

*федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования*

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»**

*Масленников Никита*  
(студент ФАКИ М03-305)

**И с с л е д о в а т е л ь с к а я   р а б о т а**

*Численное решение задачи Сода и верификация модели на точном  
решении*

Долгопрудный, 2023

# Содержание

<b>I</b>	<b>Структура программы</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Структура решения задачи Римана для уравнения Эйлера</b>	<b>4</b>
1.1	Возможные конфигурационные решения . . . . .	5
1.2	Соотношения для ударных волн . . . . .	5
1.3	Соотношения для волн разрежения . . . . .	5
1.4	Метод Ньютона . . . . .	5
1.5	Распределение физических величин в решении . . . . .	5
<b>II</b>	<b>Теория</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Задача Римана для системы уравнений Эйлера</b>	<b>7</b>
2.1	Одномерные уравнения Эйлера в интегральной форме . . . . .	8
2.2	Классификация разрывов . . . . .	11
2.3	Адиабата Гюгонио и теорема Цемплена . . . . .	11
2.4	Звуковая волна . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Волны Римана</b>	<b>15</b>
3.1	Система уравнений в частных производных 1 порядка гиперболического типа . . . . .	16
3.2	Условие совместности вдоль характеристик . . . . .	18
3.3	Автомодельное решение уравнения Эйлера и задача Сода . . . . .	18
3.4	Левый инвариант Римана . . . . .	20
3.5	Правый инвариант Римана . . . . .	21

# Основные сокращения и условные обозначения

## Сокращения

НУ - начальные условия для моделирования задачи или решения уравнений, системы уравнений;

УВ - ударная волна;

КР - контактный разрыв;

ВР - волна разрежения;

## Условные обозначения

$\rho$  - плотность;

$v$  - скорость;

$E$  - энергия на единицу объема;

$e$  - удельная внутренняя энергия идеального газа;

$\gamma$  - показатель адиабаты;

# Введение

Поставлена задача создать математическую модель численного решения задачи Римана - исследование 1D течения, которое возникает при создании произвольного разрыва в среде. Получившаяся математическая модель проходит верификацию через моделирование задачи Сода и дальнейшей проверкой численного решения с точным.

Программа разбита на 2 части: вычислительная часть реализована на C++, точка входа в программу и обработка результатов написана на Python.

## **Цель работы:**

1. создание математическую модель численного решения задачи Римана для ударной трубы;
2. верификация модели на задаче Сода;
3. реализация математической модели как отдельный вычислительный модуль для последующей обработки на Python.

Этот документ представляет собой полную информацию о структуре решения задачи Римана для уравнения Эйлера и теоретический материал. Краткое изложение процесса решения находится в Jupyter Notebook.

# Часть I

## Структура программы

бла бла

### 1 Структура решения задачи Римана для уравнения Эйлера

Уточним задачу Римана: рассмотрим задачу Коши для системы уравнений газовой динамики с разрывом I рода в начальных данных:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_R, & \text{при } x > 0 \\ \mathbf{q}_L, & \text{при } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

где:

- $\mathbf{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T$  - вектор консервативных переменных;
- $\mathbf{f} = (\rho v \quad \rho v^2 + p \quad (E + p)v)^T$ ;
- $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e$ ;
- $e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$ .

Структура решения следующая:

1. Во входных данных задачи о распаде произвольного разрыва отсутствуют параметры, имеющие размерность длины и времени. Поэтому искомое решение автомодельное;
2. Класс автомодельных решений для уравнений Эйлера исчерпывается постоянными решениями, в том числе соединенными через разрыв (КР или УВ), а также ВР;

3. В каждую сторону от разрыва может распространяться не более 1 волны, ударной или разрежения.

## **1.1 Возможные конфигурационные решения**

бебра

## **1.2 Соотношения для ударных волн**

бебра

## **1.3 Соотношения для волн разрежения**

бебра

## **1.4 Метод Ньютона**

бебра

## **1.5 Распределение физических величин в решении**

бебра

# Часть II

## Теория

Рассмотрим уравнение переноса в 1D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

где

- $f = \lambda u$  - дифференциальный поток.

Для численного решения применяется конечно-объемный подход: схема метода конечных объемов. Изменение величины за шаг расчетной ячейки определяется балансом потоков  $f$  через грань расчетной ячейки:

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{1}{h} (f_{m+\frac{1}{2}}^n[u_m^n; u_{m+1}^n] - f_{m-\frac{1}{2}}^n[u_{m-1}^n; u_m^n]) \\ f_{m+\frac{1}{2}}^n[u_m^n; u_{m+1}^n] = f(u_{\text{exact}}(u_m^n; u_{m+1}^n)) \stackrel{\lambda \geq 0}{=} \lambda u_m^n \\ f_{m-\frac{1}{2}}^n[u_{m-1}^n; u_m^n] = f(u_{\text{exact}}(u_{m-1}^n; u_m^n)) \stackrel{\lambda \geq 0}{=} \lambda u_{m-1}^n \end{cases}$$

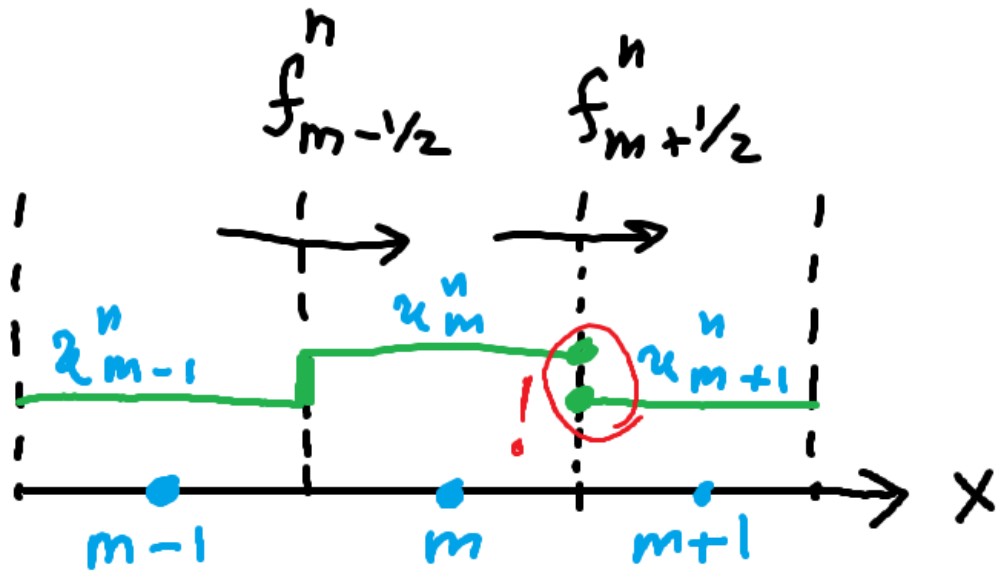
где:

- $f_*^n[u_*^n; u_*^n]$  - численный поток, рассчитанный через метод Годунова;
- $f(u_{\text{exact}}(u_*^n; u_*^n))$  - решение задачи Римана.

Существуют различные подходы к построению численного потока  $f$ : левый уголок, схема Лакса и т.д. Метод Годунова выделяется среди прочих схем: он заключается в расчете потока с использованием точного решения задачи о распаде разрыва.

**Определение 1.1** (Задача о распаде разрыва). Задача Коши с кусочно-постоянными данными для задачи гиперболического типа.

**Пример 1.1** (Принцип работы метода Годунова). !!! Описать fig\_GodunovMethod и конкретно красную область.



Каким образом устроено  $u_{exact}$  для нелинейных систем уравнений гиперболического типа и конкретно для задачи Эйлера? Ответ на этот вопрос дает краткая теория ниже.

## 2 Задача Римана для системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_R, & \text{при } x > 0 \\ \mathbf{q}_L, & \text{при } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

где:

- $\mathbf{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T$  - вектор консервативных переменных;
- $\mathbf{f} = (\rho v \quad \rho v^2 + p \quad (E + p)v)^T$ ;
- $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e$  - энергия на единицу объема;
- $e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$  - удельная внутренняя энергия идеального газа.

**Определение 2.1** (Автомодельное решение). Решение, зависящее от  $(x, t)$  не произвольным образом, а зависящее от некоторого  $\xi = f(x, t)$ . Такое решение еще



называют **самоподобным**: решение остается подобным себе с течением времени.

Решение этой задачи автомодельное - зависит от автомодельной величины  $\frac{x}{t}$ , т.е. самоподобно течению времени и включает в себя лишь УВ, КР и ВР:

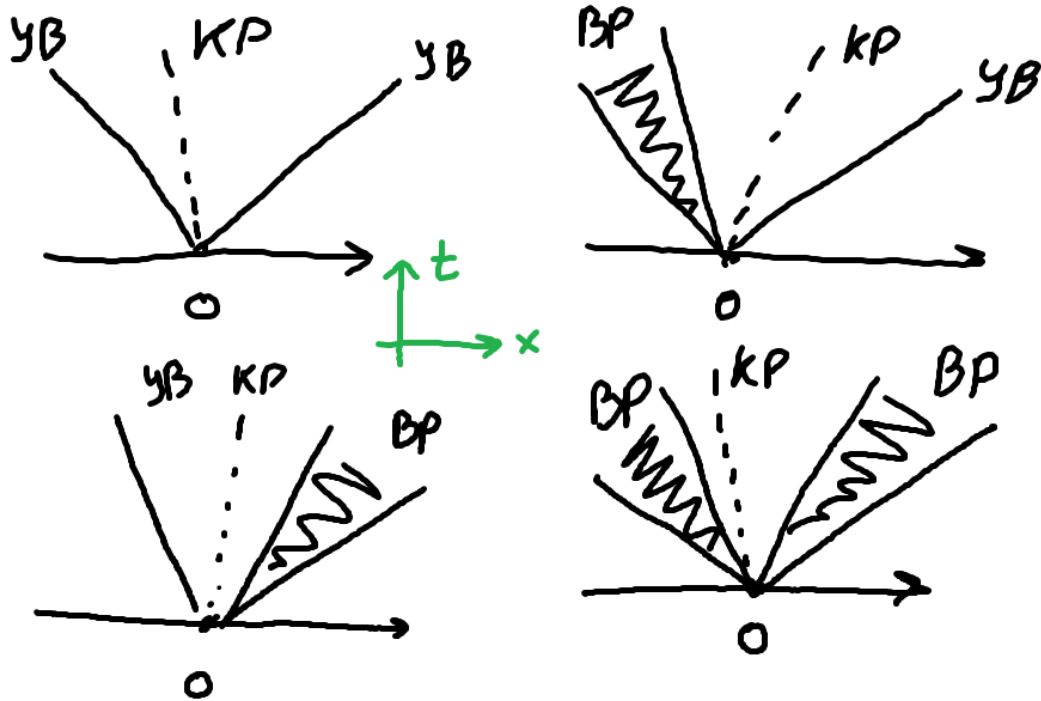


Рис. 1: Все 4 конфигурации течения

**Определение 2.2** (Ударная волна). Газодинамический разрыв, который движется внутри среды с постоянной скоростью. Величины  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $v$  испытывают скачок.

**Определение 2.3** (Волна разрежения). Непрерывное решение, ограниченное двумя прямыми линиями. Величины  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $v$  непрерывны.

**Определение 2.4** (Контактный разрыв). Газодинамический разрыв, образование, по разные стороны от которого, среда движется с той же скоростью, что и разрыв. В отличие от УВ, через КР не протекает вещества и давление с обеих его сторон одинаково. Контактные разрывы также носят название **тангенциальный разрыв**. Величины  $\rho$ ,  $T$ ,  $v$  испытывают скачок.

## 2.1 Одномерные уравнения Эйлера в интегральной форме

Уравнения Эйлера не содержат неразрывных решений, все функции дифференцируемы. Поэтому нужно работать с интегральной формой записи:

$$\begin{cases} \oint (pdx - \rho v dt) = 0 \\ \oint (\rho v dx - [p + \rho v^2] dt) = 0 \\ \oint (\rho [e + \frac{v^2}{2}] dx - \rho v [e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}] dt) = 0 \end{cases}$$

Течение одномерное и плоское. Вывод интегральной формы (которая в действительности **первична** дифференциальной) "постулируется" и доказывается через систему дифференциальных уравнений и формулу Грина. Рассмотрим разрыв при  $(x, t) = (0, 0)$ :

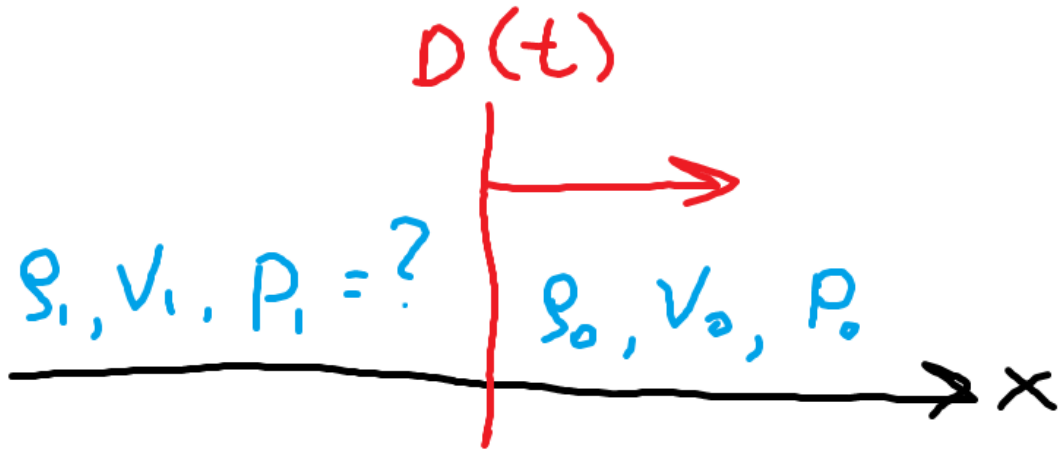


Рис. 2: Момент разрыва

Рассмотрим пространство  $(x, t)$ , в котором кривая  $PP'$  - траектория разрыва. Тогда смещения на  $dx$  задается уравнением:

$$dx = D(t)dt \quad (4)$$

Выберем контур  $AA'B'B$  вокруг  $PP'$ :

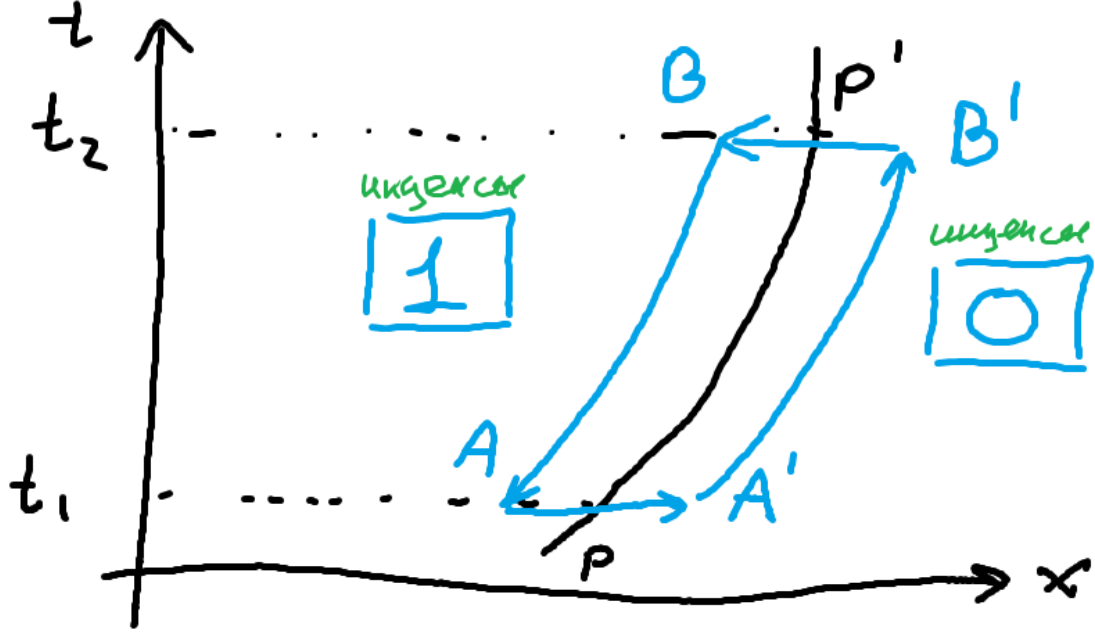


Рис. 3: Схематичное изображение траектории разрыва и контура интегрирования

Пусть  $\Xi = \Xi(\xi)$ , где  $\xi = \xi(x, t)$  - какой-нибудь интегранд из 1. Тогда:

$$\oint_{AA'B'B} \Xi d\xi = \oint_{AA'} \Xi d\xi + \oint_{A'B'} \Xi d\xi + \oint_{B'B} \Xi d\xi + \oint_{BA} \Xi d\xi = 0$$

Далее, устремляем  $AA', BB' \rightarrow 0$  и применяем параметризацию 4:

$$\oint_{AA'B'B} \Xi d\xi = \oint_{A'B'} \Xi d\xi + \oint_{BA} \Xi d\xi = \int_{t-1}^{t_2} \Xi_{[0]} d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \Xi_{[1]} d\xi = 0$$

где индексы  $[0]$  и  $[1]$  означают среды до и после траектории разрыва.

Для 2 это будет:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\rho_0 D dt - \rho_0 v_0 dt) + \int_{t_1}^{t_2} (\rho_1 D dt - \rho_1 v_1 dt) = \int_{t_1}^{t_2} (\rho_0 [D - v_0] - \rho_1 [D - v_1]) dt = 0$$

Т.к.  $t$  выбрано произвольно, то интеграл равен 0 только тогда, когда интегранд равен нулю, а значит  $(\rho_0 [D - v_0] - \rho_1 [D - v_1]) = 0$ .

**Определение 2.1** (Соотношение Ранкина - Гюгонио).

$$\rho_0 [D - v_0] = \rho_1 [D - v_1]$$

Если ввести обозначение  $[A] = A_1 - A_0$  и ввести  $u = v - D$  - скорость газа в

системе координат, движущихся вместе с разрывом со скоростью  $D$ , то 1 можно переписать как:

$$\begin{cases} [\rho u] = 0 \\ [\rho u^2 + p] = 0 \\ [e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}] = 0 \\ \rho u \neq 0 \end{cases}$$

По факту доказательство нестрогое. Оно верно, если постулировать законы сохранения с утверждением, что "среда удовлетворяет таким законам".

## 2.2 Классификация разрывов

Пусть  $m = \rho_0 u_0 = \rho_1 u_1$  - поток массы вещества через разрыв. Тогда существует лишь 2 случая потока:

а)  $m = 0$ : Контактные разрывы. Из 5 следует, что  $2 = 0$ , а значит:

$$\begin{cases} v_1 = v_0 = 0 \\ p_1 = p_0 \\ \rho_1 \neq \rho_0 \end{cases}$$

б)  $m \neq 0$ : Ударные волны. Из 5 следует, что  $2 \neq 0$  и:

$$\begin{cases} v_1 \neq v_0 \\ p_1 \neq p_0 \\ \rho_1 \neq \rho_0 \end{cases}$$

## 2.3 Адиабата Гюгонио и теорема Цемплена

Будем исследовать т.н. "Ударные волны разрежения" и вопрос их существования. В случае УВ  $m \neq 0$  и будем работать с 1. При  $u = v - D$  и обозначении  $\eta = \rho^{-1}$  следует, что:

$$\begin{cases} \frac{\eta_0}{\eta_1} = \frac{u_0}{u_1} \\ \frac{u_0^2}{\eta_0} - \frac{u_1^2}{\eta_1} = p_1 - p_0 \\ e_1 - e_0 = \frac{u_0^2 - u_1^2}{2} + p_0 \eta_0 - p_1 \eta_1 \end{cases}$$

После исключения из рассмотрения скорости, получим следующие формулы.  $\eta$  и  $p$  понадобятся для адиабаты Гюгонио, сама скорость  $u$  - для определения скорости скачка относительно газа перед и за УВ:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 \frac{\eta_0}{\eta_1} \\ u_0^2 = \eta_0^2 \frac{p_1 - p_0}{\eta_0 - \eta_1} \\ u_1 = u_0 \frac{\eta_1}{\eta_0} \\ u_1^2 = \eta_1^2 \frac{p_1 - p_0}{\eta_0 - \eta_1} \end{cases}$$

**Определение 2.2** (Адиабата Гюгонио). На диаграмме  $(\frac{\eta}{\eta_0}; \frac{p}{p_0})$  описывает все возможные состояния за УВ, куда можно перевести газ, путив по нему УВ:

$$e_1(p_1, \eta_1) - e_0(p_0, \eta_0) = \frac{(p_1 + p_0)(\eta_0 - \eta_1)}{2}$$

Рассмотрим идеальный газ, для которого  $e(p, \eta) = \frac{p\eta}{\gamma-1}$ :

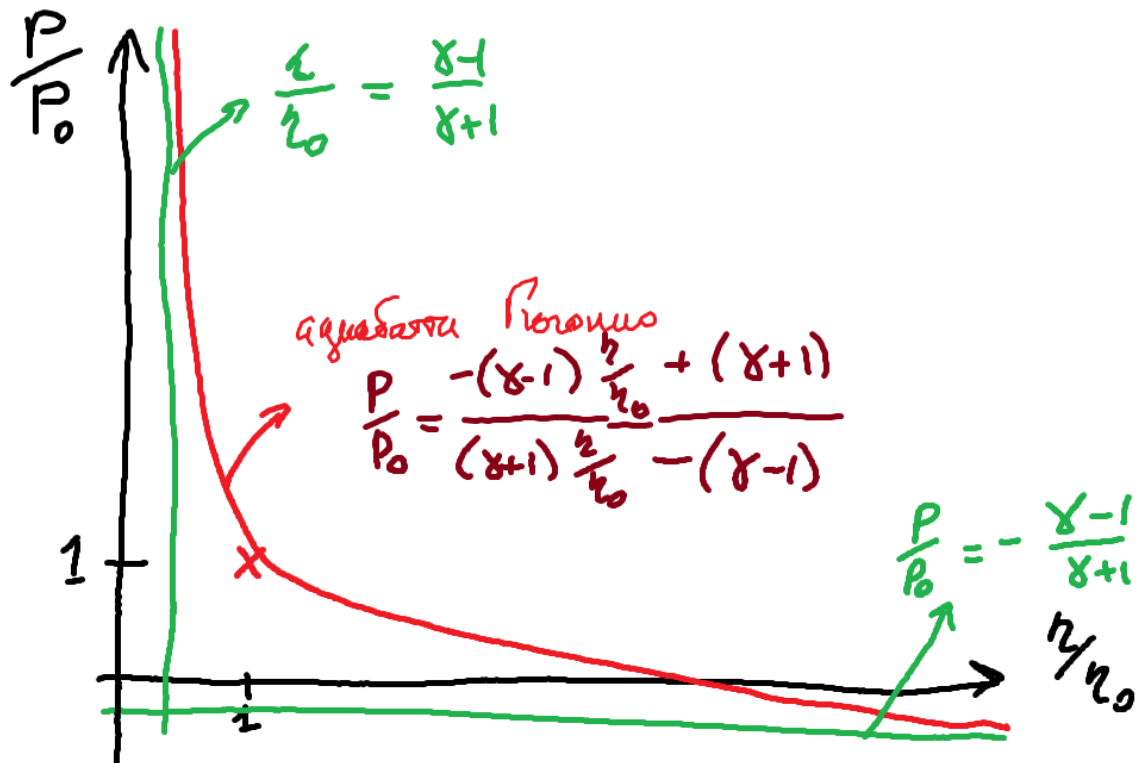


Рис. 4: Адиабата Гюгонио и ее асимптоты

где:

- вертикальная асимптота: не можем считать газ более  $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$  раз;
- горизонтальная асимптота: внезапно отрицательная!? Все потому что законов сохранения энергии 1 недостаточно для описания всех возможных *физических* состояний.

**Теорема 2.1** (Теорема Цемплена). *Не существует УВ разрежения:  $\Delta S \geq 0$ .*

То есть теорема Цемплена учитывает Второй закон термодинамики. Получается, что адиабата Гюгонио ложна и не соответствует действительности? На самом деле нет. Переход вещества через ударную волну является **термодинамически необратимым** процессом, поэтому при прохождении через вещество ударной волны удельная энтропия увеличивается.

Увеличение энтропии означает наличие диссипации (внутри ударной волны, являющейся узкой переходной зоной, существенны, в частности, вязкость и теплопроводность). Это, в частности, приводит к тому, что тело, движущееся в идеальной жидкости с возникновением ударных волн, испытывает силу сопротивления, то есть для такого движения парадокс Д'Аламбера не имеет места.

Ударную адиабату Гюгонио не следует путать с адиабатой Пуассона, описывающей процесс с постоянной энтропией  $S$  то есть такие процессы **термодинамически обратимы**. В отличие от адиабаты Пуассона, для которой  $S(p, \eta) = \text{const}$  уравнение ударной адиабаты нельзя написать в виде  $f(p, \eta) = \text{const}$  где  $f$  — однозначная функция двух аргументов: адиабаты Гюгонио для заданного вещества составляют двухпараметрическое семейство кривых (каждая кривая определяется заданием как  $\eta$  так и  $p$  тогда как адиабаты Пуассона — однопараметрическое:

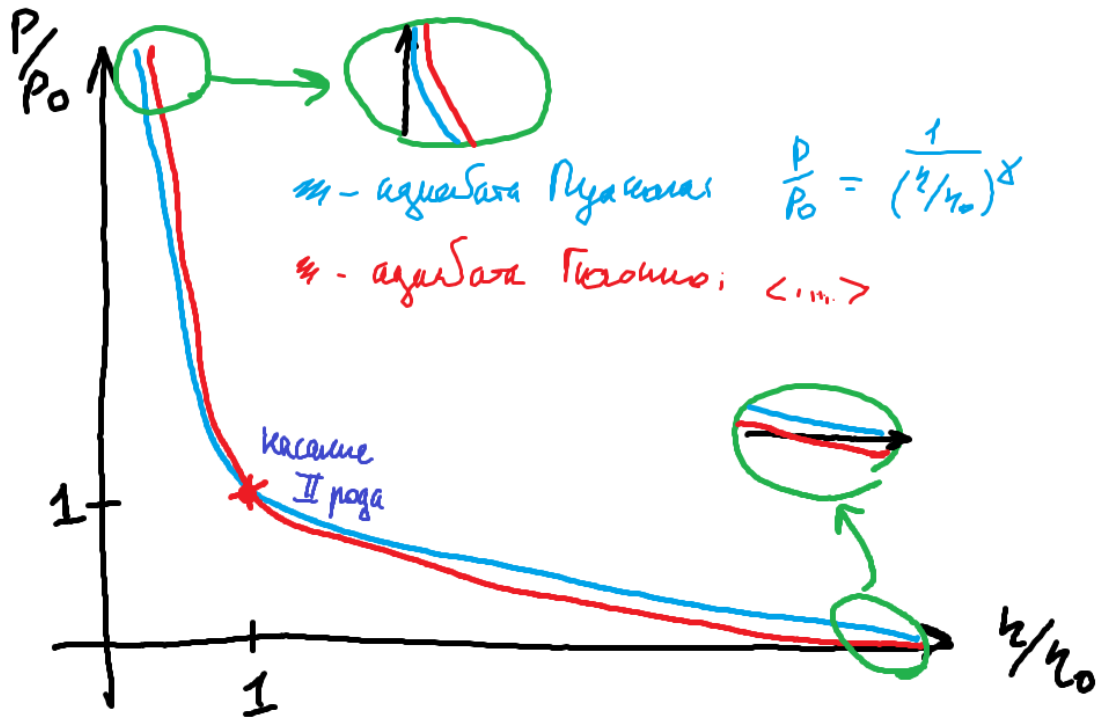


Рис. 5: Адиабаты Гюгонио и Пуассона

Стоит отметить важный факт: две адиабаты идеально сшиваются по второй производной в точке пересечения. Это знание понадобится для решения задачи Римана (Сода) на  $(p-v)$  диаграмме.

## 2.4 Звуковая волна

Из 15 мы выражаем  $u_0$  и  $u_1$ . Учитывая, что  $c^2 = \gamma p \eta$ , вычисляем  $\frac{u_i^2}{c_i^2}$ :

$$\begin{cases} \frac{u_0^2}{c_0^2} = \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{p_1}{p_0}}{2\gamma} \\ \frac{u_1^2}{c_1^2} = \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{p_0}{p_1}}{2\gamma} \end{cases}$$

При устремлении  $p_1 \rightarrow p_0$  и  $\eta_1 \rightarrow \eta_0$  и  $\frac{u_i^2}{c_i^2} \rightarrow 1$  следует, что УВ бесконечно малой интенсивности распределяется относительно газа со скоростью звука. Т.е. фронт УВ распространяется относительно фона (индекс 0) со сверхзвуковой скоростью, а относительно газа - с дозвуковой:

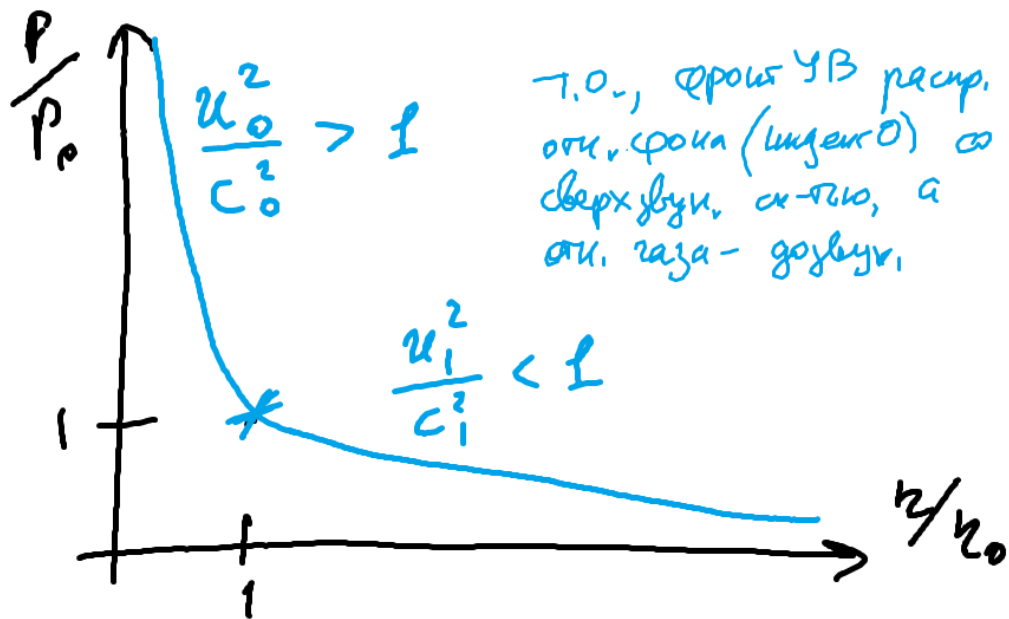


Рис. 6: Скорость распространения фронта УВ

### 3 Волны Римана

Будем говорить о характеристическом анализе системы уравнений Эйлера, условий совместности вдоль характеристик и автомодельном решении уравнений Эйлера. Существует две записи системы уравнений Эйлера:

- Дивергентная векторная форма:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T \\ \mathbf{f} = (\rho v \quad \rho v^2 + p \quad (E + p)v)^T \\ E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e \\ e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} \end{cases}$$

- Дивергентная покомпонентная форма:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E - p)v)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$



### 3.1 Система уравнений в частных производных 1 порядка гиперболического типа

Вектор консервативных переменных:  $\mathbf{q} = (\rho \quad \rho v \quad E)^T$ .

Вектор примитивных переменных:  $\mathbf{U} = \mathbf{w} = (\rho \quad v \quad p)^T$

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(t, x, \mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{f}(t, x, \mathbf{U})$$

где:

- $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^I$
- $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^I$
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I \times I}$

**Определение 3.1** (Уравнение гиперболического типа). Класс дифференциальных уравнений в частных производных, для которых собственные значения  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , а собственные вектора образуют базис:  $|\Omega_R| \neq 0$ .

Поиск собственных значений и векторов начинается с  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ , откуда  $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1..I}$ . Далее находим соответствующие собственные вектора  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^I$ :  $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{w}_i = 0$ .

Мы хотим получить характеристическую покомпонентную форму записи 31. Для этого мы будем почленно дифференцировать слагаемые (как например  $\frac{\partial \rho v}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x}$ ) и для 31 применим  $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e$  и  $e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$ , как для идеального газа. Получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Систему 32 можно переписать в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0 \tag{35}$$

где:

- $\mathbf{w} = (\rho \quad v \quad p)^T$  - вектор примитивных переменных;

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma p & v \end{pmatrix}$  - матрица примитивных переменных.

Исследование на гиперболичность:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \det \begin{pmatrix} v - \lambda & \rho & 0 \\ 0 & v - \lambda & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma p & v - \lambda \end{pmatrix} = (v - \lambda)^3 - \frac{\gamma p}{\rho}(v - \lambda) = 0$$

Мы введем величину  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  - скорость звука. Решая уравнение выше, приходим к следующим трем собственным значениям:

$$\begin{cases} \lambda_0 = v \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 = v - c \in \mathbb{R} \\ \lambda_2 = v + c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Собственные значения  $\lambda_0$  определяют разрыв, три характеристики.  $\lambda_0$  соответствует КР:

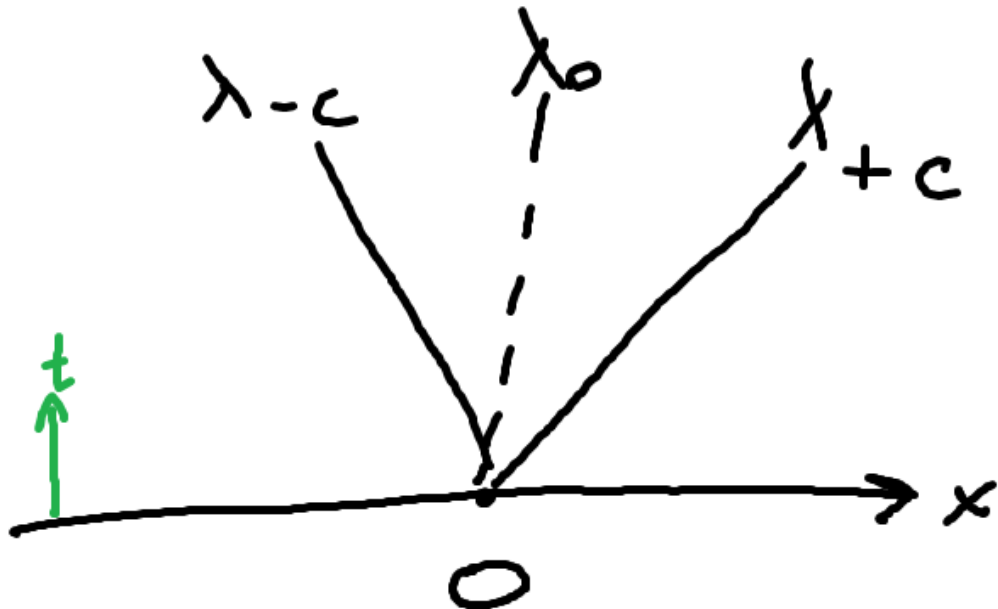


Рис. 7: три характеристики, соответствующие трем собственным значениям

Далее, собственным значениям  $\lambda_0$  соответствуют собственные вектора  $\mathbf{w}_i$ . Они

образуют матрицы правых и левых собственных векторов:

**Определение 3.2** (Матрица правых собственных векторов). Матрица, столбцами которой являются собственные вектора  $\mathbf{w}_i$ :

$$\mathbf{\Omega}_R = \{\mathbf{w}_0 \dots \mathbf{w}_I\} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ 0 & -c & c \\ 0 & \gamma p & \gamma p \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{\Omega}_R) = -2\gamma pc \neq 0$$

**Определение 3.3** (Матрица левых собственных векторов). Матрица, обратная  $\mathbf{\Omega}_R$ :

$$\mathbf{\Omega}_L = \mathbf{\Omega}_R^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{\Omega}_R)} = \begin{pmatrix} -2\gamma pc & 0 & 2\rho c \\ 0 & \gamma p & -c \\ 0 - \gamma p & -c & \end{pmatrix}$$

Если диагональная матрица  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(v \quad v - c \quad v + c)$ , то можем определить матрицу  $\mathbf{A}$ , как:

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}_R \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}_L$$

### 3.2 Условие совместности вдоль характеристик

Обозначим элементы  $\mathbf{\Omega}_L$  как  $\{\mathbf{\Omega}_L\}_{pk}$ . Тогда домножим уравнение 35 слева на  $\mathbf{\Omega}_L$ . Ниже представим векторную и покомпонентную запись:

$$\begin{cases} \mathbf{\Omega}_L \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}_L \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0 \\ \sum_{k=1}^3 \left[ \{\mathbf{\Omega}_L\}_{pk} \frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial t} \right] + \lambda_p \sum_{k=1}^3 \left[ \{\mathbf{\Omega}_L\}_{pk} \frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial x} \right] = 0 \end{cases}$$

где  $p \in \{0, 1, 2\}$ , а  $\lambda_p$  определяет направление возмущения.

### 3.3 Автомоделное решение уравнения Эйлера и задача Со-да

Ищем решение системы уравнений Эйлера в виде  $\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{w}(\xi) = \mathbf{w}(\frac{x}{t})$ .

**Определение 3.4** (Задача Сода). Задача - тест о распаде разрыва со следующими НУ:

- $p_1 = 1.0$
- $\rho_1 = 1.0$
- $u_1 = 0.0$
- $p_2 = 0.125$
- $\rho_2 = 0.1$
- $u_2 = 0.0$

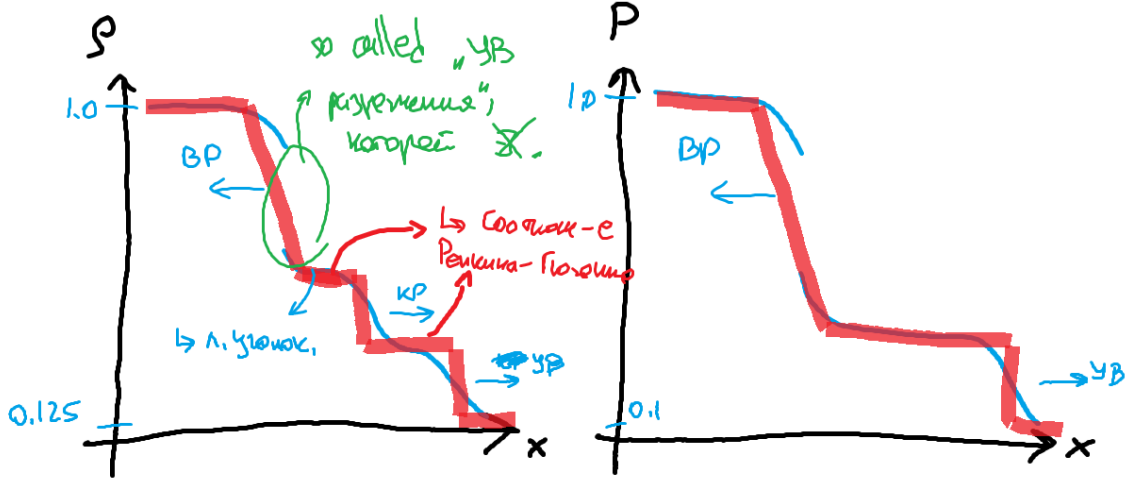


Рис. 8: Точное решение (распространение  $\rho$  и  $p$ ) в задаче Сода

Возвращаясь к поиску решения, найдем производные  $w$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_k}{\partial x}(x, t) &= \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \frac{1}{t} \\ \frac{\partial w_k}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial w_k}{\partial \xi} \frac{x}{t^2}\end{aligned}$$

После подстановки производных в 39 получим:

$$(\lambda_p - \xi) \sum_{k=1}^3 \left[ \{\Omega_L\}_{pk} \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \right] = 0$$

Нам понадобится покомпонентная форма записи:

$$\begin{cases} (\lambda_0 - \xi) \left( 1 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{\rho}{\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) = 0 \\ (\lambda_1 - \xi) \left( -\frac{1}{2c} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{2\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) = 0 \\ (\lambda_2 - \xi) \left( \frac{1}{2c} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{2\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) = 0 \end{cases}$$

**Определение 3.5** (Инвариант Римана). Преобразование исходных переменных,

в которых система уравнений рассыпалась на совокупность несвязных уравнений переноса.

Ниже будут исследованы т.н. "левый инвариант Римана" и "правый инвариант Римана". на основании 41.

### 3.4 Левый инвариант Римана

Нас интересует решение  $\xi = \lambda_1$ , что соответствует левой-правой ВР:

$$\begin{cases} \xi = \lambda_1 = v - c \\ \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{\rho}{\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{1}{2c} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{2\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \xi} \end{cases}$$

Вспомним, что нужно добавлять в рассмотрение тот факт, что  $\Delta S \geq 0$ , у нас это  $\frac{\partial S}{\partial \xi} = 0$ . Такой процесс называется **изоэнтропическим**. Для него характерно  $\frac{p}{\rho^\gamma} = const$ : продифференцируем его по  $\xi$ :

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = 0 \quad (47)$$

И получается, что 47 совпадает с 46! Автомодельное решение соответствует изоэнтропическому течению, где  $\frac{\partial S}{\partial \xi} = 0$ .

Рассмотрим 46. Учитывая, что  $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$ , подставим сюда 46. Тогда:

$$\frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{c(\gamma - 1)}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}$$

**Определение 3.6** (Левый инвариант Римана).

$$\left( v + \frac{2c}{\gamma - 1} \right)_\xi = (w_L)_\xi = 0$$

**Определение 3.7** (Левая волна). Волна называется "**левой**", если поток массы через нее направлен слева-направо:

$$\rho(v - \xi) > 0$$

Т. е. изменение левого инварианта Римана в поле рассматриваемого течения равно нулю. Тогда автомодельное решение в уравнении Эйлера соответствует такому типу течения, в котором левая волна Римана - ВР. она удовлетворяет:

$$\begin{cases} v - c = \frac{x}{t} \\ S = \frac{p}{\rho^\gamma = \text{const}} \\ w_L = v + \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{const} \end{cases}$$

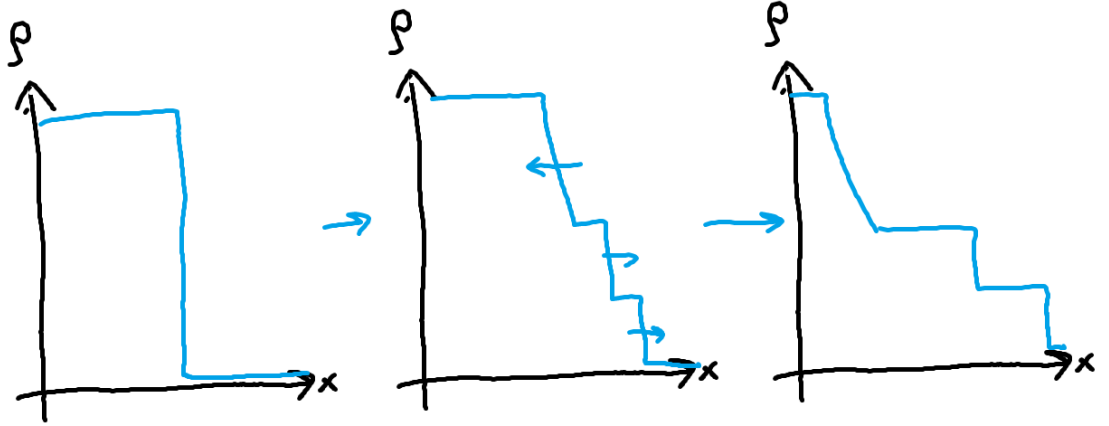


Рис. 9: Тип течения, в котором левая волна Римана - ВР

### 3.5 Правый инвариант Римана

Нас интересует решение  $\xi = \lambda_2$ , что соответствует левой-правой ВР:

$$\begin{cases} \xi = \lambda_1 = v - c \\ \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{\rho}{\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{1}{2c} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{2\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \xi} \end{cases}$$

Продельвая те же действия, что и для левого инварианта Римана, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \xi = v + c \\ \frac{\partial S}{\partial \xi} = 0 \\ w_R = v - \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{const} \end{cases}$$

**Определение 3.8** (Правая волна). Волна называется "**правой**", если поток мас-

сы через нее направлен справа-налево:

$$\rho(v - \xi) < 0$$

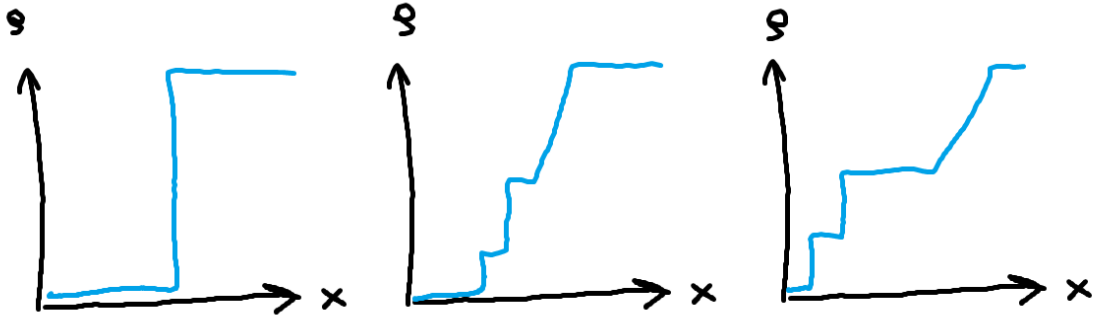


Рис. 10: Тип течения, в котором правая волна Римана - ВР

**Определение 3.9** (Правый инвариант Римана).

$$\left( v - \frac{2c}{\gamma - 1} \right)_\xi = (w_R)_\xi = 0$$