

*федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования*

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»**

Масленников Никита
(студент ФАКИ М03-305)

И с с л е д о в а т е л ь с к а я р а б о т а

*Численное решение задачи Сода и верификация модели на точном
решении*

Долгопрудный, 2023

Содержание

I	Структура программы	4
1	Структура решения задачи Римана для уравнения Эйлера	4
1.1	Возможные конфигурационные решения	5
1.2	Соотношения для ударных волн	5
1.3	Соотношения для волн разрежения	5
1.4	Метод Ньютона	5
1.5	Распределение физических величин в решении	5
II	Теория	6
2	Задача Римана для системы уравнений Эйлера	7
2.1	Одномерные уравнения Эйлера в интегральной форме	8
2.2	Классификация разрывов	11
2.3	Адиабата Гюгонио и теорема Цемплена	11
2.4	Звуковая волна	14
3	Волны Римана	14
3.1	Система уравнений в частных производных 1 порядка гиперболического типа	15

Основные сокращения и условные обозначения

Сокращения

НУ - начальные условия для моделирования задачи или решения уравнений, системы уравнений;

УВ - ударная волна;

КР - контактный разрыв;

ВР - волна разрежения;

Условные обозначения

ρ - плотность;

v - скорость;

E - энергия на единицу объема;

e - удельная внутренняя энергия идеального газа;

γ - показатель адиабаты;

Введение

Поставлена задача создать математическую модель численного решения задачи Римана - исследование 1D течения, которое возникает при создании произвольного разрыва в среде. Получившаяся математическая модель проходит верификацию через моделирование задачи Сода и дальнейшей проверкой численного решения с точным.

Программа разбита на 2 части: вычислительная часть реализована на C++, точка входа в программу и обработка результатов написана на Python.

Цель работы:

1. создание математическую модель численного решения задачи Римана для ударной трубы;
2. верификация модели на задаче Сода;
3. реализация математической модели как отдельный вычислительный модуль для последующей обработки на Python.

Этот документ представляет собой полную информацию о структуре решения задачи Римана для уравнения Эйлера и теоретический материал. Краткое изложение процесса решения находится в Jupyter Notebook.

Часть I

Структура программы

бла бла

1 Структура решения задачи Римана для уравнения Эйлера

Уточним задачу Римана: рассмотрим задачу Коши для системы уравнений газовой динамики с разрывом I рода в начальных данных:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_R, & \text{при } x > 0 \\ \mathbf{q}_L, & \text{при } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

где:

- $\mathbf{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T$ - вектор консервативных переменных;
- $\mathbf{f} = (\rho v \quad \rho v^2 + p \quad (E + p)v)^T$;
- $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e$;
- $e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$.

Структура решения следующая:

1. Во входных данных задачи о распаде произвольного разрыва отсутствуют параметры, имеющие размерность длины и времени. Поэтому искомое решение автомодельное;
2. Класс автомодельных решений для уравнений Эйлера исчерпывается постоянными решениями, в том числе соединенными через разрыв (КР или УВ), а также ВР;

3. В каждую сторону от разрыва может распространяться не более 1 волны, ударной или разрежения.

1.1 Возможные конфигурационные решения

бебра

1.2 Соотношения для ударных волн

бебра

1.3 Соотношения для волн разрежения

бебра

1.4 Метод Ньютона

бебра

1.5 Распределение физических величин в решении

бебра

Часть II

Теория

Рассмотрим уравнение переноса в 1D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

где

- $f = \lambda u$ - дифференциальный поток.

