応用数学

第1章：線形代数（行列）

スカラー、ベクトル、行列

- スカラー
  - いわゆる、通常使われる数
  - 四則演算が可能
- ベクトル
  - スカラーがセットになったものと考えられる
  - 大きさ、向きを表す
- 行列
  - スカラーを表にしたもの、ベクトルを並べたもの
  - ベクトルの変換や、連立方程式を解くのに使う

連立方程式を、行列を用いて書く

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 = 5 \end{cases}$$

の連立方程式を、

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

の形式に変換しようと考えると、下記のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの積

下記のように、行列とベクトルの積は計算できる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_1 + a_{12} \times b_2 \\ a_{21} \times b_1 + a_{22} \times b_2 \end{pmatrix}$$

例えば、下記のようになる。

$$\begin{align} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \times 1 + 4 \times 2 \\ 3 \times 1 + 5 \times 2 \end{pmatrix} \tag{1} \\ &= \begin{pmatrix} 6 + 8 \\ 3 + 10 \end{pmatrix} \tag{2} \\ &= \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} \tag{3} \end{align}$$

行列の積

「行列とベクトルの積」の式を元に、
右側の行列を列ベクトルのセットと考えて計算すればよい。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} & a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} + a_{13} \times b_{32} & a_{11} \times b_{13} + a_{12} \times b_{23} + a_{13} \times b_{33} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} + a_{23} \times b_{31} & a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + a_{23} \times b_{32} & a_{21} \times b_{13} + a_{22} \times b_{23} + a_{23} \times b_{33} \\ a_{31} \times b_{11} + a_{32} \times b_{21} + a_{33} \times b_{31} & a_{31} \times b_{12} + a_{32} \times b_{22} + a_{33} \times b_{32} & a_{31} \times b_{13} + a_{32} \times b_{23} + a_{33} \times b_{33} \end{pmatrix}$$

例えば、下記のようになる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 3 & 2 \times 3 + 1 \times 1 \\ 4 \times 1 + 1 \times 3 & 4 \times 3 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \tag{5}$$

連立方程式を解く

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$$

の式を解くことを考える。
次のステップで解いていく。

1. 2行目を1/2 倍する

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

2. 1行目に2行目の-1倍を加える

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

3. 2行目に1行目の-3倍を加える

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 \quad = -1 \end{cases}$$

4. 1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{cases} x_1 \quad = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

ここで、連立方程式を解くために使用しているアクションは、下記の3種類のみ。
この3種類のみで、連立方程式が解ける！

- i行目をc倍する
- s行目にt行目のc倍を加える
- p行目とq行目を入れ替える

これを、**行基本変形**という。

上記で解いた連立方程式を行列で表すと・・・

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1. 2行目を1/2 倍する

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$$

2. 1行目に2行目の-1倍を加える

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

3. 2行目に1行目の-3倍を加える

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

4. 1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

すなわち、
行基本変形は、行列の変形と言い換えることができる。

N行目を倍する、という手順自体も計算式として表現すると、

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$$

1. 2行目を1/2倍する

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} \tag{7}$$

2. 1行目に2行目の−1倍を加える

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \tag{9}$$

3. 2行目に1行目の−3倍を加える

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \tag{11}$$

4. 1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \tag{13}$$

すなわち、
行基本変形は、行列を左から掛けることで表現できる！！

行基本変形を1行にまとめると下記のようになる。

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix} \tag{14}$$

左から掛けた行列（赤字部分）をまとめると・・

$$\begin{pmatrix}-3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix}-3&4\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&4\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix}-3&2\\1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \tag{19}$$

このような、まるで逆数のような働きをする行列を、逆行列という。

上記の例では、$\begin{pmatrix}-3&2\\1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$が逆行列。

また、$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$のような、掛けても掛けられても相手が変化しない行列をを、単位行列という。