

応用数学

第1章：線形代数（行列）

行列_01

スカラー、ベクトル、行列

- スカラー
 - いわゆる、通常使われる数
 - 四則演算が可能
- ベクトル
 - スカラーがセットになったものと考えられる
 - 大きさ、向きを表す
- 行列
 - スカラーを表にしたもの、ベクトルを並べたもの
 - ベクトルの変換や、連立方程式を解くのに使う

行列_02

連立方程式を、行列を用いて書く

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 = 5 \end{cases}$$

の連立方程式を、

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

の形式に変換しようと考えたと、下記のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

行列_03,行列_04

行列とベクトルの積

下記のように、行列とベクトルの積は計算できる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_1 + a_{12} \times b_2 \\ a_{21} \times b_1 + a_{22} \times b_2 \end{pmatrix}$$

例えば、下記のようになる。

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 1 + 4 \times 2 \\ 3 \times 1 + 5 \times 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{pmatrix} 6 + 8 \\ 3 + 10 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$= \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} \quad (3)$$

行列の積

「行列とベクトルの積」の式を元に、
右側の行列を列ベクトルのセットと考えて計算すればよい。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} & a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} + a_{13} \times b_{32} & a_{11} \times b_{13} + a_{12} \times b_{23} + a_{13} \times b_{33} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} + a_{23} \times b_{31} & a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + a_{23} \times b_{32} & a_{21} \times b_{13} + a_{22} \times b_{23} + a_{23} \times b_{33} \\ a_{31} \times b_{11} + a_{32} \times b_{21} + a_{33} \times b_{31} & a_{31} \times b_{12} + a_{32} \times b_{22} + a_{33} \times b_{32} & a_{31} \times b_{13} + a_{32} \times b_{23} + a_{33} \times b_{33} \end{pmatrix}$$

例えば、下記のようになる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 3 & 2 \times 3 + 1 \times 1 \\ 4 \times 1 + 1 \times 3 & 4 \times 3 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \tag{5}$$

行列_05

連立方程式を解く

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$$

の式を解くことを考える。
次のステップで解いていく。

1. 2行目を1/2 倍する

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

2. 1行目に2行目の-1倍を加える

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

3. 2行目に1行目の-3倍を加える

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

4. 1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

ここで、連立方程式を解くために使用しているアクションは、下記の3種類のみ。
この3種類のみで、連立方程式が解ける！

- i行目をc倍する
- s行目にt行目のc倍を加える
- p行目とq行目を入れ替える

これを、**行基本変形**という。

上記で解いた連立方程式を行列で表すと・・・

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1. 2行目を1/2 倍する

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. 1行目に2行目の-1倍を加える

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. 2行目に1行目の-3倍を加える

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. 1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

すなわち、
行基本変形は、行列の変形と言い換えることができる。

行列_06

行基本変形の手順自体を、計算式として表現すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1. 2行目を1/2倍する

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (7)$$

2. 1行目に2行目の-1倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (9)$$

3. 2行目に1行目の-3倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

4. 1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

すなわち、
行基本変形は、行列を左から掛けることで表現できる！！

行列_07

行基本変形を1行にまとめると下記のようなになる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (14)$$

左から掛けた行列（赤字部分）をまとめると・・・

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

このような、まるで逆数のような働きをする行列を、逆行列という。

上記の例では、 $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ が逆行列。

また、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のような、掛けても掛けられても相手が変化しない行列を、単位行列という。

行列_08

単位行列は、下記のように定義される。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

また、ある行列に対して掛けた時に、結果が逆行列になるような行列を、逆行列という。

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

行列_09

逆行列の求め方

ガウスの掃き出し法

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \text{を、}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \text{のように、単位行列を用いて、左右同じ形式にして考える。}$$

左右の係数の行列に、同じ行基本変形を行っていく。

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

↓
2行目を1/2倍する

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\
 \downarrow \\
 \text{1行目に2行目の} -1 \text{倍を加える} \\
 \downarrow \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\
 \downarrow \\
 \text{2行目に1行目の} -3 \text{倍を加える} \\
 \downarrow \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{array} \right) \\
 \downarrow \\
 \text{1行目と2行目を入れ替える} \\
 \downarrow \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)
 \end{array}$$

左側が単位行列になると、右側に逆行列が現れる！

行列_10

逆行列の例題

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求める。

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \downarrow \\
 \text{1行目に、2行目の} -4 \text{倍を加える} \\
 \downarrow \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \downarrow \\
 \text{2行目に、1行目の2倍を加える} \\
 \downarrow \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \end{array} \right) \\
 \downarrow \\
 \text{1行目を} -1 \text{倍する} \\
 \downarrow \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \end{array} \right) \\
 \downarrow \\
 \text{1行目と2行目を入れ替える} \\
 \downarrow \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right)
 \end{array}$$

よって、求める逆行列は、

$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ となり、下記のように表記する。

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

逆行列が存在しない条件

逆行列が存在しない行列もありうる。

たとえば、

- 解がない連立方程式
- 解が1組に定まらない連立方程式

これらの係数を抜き出したような行列は、逆行列をもたない。

形式的には、

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ という行列の場合、

- $a : b \neq c : d$ のとき逆行列を持つ
- $a : b = c : d$ のとき逆行列を持たない

すなわち、 $ad = bc$ 、 $ad - bc = 0$

行列式

行列が逆行列を持つかどうかを判別するための式を行列式という。

ある行列が2つの横ベクトルの組み合わせだ考えると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix}$$

で作られる平行四辺形の面積で、逆行列の有無を判別できる。

(面積 = 0 の場合は 逆行列を持たない)

この面積を、

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{vmatrix} \text{ と表し、行列式 とよぶ。}$$

n個のベクトルで考えた時、行列式は下記の特徴を持つ。

1. 同じ行ベクトルが含まれていると行列式はゼロ

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = 0$$

2. 1つのベクトルがλ倍されると行列式はλ倍される

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \lambda \vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{vmatrix}$$

3. 他の成分が全部同じでi番目のベクトルだけが違った場合、行列式の足し合わせになる

$$\begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_i} + \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_i} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{w} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix}$$

また、3つ以上のベクトルからなる行列式は展開できる。

$$\begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ \vec{v_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \textcolor{red}{a} & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ \textcolor{red}{d} & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ \textcolor{red}{g} & h & i \end{vmatrix}$$
$$= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$