応用数学

第1章：線形代数（固有値）

> 固有値_01

固有値、固有ベクトル

ある行列Aに関して、下記の式が成り立つとき、
この$\vec{x}$を行列Aに対する固有ベクトル、
λを行列Aに対する固有値という。（λはスカラー）

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

> 固有値_02

固有値、固有ベクトルの具体例

$$\begin{align}\begin{pmatrix}1 & 4 \\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}5 \\ 5\end{pmatrix} \tag{1} \\ &= 5\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix} \tag{2}\end{align}$$

このように、同じベクトルのスカラー倍で表現できるため、
固有値は $\lambda = 5$、固有ベクトル（のうちの一つ） $\vec{x} = \begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$ となる。

$\vec{x} = \begin{pmatrix}2 \\ 2\end{pmatrix}$ も固有ベクトルであり、一つであるとは限らない。
固有ベクトルは、比率を表していると捉える。

> 固有値_03

固有値、固有ベクトルの求め方

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$\vec{x} \neq \vec{0}$ であるため、$(A - \lambda I)$の逆行列が存在してはいけない。
すなわち、

$$\left| A - \lambda I \right| = 0$$

でなければならない。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合で考えると、

$$\left| A - \lambda I \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - 4 \times 2 = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$
$$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$
$$\lambda = 5, -1$$

固有値$\lambda = 5$の場合、

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 5x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5x_2 \end{cases}$$

となるため、$x_1 = x_2$

すなわち、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍 となる。

$\lambda = -1$の場合も同様に、

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$x_1 = -2x_2$$

すなわち、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ の定数倍 となる。

> 固有値_04

問題_04

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求める。

上記行列をAとして、
$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
$\left| A - \lambda I \right| = 0$
から、

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

よって、$\lambda = 1, 2, 3$

$\lambda = 1$の時の固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = x_1 \\ 2x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

上記より、$x_2 = 0, x_1 = 0$となる。x_3は決まらない。
よって、
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍

となる。

同様に、$\lambda = 2$の場合も計算すると

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \color{red}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2x_1 \\ \qquad\quad 2x_2 = 2x_2 \\ \qquad\quad\; x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

より、$x_3 = 0, x_1 = -2x_2$となる。x_2は決まらない。

$\lambda = 3$の場合は、

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \color{red}{3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3x_1 \\ \qquad\quad 2x_2 = 3x_2 \\ \qquad\quad\; x_3 = 3x_3 \end{cases}$$

より、$x_3 = 0, x_2 = 0$となる。x_1は決まらない。

まとめると、

$\lambda = 1$のとき、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍

$\lambda = 2$のとき、$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の定数倍

$\lambda = 3$のとき、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の定数倍

となる。

> 固有値_05

固有値分解

固有値、固有ベクトルを用いて、行列を分解することができる。

ある行列Aの固有値を$\lambda_1, \lambda_2, \cdots,$
固有ベクトルを$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots$とすると、

固有値を対角線上に並べた行列（それ以外の成分はゼロ）
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

と、対応する固有ベクトルを並べた行列
$$V = \begin{pmatrix} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \cdots \end{pmatrix}$$

を用意したとき、下記が成り立つ
$$AV = V\Lambda$$
$$A = V\Lambda V^{-1}$$

このように正方行列を3つの行列の積に変換することを**固有値分解**といい、
これによって行列の累乗計算が容易になるなどの利点がある。

> 固有値_06

固有値分解の具体例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

固有値$\lambda = 5, -1$、固有ベクトル$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$なので、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = V\Lambda V^{-1}$$
よって

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

※固有ベクトルの行列は、
$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ のように、特定のベクトルを定数倍してもよい。

> 固有値_07

問題_07

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ を固有値分解する。

$(2-\lambda)(6-\lambda)=0$より、
$\lambda = 2, 6$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2x_1 \\ \qquad 6x_2 = 2x_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6x_1 \\ \qquad 6x_2 = 6x_2 \end{cases}$$
より、

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

したがって、
$$\Lambda = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, V^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$