応用数学

第1章：線形代数（固有値）

> 固有値_01

固有値、固有ベクトル

ある行列Aに関して、下記の式が成り立つとき、
この$\vec{x}$を行列Aに対する固有ベクトル、
λを行列Aに対する固有値という。（λはスカラー）

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

> 固有値_02

固有値、固有ベクトルの具体例

$$
\begin{align}
\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{1} \\
&= 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}
\end{align}
$$

このように、同じベクトルのスカラー倍で表現できるため、
固有値は $\lambda = 5$、固有ベクトル（のうちの一つ） $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ も固有ベクトルであり、一つであるとは限らない。
固有ベクトルは、比率を表していると捉える。

> 固有値_03

固有値、固有ベクトルの求め方

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$\vec{x} \neq \vec{0}$ であるため、$(A - \lambda I)$の逆行列が存在してはいけない。
すなわち、

$$\left| A - \lambda I \right| = 0$$

でなければならない。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合で考えると、

$$\left| A - \lambda I \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - 4 \times 2 = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$
$$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$
$$\lambda = 5, -1$$

固有値$\lambda = 5$の場合、

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 5x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5x_2 \end{cases}$$

となるため、$x_1 = x_2$

すなわち、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍 となる。

$\lambda = -1$の場合も同様に、

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$x_1 = -2x_2$$

すなわち、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ の定数倍 となる。

> 固有値_04

問題_04

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求める。

上記行列をAとして、
$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
$\left| A - \lambda I \right| = 0$
から、

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

よって、$\lambda = 1, 2, 3$

$\lambda = 1$の時の固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = x_1 \\ 2x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

上記より、$x_2 = 0, x_1 = 0$となる。x_3は決まらない。
よって、
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍

となる。

同様に、$\lambda = 2$の場合も計算すると

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = {\color{red}2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2x_1 \\ \qquad\quad 2x_2 = 2x_2 \\ \qquad\quad\ \ x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

より、$x_3 = 0, x_1 = -2x_2$となる。x_2は決まらない。

$\lambda = 3$の場合は、

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = {\color{red}3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3x_1 \\ \qquad\quad 2x_2 = 3x_2 \\ \qquad\quad\ \ x_3 = 3x_3 \end{cases}$$

より、$x_3 = 0, x_2 = 0$となる。x_1は決まらない。

まとめると、

$\lambda = 1$のとき、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍

$\lambda = 2$のとき、$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の定数倍

$\lambda = 3$のとき、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の定数倍

となる。

> 固有値_05

固有値分解

固有値、固有ベクトルを用いて、行列を分解することができる。

ある行列Aの固有値を$\lambda_1, \lambda_2, \cdots,$
固有ベクトルを$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots$とすると、

固有値を対角線上に並べた行列（それ以外の成分はゼロ）
$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

と、対応する固有ベクトルを並べた行列
$V = \begin{pmatrix} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \cdots \end{pmatrix}$

を用意したとき、下記が成り立つ
$AV = V\Lambda$
$A = V\Lambda V^{-1}$

このように正方行列を3つの行列の積に変換することを**固有値分解**といい、
これによって行列の累乗計算が容易になるなどの利点がある。

> 固有値_06

固有値分解の具体例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

固有値$\lambda = 5, -1$、固有ベクトル$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$なので、

$\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$A = V\Lambda V^{-1}$
よって

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

※固有ベクトルの行列は、
$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ のように、特定のベクトルを定数倍してもよい。

> 固有値_07

問題_07

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ を固有値分解する。

$(2-\lambda)(6-\lambda)=0$より、
$\lambda = 2, 6$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2x_1 \\ \qquad 6x_2 = 2x_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6x_1 \\ \qquad 6x_2 = 6x_2 \end{cases}$$
より、

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

したがって、
$$\Lambda = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, V^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

> 固有値_08

特異値分解

正方行列以外で固有値分解に近いことができないのか？
⇒ 下記を満たす特殊な単位ベクトルがあるならば、**特異値分解**ができる

$$M\vec{v} = \sigma\vec{u}$$
$$M^T\vec{u} = \sigma\vec{v}$$

$$M = USV^T$$
※U, Vは直行行列
※直行行列・・転置行列と逆行列が等しくなる正方行列のこと。つまり$R^TR = RR^T = E$となるR
。

> 固有値_09

特異値の求め方

$MV = US$
$M^TU = VS^T$
↓
$M = USV^T$
$M^T = VS^TU^T$
↓
$MM^T = USV^TVS^TU^T = USS^TU^T$

つまり、MM^Tを固有値分解すれば、**左特異ベクトル**と、**特異値の2乗**が求められる。

> 固有値_10

特異値の求め方の具体例

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の例を考える。

$$MM^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

これを固有値分解すると
$\begin{vmatrix} 14-\lambda & 10 \\ 10 & 14-\lambda \end{vmatrix} = 0$
$(14-\lambda)(14-\lambda) - 10 \times 10 = 0$
$\lambda^2 - 28\lambda + 96 = 0(\lambda - 24)(\lambda - 4) = 0$
よって固有値は$\lambda = 24, 4$

$$\begin{cases} 14x_1 + 10x_2 = 24x_1 \\ 10x_1 + 14x_2 = 24x_2 \end{cases} \begin{cases} 14x_1 + 10x_2 = 4x_1 \\ 10x_1 + 14x_2 = 4x_2 \end{cases}$$

より、固有ベクトルは
$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって、
$$\begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1}$$
※固有ベクトルは、大きさを1に調整している。

同様に、M^TMについても計算すると、

◇固有値

$$M^TM = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 8 & 6 \\ 8 & 8-\lambda & 8 \\ 6 & 8 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & \lambda-4 \\ 8 & 8-\lambda & 8 \\ 6 & 8 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 8 & 8-\lambda & 8 \\ 6 & 8 & 10-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 16 & 8-\lambda & 0 \\ 6 & 8 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 16 & 8-\lambda & 0 \\ 0 & 8 & 16-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 8-\lambda & 16 \\ 0 & 8 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8-\lambda & 16 \\ 0 & 8 & 16-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda-4)\{(8-\lambda)(16-\lambda)-128\}$$
$$= -(\lambda-4)(\lambda^2-24\lambda)$$
$$= -\lambda(\lambda-4)(\lambda-24) = 0$$

◇固有ベクトル

$\diamond\diamond \lambda = 4 \diamond\diamond$

$$4E - A = \begin{pmatrix} -6 & -8 & -6 \\ -8 & -4 & -8 \\ -6 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$10x_1 + 10x_3 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = -x_3$$
$$-8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0$$
$$\Rightarrow -8x_1 - 4x_2 + 8x_1 = 0$$
$$\Rightarrow x_2 = 0$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\diamond\diamond \lambda = 24 \diamond\diamond$

$$24E - A = \begin{pmatrix} 14 & -8 & -6 \\ -8 & 16 & -8 \\ -6 & -8 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$20x_1 - 20x_3 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = x_3$$
$$-8x_1 + 16x_2 - 8x_3 = 0$$
$$\Rightarrow -8x_1 + 16x_2 - 8x_1 = 0$$
$$\Rightarrow x_2 = x_1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\diamond\diamond\lambda = 0 \diamond\diamond$$
$$0E - A = \begin{pmatrix} -10 & -8 & -6 \\ -8 & -8 & -8 \\ -6 & -8 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-4x_1 + 4x_3 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = x_3$$
$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 = 0$$
$$\Rightarrow -8x_1 - 8x_2 - 8x_1 = 0$$
$$\Rightarrow x_2 = -2x_1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

以上より、

$$M^T M = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$