Для численного решения применяется конечно-объемный подход: схема метода конечных объемов. Изменение величины за шаг расчетной ячейки определяется балансом потоков f через грань расчетной ячейки:

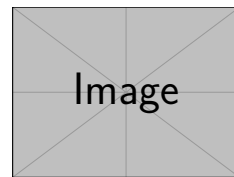
$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{1}{h} (f_{m+\frac{1}{2}}^n [u_m^n; u_{m+1}^n] - f_{m-\frac{1}{2}}^n [u_{m-1}^n; u_m^n]) \\ f_{m+\frac{1}{2}}^n [u_m^n; u_{m+1}^n] = f(u_{\text{exact}}(u_m^n; u_{m+1}^n)) \stackrel{\lambda \geq 0}{=} \lambda u_m^n \\ f_{m-\frac{1}{2}}^n [u_{m-1}^n; u_m^n] = f(u_{\text{exact}}(u_{m-1}^n; u_m^n)) \stackrel{\lambda \leq 0}{=} \lambda u_{m-1}^n \end{cases}$$

где:

- $f_*^n [u_*^n; u_*^n]$ - численный поток, рассчитанный через метод Годунова;
- $f(u_{\text{exact}}(u_*^n; u_*^n))$ - решение задачи Римана.

Существуют различные подходы к построению численного потока f : левый уголок, схема Лакса и т.д. Метод Годунова выделяется среди прочих схем: он заключается в расчете потока с использованием точного решения задачи о распаде разрыва.

Определение 1.1 (Задача о распаде разрыва). Задача Коши с кусочно-постоянными данными для задачи гиперболического типа.



Пример 1.1 (Принцип работы метода Годунова).

Каким образом устроено u_{exact} для нелинейных систем уравнений гиперболического типа и конкретно для задачи Эйлера? Ответ на этот вопрос дает краткая теория ниже.

2 Задача Римана для системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_R, & \text{при } x > 0 \\ \mathbf{q}_L, & \text{при } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

где:

- $\mathbf{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T$ - вектор консервативных переменных;
- $\mathbf{f} = (\rho v \quad \rho v^2 + p \quad (E + p)v)^T$;
- $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e$ - энергия на единицу объема;
- $e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$ - удельная внутренняя энергия идеального газа.

Определение 2.1 (Автомодельное решение). Решение, зависящее от (x, t) не произвольным образом, а зависящее от некоторого $\xi = f(x, t)$. Такое решение еще называют **самоподобным**: решение остается подобным себе с течением времени.

Решение этой задачи автомодельное - зависит от автомодельной величины $\frac{x}{t}$, т.е. самоподобно течению времени и включает в себя лишь УВ, КР и ВР:

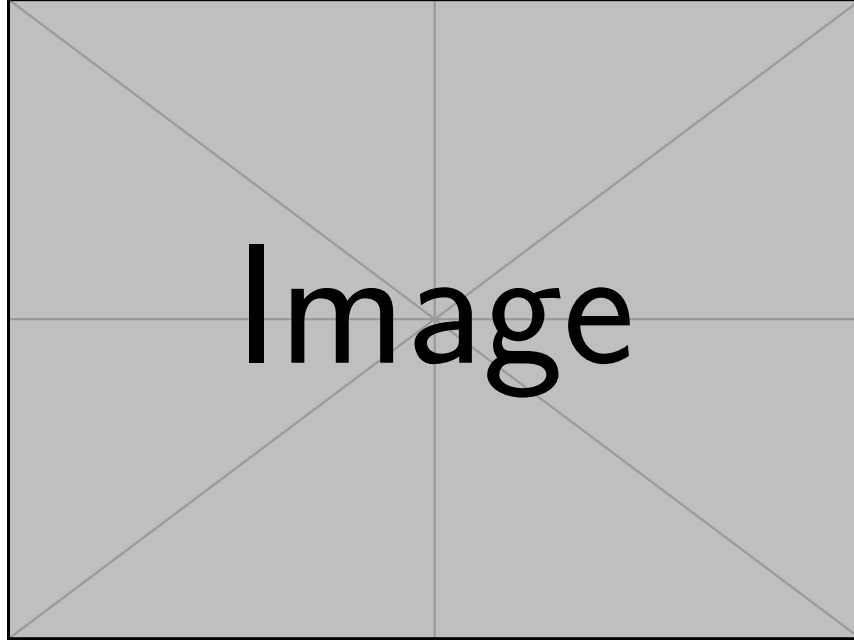


Рис. 1: Все 4 конфигурации течения

Определение 2.2 (Ударная волна). Газодинамический разрыв, который движется внутри среды с постоянной скоростью. Величины ρ , p , T , v испытывают скачок.

