sum_i ((|V_i| + |E_i|) \log |V_i|))$, assumendo che i layer siano già ordinati.

3.2.2 Sum k -core (sumCore)

Questa misura è stata ottenuta calcolando il valore di k -core di ogni nodo in ogni layer, quindi sommando i valori ottenuti da un nodo in tutti i layer in cui è presente. Pertanto, la complessità del calcolo è pari a $O(\sum_i (|V_i| + |E_i|))$.

3.3 Algoritmi applicati all'intera struttura multilayer

Diverse misure definite originariamente per grafi monoplex sono state estese a reti multilayer. Queste, al contrario di quelle presentate nelle sezioni precedenti, tengono conto della struttura a più livelli della rete ed in particolare delle inter-conessioni. Quelle implementate sono *versatility PageRank* [8], *versatility Betweenness Centrality* [8][16], *multiplex k -core* [1] e le diverse varianti di *Power Community Index: minimal-layers PCI, layer-agnostic PCI, all-layers PCI, layer-symmetric PCI* [3].

3.3.1 Versatility PageRank (verPR)

Definizione 8 (versatility PageRank). Data una multilayer network $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{E})$, si definisce il valore di *versatility PageRank* di un nodo $v \in V_l$ in un layer l come:

$$verPR(v, l) = \alpha \left(\sum_{w: v \in G_l, adj(w)} \frac{verPR(w, l)}{\mathcal{M}.outdegree(w, l)} + \sum_{j \neq l} \sum_{w: (w, v) \in E_{jl}} \frac{verPR(w, j)}{\mathcal{M}.outdegree(w, j)} \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{N}$$

dove $\mathcal{M}.outdegree(w, l)$ è la somma del numero di archi e di inter-conessioni uscenti da w nel layer l .

La definizione originale utilizzava un tensore 4-dimensionale per rappresentare la rete [8]. Qui è stata generalizzata, anche prevedendo che un nodo possa non comparire in tutti i layer. Questa definizione è stata calcolata in un modo analogo a quello descritto nella Sezione 3.1.1, dunque la complessità è $O((N + E) \log N)$.

3.3.2 Versatility Betweenness Centrality (verBC)

Definizione 9 (versatility Betweenness Centrality). Data una multilayer network $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{E})$, la *versatility Betweenness Centrality* di un nodo v è il valore

$$verBC(v) = \sum_{s, t \in V} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}$$

dove σ_{st} è il numero di percorsi minimi tra il nodo s ed il nodo t indipendentemente dal layer, e $\sigma_{st}(v)$ è il numero di questi che passa per il nodo v in qualche layer.

L'algoritmo descritto da Ribalta et al. permette di calcolare questa definizione con complessità $O(|V| (N + E))$ [16].

3.3.3 Multiplex k -core (multiCore)

Definizione 10 (multiplex k -core). Data una multilayer network $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{E})$, il *multiplex k -core* è il più grande sottografo per cui ogni nodo è raggiunto in ogni layer da almeno k archi o inter-conessioni.

Questa misura è stata calcolata estendendo l'algoritmo descritto da Batagelj e Zaversnik per

calcolare il k -core di un grafo per adattarlo a questa definizione, ottenendo una complessità di $O(N + E)$ [5].

3.3.4 Power Community Index (PCI)

Definizione 11. Data una multilayer network $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{E})$, l'indice $mlPCI_n$ di un nodo v in un layer l è il massimo numero k tale che esistono almeno k vicini di v nel layer l in \mathcal{M} con numero di vicini in almeno n layer maggiore o uguale a k .

Da questa definizione si ricavano le seguenti:

Definizione 12 (minimal-layers PCI). L'indice $mlPCI$ di un nodo v in un layer l è definito come

$$mlPCI(v, l) = \sum_{n=1}^L mlPCI_n(v, l)$$

Definizione 13 (all-layers PCI). L'indice $alPCI$ di un nodo v in un layer l è definito come

$$alPCI(v, l) = mlPCI_L(v, l)$$

Definizione 14 (layer-symmetric PCI). L'indice $lsPCI$ di un nodo v in un layer l è il massimo numero k tale che esistono almeno k vicini di v nel layer l in \mathcal{M} con numero di vicini in almeno k layer maggiore o uguale a k .

Definizione 15 (layer-agnostic PCI). L'indice $laPCI$ di un nodo v in un layer l è il massimo numero k tale che esistono almeno k vicini di v nel layer l in \mathcal{M} con numero di vicini maggiore o uguale a k .

Il calcolo di queste definizioni è stato fatto utilizzando un algoritmo di complessità $O(NLt \log t)$, dove $t = \max \{\mathcal{M}.outdegree(v) \mid v \in V\}$

4 Dataset

Queste misure sono state testate su diverse reti con caratteristiche diverse:

- Multiplex network estratte da dataset biologici e sociali;
- Multilayer network generate a partire da reti di interazioni in Internet.

4.1 Multiplex network

Le reti multiplex utilizzate sono state ottenute a partire da reti multiplex biologiche e sociali, estraendo da ognuna una sottorete in cui ogni nodo ha una controparte in tutti i layer.

4.1.1 Descrizione dei dataset

I dataset di partenza sono indicati in Tabella 1. Di seguito è riportata la descrizione di ognuno [6][7][17]:

Drosophila : multiplex network delle interazioni genetiche e proteiche di *Drosophila Melanogaster*. I layer rappresentano:

1. Direct interaction;
2. Suppressive genetic interaction defined by inequality;
3. Additive genetic interaction defined by inequality;
4. Physical association;
5. Colocalization;
6. Association;
7. Synthetic genetic interaction defined by inequality.

Homo : multiplex network delle interazioni genetiche e proteiche di *Homo Sapiens*. I layer rappresentano:

1. Direct interaction;
2. Physical association;
3. Suppressive genetic interaction defined by inequality;
4. Association;
5. Colocalization;
6. Additive genetic interaction defined by inequality;
7. Synthetic genetic interaction defined by inequality.

MA2013 : multiplex network che rappresenta differenti tipi di relazioni sociali tra utenti di Twitter durante i campionati del mondo di atletica leggera di Mosca 2013. I layer rappresentano:

1. Retweet;
2. Mentions;
3. Replies.

NYCM2014 : multiplex network che rappresenta differenti tipi di relazioni sociali tra utenti di Twitter durante la Marcia per il Clima svoltasi a New York nel 2014. I layer rappresentano:

1. Retweet;
2. Mentions;
3. Replies.

SacchCere : multiplex network delle interazioni genetiche e proteiche di *Saccharomyces Cerevisiae*. I layer rappresentano:

1. Physical association;
2. Suppressive genetic interaction defined by inequality;
3. Direct interaction;
4. Synthetic genetic interaction defined by inequality;
5. Association;
6. Colocalization;
7. Additive genetic interaction defined by inequality.

SacchPomb : multiplex network delle interazioni genetiche e proteiche di *Saccharomyces Pombe*. I layer rappresentano:

1. Direct interaction;
2. Colocalization;
3. Physical association;
4. Suppressive genetic interaction defined by inequality;
5. Synthetic genetic interaction defined by inequality;
6. Additive genetic interaction defined by inequality;
7. Association.

4.1.2 Estrazione delle multiplex network

L'obiettivo era quello di ottenere un dataset simile a quello utilizzato da Basaras et al., dove da ogni rete viene estratta una sottorete in cui ogni nodo è presente in tutti i layer [3]. Nell'articolo sono indicati per ogni rete i numeri N , E ed $|L|$, rispettivamente di nodi, archi e layer estratti.

Per ogni rete, è stato individuato un sottoinsieme L di $|L|$ layers con numero di nodi con una controparte in ogni layer maggiore o uguale a N . Per tutte le reti, è stato trovato un solo sottoinsieme che rispettasse questo criterio.

