Grafi

Palestra di algoritmi

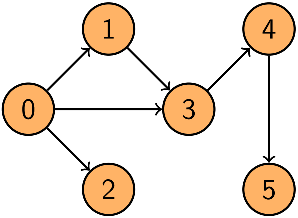
2020-2021

Cos'è un grafo

Definizione

Un *grafo* G è una coppia (V, E) dove:

- V è un insieme di *nodi*
- E è un insieme di *archi* che collegano coppie di nodi.



Nota

I nodi possono rappresentare 'qualsiasi cosa'. Per semplicità (anche nell'implementazione) li identifichiamo con dei numeri.

Cosa rappresentano

Perchè si studiano

Moltissimi problemi possono essere visti come problemi su grafi. Anche se i problemi hanno forma astratta, le loro applicazioni si trovano poi negli ambiti più disparati.

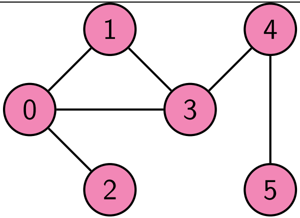
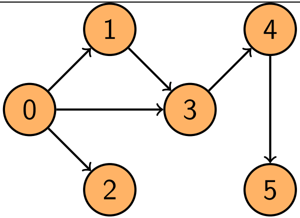
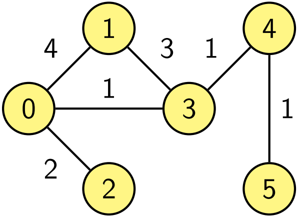
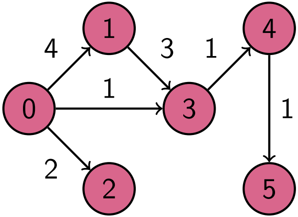
Esempi

Tantissimi utilizzi 'pratici':

- **Mappe**: luoghi collegati da strade
- **Social networks**: utenti collegati da follow/amicizie
- **Grafi delle dipendenze**: un'attività deve essere svolta prima di un'altra

In generale, qualsiasi modello dove sono presenti *entità* collegate da qualche tipo di *relazione*. Trovano applicazioni in informatica, intelligenza artificiale, fisica, biologia, linguistica, ...

Tipi di grafo

	Non orientato	**Orientato**
Non pesato		
Pesato		

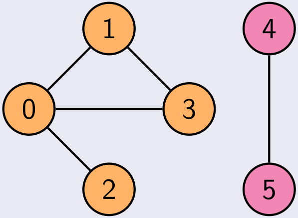
Note e definizioni

Grafi (non) orientati

Un grafo non orientato è un caso particolare di grafo orientato: un arco bidirezionale può essere visto come una coppia di archi monodirezionali. Tuttavia, in alcuni problemi sono più facili da trattare.

Grafi non connessi e componenti connesse

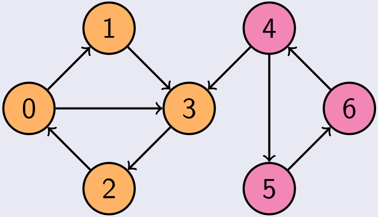
Un grafo può non essere connesso.
In un *grafo non orientato*, un sottografo in cui ogni nodo è raggiungibile da ogni altro è detto *componente connessa*.



Note e definizioni

Componenti fortemente connesse

In un *grafo orientato*, un sottografo in cui ogni nodo è raggiungibile da ogni altro è detto *componente fortemente connessa*.



Problemi tipici

Problemi in grafi non pesati

- Ricerca del cammino più breve (misurato in numero di archi)
- Componenti (fortemente) connesse
- Ordinamento topologico
- ...

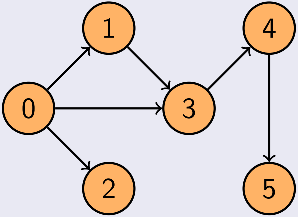
Problemi in grafi pesati

- Cammini di peso minimo
- ...

Memorizzare un grafo in C++

Liste di adiacenza

Nella maggior parte dei casi il modo più 'comodo' di memorizzare un grafo è tramite liste di adiacenza: per ogni nodo del grafo memorizziamo la lista di nodi adiacenti.



0	→ 1 2
1	→ 3
2	
3	→ 4
4	→ 5
5	

```
vector<vector<int>> g(6);
g[0].push_back(1);
g[0].push_back(2);
g[1].push_back(3);
g[3].push_back(4);
g[4].push_back(5);
```

Memorizzare un grafo in C++

```
vector<vector<int>> g(6);
// stampo i vicini del nodo 0
for (int v : g[0]) cout << v << endl;
```

Grafi non orientati

Per i grafi orientati devo aggiungere gli archi in entrambe le direzioni.

Grafi pesati

Nell'arco devo memorizzare anche il peso:

```
struct Edge{int v, weight};
vector<vector<Edge>> g;
g[x].push_back({v, w}); // aggiungo gli archi...
for (Edge &e : g[x]){ // visito i vicini del nodo x
    cout << "Edge from " << x << " to "
        << e.v << ", weight: " << e.weight;
}
```

Visitare un grafo

Tipi di visita

La maggior parte degli algoritmi sui grafi richiedono di effettuare una o più visite del grafo.

Esistono due 'strategie' principali per visitare i grafi:

DFS (Depth-First-Search) : visita del grafo 'in profondità'

BFS (Breadth-First-Search) : visita del grafo 'in ampiezza'

DFS

Idea

Visita ricorsiva: per ogni nodo adiacente, si visita ricorsivamente tale nodo, visitando ricorsivamenti i suoi nodi adiacenti, etc. Video

Pseudocodice

DFS(**Graph** g, **int** *node*)

1. Segno *node* come visitato;
2. Visito il nodo node
3. **For** nodo *v* adiacente a *node*:
4.   Visito l'arco $(node, v)$
5.   **If** *v* non è ancora stato visitato:
6.   **DFS**(g, v)

BFS

Idea

Visitare i nodi a distanze crescenti dalla sorgente. Visitare i nodi a distanza k prima di visitare i nodi a distanza $k+1$. Video

Pseudocodice

BFS(**Graph** g, **int** *node*)

1. Queue q, inserisco *node* in q e segno che *node* è visitato
2. **While** la coda q non è vuota:
3. $u =$ estraggo l'elemento in testa a q, visito il nodo u
4.   **For** nodo v adiacente a *node*:
5.   Visito l'arco (u, v)
6.   **If** v non è ancora stato visitato:
7.   Segno che v è visitato
8.   q.push(v)

BFS

Idea

Visitare i nodi a distanze crescenti dalla sorgente. Visitare i nodi a distanza k prima di visitare i nodi a distanza $k+1$. Video

Cammini minimi

L'ordine in cui visitiamo i nodi dipende dal nodo da cui partiamo. Se partiamo dal nodo v, raggiungiamo ogni altro nodo con *distanza minima* (misurata in numero di archi attraversati). Per questo motivo, la visita BFS ci permette di trovare la distanza minima da un nodo verso ogni altro nodo del grafo!

Visualizzare le visite

Video

DFS e BFS sono fondamentali per tutti gli algoritmi su grafi. Questi video permettono visualizzarle su grafi più grandi.

- DFS
- BFS

Esercizi

Vediamo due esercizi insieme:

- Ponti
- Spesa