# Aproximace

Numerické metody
www.nme.8u.cz

23. 3. 2020

FJFI

# Studium v průběhu Korony

1. Materiály ke cvičení budou publikovány nejpozději na začátku příslušného cvičení (v pondělí v 7:30).
2. Student může odevzdat i víc cvičení najednou, jsou-li na webu k dispozici.
3. Podmínky k získání docházky:
   I. Projít poctivě prezentaci.
   II. Poslat cvičícímu všechny úkoly (ve formátu Matlab, Python, C++) MATLAB .
   III. Vypracované úkoly posílejte na [kerepecky@fjfi.cvut.cz](mailto:kerepecky@fjfi.cvut.cz) nejlépe v zip souboru.
   IV. Pokud bude vše v pořádku, odpovím vám: „Docházka za cvičení XY udělena“.
   V. Lhůta na odevzdání je 7 dní od oficiálního začátku cvičení, tj. všichni ti, kteří neodevzdají předchozí úkol do začátku dalšího cvičení, získávají automaticky absenci.
   VI. Lepší poslat neúplná řešení než žádná. Chcete-li spolupracovat, můžete, ale vězte, že si u každého snadno ověřím při odevzdávání zápočtu, že tomu, co jste naprogramovali, rozumíte.

# Co nás čeká?

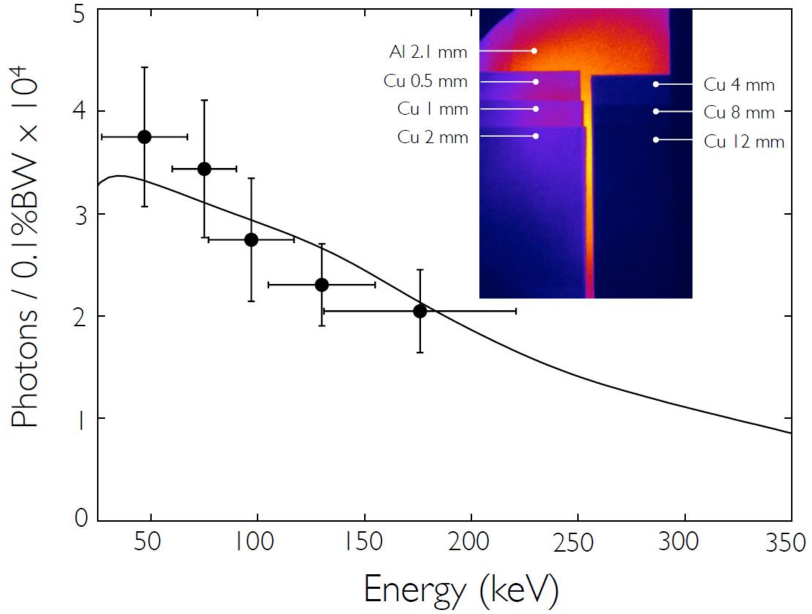
- Úvod do aproximace funkcí
- Interpolace vs. extrapolace
- Vandermondova matice
- Lagrangeův interpolační polynom
- Kubický spline

- Taylorův rozvoj
- Aproximace derivace

# Co je aproximace funkcí?

- Aproximovat funkci f(x) znamená nahradit ji funkcí g(x), která je k f(x) v jistém smyslu blízká.

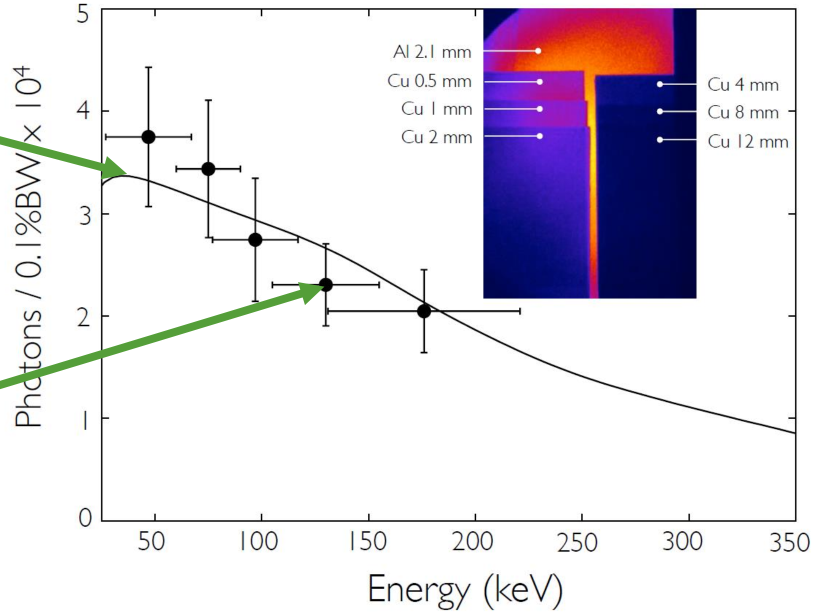
- Funkční závislost f(x), kterou se snažíme postihnout, nemusí být vždy známá. Často vycházíme z hodnot, které jsme získali měřením.