Dopo aver costruito una sottorete formata solo dai layer in L , sono stati rimossi i nodi non presenti in tutti i layer e gli archi da e verso essi. Dopodiché, sono stati rimossi tutti i nodi da cui non arrivava né partiva più nessun arco. Questa procedura è stata applicata ricorsivamente alla sottorete ottenuta, finché non è stato più possibile rimuovere alcun nodo.

I risultati ottenuti sono stati molto simili a quelli voluti, come si può vedere nella Tabella 1 nella pagina successiva.

In queste reti sono state aggiunte inter-conessioni tra le controparti di ogni nodo in ogni layer.

4.2 Multilayer network

Le reti multilayer sono state generate partendo da grafi ottenuti da diverse applicazioni peer-to-peer, generando poi casualmente delle inter-conessioni tra nodi di layer differenti.

Tabella 1: Dataset di multiplex network originali e sottoreti estratte

Nome	Nodi			Archi			Layers	
	iniziali	obiettivo	estratti	iniziali	obiettivo	estratti	iniziali	estratti
Drosophila	8215	1364	1375	43 366	7267	7438	7	2
Homo	18 222	3859	3878	170 899	77 483	78 804	7	3
MA2013	88 804	4370	4377	210 250	33 411	34 589	3	3
NYCM2014	102 439	4150	4262	353 495	45 334	47 840	3	3
SacchCere	6570	3096	3121	28 275	185 849	188 182	7	5
SacchPomb	4092	875	878	63 676	18 214	18 308	7	3

Tabella 2: Dataset per la generazione di multilayer network

Numero	Nome	Nodi	Archi
1.	wiki-Vote	7115	103 689
2.	cit-HepTh	27 770	352 807
3.	p2p-Gnutella04	10 876	39 994
4.	p2p-Gnutella05	8846	31 839
5.	p2p-Gnutella06	8717	31 525
6.	p2p-Gnutella08	6301	20 777

4.2.1 Descrizione dei dataset

I grafi utilizzati come layer sono indicati in Tabella 2. Di seguito è riportata la descrizione di ognuno [12]:

wiki-Vote : grafo delle votazioni per le elezioni degli amministratori di Wikipedia svoltesi fino al gennaio 2008. I nodi del grafo rappresentano utenti di Wikipedia, di cui la metà circa sono amministratori mentre gli altri sono utenti ordinari, e un arco diretto dal nodo i al nodo j indica che l'utente i ha votato per l'utente j ;

cit-HepTh : grafo delle citazioni tra articoli sul sito arXiv pubblicati tra gennaio 1993 e aprile 2003. Se un paper i cita un paper j , il grafo contiene un arco diretto da i a j . Non è contenuta alcuna informazione riguardo articoli non presenti sul sito;

p2p-Gnutella04, p2p-Gnutella05, p2p-Gnutella06, p2p-Gnutella08 : grafi che rappresentano 'istantanee' della rete di file sharing peer-to-peer Gnutella, nell'agosto 2002. In questi grafi i nodi rappresentano gli host della rete Gnutella e gli archi rappresentano connessioni tra gli host.

4.2.2 Generazione delle multilayer network

Sono stati generati due tipi di reti, seguendo quanto fatto da a Basaras et al. [3]:

- *Similar Layers Network* (SLN), i cui layer sono i grafi [3-6] della Tabella 2. Nelle reti di questo tipo i layer hanno tutti un numero simile di nodi e archi;
- *Different Layers Network* (DLN), i cui layer sono i grafi [1-3] della Tabella 2. Nelle reti di questo tipo i layer hanno numero di nodi e archi molto differenti.

Per prima cosa, sono state aggiunte inter-connessioni tra le controparti di ogni nodo in tutti i layer in cui esso è presente. Quindi, sono state generate casualmente altre inter-connessioni impostando tre parametri:

1. il numero di inter-connessioni uscenti da un nodo in un determinato layer;

2. la frequenza con cui un layer viene scelto come layer di destinazione di una connessione;
3. la frequenza con cui un nodo in un certo layer viene scelto come nodo di destinazione.

Ognuno di questi parametri è stato generato secondo una distribuzione che segue la *legge di Zipf*, per cui la frequenza di un certo valore è inversamente proporzionale al valore stesso [19]. Infatti, in moltissime reti reali, dal Web a reti biologiche e sociali, si è osservato come la distribuzione del numero di archi tra i nodi segua un pattern di questo tipo [2]. Tale distribuzione genera numeri tra 0 ed un valore massimo m (escluso) con diverse probabilità, secondo il valore di una variabile $s \in [0, 1]$ che regola il grado di ‘asimmetria’ dei valori generati, in particolare:

- per $s = 0$ la probabilità \mathcal{P} di ogni valore è la stessa;
- per $s = 1$ si ha $\mathcal{P}(0) = 2 \cdot \mathcal{P}(1) = 3 \cdot \mathcal{P}(2) = \dots = m \cdot \mathcal{P}(m - 1)$.

Le variabili che regolano i tre parametri sono chiamate rispettivamente s_{degree} , s_{layer} , s_{node} . Per ognuna sono stati sperimentati i valori 0.3 e 0.8. Per quanto riguarda il numero di inter-connessioni di un nodo in un determinato layer il valore massimo è stato impostato a $d \cdot \log_2 \sum_i V_i$, con $d = 2$. Per gli altri parametri, invece, tutti i layer devono essere selezionabili così come tutti i nodi all’interno di un layer.

L’Algoritmo 1 a fronte mostra come sono state generate le reti. Nell’algoritmo, gli oggetti della classe ZIPFGENERATOR sono generatori di numeri casuali secondo una distribuzione che segue la legge di Zipf. È stato utilizzato un generatore per ognuno dei tre parametri:

1. *degree_generator* genera numeri tra 0 e $max_interconnectons - 1$ con $s = s_{degree}$ che vengono utilizzati direttamente per definire il numero di *inter-connessioni* uscenti da ogni nodo;
2. *layer_generator* genera numeri tra 0 e $L - 1$, dove L è il numero di layers, con $s = s_{layer}$. Questi numeri vengono utilizzati come indice per scegliere il layer di destinazione all’interno di una permutazione dei layer $perm_l$;
3. *node_generators* è un vettore di generatori in cui l’ i -esimo elemento $node_generators[i]$ genera numeri tra 0 e $|V_i| - 1$, dove $|V_i|$ è il numero di nodi dell’ i -esimo layer, con $s = s_{node}$. Questi numeri vengono utilizzati come indice per scegliere il nodo di destinazione all’interno di una permutazione dei nodi del layer i selezionato, chiamata $perm_n[i]$.

Le reti così generate sono denominate con $SLN_{s_{degree}, s_{layer}, s_{node}}$ oppure $DLN_{s_{degree}, s_{layer}, s_{node}}$.

