応用数学

第1章：線形代数（行列）

> 行列_01

スカラー、ベクトル、行列

- スカラー
  - いわゆる、通常使われる数
  - 四則演算が可能
- ベクトル
  - スカラーがセットになったものと考えられる
  - 大きさ、向きを表す
- 行列
  - スカラーを表にしたもの、ベクトルを並べたもの
  - ベクトルの変換や、連立方程式を解くのに使う

> 行列_02

連立方程式を、行列を用いて書く

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 = 5 \end{cases}$$

の連立方程式を、

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

の形式に変換しようと考えると、下記のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

> 行列_03,行列_04

行列とベクトルの積

下記のように、行列とベクトルの積は計算できる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_1 + a_{12} \times b_2 \\ a_{21} \times b_1 + a_{22} \times b_2 \end{pmatrix}$$

例えば、下記のようになる。

$$\begin{align} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \times 1 + 4 \times 2 \\ 3 \times 1 + 5 \times 2 \end{pmatrix} \tag{1} \\ &= \begin{pmatrix} 6 + 8 \\ 3 + 10 \end{pmatrix} \tag{2} \\ &= \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} \tag{3} \end{align}$$

行列の積

「行列とベクトルの積」の式を元に、
右側の行列を列ベクトルのセットと考えて計算すればよい。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} & a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} + a_{13} \times b_{32} & a_{11} \times b_{13} + a_{12} \times b_{23} + a_{13} \times b_{33} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} + a_{23} \times b_{31} & a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + a_{23} \times b_{32} & a_{21} \times b_{13} + a_{22} \times b_{23} + a_{23} \times b_{33} \\ a_{31} \times b_{11} + a_{32} \times b_{21} + a_{33} \times b_{31} & a_{31} \times b_{12} + a_{32} \times b_{22} + a_{33} \times b_{32} & a_{31} \times b_{13} + a_{32} \times b_{23} + a_{33} \times b_{33} \end{pmatrix}$$

例えば、下記のようになる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 3 & 2 \times 3 + 1 \times 1 \\ 4 \times 1 + 1 \times 3 & 4 \times 3 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \tag{5}$$

> 行列_05

連立方程式を解く

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$$

の式を解くことを考える。
次のステップで解いていく。

1. 2行目を1/2 倍する

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

2. 1行目に2行目の-1倍を加える

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

3. 2行目に1行目の-3倍を加える

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 \quad = -1 \end{cases}$$

4. 1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{cases} x_1 \quad = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

ここで、連立方程式を解くために使用しているアクションは、下記の3種類のみ。
この3種類のみで、連立方程式が解ける！

- i行目をc倍する
- s行目にt行目のc倍を加える
- p行目とq行目を入れ替える

これを、**行基本変形**という。

上記で解いた連立方程式を行列で表すと・・・

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$$

1. 2行目を1/2 倍する

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$$

2. 1行目に2行目の-1倍を加える

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

3. 2行目に1行目の-3倍を加える

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

4. 1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

すなわち、
行基本変形は、行列の変形と言い換えることができる。

> 行列_06

行基本変形の手順自体を、計算式として表現すると、

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$$

1. 2行目を1/2倍する

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix} \tag{6}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} \tag{7}$$

2. 1行目に2行目の−1倍を加える

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} \tag{8}$$
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \tag{9}$$

3. 2行目に1行目の−3倍を加える

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \tag{10}$$
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \tag{11}$$

4. 1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \tag{12}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \tag{13}$$

すなわち、
行基本変形は、行列を左から掛けることで表現できる！！

> 行列_07

行基本変形を1行にまとめると下記のようになる。

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix} \tag{14}$$

左から掛けた行列（赤字部分）をまとめると・・

$$\begin{pmatrix}-3 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 4\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 2\\1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \tag{19}$$

このような、まるで逆数のような働きをする行列を、逆行列という。

上記の例では、$\begin{pmatrix}-3 & 2\\1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$が逆行列。

また、$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$のような、掛けても掛けられても相手が変化しない行列をを、単位行列という。