# Co je aproximace funkcí?

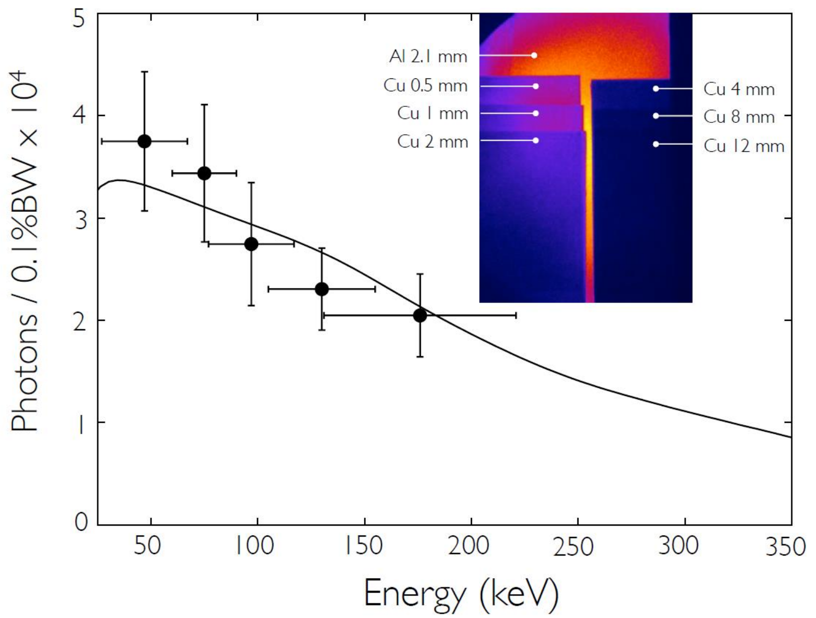
- Aproximovat funkci f(x) znamená nahradit ji funkcí g(x), která je k f(x) v jistém smyslu blízká.

- Funkční závislost f(x), kterou se snažíme postihnout, nemusí být vždy známá. Často vycházíme z hodnot, které jsme získali měřením.



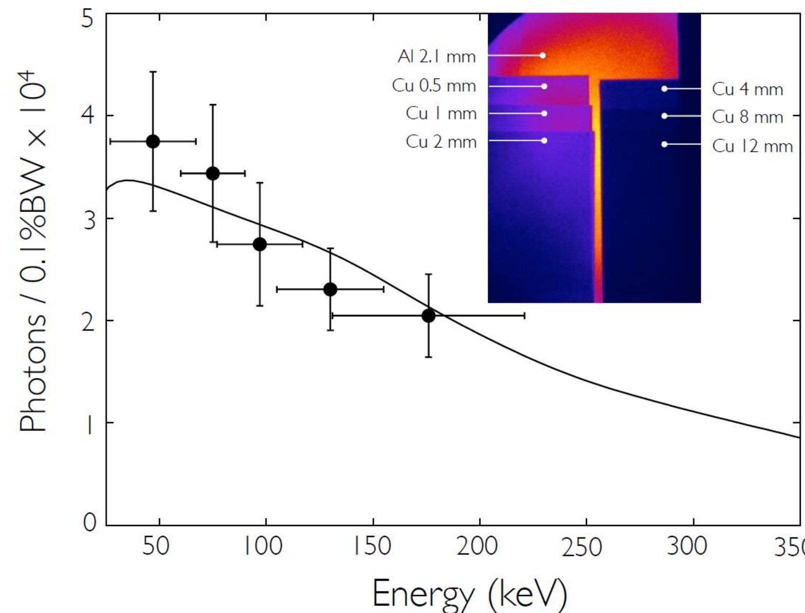
# Proč aproximace?