Algoritmo 1: Generazione multilayer network

```
Input : GRAPH layers[] // grafi usati come layers
        int perm_l[] // posizione di ogni layer nella permutazione
        int perm_n[][] // posizione di un nodo nella permutazione di ogni layer
        int d
        float s_degree
        float s_layer
        float s_node

1 int total_nodes = 0
2 for i = 0 to layers.size() do
3   total_nodes = total_nodes + layers[i].nodes().size()
4 int max_interconnections = d ·  $\lfloor \log_2(\text{total\_nodes}) \rfloor$ 

   // I due parametri della classe ZIPFGENERATOR regolano rispettivamente
   // il massimo della distribuzione e il grado di asimmetria
5 ZIPFGENERATOR degree_generator(max_interconnections, s_degree)
6 ZIPFGENERATOR layer_generator(layers.size(), s_layer)
7 ZIPFGENERATOR node_generators[0...layers.size() - 1]
8 for l = 0 to layers.size() - 1 do
9   node_generators[l] = ZIPFGENERATOR(layers[l].size(), s_degree)

10 MULTILAYERNETWORK m
11 for l = 0 to layers.size() - 1 do
12   foreach n ∈ layers[l] do
13     // intra-connessioni
14     for v ∈ layers[l].adj(n) do
15       m.add_edge(n, l, v, l)
16     // inter-connessioni tra un nodo e le sue controparti negli altri layer
17     for j = 0 to layers.size() - 1 do
18       if j ≠ l and n ∈ layers[j].nodes() then
19         m.add_edge(n, l, n, j)
20     // Generazione inter-connessioni casuali
21     int degree = degree_generator.next()
22     for i = 1 to degree do
23       bool added = False
24       while not added do
25         int l_dest = l_index[layer_generator.next()]
26         while l_dest == l do
27           l_dest = l_index[layer_generator.next()]
28         int n_dest = n_index[l_dest][node_generators[l_dest].next()]
29         if not m.has_edge(n, l, n_dest, l_dest) then
30           added = True
31           m.add_edge(n, l, n_dest, l_dest)
```

5 Risultati sperimentali

Per valutare se un algoritmo possa essere utilizzato per riconoscere gli influential spreaders, sono stati confrontati i valori di centralità che assegna ai vari nodi con la frazione di rete infettata da essi simulando un processo di diffusione.

5.1 Simulazioni

Per ogni rete è stato simulato uno *spreading process*, ossia un processo di diffusione, per capire l'influenza di ogni nodo sulla rete. Poiché il contagio tra un nodo infetto e i propri vicini avviene in modo probabilistico, per ottenere un risultato adeguatamente accurato è stata fatta una media di 100 simulazioni per ogni rete.

5.1.1 Spreading process

Lo spreading process utilizzato segue il modello *SIR*, in cui un nodo in un certo layer può essere in uno dei seguenti tre stati:

- *Susceptible* (S): vulnerabile ad essere infettato;
- *Infectious* (I): infetto. Un nodo in questo stato può contagiare i propri vicini nello stato S con una certa probabilità;
- *Recovered* (R): guarito. Una volta in questo stato, un nodo non può più essere infettato.

Per misurare l'influenza di un nodo v sulla rete, inizialmente tutti i nodi si trovano nello stato S , eccetto le controparti del nodo v nei layer in cui è presente, che si trovano nello stato I . Ad ogni istante un nodo nello stato I può infettare con una certa probabilità ognuno dei suoi vicini nello stato S , ovvero i nodi verso cui ha un arco o una intra-connessione. Una volta utilizzata la possibilità di contagiare ogni vicino, il nodo passa allo stato R . Il processo termina quando nessun nodo si trova nello stato I . La porzione di rete infettata dal nodo v corrisponde al numero di nodi che al termine del processo si trovano nello stato R .

5.1.2 Probabilità di contagio

Un valore da impostare in uno spreading process è la probabilità λ che un nodo nello stato I ha di contagiare i propri vicini nello stato S , detta *epidemic probability*. La scelta del valore di λ è molto importante per riconoscere gli influential spreaders, in quanto con un valore troppo alto si osserverebbe la diffusione del contagio in tutta la rete indipendentemente dal nodo inizialmente infetto, mentre con un valore troppo basso l'epidemia non riuscirebbe ad espandersi nemmeno dai nodi più influenti.

In un grafo monoplex G il valore di *critical epidemic point*

$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$$

dove k è l'*outdegree* di un nodo, rappresenta un'approssimazione della soglia per cui, indipendentemente dal nodo da cui parte l'epidemia, se $\lambda > \lambda_c$ essa riesce a diffondersi in gran parte della rete,

mentre se $\lambda < \lambda_c$ essa rimane confinata in una piccola parte della rete [15].

Seguendo quanto fatto da Basaras et al., la *epidemic probability* λ_{ii} da un nodo nel layer i ad uno dello stesso layer è stata impostata al critical epidemic point del layer G_i , mentre λ_{ij} tra nodi in layer diversi è stata impostata al critical epidemic point del grafo aggregato [3].

Questi valori rispecchiano l'intuizione secondo cui il contagio si trasmette più facilmente tra nodi nello stesso layer. Questo succede per esempio nel caso dei social network, in cui diverse piattaforme tendono a mostrare in maniera minore contenuti con collegamenti a piattaforme concorrenti, e nel caso dei ritardi accumulati da una stazione in una rete dei trasporti, che possono trasmettersi facilmente alle stazioni vicine nella stessa rete (ad esempio la rete ferroviaria), ma anche, indirettamente e presumibilmente in maniera minore, a stazioni di reti dei trasporti differenti (ad esempio la rete degli autobus).

5.2 Valutazione degli algoritmi

I risultati delle simulazioni sono stati confrontati con i punteggi di centralità assegnati da ogni algoritmo. In questo modo è stato possibile identificare quali algoritmi possono essere utilizzati per riconoscere influential spreaders.

5.2.1 Metodo di valutazione

Per ogni rete è stato osservato il numero di nodi infettati da ogni nodo durante le simulazioni, ottenendo così un vettore s di $|V|$ elementi, dove s_i rappresenta il numero di nodi infettati in media in uno spreading process in cui i nodi inizialmente infetti sono le controparti del nodo i nei layer in cui esso è presente.

È stato poi calcolato per ogni algoritmo un vettore a dove a_i è il punteggio assegnato dall'algoritmo al nodo i . Per assegnare ad ogni algoritmo un valore che ne rispecchi la capacità di riconoscere gli influential spreaders sono stati confrontati i vettori s e a utilizzando il coefficiente *Kendall's* τ [10], così definito:

$$\tau = \frac{n_c - n_d}{n(n-1)} \quad (5.1)$$

dove:

- n è il numero di elementi dei due vettori, ossia il numero di nodi $|V|$;
- n_c è il numero di coppie concordanti nei due vettori. Una coppia di elementi indici i, j si dice concordante se $a_i > a_j$ e $s_i > s_j$ oppure se $a_i < a_j$ e $s_i < s_j$;
- n_d è il numero di coppie discordanti nei due vettori. Una coppia di elementi indici i, j si dice discordante se $a_i > a_j$ e $s_i < s_j$ oppure se $a_i < a_j$ e $s_i > s_j$;

Se $a_i = a_j$ oppure $s_i = s_j$, la coppia i, j non viene contata.

Il risultato della formula è compreso tra -1.0 e 1.0 .

5.2.2 Confronto dei risultati

Sono state osservate le prestazioni dei vari algoritmi impostando la epidemic probability al critical epidemic point. È stato così possibile decidere quali algoritmi sono adatti all'individuazione degli influential spreaders. In seguito si è osservato l'andamento delle prestazioni dei diversi algoritmi al

variare della probabilità di contagio.

Risultati al critical epidemic point

Inizialmente è stata impostata la epidemic probability al critical epidemic point come descritto nella Sezione 5.1.2 a pagina 16. Le Tabelle 3, 4 e 5 mostrano i punteggi ottenuti da ogni algoritmo nelle reti DLN, SLN e multiplex rispettivamente. In ogni tabella sono evidenziati per ogni rete i punteggi ottenuti dai tre algoritmi migliori.

Si può notare che mlPCI e laPCI sono i due algoritmi che ottengono punteggi buoni su tutte le reti utilizzate, e possono quindi essere considerati un metodo efficace per identificare gli influential spreaders. Altri algoritmi come alPCI e aggDeg, sebbene ottengano ottimi risultati su particolari tipi di rete, ottengono scarsi risultati sugli altri; non sono pertanto da considerare affidabili per l'individuazione degli influential spreaders.

