федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

Масленников Никита
(студент ФАКИ М03-305)

Исследовательская работа

Численное решение задачи Сода и верификация модели на точном решении

Долгопрудный, 2023

Оглавление

Основные сокращения и условные обозначения

Сокращения

НУ - начальные условия для моделирования задачи или решения уравнений, системы уравнений;

УВ - ударная волна;

КР - контактный разрыв;

ВР - волна разрежения;

Условные обозначения

ρ - плотность;

v - скорость;

E - энергия на единицу объема;

e - удельная внутренняя энергия идеального газа;

Введение

Поставлена задача создать математическую модель численного решения задачи Римана - исследование 1D течения, которое возникает при создании произвольного разрыва в среде. Получившаяся математическая модель проходит верификацию через моделирование задачи Сода и дальнейшей проверкой численного решения с точным.

Программа разбита на 2 части: вычислительная часть реализована на C++, точка входа в программу и обработка результатов написана на Python.

Цель работы:

1. создание математическую модель численного решения задачи Римана для ударной трубы;
2. верификация модели на задаче Сода;
3. реализация математической модели как отдельный вычислительный модуль для последующей обработки на Python.

Этот документ представляет собой полную информацию о структуре решения задачи Римана для уравнения Эйлера и теоретический материал. Краткое изложение процесса решения находится в Jupyter Notebook.

Часть I

Структура программы

бла бла

0.1 Структура решения задачи Римана для уравнения Эйлера

Уточним задачу Римана: рассмотрим задачу Коши для системы уравнений газовой динамики с разрывом I рода в начальных данных:

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} = 0 \\ \boldsymbol{q}(x,0) = \begin{cases} \boldsymbol{q}_R, & \text{при } x > 0 \\ \boldsymbol{q}_L, & \text{при } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

где:

- $\boldsymbol{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T$ - вектор консервативных переменных;
- $\boldsymbol{f} = (\rho v \quad \rho v^2 + p \quad (E+p)v)^T$;
- $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e$;
- $e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$.

Структура решения следующая:

1. Во входных данных задачи о распаде произвольного разрыва отсутствуют параметры, имеющие размерность длины и времени. Поэтому искомое решение автомодельное;
2. Класс автомодельных решений для уравнений Эйлера исчерпывается постоянными решениями, в том числе соединенными через разрыв (КР или УВ), а также ВР;
3. В каждую сторону от разрыва может распространяться не более 1 волны, ударной или разрежения.

0.1.1 Возможные конфигурационные решения

бебра

0.1.2 Соотношения для ударных волн

бебра

0.1.3 Соотношения для волн разрежения

бебра

0.1.4 Метод Ньютона

бебра

0.1.5 Распределение физических величин в решении

бебра

Часть II

Теория

Рассмотрим уравнение переноса в 1D:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} = 0$$

где

- $f = \lambda u$ - дифференциальный поток.

Для численного решения применяется конечно-объемный подход: схема метода конечных объемов. Изменение величины за шаг рассчетной ячейки определяется балансом потоков f через грань рассчетной ячейки:

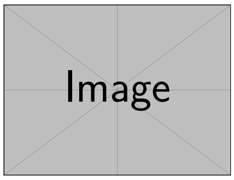
$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{1}{h}(f^n_{m+\frac{1}{2}}[u_m^n; u_{m+1}^n] - f^n_{m-\frac{1}{2}}[u_{m-1}^n; u_m^n]) \\ f^n_{m+\frac{1}{2}}[u_m^n; u_{m+1}^n] = f(u_{\text{exact}}(u_m^n; u_{m+1}^n)) \overset{\lambda \geq 0}{=} \lambda u_m^n \\ f^n_{m-\frac{1}{2}}[u_{m-1}^n; u_m^n] = f(u_{\text{exact}}(u_{m-1}^n; u_{m+1}^n)) \overset{\lambda \geq 0}{=} \lambda u_{m-1}^n \end{cases}$$

где:

- $f^n_*[u^n_*; u^n_*]$ - численный поток, рассчитанный через метод Годунова;
- $f(u_{\text{exact}}(u^n_*; u^n_*))$ - решение задачи Римана.

Существуют различные подходы к построению численного потока f: левый уголок. схема Лакса и т.д. Метод Годунова выделяется среди прочих схем: он заключается в расчете потока с использованием точного решения задачи о распаде разрыва.

Определение 0.1.1 (Задача о распаде разрыва)**.** Задача Коши с кусочно-постоянными данными для задачи гиперболического типа.

Пример 0.1.1 (Принцип работы метода Годунова)**.** 

Каким образом устроено u_{exact} для нелинейных систем уравнений гиперболического типа и конкретно для задачи Эйлера? Ответ на этот вопрос дает краткая теория ниже.