- Příliš náročný výpočet původní funkce (složitý funkční předpis, implicitně zadané funkce, ...)
- Potřeba výpočtu dalších charakteristik funkce (derivace, integrál, ...)
- Analytické vyjádření není známo - funkce daná tabulkou hodnot (spočtených či naměřených)



# Proč aproximace?

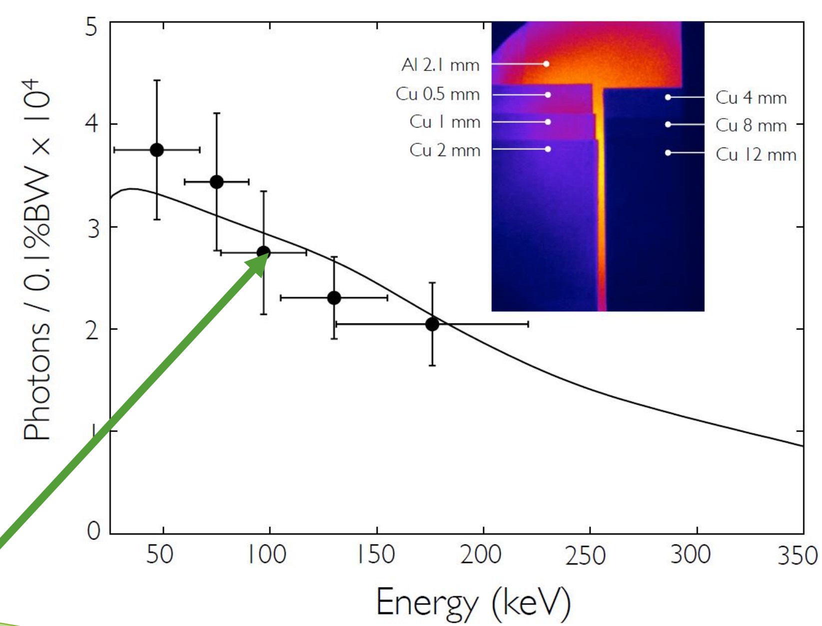
- Příliš náročný výpočet původní funkce (složitý funkční předpis, implicitně zadané funkce, ...)
- Potřeba výpočtu dalších charakteristik funkce (derivace, integrál, ...)
- Analytické vyjádření není známo - funkce daná tabulkou hodnot (spočtených či naměřených)




Co neznám to aproximuji.

# Proč aproximace?

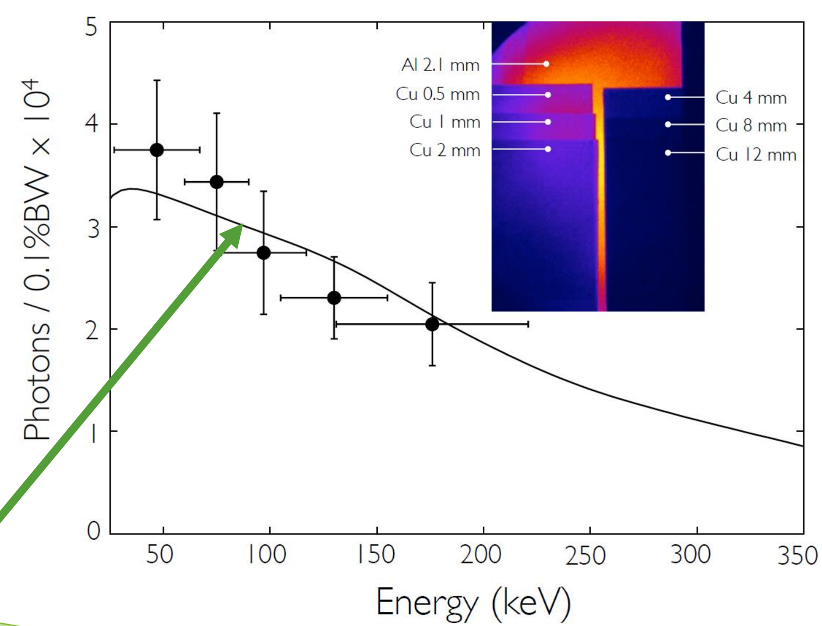
- Příliš náročný výpočet původní funkce (složitý funkční předpis, implicitně zadané funkce, ...)
- Potřeba výpočtu dalších charakteristik funkce (derivace, integrál, ...)
- Analytické vyjádření není známo - funkce daná tabulkou hodnot (spočtených či naměřených)




Tohle znám.