Tabella 3: Kendall's τ di diversi algoritmi in reti DLN

	DLN _{0.3, 0.3, 0.3}	DLN _{0.3, 0.3, 0.8}	DLN _{0.3, 0.8, 0.3}	DLN _{0.3, 0.8, 0.8}	DLN _{0.8, 0.3, 0.3}	DLN _{0.8, 0.3, 0.8}	DLN _{0.8, 0.8, 0.3}	DLN _{0.8, 0.8, 0.8}
addPR	0.4885	0.4844	0.4888	0.4860	0.4872	0.4874	0.4853	0.4848
aggCore	0.5575	0.5376	0.5552	0.5379	0.5596	0.5391	0.5578	0.5416
aggDeg	0.6620	0.6402	0.6607	0.6401	0.6274	0.6201	0.6297	0.6179
aggPR	0.5316	0.4958	0.5296	0.4972	0.5214	0.4879	0.5195	0.4869
alPCI	0.6945	0.7036	0.7043	0.7109	0.6565	0.6694	0.6776	0.6800
laPCI	0.7145	0.7157	0.7113	0.7158	0.6759	0.6910	0.6783	0.6868
lsPCI	0.6313	0.6285	0.6354	0.6335	0.6840	0.6848	0.6879	0.6895
mlPCI	0.7344	0.7406	0.7305	0.7427	0.6980	0.7114	0.7027	0.7095
multiCore	0.3551	0.3574	0.3554	0.3576	0.3551	0.3549	0.3553	0.3550
sumCore	0.5225	0.5350	0.5259	0.5346	0.5279	0.5350	0.5259	0.5334
verBC	0.6586	0.5605	0.6610	0.5639	0.6275	0.5404	0.6309	0.5441
verPR	0.5275	0.5141	0.5261	0.5136	0.5195	0.5078	0.5162	0.5064

Tabella 4: Kendall's τ di diversi algoritmi in reti SLN

	SLN _{0.3, 0.3, 0.3}	SLN _{0.3, 0.3, 0.8}	SLN _{0.3, 0.8, 0.3}	SLN _{0.3, 0.8, 0.8}	SLN _{0.8, 0.3, 0.3}	SLN _{0.8, 0.3, 0.8}	SLN _{0.8, 0.8, 0.3}	SLN _{0.8, 0.8, 0.8}
addPR	0.4225	0.4293	0.4216	0.4295	0.4198	0.4309	0.4178	0.4287
aggCore	0.4066	0.3684	0.4158	0.3731	0.4010	0.3795	0.4117	0.3841
aggDeg	0.6073	0.5520	0.6009	0.5460	0.6147	0.5490	0.6134	0.5412
aggPR	0.4275	0.3619	0.4313	0.3695	0.4229	0.3713	0.4294	0.3779
alPCI	0.6550	0.6152	0.6379	0.5971	0.6675	0.6300	0.6555	0.6203
laPCI	0.6243	0.5761	0.6195	0.5687	0.6685	0.6208	0.6662	0.6092
lsPCI	0.5901	0.5681	0.5728	0.5479	0.5962	0.5678	0.5897	0.5584
mlPCI	0.6265	0.5810	0.6222	0.5771	0.6660	0.6169	0.6627	0.6057
multiCore	0.3481	0.3560	0.3498	0.3576	0.3506	0.3535	0.3472	0.3513
sumCore	0.4209	0.4288	0.4211	0.4273	0.4164	0.4291	0.4171	0.4267
verBC	0.5589	0.4528	0.5480	0.4506	0.5868	0.4842	0.5739	0.4796
verPR	0.3650	0.3479	0.3697	0.3579	0.3200	0.3297	0.3317	0.3374

Algoritmi applicati alla rete trasposta Le diverse versioni degli algoritmi di PageRank e k -core sono state applicate anche alla rete trasposta.

Tabella 5: Kendall's τ di diversi algoritmi in reti multiplex

	Drosophila	Homo	MA2013	NYCM2014	SacchCere	SacchPomb
addPR	0.0398	0.3424	0.0059	-0.1313	0.3300	0.3410
aggCore	0.0646	0.4132	0.0572	-0.0453	0.4384	0.1046
aggDeg	0.7355	0.7096	0.5711	0.6150	0.6886	0.7656
aggPR	0.0417	0.3857	0.0164	-0.0771	0.3944	0.2562
alPCI	0.3682	0.1588	0.0493	0.1124	0.0455	0.4502
laPCI	0.6040	0.6859	0.5534	0.6178	0.6980	0.6853
lsPCI	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
mlPCI	0.6947	0.7191	0.5532	0.6028	0.7073	0.7729
multiCore	0.0497	0.1962	0.0428	0.0230	0.1925	-0.0170
sumCore	0.0658	0.4575	0.0616	-0.0487	0.4546	0.1000
verBC	0.5243	0.5653	0.1726	0.2045	0.5666	0.6550
verPR	-0.3505	-0.0606	-0.2707	-0.4107	0.0004	-0.4201

Nel caso di PageRank, se nella definizione originale un nodo è tanto più importante quanto più importanti sono i nodi che hanno un arco verso di esso, applicando l'algoritmo alla rete trasposta si ottiene una definizione per cui un nodo è tanto più importante quanto più importanti sono i nodi verso cui ha un arco.

Per quanto riguarda k -core, invece, nella definizione originale un k -core di un grafo è un sottografo massimale in cui ogni nodo ha almeno k archi entranti; applicando l'algoritmo al grafo trasposto si ottiene una definizione analoga, in cui invece degli archi entranti si considerano gli archi uscenti.

Per entrambi gli algoritmi si è pensato che le definizioni di centralità ottenute applicando l'algoritmo alla rete trasposta potessero individuare meglio gli influential spreaders. Le prestazioni di questi algoritmi, indicati con l'indice T , sono mostrate nelle Tabelle 6, 7 e 8. In generale, si può osservare come, nella maggior parte dei casi, questi ottengano risultati migliori se confrontati con la rispettiva versione applicata alla rete originale.

 Tabella 6: Kendall's τ di algoritmi applicati alla rete trasposta in reti DLN

	DLN _{0.3,} 0.3, 0.3	DLN _{0.3,} 0.3, 0.8	DLN _{0.3,} 0.8, 0.3	DLN _{0.3,} 0.8, 0.8	DLN _{0.8,} 0.3, 0.3	DLN _{0.8,} 0.3, 0.8	DLN _{0.8,} 0.8, 0.3	DLN _{0.8,} 0.8, 0.8
addPR ^T	0.3649	0.4137	0.3601	0.4134	0.3744	0.4136	0.3755	0.4110
aggCore ^T	0.6063	0.5604	0.5946	0.5740	0.5718	0.5698	0.5823	0.5809
aggPR ^T	0.6161	0.5469	0.6115	0.5461	0.5484	0.4965	0.5496	0.4930
multiCore ^T	0.3646	0.3635	0.3647	0.3632	0.3648	0.3633	0.3649	0.3644
sumCore ^T	0.4377	0.4813	0.4340	0.4824	0.4468	0.4816	0.4474	0.4804
verPR ^T	0.6985	0.6547	0.6934	0.6535	0.6645	0.6554	0.6647	0.6364

