Modele Liniowe
Raport nr 3

Michał Kubica

3 grudnia 2018

1 Zadanie 6

1.1 Znajdź moc odrzucenia hipotezy zerowej $\beta_1 = 0$

Na podstawie wzorów podanych na wykładzie obliczono moc testu, czyli prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, gdy jest ona fałszywa.

$0.8032105 \approx 80\%$

Moc testu na poziomie 80% jest konwencjonalnym poziomem mocy, który zazwyczaj się przyjmuje w badaniach i czasopismach naukowych.

Kod w R

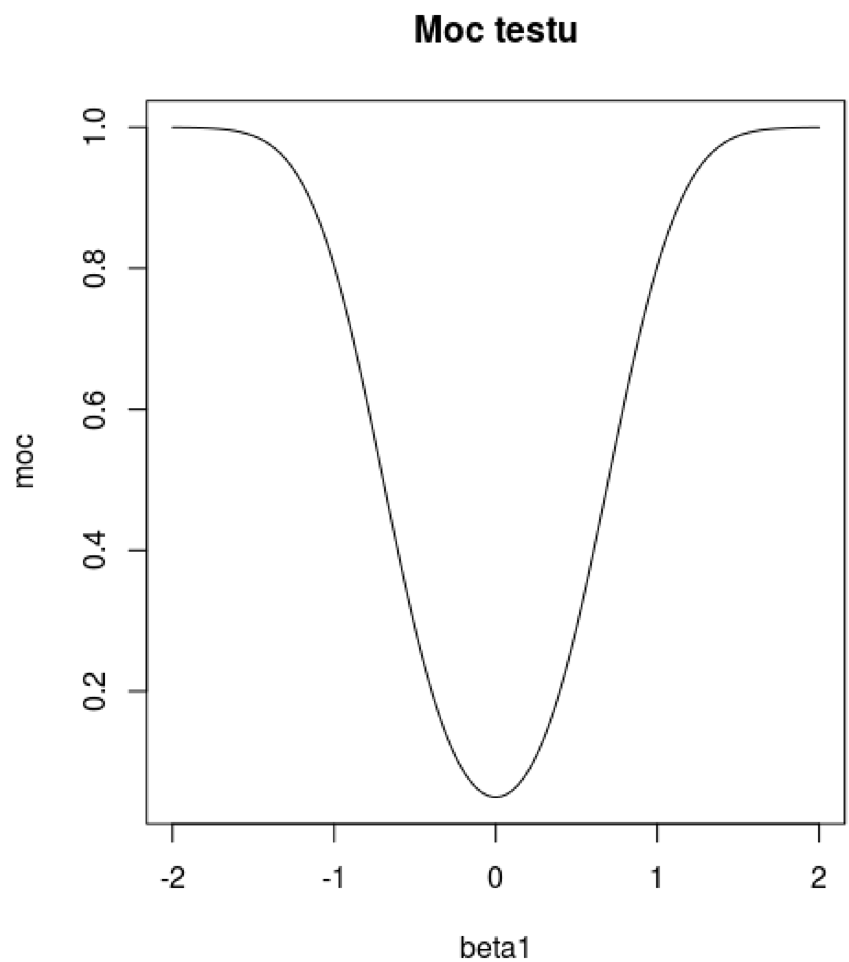
```
n=40
sig2=120
ssx=1000
alpha=0.05

sig2b1=sig2/ssx;
tc=qt(1-alpha/2, n-2)
beta1=1
delta=beta1/sqrt(sig2b1)
1-pt(tc,n-2,delta)+pt(-tc,n-2,delta)
```

1.2 Wykres mocy od β_1

Następnie wyliczono moc testu względem β_1 i wykres przedstawiono poniżej.

```
beta1=seq(-2, 2, 0.01)
delta=beta1/sqrt(sig2b1)
moc=1-pt(tc,n-2,delta)+pt(-tc,n-2,delta)
plot(beta1,moc, main="Moc testu", type='l')
```

Jeśli moc testu jest zbyt niska to zwiększa się prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju, czyli przyjęcia hipotezy zerowej, gdy jest ona fałszywa. Jest to istotne z tego względu, że może to prowadzić do tego, że wyniki istotne będą odrzucane, a jest to efekt niepożądany.



Rysunek 1: Zależność mocy testu od beta1

2 Zadanie 7

Napisano funkcję, która przybliża prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej $\beta_1 = 0$ na podstawie wielokrotnej replikacji eksperymentu i wielokrotnego testowania hipotezy.

a) 0.045

b) 0.049
c) 0.046
d) 0.057

Otrzymane wyniki są zbliżone do ustalonego poziomu istotności (prawdopodobieństwa odrzucenia hipotezy zerowej), co świadczy o poprawności wykonywanych replikacji.

```
f<-function(dim, n, beta1, dist)
{
  X = rnorm(dim, 0, 1/dim)
  if( dist == 1) {
    model = matrix(rnorm(dim*n, 0, 1), dim, n)
    } else
    {
      model = matrix(rexp(dim*n, 1), dim, n)
    }
  model=apply(model, 2, function(eps){beta1*X+5+eps})
  model=apply(model, 2, function(Y){(summary(lm(Y~X))$coefficients[2,4]
      < alfa)})

  return(sum(model)/n)
}

f(200, 1000, 0, 1)
f(200, 1000, 0, 2)
f(200, 1000, 1.5, 1)
f(200, 1000, 1.5, 2)
```

3 Zadanie 8

Mamy dane $n = 20$ obserwacji. Przetestowano model liniowy $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$ używając estymatorów $b_0 = 1, b_1 = 3, s = 4$.

3.1 95% przedział ufności dla β_1

Mając dane $s(b_1) = 1$ Wiemy, że przedział ufności dla b_1 jest dany
$b_1 \pm t_c s(b_1)$, gdzie $t_c = (1 - \alpha/2, n - 2)$
Dla $\alpha = 0.05$ i 18 stopni swodoby $t_c = 2.100922$
Więc otrzymujemy przedział ufności
3 ± 2.100922

3.2 Czy mamy pewność, że między X a Y jest zależność liniowa?

Pewności takiej nigdy nie możemy mieć. Ale ze względu na to, że 0 nie należy do wyliczonego przedziału ufności, możemy powiedzieć, że statystycznie mamy

95% pewności, że ta zależność istnieje.

3.3 Prognoza dla $E(Y)$ kiedy $X = 5$

95% przedział ufności dla $E(Y)$ kiedy $X = 5$

Wprowadźmy oznaczenie,

$$A = \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}\right]$$

Wtedy

$$\hat{\mu}_H = 1 + 3 \cdot 5 = 16$$

$$t_c = s(\hat{\mu}_H) = 3$$

$$s^2(\hat{\mu}_H) = \frac{9}{{t_c}^2} = s^2 \cdot A$$

$$A = \frac{9}{{t_c}^2 s^2}$$

$$s^2(pred) = s^2(1 + A) = s^2\left(1 + \frac{9}{{t_c}^2 s^2}\right)$$

$$t_c s(pred) = s\sqrt{{t_c}^2 + \frac{9}{s^2}} \approx 6.527$$

$$16 \pm 6.527 = (9.473, 22.527)$$

Wynik zgadza się z intuicją, ponieważ przedziały ufności są węższe.