# Proč aproximace?

- Příliš náročný výpočet původní funkce (složitý funkční předpis, implicitně zadané funkce, ...)
- Potřeba výpočtu dalších charakteristik funkce (derivace, integrál, ...)
- Analytické vyjádření není známo - funkce daná tabulkou hodnot (spočtených či naměřených)




Tohle aproximuji.

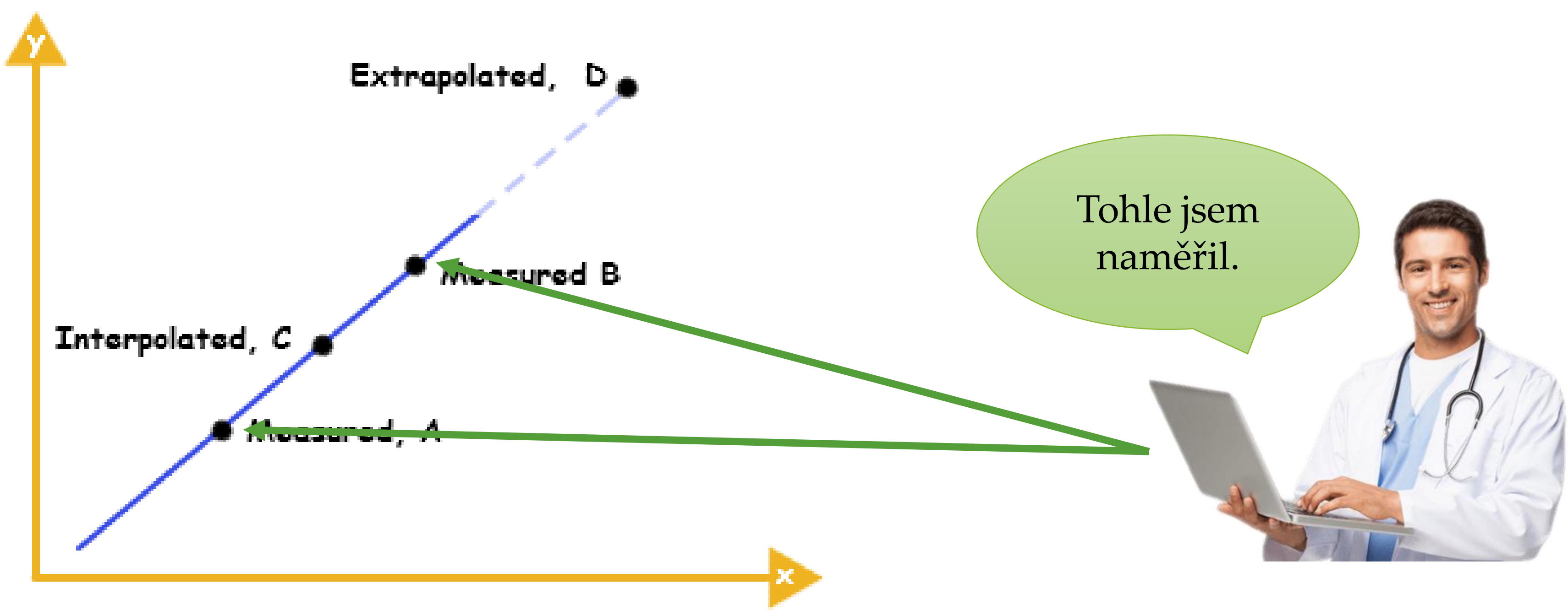
# Typy aproximací

- Interpolační aproximace (interpolace a extrapolace)
  - Globální interpolace – všude interpolujeme stejnou funkcí
    - př. Lagrangeův polynom
  - Lokální interpolace - v různých podintervalech používáme různé funkce
    - př. kubický spline
- Čebyševovy aproximace
- Aproximace metodou nejmenších čtverců

Dnes budeme dělat interpolační aproximaci.

