応用数学

第2章：確率統計

> 統計学1_01, 統計学1_02

集合とは

ものの集まりである。

数学的には、下記のように表現する。

$S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
$a \in S$

集合(S) の要素(a,b…)同士は明確に区別することができる。

集合Sの内部に、集合$M = \{c, d, g\}$があったとすると、
$M \subset S$

集合Sに含まれないhは、
$h \notin S$
のように区別、表現できる。

※確率・統計における「事象」は、集合として取り扱うことができる。

> 統計学1_03

共通の部分を持つ集合

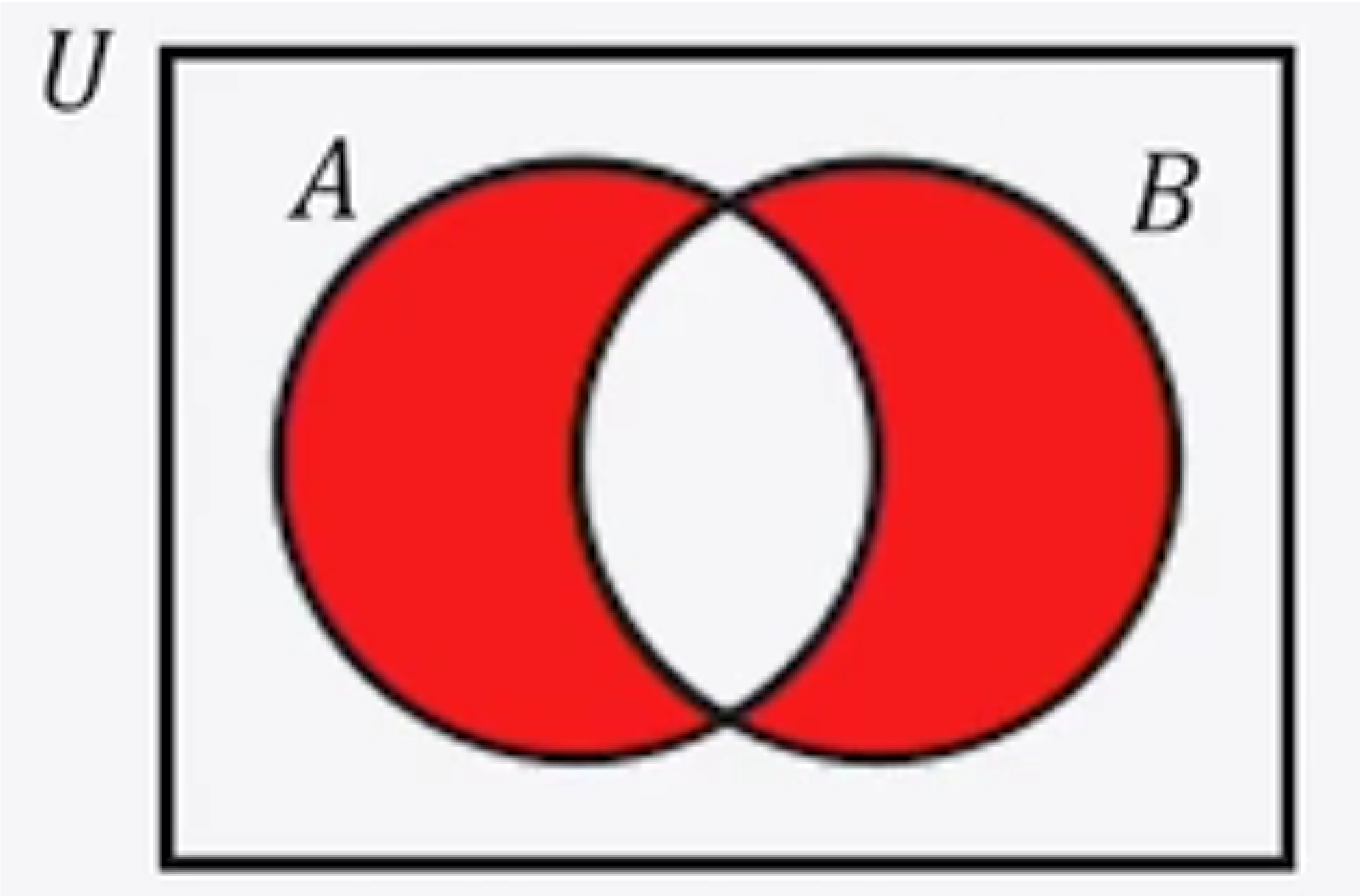
- 和集合 $A \cup B$　※A,Bのみに含まれる部分も含まれる
- 共通部分 $A \cap B$　※A,Bどちらにも含まれる部分のみ

～以外を表す集合

- 絶対補 $U \backslash = \overline{A}$　※A以外の世界全部を表現
- 相対補 $B \setminus A$　※BからAを除いたもの

> 統計学1_04

問題_04



この集合を表現した式として適切な式は？

右側部分が、$B \setminus A$ 、
左側部分が、$A \setminus B$ と表現でき、
それらの和集合であるから、
$(B \setminus A) \cup (A \setminus B)$

> 統計学1_05

確率とは

- 頻度確率(客観確率)
  - 発生する頻度
  - 例：当たりくじを引く確率
- ベイズ確率(主観確率)
  - 信念の度合い
  - 例：あなたは40%の確率でインフルエンザですという診断

> 統計学1_06

確率の定義

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{事象Aが起こる数}{すべての事象の数}$$

※よって、確率は0〜1の間の値をとる

例：

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= \frac{事象Aが起こらない数}{すべての事象の数} = \frac{すべての事象の数 - 事象Aが起こる数}{すべての事象の数} \\ &= \frac{n(U)-n(A)}{n(U)} \\ &= \frac{n(U)}{n(U)} - \frac{n(A)}{n(U)} \\ &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

> 統計学1_07

共通の部分の確率

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$P(A \cap B) = P(B \cap A)$なので、
$P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$
ということがいえる。

> 統計学1_08

条件付き確率

ある事象Bが与えられた下で、Aとなる確率。

$P(A|B)$ のように表現し、

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \end{aligned}$$

である。

> 統計学1_09

独立な事象の同時確率

お互いの発生には因果関係のない事象Aと事象Bが同時に発生する確率。
$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

ここで、因果関係のない事象Aと事象Bの場合、
$P(B|A) = P(B)$ であるため、

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

> 統計学1_10

和集合

和集合$P(A \cup B)$は、下記のように表す。
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

※ $P(A \cap B)$ の分が重複しているため、 $P(A \cap B)$ を引く。

> 統計学1_11

ベイズ則

問題：
ある街の子供たちは毎日1/4の確率で飴玉をもらう。
飴玉をもらうと1/2の確率で笑顔になる。
その街の、笑顔な子供が飴玉をもらっている確率を求めよ。
ただし、この街の子供たちが笑顔でいる確率は1/3。

飴玉をもらう確率 = $P(A)$
子供が笑顔である確率 = $P(B)$

と定義すると、求めるのは
$P(A|B)$である。

一般に、
$P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$
が成り立ち、また
$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{3}, P(B|A) = \frac{1}{2}$
であるから、

$P(B)P(A|B) = P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$
$\frac{1}{3} \times P(A|B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$
$P(A|B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{8}$