

*федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования*

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»**

*Масленников Никита*  
(студент ФАКИ М03-305)

**И с с л е д о в а т е л ь с к а я   р а б о т а**

*Численное решение задачи Сода и верификация модели на точном  
решении*

Долгопрудный, 2023

# Содержание

Основные сокращения и условные обозначения	2
Введение	3
<b>I Структура программы</b>	<b>4</b>
<b>1 Структура решения задачи Римана для уравнения Эйлера</b>	<b>4</b>
1.1 Возможные конфигурационные решения . . . . .	5
1.2 Соотношения для ударных волн . . . . .	5
1.3 Соотношения для волн разрежения . . . . .	5
1.4 Метод Ньютона . . . . .	5
1.5 Распределение физических величин в решении . . . . .	5
<b>II Теория</b>	<b>6</b>
<b>2 Задача римана для системы уравнений Эйлера</b>	<b>7</b>
<b>3 одномерные уравнения Эйлера в интегральной форме</b>	<b>8</b>

# Основные сокращения и условные обозначения

## Сокращения

НУ - начальные условия для моделирования задачи или решения уравнений, системы уравнений;

УВ - ударная волна;

КР - контактный разрыв;

ВР - волна разрежения;

## Условные обозначения

$\rho$  - плотность;

$v$  - скорость;

$E$  - энергия на единицу объема;

$e$  - удельная внутренняя энергия идеального газа;

# Введение

Поставлена задача создать математическую модель численного решения задачи Римана - исследование 1D течения, которое возникает при создании произвольного разрыва в среде. Получившаяся математическая модель проходит верификацию через моделирование задачи Сода и дальнейшей проверкой численного решения с точным.

Программа разбита на 2 части: вычислительная часть реализована на C++, точка входа в программу и обработка результатов написана на Python.

## **Цель работы:**

1. создание математическую модель численного решения задачи Римана для ударной трубы;
2. верификация модели на задаче Сода;
3. реализация математической модели как отдельный вычислительный модуль для последующей обработки на Python.

Этот документ представляет собой полную информацию о структуре решения задачи Римана для уравнения Эйлера и теоретический материал. Краткое изложение процесса решения находится в Jupyter Notebook.

# Часть I

## Структура программы

бла бла

### 1 Структура решения задачи Римана для уравнения Эйлера

Уточним задачу Римана: рассмотрим задачу Коши для системы уравнений газовой динамики с разрывом I рода в начальных данных:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_R, & \text{при } x > 0 \\ \mathbf{q}_L, & \text{при } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

где:

- $\mathbf{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T$  - вектор консервативных переменных;
- $\mathbf{f} = (\rho v \quad \rho v^2 + p \quad (E + p)v)^T$ ;
- $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e$ ;
- $e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$ .

Структура решения следующая:

1. Во входных данных задачи о распаде произвольного разрыва отсутствуют параметры, имеющие размерность длины и времени. Поэтому искомое решение автомодельное;
2. Класс автомодельных решений для уравнений Эйлера исчерпывается постоянными решениями, в том числе соединенными через разрыв (КР или УВ), а также ВР;

3. В каждую сторону от разрыва может распространяться не более 1 волны, ударной или разрежения.

## **1.1 Возможные конфигурационные решения**

бебра

## **1.2 Соотношения для ударных волн**

бебра

## **1.3 Соотношения для волн разрежения**

бебра

## **1.4 Метод Ньютона**

бебра

## **1.5 Распределение физических величин в решении**

бебра

# Часть II

## Теория

Рассмотрим уравнение переноса в 1D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

где

- $f = \lambda u$  - дифференциальный поток.

Для численного решения применяется конечно-объемный подход: схема метода конечных объемов. Изменение величины за шаг расчетной ячейки определяется балансом потоков  $f$  через грань расчетной ячейки:

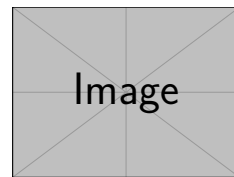
$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{1}{h} (f_{m+\frac{1}{2}}^n [u_m^n; u_{m+1}^n] - f_{m-\frac{1}{2}}^n [u_{m-1}^n; u_m^n]) \\ f_{m+\frac{1}{2}}^n [u_m^n; u_{m+1}^n] = f(u_{\text{exact}}(u_m^n; u_{m+1}^n)) \stackrel{\lambda \geq 0}{=} \lambda u_m^n \\ f_{m-\frac{1}{2}}^n [u_{m-1}^n; u_m^n] = f(u_{\text{exact}}(u_{m-1}^n; u_m^n)) \stackrel{\lambda \leq 0}{=} \lambda u_{m-1}^n \end{cases}$$

где:

- $f_*^n [u_*^n; u_*^n]$  - численный поток, рассчитанный через метод Годунова;
- $f(u_{\text{exact}}(u_*^n; u_*^n))$  - решение задачи Римана.

Существуют различные подходы к построению численного потока  $f$ : левый уголок, схема Лакса и т.д. Метод Годунова выделяется среди прочих схем: он заключается в расчете потока с использованием точного решения задачи о распаде разрыва.