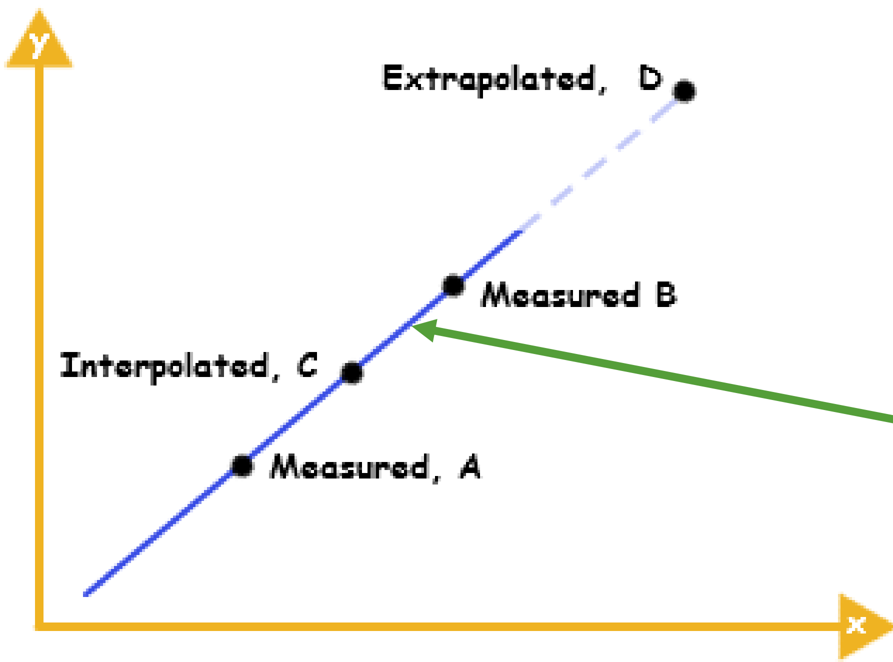
# Interpolační aproximace

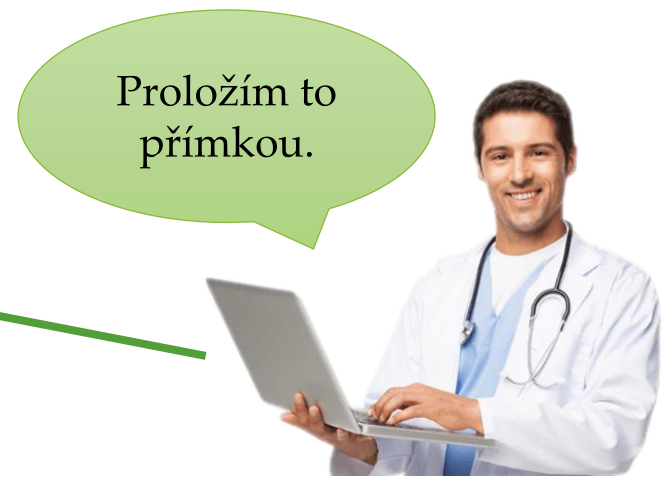
- Naměřenými body, danými tabulkou, chceme proložit polynom a požadujeme, aby aproximace přesně procházela zadanými body.



# Interpolační aproximace

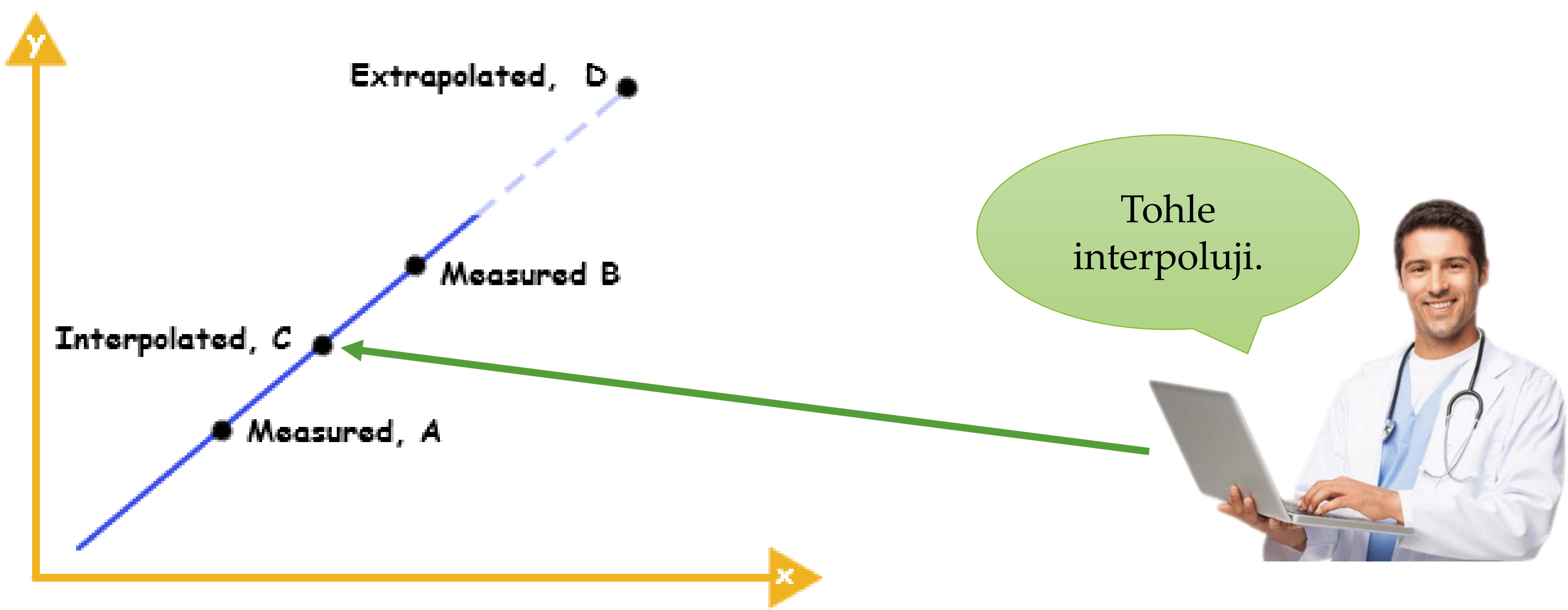
- Naměřenými body, danými tabulkou, chceme proložit polynom a požadujeme, aby aproximace přesně procházela zadanými body.



