

応用数学

第1章：線形代数（固有値）

固有値_01

固有値、固有ベクトル

ある行列Aに関して、下記の式が成り立つとき、
この \vec{x} を行列Aに対する固有ベクトル、
 λ を行列Aに対する固有値という。（ λ はスカラー）

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

固有値_02

固有値、固有ベクトルの具体例

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$= 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

このように、同じベクトルのスカラー倍で表現できるため、
固有値は $\lambda = 5$ 、固有ベクトル（のうちの一つ） $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ も固有ベクトルであり、一つであるとは限らない。

固有ベクトルは、比率を表していると捉える。

固有値_03

固有値、固有ベクトルの求め方

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$

$\vec{x} \neq \vec{0}$ であるため、 $(A - \lambda I)$ の逆行列が存在してはいけない。
すなわち、

$$|A - \lambda I| = 0$$

でなければならない。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合で考えると、

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 \times 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 5, -1$$

固有値 $\lambda = 5$ の場合、

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 5x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5x_2 \end{cases}$$

となるため、 $x_1 = x_2$

すなわち、 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍 となる。

$\lambda = -1$ の場合も同様に、

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$x_1 = -2x_2$$

すなわち、 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ の定数倍 となる。

問題_04

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求める。

上記行列を A として、

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

から、

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

よって、 $\lambda = 1, 2, 3$

$\lambda = 1$ の時の固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = x_1 \\ 2x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

上記より、 $x_2 = 0, x_1 = 0$ となる。 x_3 は決まらない。

よって、

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の定数倍}$$

となる。

同様に、 $\lambda = 2$ の場合も計算すると

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2x_1 \\ 2x_2 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

より、 $x_3 = 0, x_1 = -2x_2$ となる。 x_2 は決まらない。

$\lambda = 3$ の場合は、

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3x_1 \\ 2x_2 = 3x_2 \\ x_3 = 3x_3 \end{cases}$$

より、 $x_3 = 0, x_2 = 0$ となる。 x_1 は決まらない。

まとめると、

$$\lambda = 1 \text{ のとき、 } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の定数倍}$$

$$\lambda = 2 \text{ のとき、 } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の定数倍}$$

$$\lambda = 3 \text{ のとき、 } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の定数倍}$$

となる。

固有値、固有ベクトルを用いて、行列を分解することができる。

ある行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots$,
固有ベクトルを $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$ とすると、

固有値を対角線上に並べた行列（それ以外の成分はゼロ）

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

と、対応する固有ベクトルを並べた行列

$$V = (\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \dots)$$

を用意したとき、下記が成り立つ

$$AV = V\Lambda$$

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

このように正方行列を3つの行列の積に変換することを**固有値分解**といい、
これによって行列の累乗計算が容易になるなどの利点がある。

固有値_06

固有値分解の具体例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

固有値 $\lambda = 5, -1$ 、固有ベクトル $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ なので、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

よって

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

※固有ベクトルの行列は、

$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ のように、特定のベクトルを定数倍してもよい。

固有値_07

問題_07

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ を固有値分解する。

$(2 - \lambda)(6 - \lambda) = 0$ より、
 $\lambda = 2, 6$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2x_1 \\ 6x_2 = 2x_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6x_1 \\ 6x_2 = 6x_2 \end{cases}$$

より、

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

したがって、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, V^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

固有値_08

特異値分解

正方行列以外で固有値分解に近いことができないのか？

⇒ 下記を満たす特殊な単位ベクトルがあるならば、**特異値分解**ができる

$$M\vec{v} = \sigma\vec{u}$$

$$M^T\vec{u} = \sigma\vec{v}$$

$$M = USV^T$$

※ U, V は直行行列

※ 直行行列・転置行列と逆行列が等しくなる正方行列のこと。つまり $R^T R = R R^T = E$ となる R 。
。

固有値_09

特異値の求め方

$$MV = US$$

$$M^T U = V S^T$$

↓

$$M = U S V^T$$

$$M^T = V S^T U^T$$

↓

$$M M^T = U S V^T V S^T U^T = U S S^T U^T$$

つまり、 $M M^T$ を固有値分解すれば、**左特異ベクトル**と、**特異値の2乗**が求められる。

固有値_10

特異値の求め方の具体例

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ の例を考える。}$$

$$M M^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

これを固有値分解すると

$$\begin{vmatrix} 14 - \lambda & 10 \\ 10 & 14 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(14 - \lambda)(14 - \lambda) - 10 \times 10 = 0$$

$$\lambda^2 - 28\lambda + 96 = 0(\lambda - 24)(\lambda - 4) = 0$$

よって固有値は $\lambda = 24, 4$

$$\begin{cases} 14x_1 + 10x_2 = 24x_1 \\ 10x_1 + 14x_2 = 24x_2 \\ 14x_1 + 10x_2 = 4x_1 \\ 10x_1 + 14x_2 = 4x_2 \end{cases}$$

より、固有ベクトルは

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1}$$

※固有ベクトルは、大きさを1に調整している。

同様に、 $M^T M$ についても計算すると、

◇固有値

$$M^T M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 10-\lambda & 8 & 6 \\ 8 & 8-\lambda & 8 \\ 6 & 8 & 10-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & \lambda-4 \\ 8 & 8-\lambda & 8 \\ 6 & 8 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 8 & 8-\lambda & 8 \\ 6 & 8 & 10-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-4) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 16 & 8-\lambda & 0 \\ 6 & 8 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 16 & 8-\lambda & 0 \\ 0 & 8 & 16-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-4) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 8-\lambda & 16 \\ 0 & 8 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8-\lambda & 16 \\ 0 & 8 & 16-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-4)\{(8-\lambda)(16-\lambda) - 128\} \\ &= -(\lambda-4)(\lambda^2 - 24\lambda) \\ &= -\lambda(\lambda-4)(\lambda-24) = 0 \end{aligned}$$

◇固有ベクトル

◇◇ $\lambda = 4$ ◇◇

$$4E - A = \begin{pmatrix} -6 & -8 & -6 \\ -8 & -4 & -8 \\ -6 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$10x_1 + 10x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_3$$

$$-8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0$$

$$\Rightarrow -8x_1 - 4x_2 + 8x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 0$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

◇◇ $\lambda = 24$ ◇◇

$$24E - A = \begin{pmatrix} 14 & -8 & -6 \\ -8 & 16 & -8 \\ -6 & -8 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$20x_1 - 20x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_3$$

$$-8x_1 + 16x_2 - 8x_3 = 0$$

$$\Rightarrow -8x_1 + 16x_2 - 8x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\diamond\diamond\lambda = 0\diamond\diamond$$

$$0E - A = \begin{pmatrix} -10 & -8 & -6 \\ -8 & -8 & -8 \\ -6 & -8 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-4x_1 + 4x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_3$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 = 0$$

$$\Rightarrow -8x_1 - 8x_2 - 8x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = -2x_1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

以上より、

$$M^T M = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

固有値_11

特異値分解の利用例

- 画像データの圧縮
 - 特異値分解した画像データから、成分の小さい特異値を取り除く。

- 画像の認識

- 特異値の大きい部分が似ていれば、画像そのものが似ている、と機械が判断できる。