

応用数学

第1章：線形代数（行列）

スカラー、ベクトル、行列

- スカラー
 - いわゆる、通常使われる数
 - 四則演算が可能
- ベクトル
 - スカラーがセットになったものと考えられる
 - 大きさ、向きを表す
- 行列
 - スカラーを表にしたもの、ベクトルを並べたもの
 - ベクトルの変換や、連立方程式を解くのに使う

連立方程式を、行列を用いて書く

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 = 5 \end{cases}$$

の連立方程式を、

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

の形式に変換しようと考えたと、下記のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの積

下記のように、行列とベクトルの積は計算できる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_1 + a_{12} \times b_2 \\ a_{21} \times b_1 + a_{22} \times b_2 \end{pmatrix}$$

例えば、下記のようになる。

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 1 + 4 \times 2 \\ 3 \times 1 + 5 \times 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{pmatrix} 6 + 8 \\ 3 + 10 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$= \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} \quad (3)$$

行列の積

「行列とベクトルの積」の式を元に、
右側の行列を列ベクトルのセットと考えて計算すればよい。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} & a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} + a_{13} \times b_{32} & a_{11} \times b_{13} + a_{12} \times b_{23} + a_{13} \times b_{33} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} + a_{23} \times b_{31} & a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + a_{23} \times b_{32} & a_{21} \times b_{13} + a_{22} \times b_{23} + a_{23} \times b_{33} \\ a_{31} \times b_{11} + a_{32} \times b_{21} + a_{33} \times b_{31} & a_{31} \times b_{12} + a_{32} \times b_{22} + a_{33} \times b_{32} & a_{31} \times b_{13} + a_{32} \times b_{23} + a_{33} \times b_{33} \end{pmatrix}$$

例えば、下記のようになる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 3 & 2 \times 3 + 1 \times 1 \\ 4 \times 1 + 1 \times 3 & 4 \times 3 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \quad (5)$$

連立方程式を解く

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$$

の式を解くことを考える。

次のステップで解いていく。

1. 2行目を1/2 倍する

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

2. 1行目に2行目の-1倍を加える

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

3. 2行目に1行目の-3倍を加える

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

4. 1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

ここで、連立方程式を解くために使用しているアクションは、下記の3種類のみ。

この3種類のみで、連立方程式が解ける！

- i行目をc倍する
- s行目にt行目のc倍を加える
- p行目とq行目を入れ替える

これを、**行基本変形**という。

上記で解いた連立方程式を行列で表すと・・・

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1. 2行目を1/2 倍する

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. 1行目に2行目の-1倍を加える

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. 2行目に1行目の-3倍を加える

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. 1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

すなわち、

行基本変形は、行列の変形と言い換えることができる。

N行目を倍する、という手順自体も計算式として表現すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1. 2行目を1/2倍する

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (7)$$

2. 1行目に2行目の-1倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (9)$$

3. 2行目に1行目の-3倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

4. 1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

すなわち、

行基本変形は、行列を左から掛けることで表現できる！！