Определение 2.3 (Волна разрежения). Непрерывное решение, ограниченное двумя прямыми линиями. Величины ρ , p , T , v непрерывны.

Определение 2.4 (Контактный разрыв). Газодинамический разрыв, образование, по разные стороны от которого, среда движется с той же скоростью, что и разрыв. В отличие от УВ, через КР не протекает вещества и давление с обеих его сторон одинаково. Контактные разрывы также носят название **тангенциальный разрыв**. Величины ρ , T , v испытывают скачок.

2.1 Одномерные уравнения Эйлера в интегральной форме

Уравнения Эйлера не содержат неразрывных решений, все функции дифференцируемы. Поэтому нужно работать с интегральной формой записи:

$$\begin{cases} \oint (pdx - \rho v dt) = 0 \\ \oint (\rho v dx - [p + \rho v^2] dt) = 0 \\ \oint (\rho [e + \frac{v^2}{2}] dx - \rho v [e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}] dt) = 0 \end{cases}$$

Течение одномерное и плоское. Вывод интегральной формы (которая в действительности **первична** дифференциальной) "постулируется" и доказывается через систему дифференциальных уравнений и формулу Грина. Рассмотрим разрыв при $(x, t) = (0, 0)$:

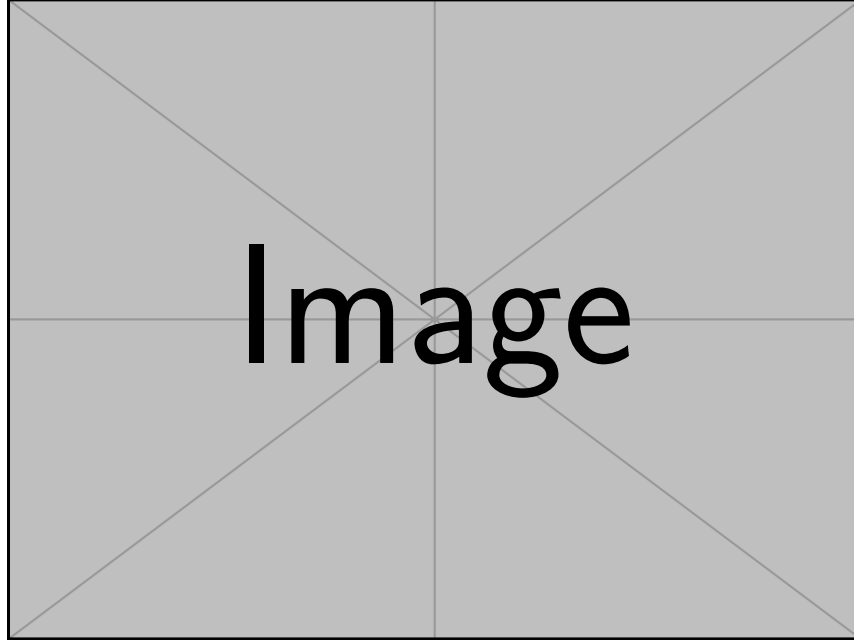


Рис. 2: Момент разрыва

Рассмотрим пространство (x, t) , в котором кривая PP' - траектория разрыва. Тогда смещения на dx задается уравнением:

$$dx = D(t)dt \quad (4)$$

Выберем контур $AA'B'B$ вокруг PP' :