**Определение 1.1** (Задача о распаде разрыва). Задача Коши с кусочно-постоянными данными для задачи гиперболического типа.



**Пример 1.1** (Принцип работы метода Годунова).

Каким образом устроено  $u_{exact}$  для нелинейных систем уравнений гиперболического типа и конкретно для задачи Эйлера? Ответ на этот вопрос дает краткая теория ниже.

## 2 Задача римана для системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_R, & \text{при } x > 0 \\ \mathbf{q}_L, & \text{при } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

где:

- $\mathbf{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T$  - вектор консервативных переменных;
- $\mathbf{f} = (\rho v \quad \rho v^2 + p \quad (E + p)v)^T$ ;
- $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e$  - энергия на единицу объема;
- $e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$  - удельная внутренняя энергия идеального газа.

**Определение 2.1** (Автомодельное решение). Решение, зависящее от  $(x, t)$  не произвольным образом, а зависящее от некоторого  $\xi = f(x, t)$ . Такое решение еще называют **самоподобным**: решение остается подобным себе с течением времени.

Решение этой задачи автомодельное - зависит от автомодельной величины  $\frac{x}{t}$ , т.е. самоподобно течению времени и включает в себя лишь УВ, КР и ВР:



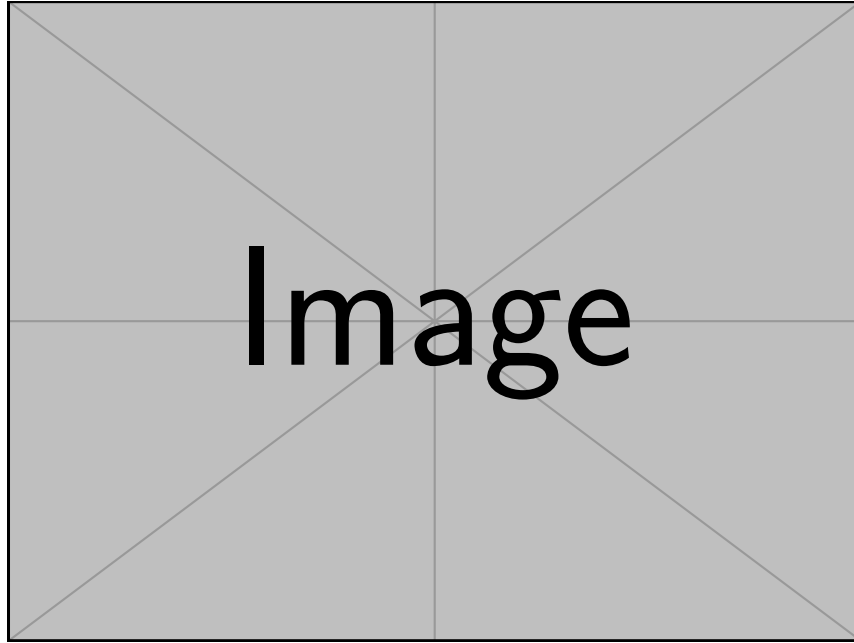


Рис. 1: Все 4 конфигурации течения

**Определение 2.2** (Ударная волна). Газодинамический разрыв, который движется внутри среды с постоянной скоростью. Величины  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $v$  испытывают скачок.

**Определение 2.3** (Волна разрежения). Непрерывное решение, ограниченное двумя прямыми линиями. Величины  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $v$  непрерывны.

**Определение 2.4** (Контактный разрыв). Газодинамический разрыв, который движется внутри среды с постоянной скоростью. В отличие от УВ, через КР нет протекания вещества и давление с обеих его сторон одинаково. Контактные разрывы также носят название **тангенциальный разрыв**. Величины  $\rho$ ,  $T$ ,  $v$  испытывают скачок.

### 3 одномерные уравнения Эйлера в интегральной форме

Уравнения Эйлера не содержат неразрывных решений, все функции дифференцируемы. Поэтому нужно работать с интегральной формой записи:

$$\begin{cases} \oint (pdx - \rho v dt) = 0 \\ \oint (\rho v dx - [p + \rho v^2] dt) = 0 \\ \oint (\rho[e + \frac{v^2}{2}] dx - \rho v[e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}] dt) = 0 \end{cases}$$

Течение одномерное и плоское. Вывод интегральной формы (которая в действительности **первична** дифференциальной) "постулируется" и доказывается через систему дифференциальных уравнений и формулу Грина. Рассмотрим разрыв при  $(x, t) = (0, 0)$ :