> 行列_08

単位行列は、下記のように定義される。

$$I=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots\end{pmatrix}$$

また、ある行列に対して掛けた時に、結果が逆行列になるような行列を、逆行列という。

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

> 行列_09

逆行列の求め方

ガウスの掃き出し法

$\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$ を、

$\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$ のように、単位行列を用いて、左右同じ形式にして考える。

左右の係数の行列に、同じ行基本変形を行っていく。

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 4 & 1 & 0\\2 & 6 & 0 & 1\end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\text{2行目を}1/2\text{倍する}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$1行目に2行目の-1倍を加える$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$2行目に1行目の-3倍を加える$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$1行目と2行目を入れ替える$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

左側が単位行列になると、右側に逆行列が現れる！

> 行列_10

逆行列の例題

$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
の逆行列を求める。

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$1行目に、2行目の-4倍を加える$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$2行目に、1行目の2倍を加える$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$1行目を-1倍する$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$1行目と2行目を入れ替える$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

よって、求める逆行列は、
$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ となり、下記のように表記する。

$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

> 行列_11

逆行列が存在しない条件

逆行列が存在しない行列もありうる。
たとえば、

- 解がない連立方程式
- 解が1組に定まらない連立方程式

これらの係数を抜き出したような行列は、逆行列をもたない。

形式的には、
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ という行列の場合、

- $a : b \neq c : d$ のとき逆行列を持つ
- $a : b = c : d$ のとき逆行列を持たない

すなわち、$ad = bc$、$ad - bc = 0$

> 行列_12

行列式

行列が逆行列を持つかどうかを判別するための式を行列式という。

ある行列が2つの横ベクトルの組み合わせだと考えると

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \end{pmatrix}$
で作られる平行四辺形の面積で、逆行列の有無を判別できる。
（面積 = 0 の場合は 逆行列を持たない）

この面積を、
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \end{vmatrix}$ と表し、**行列式** とよぶ。

n個のベクトルで考えた時、行列式は下記の特徴を持つ。

1. 同じ行ベクトルが含まれていると行列式はゼロ

$$\begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{w}} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{w}} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} = 0$$

2. 1つのベクトルがλ倍されると行列式はλ倍される

$$\begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \color{red}{\lambda}\vec{v_i} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} = \color{red}{\lambda} \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_i} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix}$$

3. 他の成分が全部同じでi番目のベクトルだけが違った場合、行列式の足し合わせになる

$$\begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_i} + \color{red}{\vec{w}} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_i} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{w}} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix}$$

また、3つ以上のベクトルからなる行列式は展開できる。

$$\begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ \vec{v_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \color{red}{a} & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} \color{red}{+} \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ \color{red}{d} & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} \color{red}{+} \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ \color{red}{g} & h & i \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

> 行列_13

問題

行を入れ替えると、行列式の符号は入れ替わる。
この関係を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{v_s}} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{v_t}} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} = \color{red}{-} \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{v_t}} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{v_s}} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix}$$

下記のように式変形する。

$$\begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{v_s} + \vec{v_t}} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{v_t} + \vec{v_s}} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{v_s} + \vec{v_t}} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{v_t} + \vec{v_s}} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{v_s}} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{v_t} + \vec{v_s}} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{v_t}} \\ \vdots \\ \color{red}{\vec{v_t} + \vec{v_s}} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_s} \\ \vdots \\ \vec{v_t} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_s} \\ \vdots \\ \vec{v_s} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_t} \\ \vdots \\ \vec{v_t} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_t} \\ \vdots \\ \vec{v_s} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_s} \\ \vdots \\ \vec{v_t} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_t} \\ \vdots \\ \vec{v_s} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} = 0$$

よって

$$\begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_s} \\ \vdots \\ \vec{v_t} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_t} \\ \vdots \\ \vec{v_s} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix}$$

講義動画では、下記のように証明している。

$$\begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_s} \\ \vdots \\ \vec{v_t} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_t} \\ \vdots \\ \vec{v_s} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v_1} \\ \vdots \\ \vec{v_s} + \vec{v_t} \\ \vdots \\ \vec{v_t} + \vec{v_s} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{vmatrix} = 0$$

> 行列_14

行列式の求め方

行列_12で記載した行列式は、
下記のように、どこの要素を高さと見立てても、同じ結果が得られる。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o & b & c \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$