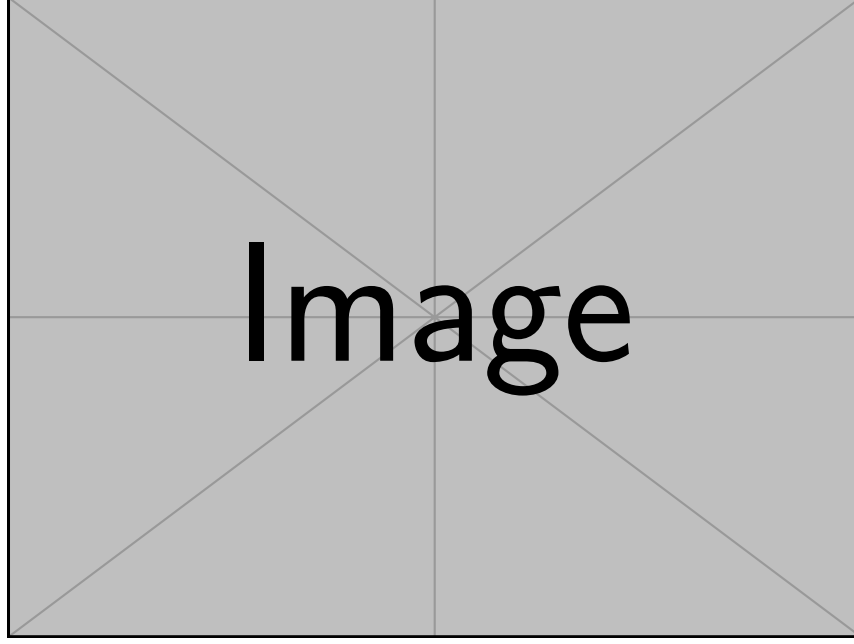


Рис. 3: Схематичное изображение траектории разрыва и контура интегрирования

Пусть $\Xi = \Xi(\xi)$, где $\xi = \xi(x, t)$ - какой-нибудь интегранд из 1. Тогда:

$$\oint_{AA'B'B} \Xi d\xi = \oint_{AA'} \Xi d\xi + \oint_{A'B'} \Xi d\xi + \oint_{B'B} \Xi d\xi + \oint_{BA} \Xi d\xi = 0$$

Далее, устремляем $AA', BB' \rightarrow 0$ и применяем параметризацию 4:

$$\oint_{AA'B'B} \Xi d\xi = \oint_{A'B'} \Xi d\xi + \oint_{BA} \Xi d\xi = \int_{t-1}^{t_2} \Xi_{[0]} d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \Xi_{[1]} d\xi = 0$$

где индексы $[0]$ и $[1]$ означают среды до и после траектории разрыва.

Для 2 это будет:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\rho_0 D dt - \rho_0 v_0 dt) + \int_{t_1}^{t_2} (\rho_1 D dt - \rho_1 v_1 dt) = \int_{t_1}^{t_2} (\rho_0 [D - v_0] - \rho_1 [D - v_1]) dt = 0$$

Т.к. t выбрано произвольно, то интеграл равен 0 только тогда, когда интегранд равен нулю, а значит $(\rho_0 [D - v_0] - \rho_1 [D - v_1]) = 0$.

Определение 2.1 (Соотношение Ранкина - Гюгоннио).

$$\rho_0 [D - v_0] = \rho_1 [D - v_1]$$

Если ввести обозначение $[A] = A_1 - A_0$ и ввести $u = v - D$ - скорость газа в системе координат, движущихся вместе с разрывом со скоростью D , то 1 можно переписать как:

$$\begin{cases} [\rho u] = 0 \\ [\rho u^2 + p] = 0 \\ [e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}] = 0 \\ \rho u \neq 0 \end{cases}$$

По факту доказательство нестрогое. Оно верно, если постулировать законы сохранения с утверждением, что "среда удовлетворяет таким законам".

2.2 Классификация разрывов

Путь $m = \rho_0 u_0 = \rho_1 u_1$ - поток массы вещества через разрыв. Тогда существует лишь 2 случая потока:

а) $m = 0$: Контактные разрывы. Из 5 следует, что $2 = 0$, а значит:

$$\begin{cases} v_1 = v_0 = 0 \\ p_1 = p_0 \\ \rho_1 \neq \rho_0 \end{cases}$$

б) $m \neq 0$: Ударные волны. Из 5 следует, что $2 \neq 0$ и:

$$\begin{cases} v_1 \neq v_0 \\ p_1 \neq p_0 \\ \rho_1 \neq \rho_0 \end{cases}$$

2.3 Адиабата Гюгонио и теорема Цемплена

Будем исследовать т.н. "Ударные волны разрежения" и вопрос их существования. В случае УВ $m \neq 0$ и будем работать с 1. При $u = v - D$ и обозначении $\eta = \rho^{-1}$ следует, что:

$$\begin{cases} \frac{\eta_0}{\eta_1} = \frac{u_0}{u_1} \\ \frac{u_0^2}{\eta_0} - \frac{u_1^2}{\eta_1} = p_1 - p_0 \\ e_1 - e_0 = \frac{u_0^2 - u_1^2}{2} + p_0 \eta_0 - p_1 \eta_1 \end{cases}$$

После исключения из рассмотрения скорости, получим следующие формулы. η и p понадобятся для адиабаты Гюгонио, сама скорость u - для определения скорости скачка относительно газа перед и за УВ:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 \frac{\eta_0}{\eta_1} \\ u_0^2 = \eta_0^2 \frac{p_1 - p_0}{\eta_0 - \eta_1} \\ u_1 = u_0 \frac{\eta_1}{\eta_0} \\ u_1^2 = \eta_1^2 \frac{p_1 - p_0}{\eta_0 - \eta_1} \end{cases}$$

Определение 2.2 (Адиабата Гюгонио). На диаграмме $(\frac{\eta}{\eta_0}; \frac{p}{p_0})$ описывает все возможные состояния за УВ, куда можно перевести газ, путив по нему УВ:

$$e_1(p_1, \eta_1) - e_0(p_0, \eta_0) = \frac{(p_1 + p_0)(\eta_0 - \eta_1)}{2}$$

Рассмотрим идеальный газ, для которого $e(p, \eta) = \frac{p\eta}{\gamma-1}$:

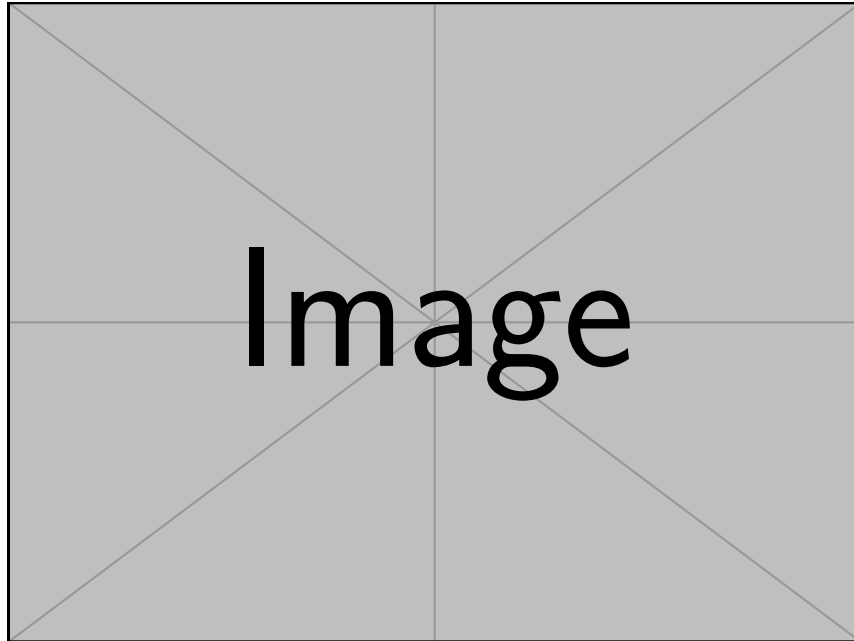


Рис. 4: Адиабата Гюгонио и ее асимптоты

где:

- вертикальная асимптота: не можем считать газ более $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ раз;

- горизонтальная асимптота: внезапно отрицательная!? Все потому что законов сохранения энергии 1 недостаточно для описания всех возможных *физических* состояний.

Теорема 2.1 (Теорема Цемплена). *Не существует УВ разрежения: $\Delta S \geq 0$.*

То есть теорема Цемплена учитывает Второй закон термодинамики. Получается, что адиабата Гюгонио ложна и не соответствует действительности? На самом деле нет. Переход вещества через ударную волну является **термодинамически необратимым** процессом, поэтому при прохождении через вещество ударной волны удельная энтропия увеличивается.

Увеличение энтропии означает наличие диссипации (внутри ударной волны, являющейся узкой переходной зоной, существенны, в частности, вязкость и теплопроводность). Это, в частности, приводит к тому, что тело, движущееся в идеальной жидкости с возникновением ударных волн, испытывает силу сопротивления, то есть для такого движения парадокс Д'Аламбера не имеет места.

Ударную адиабату Гюгонио не следует путать с адиабатой Пуассона, описывающей процесс с постоянной энтропией S то есть такие процессы **термодинамически обратимы**. В отличие от адиабаты Пуассона, для которой $S(p, \eta) = \text{const}$ уравнение ударной адиабаты нельзя написать в виде $f(p, \eta) = \text{const}$ где f — однозначная функция двух аргументов: адиабаты Гюгонио для заданного вещества составляют двухпараметрическое семейство кривых (каждая кривая определяется заданием как η так и p тогда как адиабаты Пуассона — однопараметрическое:

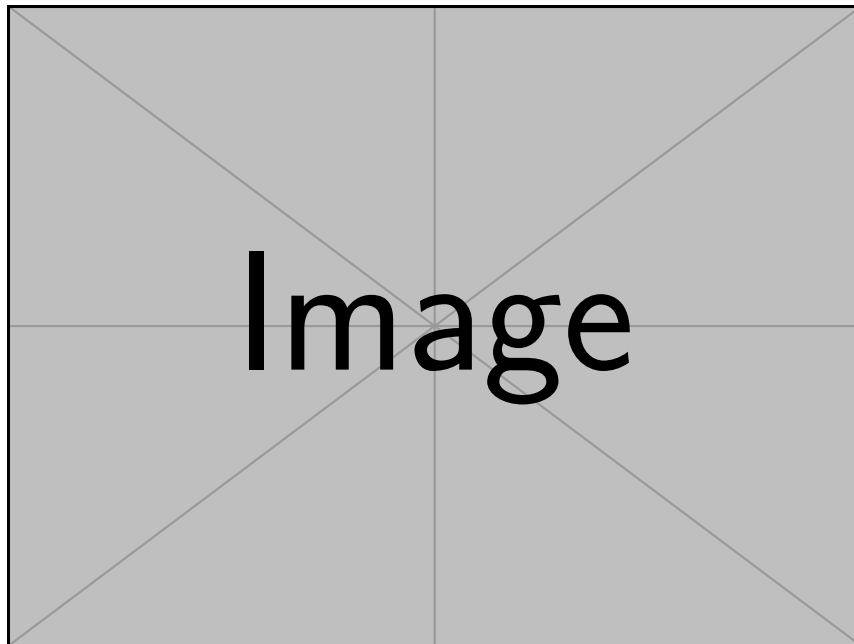


Рис. 5: Адиабаты Гюгонио и Пуассона

Стоит отметить важный факт: две адиабаты идеально сшиваются по второй производной в точке пересечения. Это знание понадобится для решения задачи Римана (Сода) на (p-v) диаграмме.

2.4 Звуковая волна

Из 15 мы выражаем u_0 и u_1 . Учитывая, что $c^2 = \gamma p \eta$, вычисляем $\frac{u_i^2}{c_i^2}$:

$$\begin{cases} \frac{u_0^2}{c_0^2} = \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1)\frac{p_1}{p_0}}{2\gamma} \\ \frac{u_1^2}{c_1^2} = \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1)\frac{p_0}{p_1}}{2\gamma} \end{cases}$$

При устремлении $p_1 \rightarrow p_0$ и $\eta_1 \rightarrow \eta_0$ и $\frac{u_i^2}{c_i^2} \rightarrow 1$ следует, что УВ бесконечно малой интенсивности распределяется относительно газа со скоростью звука. Т.е. фронт УВ распространяется относительно фона (индекс 0) со сверхзвуковой скоростью, а относительно газа - с дозвуковой:

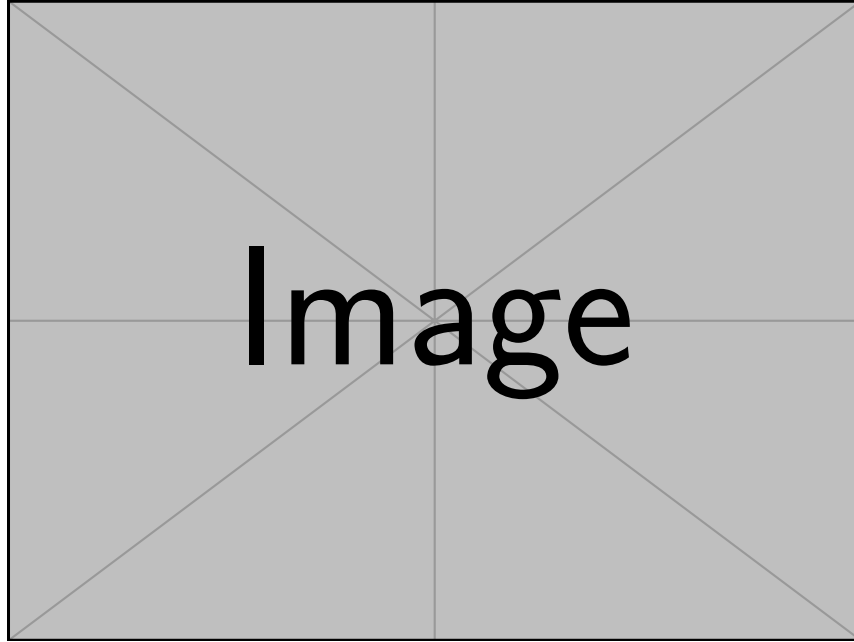


Рис. 6: Скорость распространения фронта УВ

3 Волны Римана

Будем говорить о характеристическом анализе системы уравнений Эйлера, условий совместности вдоль характеристик и автомодельном решении уравнений

Эйлера. Существует две записи системы уравнений Эйлера:

- Дивергентная векторная форма:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T \\ \mathbf{f} = (\rho v \quad \rho v^2 + p \quad (E + p)v)^T \\ E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e \\ e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} \end{cases}$$

- Дивергентная покомпонентная форма:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E - p)v)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

3.1 Система уравнений в частных производных 1 порядка гиперболического типа

Вектор консервативных переменных: $\mathbf{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T$.

Вектор примитивных переменных: $\mathbf{U} = \mathbf{w} = (\rho \quad v \quad p)^T$

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(t, x, \mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{f}(t, x, \mathbf{U})$$

где:

- $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^I$
- $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^I$
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I \times I}$

Определение 3.1 (Уравнение гиперболического типа). Класс дифференциальных уравнений в частных производных, для которых собственные значения $\lambda_i \in \mathbb{R}$, а собственные вектора образуют базис: $|\Omega_R| \neq 0$.

Поиск собственных значений и векторов начинается с $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$, откуда $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1..I}$. Далее находим соответствующие собственные вектора $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^I$: $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{w}_i = 0$.

Мы хотим получить характеристическую покомпонентную форму записи 31. Для этого мы будем почленно дифференцировать слагаемые (как например $\frac{\partial \rho v}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x}$) и для 31 применим $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e$ и $e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$, как для идеального газа. Получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Систему 32 можно переписать в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0$$

где:

- $\mathbf{w} = (\rho \quad v \quad p)^T$ - вектор примитивных переменных;
- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma p & v \end{pmatrix}$ - матрица примитивных переменных.

Исследование на гиперболичность:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} v - \lambda & \rho & 0 \\ 0 & v - \lambda & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma p & v - \lambda \end{vmatrix} = (v - \lambda)^3 - \frac{\gamma p}{\rho}(v - \lambda) = 0$$