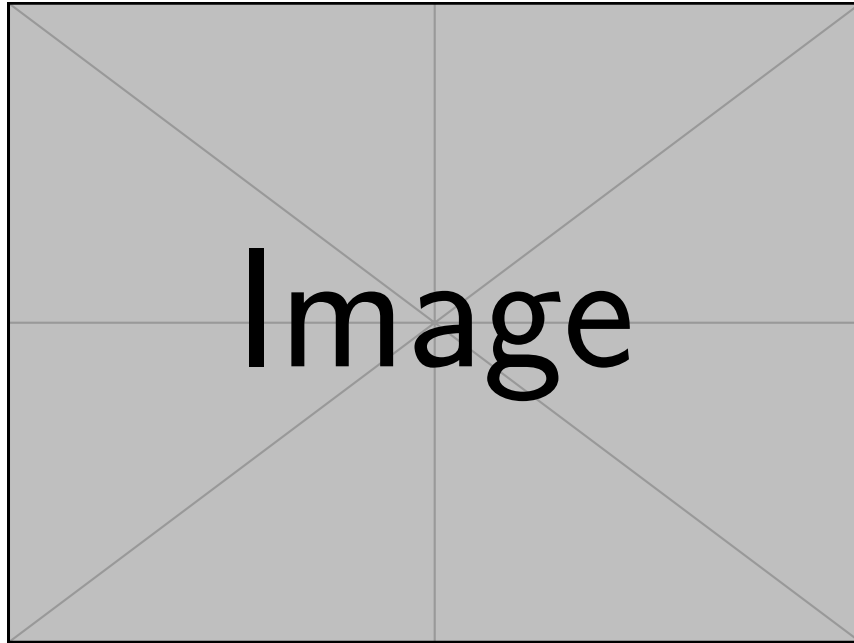


Рис. 2: Момент разрыва

Рассмотрим пространство  $(x, t)$ , в котором кривая  $PP'$  - траектория разрыва. Тогда смещения на  $dx$  задается уравнением:

$$dx = D(t)dt \quad (4)$$

Выберем контур  $AA'B'B$  вокруг  $PP'$ :

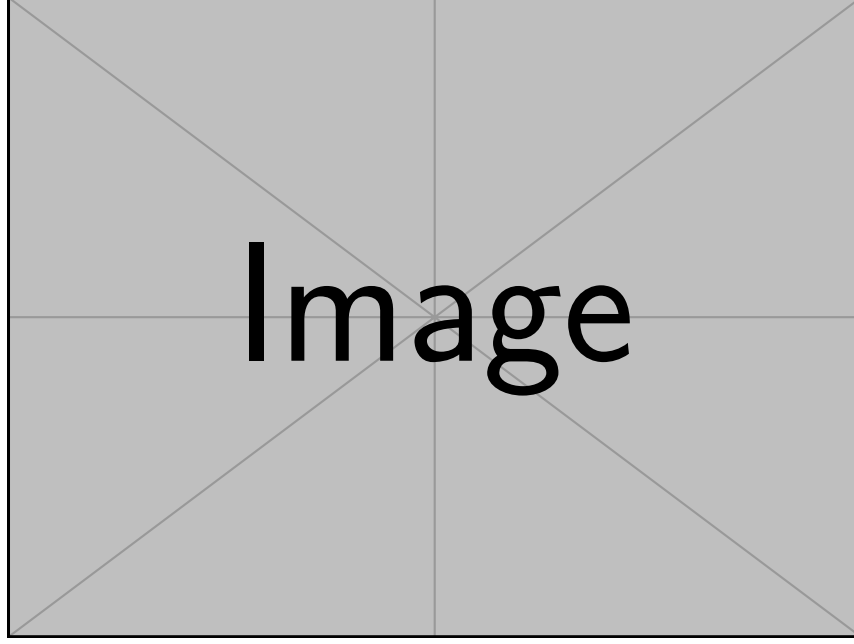


Рис. 3: Схематичное изображение траектории разрыва и конура интегрирования

Пусть  $\Xi = \Xi(\xi)$ , где  $\xi = \xi(x, t)$  - какой-нибудь интегранд из 1. Тогда:

$$\oint_{AA'B'B} \Xi d\xi = \oint_{AA'} \Xi d\xi + \oint_{A'B'} \Xi d\xi + \oint_{B'B} \Xi d\xi + \oint_{BA} \Xi d\xi = 0$$

Далее, устремляем  $AA', BB' \rightarrow 0$  и применяем параметризацию 4:

$$\oint_{AA'B'B} \Xi d\xi = \oint_{A'B'} \Xi d\xi + \oint_{BA} \Xi d\xi = \int_{t-1}^{t_2} \Xi_{[0]} d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \Xi_{[1]} d\xi = 0$$

где индексы  $[0]$  и  $[1]$  означают среды до и после траектории разрыва.

Для 2 это будет:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\rho_0 D dt - \rho_0 v_0 dt) + \int_{t_1}^{t_2} (\rho_1 D dt - \rho_1 v_1 dt) = \int_{t_1}^{t_2} (\rho_0 [D - v_0] - \rho_1 [D - v_1]) dt = 0$$

Т.к.  $t$  выбрано произвольно, то интеграл равен 0 только тогда, когда интегранд равен нулю, а значит  $(\rho_0 [D - v_0] - \rho_1 [D - v_1]) = 0$ .

**Определение 3.1** (Соотношение Ранкина - Гюгоннио).

$$\rho_0 [D - v_0] = \rho_1 [D - v_1]$$

Если ввести обозначение  $[A] = A_1 - A_0$  и ввести  $u = v - D$  - скорость газа в системе координат, движущихся вместе с разрывом со скоростью  $D$ , то 1 можно переписать как: