

*федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования*

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»**

*Масленников Никита*  
(студент ФАКИ М03-305)

**И с с л е д о в а т е л ь с к а я   р а б о т а**

*Численное решение задачи Сода и верификация модели на точном  
решении*

Долгопрудный, 2023

# Содержание

<b>I</b>	<b>Структура программы</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Структура решения задачи Римана для уравнения Эйлера</b>	<b>4</b>
1.1	Возможные конфигурационные решения . . . . .	5
1.2	Соотношения для ударных волн . . . . .	5
1.3	Соотношения для волн разрежения . . . . .	5
1.4	Метод Ньютона . . . . .	5
1.5	Распределение физических величин в решении . . . . .	5
<b>II</b>	<b>Теория</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Задача Римана для системы уравнений Эйлера</b>	<b>7</b>
2.1	Одномерные уравнения Эйлера в интегральной форме . . . . .	8
2.2	Классификация разрывов . . . . .	11
2.3	Адиабата Гюгонио и теорема Цемплена . . . . .	11
2.4	Звуковая волна . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Волны Римана</b>	<b>14</b>

# Основные сокращения и условные обозначения

## Сокращения

НУ - начальные условия для моделирования задачи или решения уравнений, системы уравнений;

УВ - ударная волна;

КР - контактный разрыв;

ВР - волна разрежения;

## Условные обозначения

$\rho$  - плотность;

$v$  - скорость;

$E$  - энергия на единицу объема;

$e$  - удельная внутренняя энергия идеального газа;

$\gamma$  - показатель адиабаты;

# Введение

Поставлена задача создать математическую модель численного решения задачи Римана - исследование 1D течения, которое возникает при создании произвольного разрыва в среде. Получившаяся математическая модель проходит верификацию через моделирование задачи Сода и дальнейшей проверкой численного решения с точным.

Программа разбита на 2 части: вычислительная часть реализована на C++, точка входа в программу и обработка результатов написана на Python.

## **Цель работы:**

1. создание математическую модель численного решения задачи Римана для ударной трубы;
2. верификация модели на задаче Сода;
3. реализация математической модели как отдельный вычислительный модуль для последующей обработки на Python.

Этот документ представляет собой полную информацию о структуре решения задачи Римана для уравнения Эйлера и теоретический материал. Краткое изложение процесса решения находится в Jupyter Notebook.

# Часть I

## Структура программы

бла бла

### 1 Структура решения задачи Римана для уравнения Эйлера

Уточним задачу Римана: рассмотрим задачу Коши для системы уравнений газовой динамики с разрывом I рода в начальных данных:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_R, & \text{при } x > 0 \\ \mathbf{q}_L, & \text{при } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

где:

- $\mathbf{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T$  - вектор консервативных переменных;
- $\mathbf{f} = (\rho v \quad \rho v^2 + p \quad (E + p)v)^T$ ;
- $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e$ ;
- $e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$ .

Структура решения следующая:

1. Во входных данных задачи о распаде произвольного разрыва отсутствуют параметры, имеющие размерность длины и времени. Поэтому искомое решение автомодельное;
2. Класс автомодельных решений для уравнений Эйлера исчерпывается постоянными решениями, в том числе соединенными через разрыв (КР или УВ), а также ВР;

3. В каждую сторону от разрыва может распространяться не более 1 волны, ударной или разрежения.

## **1.1 Возможные конфигурационные решения**

бебра

## **1.2 Соотношения для ударных волн**

бебра

## **1.3 Соотношения для волн разрежения**

бебра

## **1.4 Метод Ньютона**

бебра

## **1.5 Распределение физических величин в решении**

бебра

# Часть II

## Теория

Рассмотрим уравнение переноса в 1D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

где

- $f = \lambda u$  - дифференциальный поток.

Для численного решения применяется конечно-объемный подход: схема метода конечных объемов. Изменение величины за шаг расчетной ячейки определяется балансом потоков  $f$  через грань расчетной ячейки:

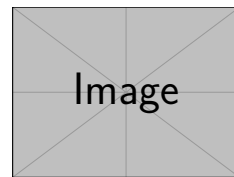
$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{1}{h} (f_{m+\frac{1}{2}}^n[u_m^n; u_{m+1}^n] - f_{m-\frac{1}{2}}^n[u_{m-1}^n; u_m^n]) \\ f_{m+\frac{1}{2}}^n[u_m^n; u_{m+1}^n] = f(u_{\text{exact}}(u_m^n; u_{m+1}^n)) \stackrel{\lambda \geq 0}{=} \lambda u_m^n \\ f_{m-\frac{1}{2}}^n[u_{m-1}^n; u_m^n] = f(u_{\text{exact}}(u_{m-1}^n; u_m^n)) \stackrel{\lambda \leq 0}{=} \lambda u_{m-1}^n \end{cases}$$

где:

- $f_*^n[u_*^n; u_*^n]$  - численный поток, рассчитанный через метод Годунова;
- $f(u_{\text{exact}}(u_*^n; u_*^n))$  - решение задачи Римана.

Существуют различные подходы к построению численного потока  $f$ : левый уголок, схема Лакса и т.д. Метод Годунова выделяется среди прочих схем: он заключается в расчете потока с использованием точного решения задачи о распаде разрыва.

**Определение 1.1** (Задача о распаде разрыва). Задача Коши с кусочно-постоянными данными для задачи гиперболического типа.



**Пример 1.1** (Принцип работы метода Годунова).

Каким образом устроено  $u_{exact}$  для нелинейных систем уравнений гиперболического типа и конкретно для задачи Эйлера? Ответ на этот вопрос дает краткая теория ниже.

## 2 Задача Римана для системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_R, & \text{при } x > 0 \\ \mathbf{q}_L, & \text{при } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

где:

- $\mathbf{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T$  - вектор консервативных переменных;
- $\mathbf{f} = (\rho v \quad \rho v^2 + p \quad (E + p)v)^T$ ;
- $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e$  - энергия на единицу объема;
- $e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$  - удельная внутренняя энергия идеального газа.

**Определение 2.1** (Автомодельное решение). Решение, зависящее от  $(x, t)$  не произвольным образом, а зависящее от некоторого  $\xi = f(x, t)$ . Такое решение еще называют **самоподобным**: решение остается подобным себе с течением времени.

Решение этой задачи автомодельное - зависит от автомодельной величины  $\frac{x}{t}$ , т.е. самоподобно течению времени и включает в себя лишь УВ, КР и ВР:



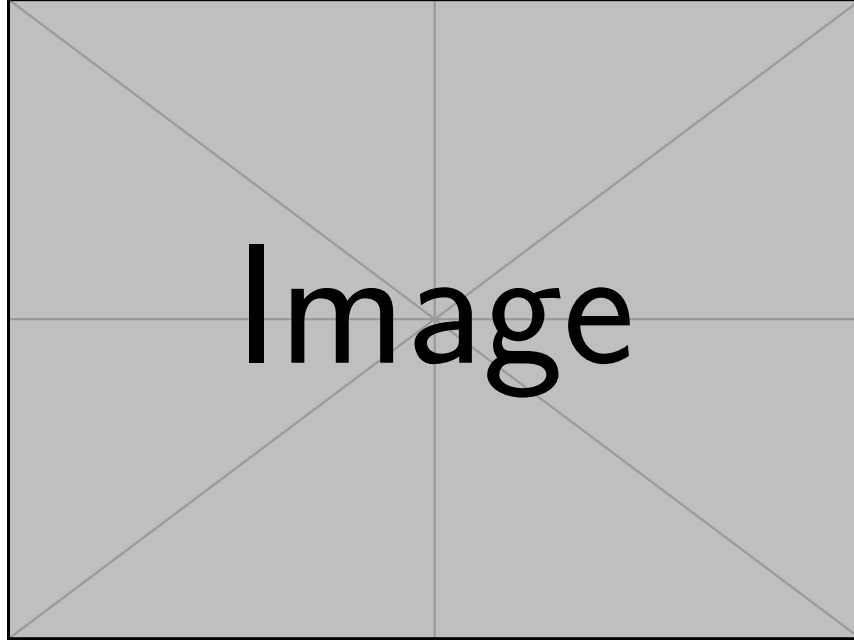


Рис. 1: Все 4 конфигурации течения

**Определение 2.2** (Ударная волна). Газодинамический разрыв, который движется внутри среды с постоянной скоростью. Величины  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $v$  испытывают скачок.

**Определение 2.3** (Волна разрежения). Непрерывное решение, ограниченное двумя прямыми линиями. Величины  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $v$  непрерывны.

**Определение 2.4** (Контактный разрыв). Газодинамический разрыв, образование, по разные стороны от которого, среда движется с той же скоростью, что и разрыв. В отличие от УВ, через КР не протекает вещества и давление с обеих его сторон одинаково. Контактные разрывы также носят название **тангенциальный разрыв**. Величины  $\rho$ ,  $T$ ,  $v$  испытывают скачок.

## 2.1 Одномерные уравнения Эйлера в интегральной форме

Уравнения Эйлера не содержат неразрывных решений, все функции дифференцируемы. Поэтому нужно работать с интегральной формой записи:

$$\begin{cases} \oint (pdx - \rho v dt) = 0 \\ \oint (\rho v dx - [p + \rho v^2] dt) = 0 \\ \oint (\rho [e + \frac{v^2}{2}] dx - \rho v [e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}] dt) = 0 \end{cases}$$

Течение одномерное и плоское. Вывод интегральной формы (которая в действительности **первична** дифференциальной) "постулируется" и доказывается через систему дифференциальных уравнений и формулу Грина. Рассмотрим разрыв при  $(x, t) = (0, 0)$ :

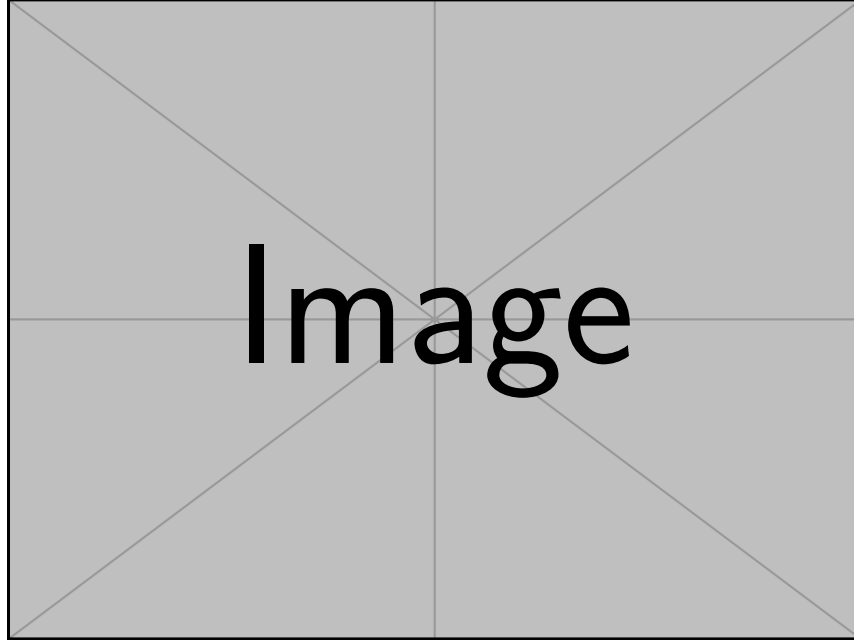


Рис. 2: Момент разрыва

Рассмотрим пространство  $(x, t)$ , в котором кривая  $PP'$  - траектория разрыва. Тогда смещения на  $dx$  задается уравнением:

$$dx = D(t)dt \quad (4)$$

Выберем контур  $AA'B'B$  вокруг  $PP'$ :

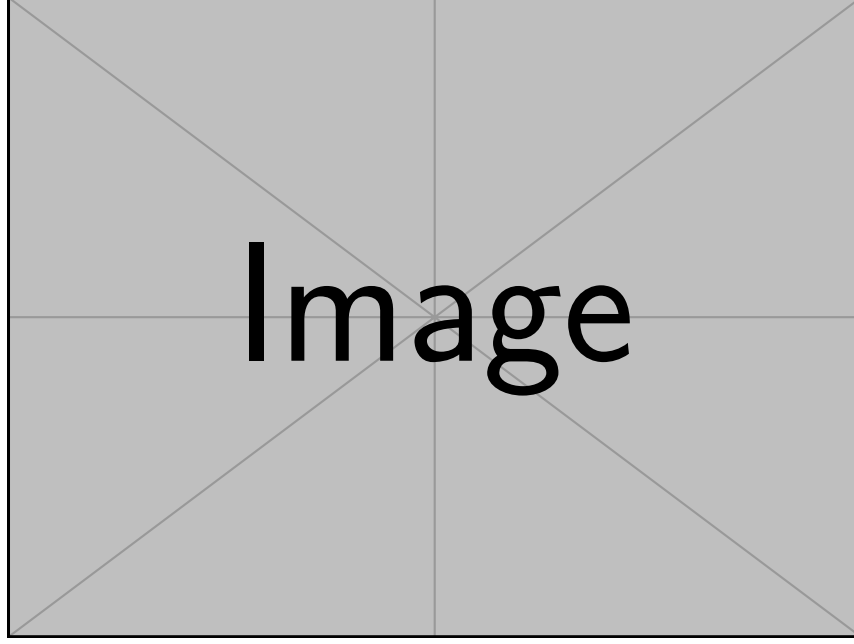


Рис. 3: Схематичное изображение траектории разрыва и контура интегрирования

Пусть  $\Xi = \Xi(\xi)$ , где  $\xi = \xi(x, t)$  - какой-нибудь интегранд из 1. Тогда:

$$\oint_{AA'B'B} \Xi d\xi = \oint_{AA'} \Xi d\xi + \oint_{A'B'} \Xi d\xi + \oint_{B'B} \Xi d\xi + \oint_{BA} \Xi d\xi = 0$$

Далее, устремляем  $AA', BB' \rightarrow 0$  и применяем параметризацию 4:

$$\oint_{AA'B'B} \Xi d\xi = \oint_{A'B'} \Xi d\xi + \oint_{BA} \Xi d\xi = \int_{t-1}^{t_2} \Xi_{[0]} d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \Xi_{[1]} d\xi = 0$$

где индексы  $[0]$  и  $[1]$  означают среды до и после траектории разрыва.

Для 2 это будет:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\rho_0 D dt - \rho_0 v_0 dt) + \int_{t_1}^{t_2} (\rho_1 D dt - \rho_1 v_1 dt) = \int_{t_1}^{t_2} (\rho_0 [D - v_0] - \rho_1 [D - v_1]) dt = 0$$

Т.к.  $t$  выбрано произвольно, то интеграл равен 0 только тогда, когда интегранд равен нулю, а значит  $(\rho_0 [D - v_0] - \rho_1 [D - v_1]) = 0$ .

**Определение 2.1** (Соотношение Ранкина - Гюгоннио).

$$\rho_0 [D - v_0] = \rho_1 [D - v_1]$$

Если ввести обозначение  $[A] = A_1 - A_0$  и ввести  $u = v - D$  - скорость газа в системе координат, движущихся вместе с разрывом со скоростью  $D$ , то 1 можно переписать как:

$$\begin{cases} [\rho u] = 0 \\ [\rho u^2 + p] = 0 \\ [e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}] = 0 \\ \rho u \neq 0 \end{cases}$$

По факту доказательство нестрогое. Оно верно, если постулировать законы сохранения с утверждением, что "среда удовлетворяет таким законам".

## 2.2 Классификация разрывов

Путь  $m = \rho_0 u_0 = \rho_1 u_1$  - поток массы вещества через разрыв. Тогда существует лишь 2 случая потока:

а)  $m = 0$ : Контактные разрывы. Из 5 следует, что  $2 = 0$ , а значит:

$$\begin{cases} v_1 = v_0 = 0 \\ p_1 = p_0 \\ \rho_1 \neq \rho_0 \end{cases}$$

б)  $m \neq 0$ : Ударные волны. Из 5 следует, что  $2 \neq 0$  и:

$$\begin{cases} v_1 \neq v_0 \\ p_1 \neq p_0 \\ \rho_1 \neq \rho_0 \end{cases}$$

## 2.3 Адиабата Гюгонио и теорема Цемплена

Будем исследовать т.н. "Ударные волны разрежения" и вопрос их существования. В случае УВ  $m \neq 0$  и будем работать с 1. При  $u = v - D$  и обозначении  $\eta = \rho^{-1}$  следует, что:

$$\begin{cases} \frac{\eta_0}{\eta_1} = \frac{u_0}{u_1} \\ \frac{u_0^2}{\eta_0} - \frac{u_1^2}{\eta_1} = p_1 - p_0 \\ e_1 - e_0 = \frac{u_0^2 - u_1^2}{2} + p_0 \eta_0 - p_1 \eta_1 \end{cases}$$

После исключения из рассмотрения скорости, получим следующие формулы.  $\eta$  и  $p$  понадобятся для адиабаты Гюгонио, сама скорость  $u$  - для определения скорости скачка относительно газа перед и за УВ:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 \frac{\eta_0}{\eta_1} \\ u_0^2 = \eta_0^2 \frac{p_1 - p_0}{\eta_0 - \eta_1} \\ u_1 = u_0 \frac{\eta_1}{\eta_0} \\ u_1^2 = \eta_1^2 \frac{p_1 - p_0}{\eta_0 - \eta_1} \end{cases}$$

**Определение 2.2** (Адиабата Гюгонио). На диаграмме  $(\frac{\eta}{\eta_0}; \frac{p}{p_0})$  описывает все возможные состояния за УВ, куда можно перевести газ, путив по нему УВ:

$$e_1(p_1, \eta_1) - e_0(p_0, \eta_0) = \frac{(p_1 + p_0)(\eta_0 - \eta_1)}{2}$$

Рассмотрим идеальный газ, для которого  $e(p, \eta) = \frac{p\eta}{\gamma-1}$ :

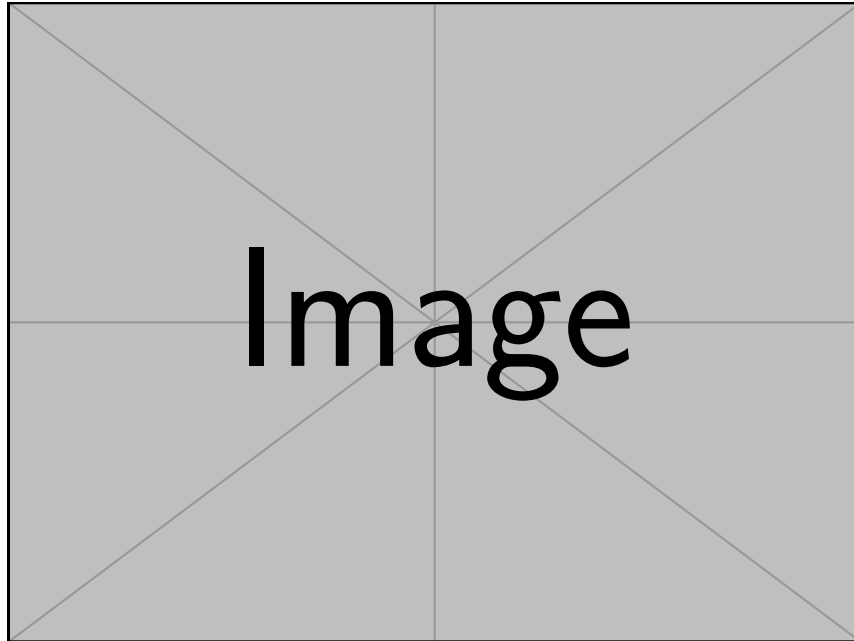


Рис. 4: Адиабата Гюгонио и ее асимптоты

где:

- вертикальная асимптота: не можем считать газ более  $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$  раз;

- горизонтальная асимптота: внезапно отрицательная!? Все потому что законов сохранения энергии 1 недостаточно для описания всех возможных *физических* состояний.

**Теорема 2.1** (Теорема Цемплена). *Не существует УВ разрежения:  $\Delta S \geq 0$ .*

То есть теорема Цемплена учитывает Второй закон термодинамики. Получается, что адиабата Гюгонио ложна и не соответствует действительности? На самом деле нет. Переход вещества через ударную волну является **термодинамически необратимым** процессом, поэтому при прохождении через вещество ударной волны удельная энтропия увеличивается.

Увеличение энтропии означает наличие диссипации (внутри ударной волны, являющейся узкой переходной зоной, существенны, в частности, вязкость и теплопроводность). Это, в частности, приводит к тому, что тело, движущееся в идеальной жидкости с возникновением ударных волн, испытывает силу сопротивления, то есть для такого движения парадокс Д'Аламбера не имеет места.

Ударную адиабату Гюгонио не следует путать с адиабатой Пуассона, описывающей процесс с постоянной энтропией  $S$  то есть такие процессы **термодинамически обратимы**. В отличие от адиабаты Пуассона, для которой  $S(p, \eta) = \text{const}$  уравнение ударной адиабаты нельзя написать в виде  $f(p, \eta) = \text{const}$  где  $f$  — однозначная функция двух аргументов: адиабаты Гюгонио для заданного вещества составляют двухпараметрическое семейство кривых (каждая кривая определяется заданием как  $\eta$  так и  $p$  тогда как адиабаты Пуассона — однопараметрическое:

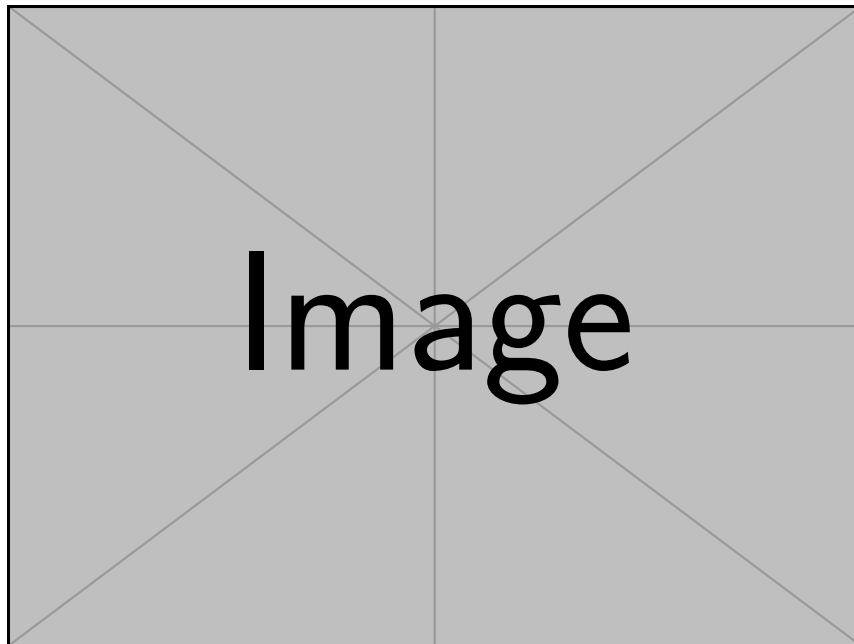


Рис. 5: Адиабаты Гюгонио и Пуассона

Стоит отметить важный факт: две адиабаты идеально сшиваются по второй производной в точке пересечения. Это знание понадобится для решения задачи Римана (Сода) на (p-v) диаграмме.

## 2.4 Звуковая волна

Из 15 мы выражаем  $u_0$  и  $u_1$ . Учитывая, что  $c^2 = \gamma p \eta$ , вычисляем  $\frac{u_i^2}{c_i^2}$ :

$$\begin{cases} \frac{u_0^2}{c_0^2} = \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1)\frac{p_1}{p_0}}{2\gamma} \\ \frac{u_1^2}{c_1^2} = \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1)\frac{p_0}{p_1}}{2\gamma} \end{cases}$$

При устремлении  $p_1 \rightarrow p_0$  и  $\eta_1 \rightarrow \eta_0$  и  $\frac{u_i^2}{c_i^2} \rightarrow 1$  следует, что УВ бесконечно малой интенсивности распределяется относительно газа со скоростью звука. Т.е. фронт УВ распространяется относительно фона (индекс 0) со сверхзвуковой скоростью, а относительно газа - с дозвуковой:

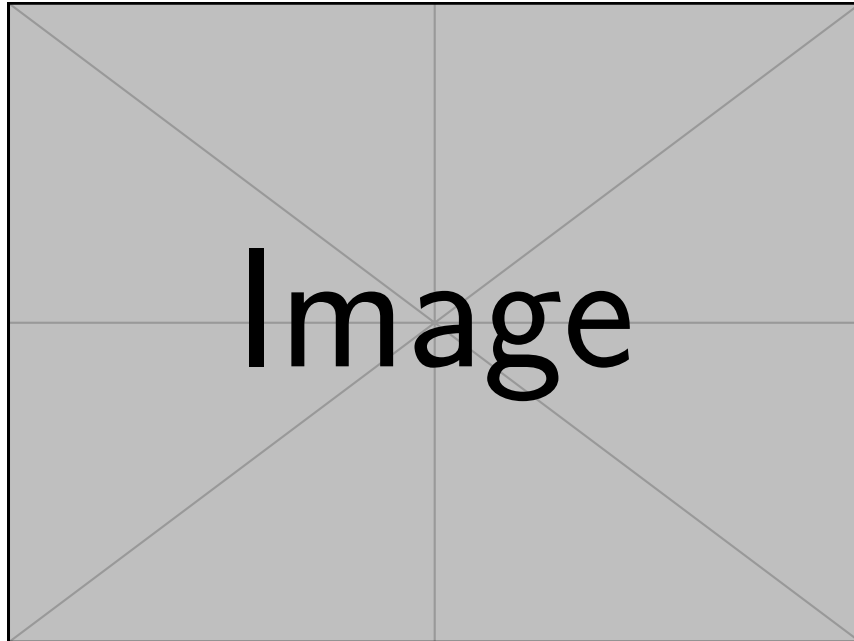


Рис. 6: Скорость распространения фронта УВ

## 3 Волны Римана

текст