0.2 Задача римана для системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} = 0 \\ \boldsymbol{q}(x,0) = \begin{cases} \boldsymbol{q}_R, & \text{при } x > 0 \\ \boldsymbol{q}_L, & \text{при } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

где:

- $\boldsymbol{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T$ - вектор консервативных переменных;
- $\boldsymbol{f} = (\rho v \quad \rho v^2 + p \quad (E+p)v)^T$;
- $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e$ - энергия на единицу объема;
- $e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$ - удельная внутренняя энергия идеального газа.

Определение 0.2.1 (Автомодельное решение)**.** Решение, зависящее от (x,t) не произвольным образом, а зависящее от некоторого $\xi = f(x,t)$. Такое решение еще называют **самоподобным**: решение остается подобным себе с течением времени.

Решение этой задачи автомодельное - зависит от автомодельной величины $\frac{x}{t}$, т.е. самоподобно течению времени и включает в себя лишь УВ, КР и ВР:

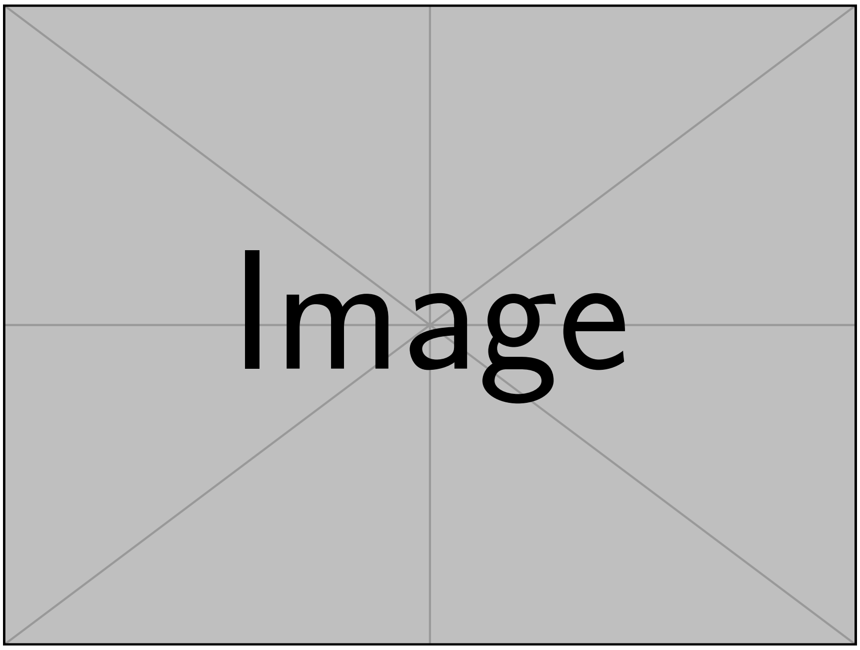


Рис. 1: Все 4 конфигурации течения

Определение 0.2.2 (Ударная волна)**.** Газодинамический разрыв, который движется внутри среды с постоянной скоростью. Величины ρ, p, T, v испытывают скачок.

Определение 0.2.3 (Волна разрежения)**.** Непрерывное решение, ограниченное двумя прямыми линиями. Величины ρ, p, T, v непрерывны.

Определение 0.2.4 (Контактный разрыв)**.** Газодинамический разрыв, который движется внутри среды с постоянной скоростью. В отличии от УВ, через КР ет протекания вещества и давление с обеих его сторон одинаково. Контактные разрывы также носят название **тангенциальный разрыв**. Величины ρ, T, v испытывают скачок.

0.3 одномерные уравнения Эйлера в интегральной форме

Уравнения Эйлера не содержат неразрывных решений, все функции дифференцируемы. Поэтому нужно работать с интегральной формой записи:

$$\begin{cases} \oint(pdx - \rho vdt) = 0 \\ \oint(\rho vdx - [p + \rho v^2]dt) = 0 \\ \oint(\rho[e + \frac{v^2}{2}]dx - \rho v[e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}]dt) = 0 \end{cases}$$

Течение одномерное и плоское. Вывод интегральной формы (которая в действительности **первична** дифференциальной) "постулируется" и доказывается через систему дифференциальных уравнений и формулу Грина. Рассмотрим разрыв при (x, t) = (0, 0):

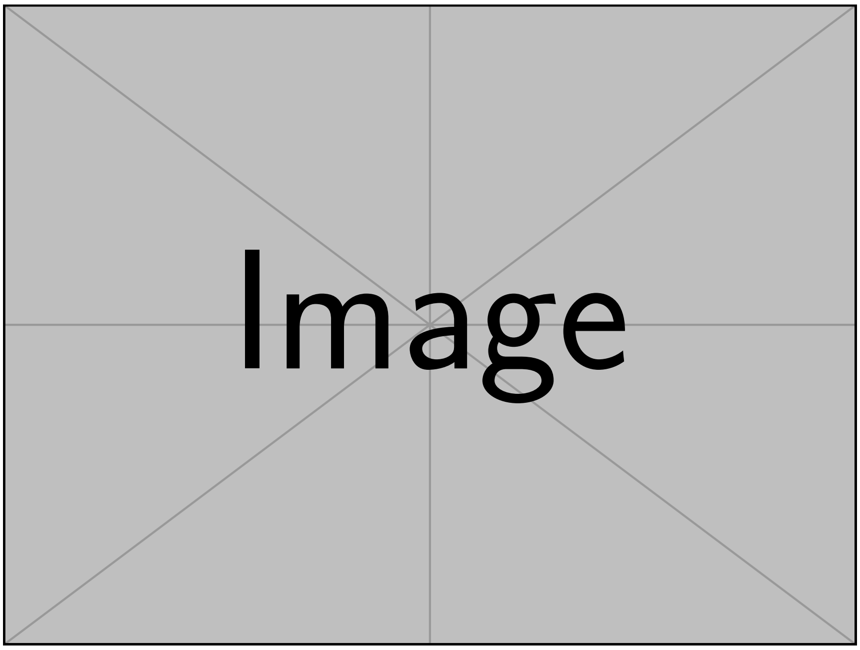


Рис. 2: Момент разрыва

Рассмотрим пространство (x, t), в котором кривая PP' - траектория разрыва. Тогда смещения на dx задается уравнением:

$$dx = D(t)dt \tag{4}$$

Выберем контур $AA'B'B$ вокруг PP':

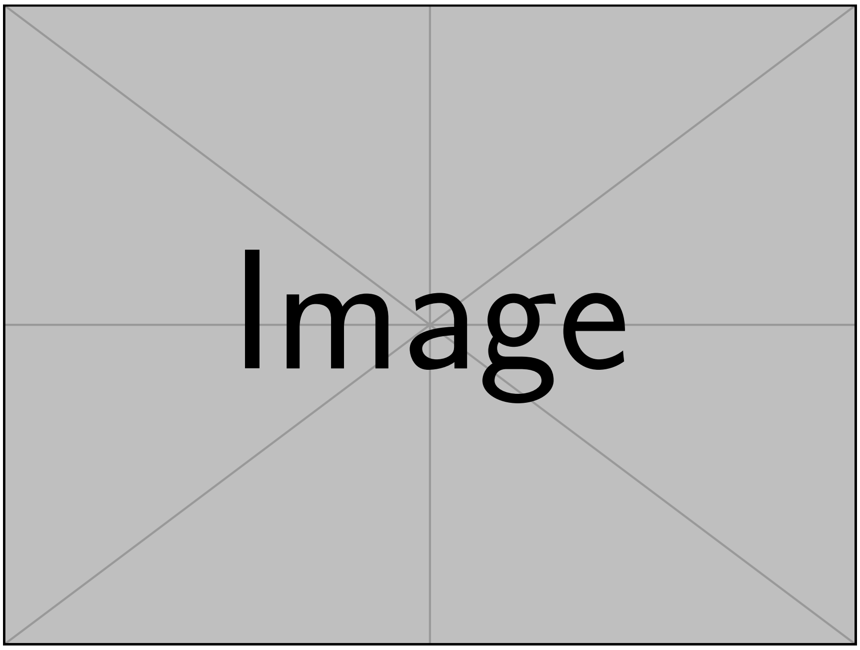


Рис. 3: Схематичное изображение траектории разрыва и конура интегрирования

Пусть $\Xi = \Xi(\xi)$, где $\xi = \xi(x,t)$ - какой-нибудь интегранд из 1. Тогда:

$$\oint_{AA'B'B} \Xi d\xi = \oint_{AA'} \Xi d\xi + \oint_{A'B'} \Xi d\xi + \oint_{B'B} \Xi d\xi + \oint_{BA} \Xi d\xi = 0$$

Далее, устремляем $AA', BB' \to 0$ и применяем параметризацию 4:

$$\oint_{AA'B'B} \Xi d\xi = \oint_{A'B'} \Xi d\xi + \oint_{BA} \Xi d\xi = \int_{t-1}^{t_2} \Xi_{[0]} d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \Xi_{[1]} d\xi = 0$$

где индексы [0] и [1] означают среды до и после траектории разрыва.

Для 2 это будет:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\rho_0 D dt - \rho_0 v_0 dt) + \int_{t_1}^{t_2} (\rho_1 D dt - \rho_1 v_1 dt) = \int_{t_1}^{t_2} (\rho_0 [D - v_0] - \rho_1 [D - v_1]) dt = 0$$

Т.к. t выбрано произвольно, то интеграл равен 0 только тогда, когда интегранд равен нулю, а значит $(\rho_0 [D - v_0] - \rho_1 [D - v_1]) = 0$.