応用数学

第1章：線形代数（固有値）

> 固有値_01

固有値、固有ベクトル

ある行列Aに関して、下記の式が成り立つとき、
この$\vec{x}$を行列Aに対する固有ベクトル、
λを行列Aに対する固有値という。（λはスカラー）

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

> 固有値_02

固有値、固有ベクトルの具体例

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}5\\ 5\end{pmatrix} \qquad (1)\\ &= 5\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \qquad (2)\end{aligned}$$

このように、同じベクトルのスカラー倍で表現できるため、
固有値は $\lambda = 5$、固有ベクトル（のうちの一つ） $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ となる。

$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$ も固有ベクトルであり、一つであるとは限らない。
固有ベクトルは、比率を表していると捉える。

> 固有値_03

固有値、固有ベクトルの求め方

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$\vec{x} \neq \vec{0}$ であるため、$(A - \lambda I)$の逆行列が存在してはいけない。
すなわち、

$\left| A - \lambda I \right| = 0$
でなければならない。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合で考えると、

$\left| A - \lambda I \right| = 0$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)(3-\lambda) - 4 \times 2 = 0$
$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$
$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$
$\lambda = 5, -1$

固有値$\lambda = 5$の場合、
$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 5x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5x_2 \end{cases}$
となるため、$x_1 = x_2$

すなわち、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍 となる。

$\lambda = 5$の場合も同様に、
$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 = -x_2 \end{cases}$
$x_1 = -2x_2$

すなわち、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ の定数倍 となる。