 Tabella 7: Kendall's τ di algoritmi applicati alla rete trasposta in reti SLN

	SLN _{0.3,} 0.3, 0.3	SLN _{0.3,} 0.3, 0.8	SLN _{0.3,} 0.8, 0.3	SLN _{0.3,} 0.8, 0.8	SLN _{0.8,} 0.3, 0.3	SLN _{0.8,} 0.3, 0.8	SLN _{0.8,} 0.8, 0.3	SLN _{0.8,} 0.8, 0.8
addPR ^T	0.4674	0.4831	0.4714	0.4829	0.4675	0.4824	0.4676	0.4849
aggCore ^T	0.4608	0.4225	0.4601	0.4300	0.5110	0.4362	0.4811	0.4663
aggPR ^T	0.5900	0.5700	0.5822	0.5625	0.5814	0.5413	0.5815	0.5362
multiCore ^T	0.4138	0.3830	0.4135	0.4085	0.4137	0.4084	0.4139	0.4068
sumCore ^T	0.6339	0.6559	0.6382	0.6565	0.6296	0.6545	0.6316	0.6566
verPR ^T	0.6210	0.6245	0.6252	0.6251	0.6323	0.6240	0.6386	0.6207

Tabella 8: Kendall's τ di algoritmi applicati alla rete trasposta in reti multiplex

	Drosophila	Homo	MA2013	NYCM2014	SacchCere	SacchPomb
addPR ^T	0.6497	0.5770	0.3193	0.4235	0.5356	0.6701
aggCore ^T	0.5686	0.7138	0.4756	0.5475	0.7073	0.7640
aggPR ^T	0.6441	0.7033	0.3156	0.4263	0.7202	0.7435
multiCore ^T	0.0763	0.2165	0.1491	0.0127	0.2569	0.2110
sumCore ^T	0.4377	0.6689	0.4791	0.5380	0.6899	0.7464
verPR ^T	0.5280	0.5797	0.2286	0.3878	0.6370	0.6799

Variazione della epidemic probability

I grafici nelle Figure 4, 5 e 6 mostrano le performance dei migliori cinque algoritmi al variare della epidemic probability tra nodi dello stesso layer λ_{ii} rispettivamente nelle reti SLN, DLN e multiplex, mentre nelle Figure 7, 8 e 9 il parametro che varia è λ_{ij} , ossia la probabilità di contagio tra nodi in layer differenti. Ogni parametro è stato moltiplicato per un fattore $k = \frac{\lambda}{\lambda_c}$ dove λ_c è il valore del relativo critical epidemic point. Sono stati testati valori di k pari a 1.2, 1.4 e 1.6.

Si può osservare come al variare di λ_{ii} si ottengano variazioni di punteggio piuttosto consistenti, in particolare nelle reti SLN, mentre variando λ_{ij} i punteggi sono abbastanza regolari. In generale, anche aumentando la epidemic probability, non si osservano grandi cambiamenti nella classifica degli algoritmi migliori. Nella quasi totalità dei casi, le prime tre posizioni risultano occupate dagli stessi algoritmi, anche se talvolta permutati. Ciò conferma ulteriormente la bontà degli algoritmi individuati.

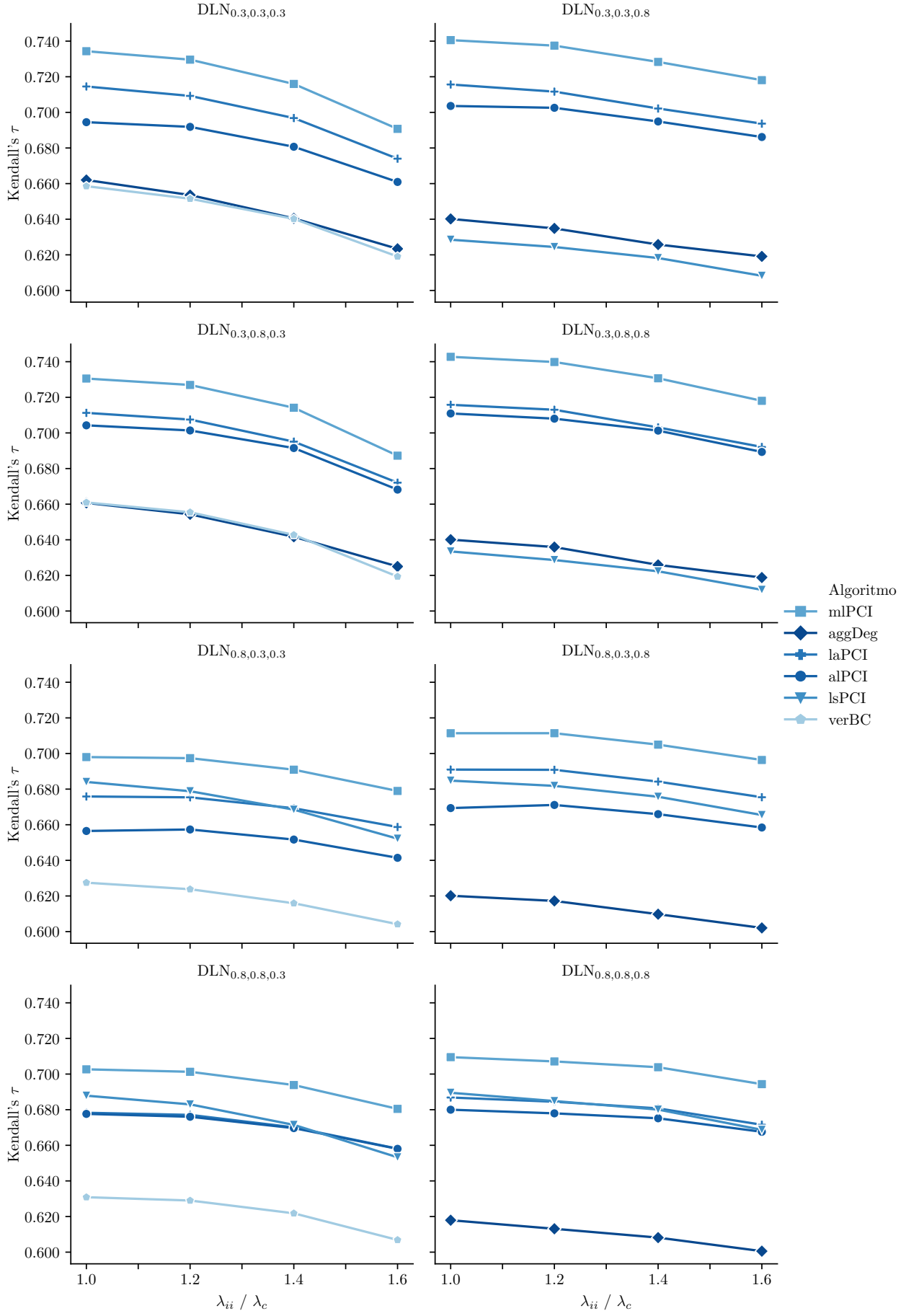


Figura 4: Punteggi ottenuti dai migliori cinque algoritmi su reti DLN al variare di λ_{ii}

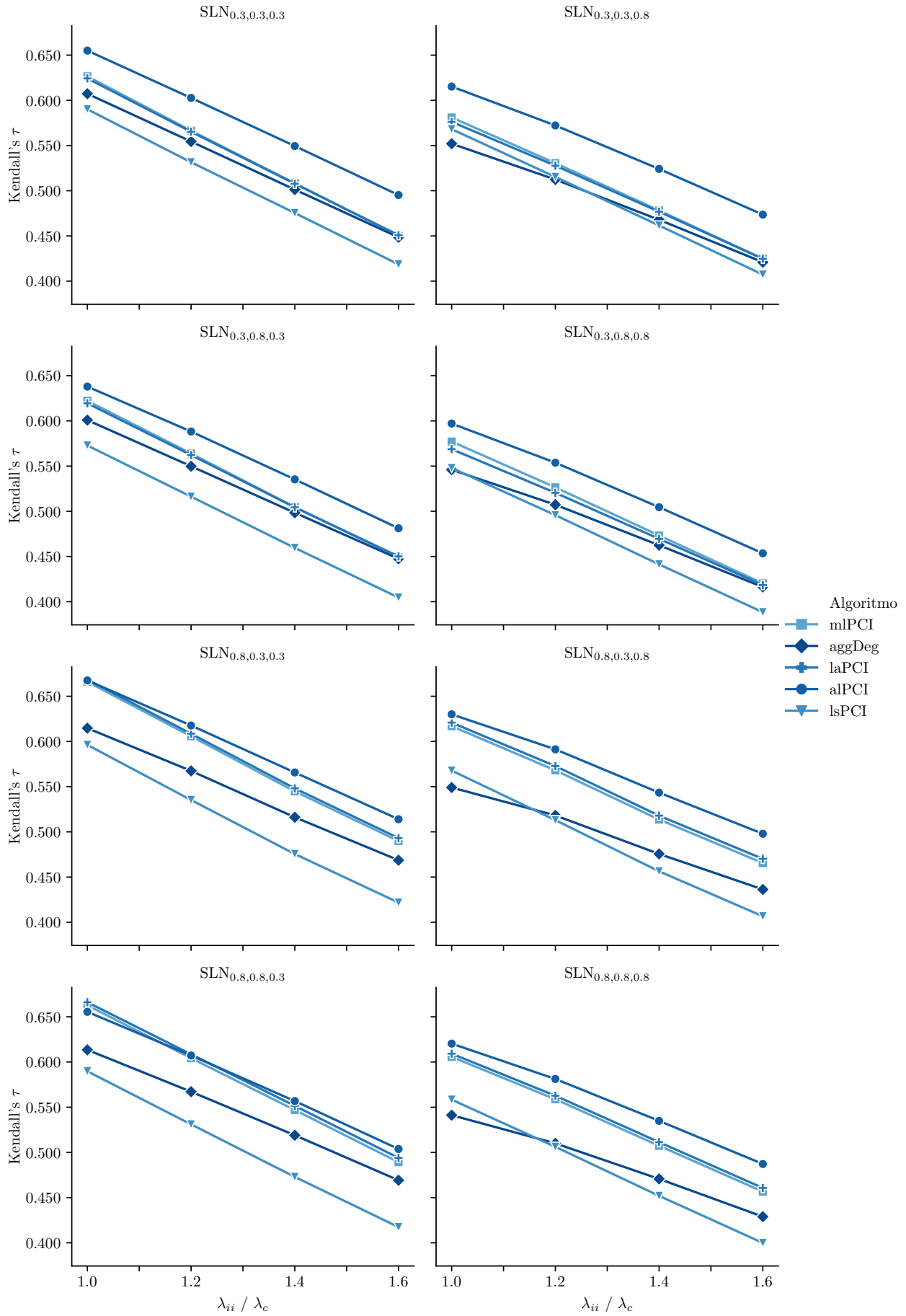


Figura 5: Punteggi ottenuti dai migliori cinque algoritmi su reti SLN al variare di λ_{ii}

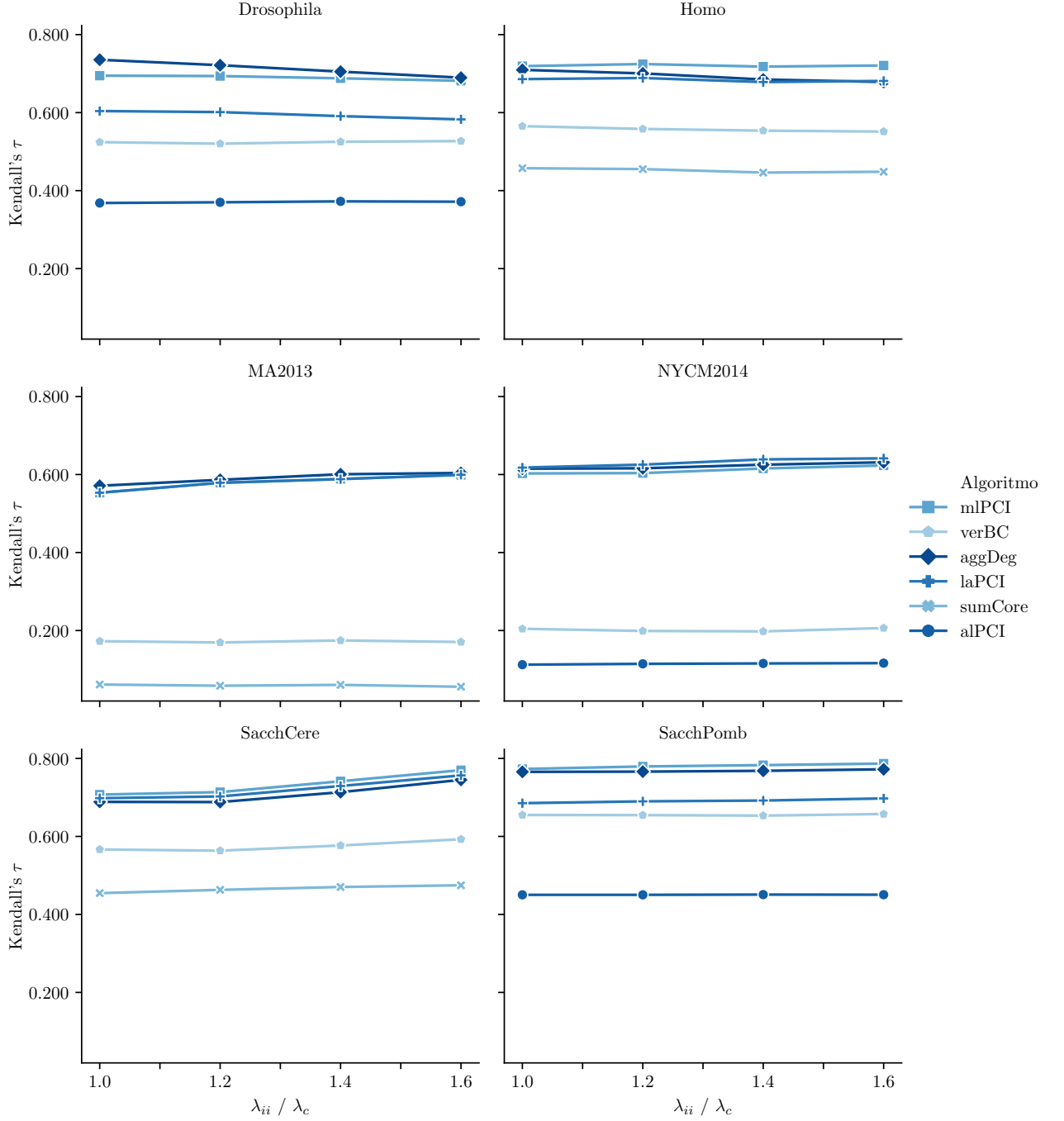


Figura 6: Punteggi ottenuti dai migliori cinque algoritmi su reti multiplex al variare di λ_{ii}

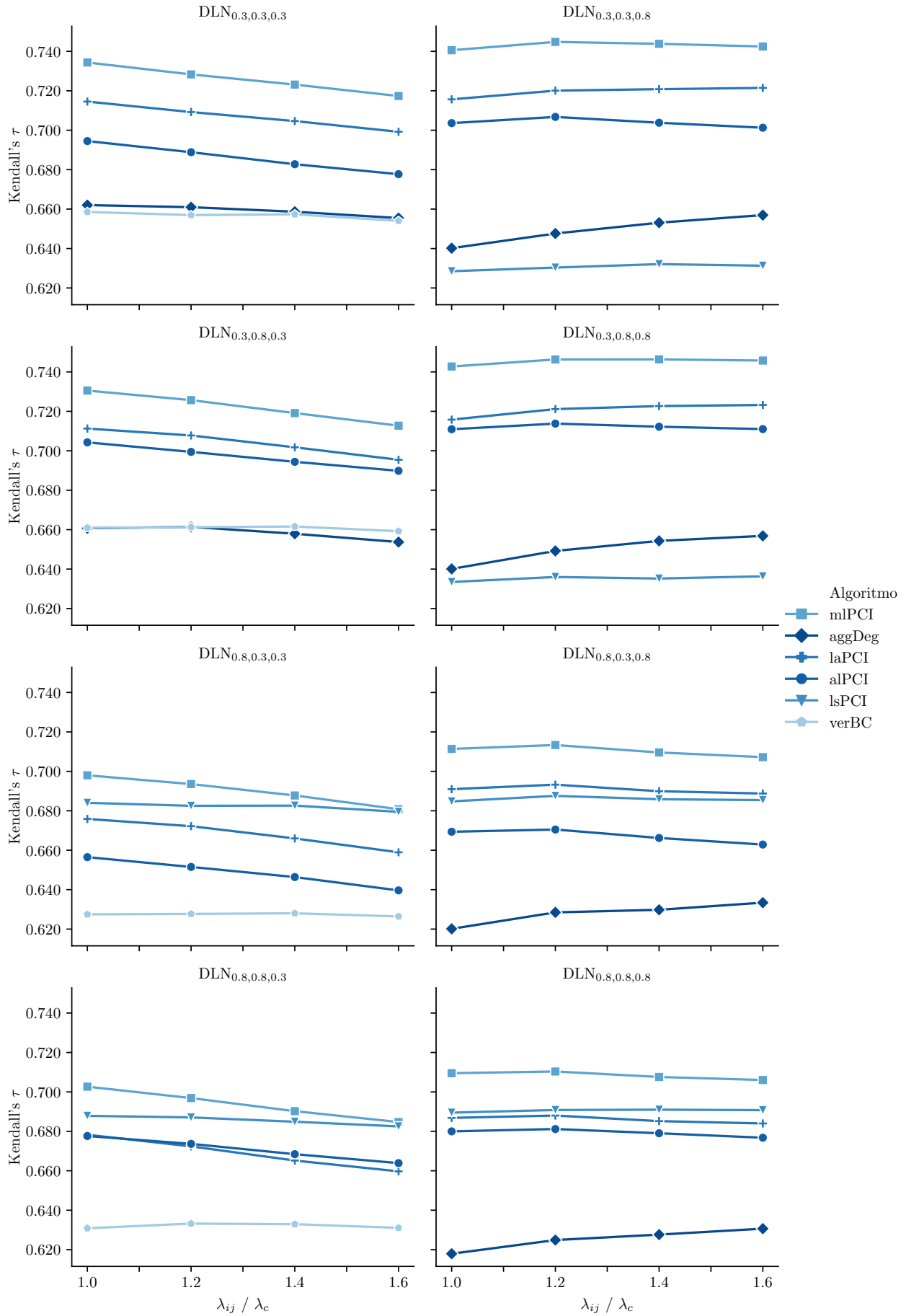


Figura 7: Punteggi ottenuti dai migliori cinque algoritmi su reti DLN al variare di λ_{ij}

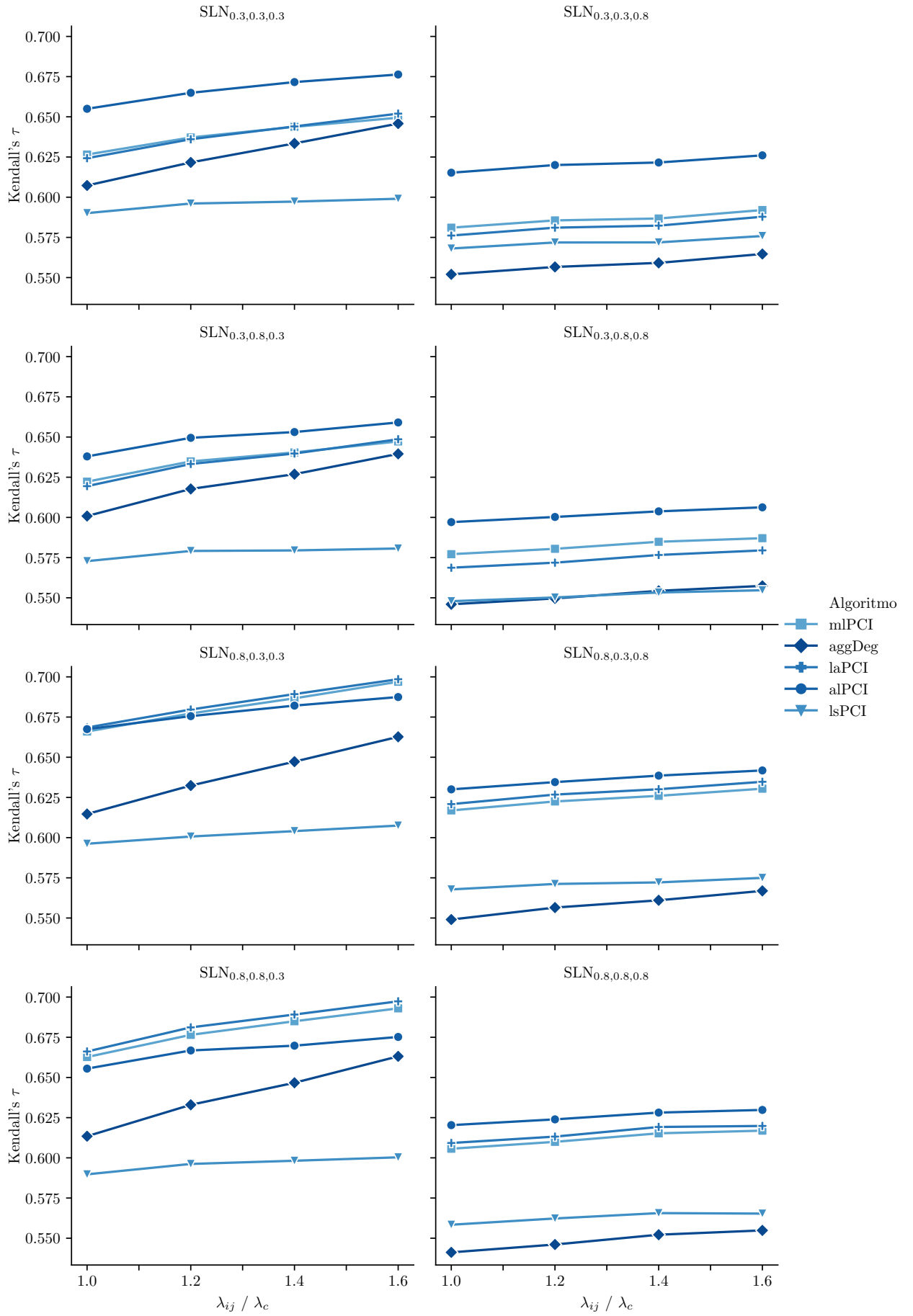


Figura 8: Punteggi ottenuti dai migliori cinque algoritmi su reti SLN al variare di λ_{ij}

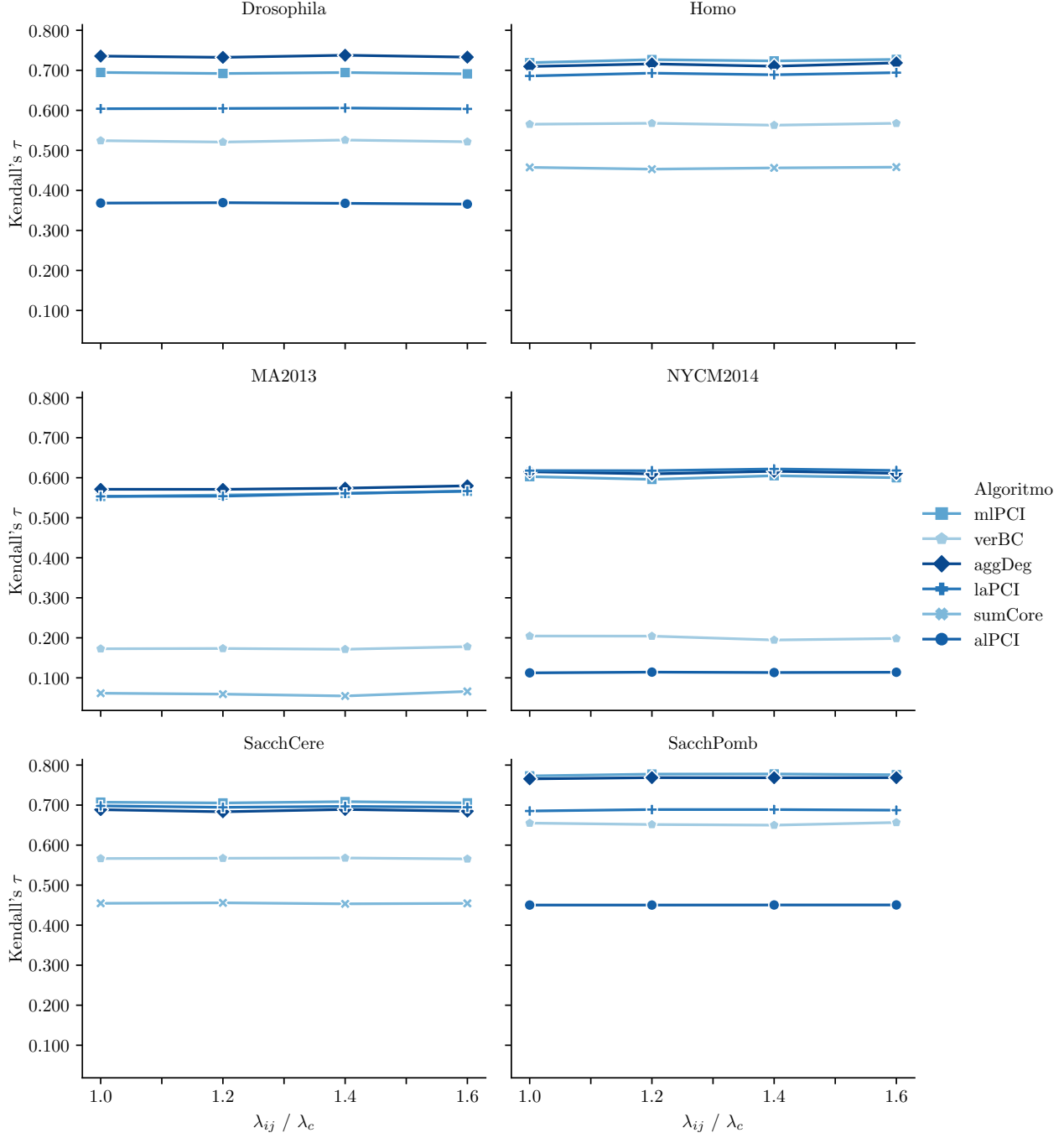


Figura 9: Punteggi ottenuti dai migliori cinque algoritmi su reti multiplex al variare di λ_{ij}

Bibliografia

- [1] N. Azimi-Tafreshi, J. Gómez-Gardeñes, and S. N. Dorogovtsev. k -core percolation on multiplex networks. *Phys. Rev. E*, 90:032816, Sep 2014.
- [2] Albert-László Barabási and Eric Bonabeau. Scale-free networks. *Scientific american*, 288(5):60–69, 2003.
- [3] P. Basaras, G. Iosifidis, D. Katsaros, and L. Tassiulas. Identifying influential spreaders in complex multilayer networks: A centrality perspective. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 6(1):31–45, Jan 2019.
- [4] P. Basaras, D. Katsaros, and L. Tassiulas. Detecting influential spreaders in complex, dynamic networks. *Computer*, 46(4):24–29, April 2013.
- [5] Vladimir Batagelj and Matjaz Zaversnik. An $o(m)$ algorithm for cores decomposition of networks. *CoRR*, cs.DS/0310049, 2003.
- [6] Manlio De Domenico. CoMuNe lab, Fondazione Bruno Kessler: Datasets Released for Reproducibility. <https://comunelab.fbk.eu/data.php>. [accessed: 04/07/2020].
- [7] Manlio De Domenico, Vincenzo Nicosia, Alexandre Arenas, and Vito Latora. Structural reducibility of multilayer networks. *Nature Communications*, 6(1):6864, 2015.
- [8] Manlio De Domenico, Albert Solé-Ribalta, Elisa Omodei, Sergio Gómez, and Alex Arenas. Ranking in interconnected multilayer networks reveals versatile nodes. *Nature Communications*, 6(1):6868, Apr 2015.
- [9] Arda Halu, Raúl J. Mondragón, Pietro Panzarasa, and Ginestra Bianconi. Multiplex pagerank. *PloS one*, 8(10):e78293–e78293, Oct 2013.
- [10] M. G. Kendall. A new measure of rank correlation. *Biometrika*, 30(1-2):81–93, 06 1938.
- [11] Maksim Kitsak, Lazaros K. Gallos, Shlomo Havlin, Fredrik Liljeros, Lev Muchnik, H. Eugene Stanley, and Hernán A. Makse. Identification of influential spreaders in complex networks. *Nature Physics*, 6(11):888–893, Nov 2010.
- [12] Jure Leskovec and Andrej Krevl. SNAP Datasets: Stanford large network dataset collection. <http://snap.stanford.edu/data>, June 2014. [accessed: 04/07/2020].
- [13] Lawrence Page, Sergey Brin, Rajeev Motwani, and Terry Winograd. The pagerank citation ranking: Bringing order to the web. Technical Report 1999-66, Stanford InfoLab, November 1999.
- [14] Sen Pei, Lev Muchnik, José S. Andrade Jr., Zhiming Zheng, and Hernán A. Makse. Searching for superspreaders of information in real-world social media. *Scientific Reports*, 4(1):5547, Jul 2014.
- [15] Anna Saumell-Mendiola, M. Ángeles Serrano, and Marián Boguñá. Epidemic spreading on interconnected networks. *Phys. Rev. E*, 86:026106, Aug 2012.

- [16] Albert Solé-Ribalta, Manlio De Domenico, Sergio Gómez, and Alex Arenas. Centrality rankings in multiplex networks. In *Proceedings of the 2014 ACM Conference on Web Science*, WebSci '14, page 149–155, New York, NY, USA, 2014. Association for Computing Machinery.
- [17] Chris Stark, Bobby-Joe Breitkreutz, Teresa Reguly, Lorrie Boucher, Ashton Breitkreutz, and Mike Tyers. Biogrid: a general repository for interaction datasets. *Nucleic acids research*, 34:D535–D539, Jan 2006. 34 (1).
- [18] Yang Wang, D. Chakrabarti, Chenxi Wang, and C. Faloutsos. Epidemic spreading in real networks: an eigenvalue viewpoint. In *22nd International Symposium on Reliable Distributed Systems, 2003. Proceedings.*, pages 25–34, Oct 2003.
- [19] George Kingsley Zipf. *Human behavior and the principle of least effort*. Human behavior and the principle of least effort. Addison-Wesley Press, Oxford, England, 1949.