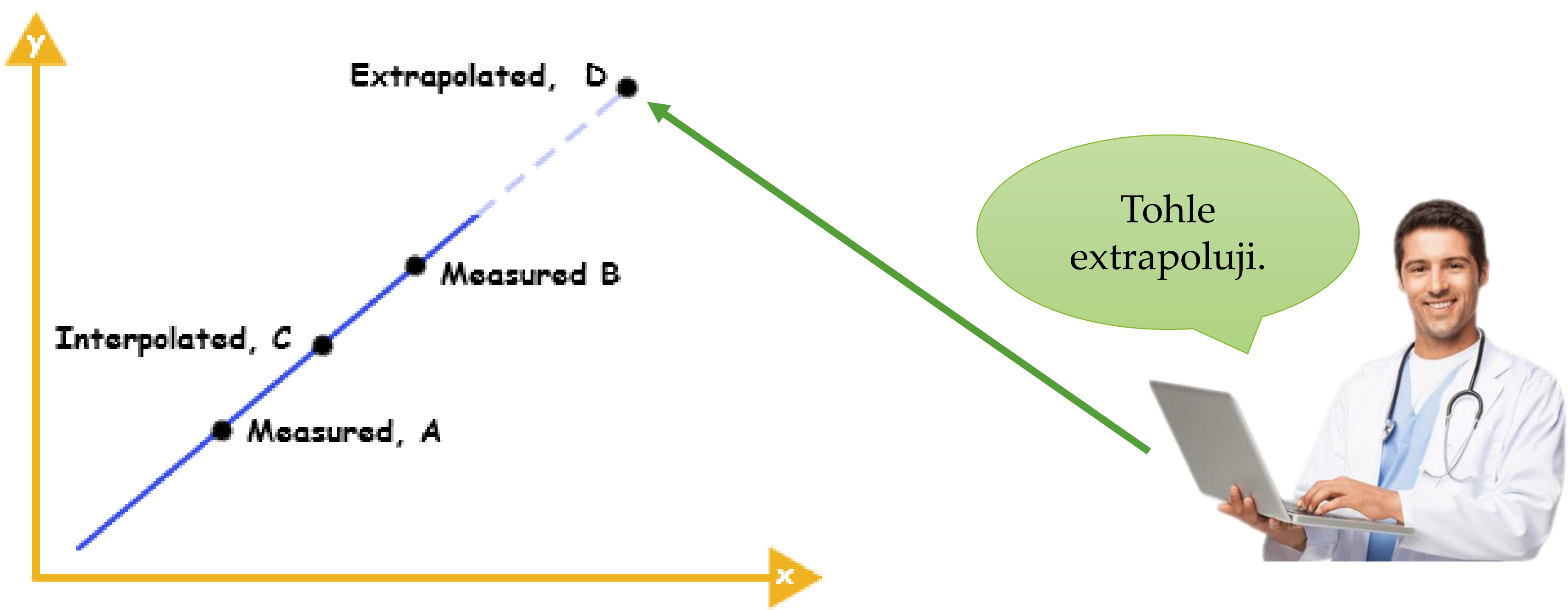
# Interpolační aproximace

- Naměřenými body, danými tabulkou, chceme proložit polynom a požadujeme, aby aproximace přesně procházela zadanými body.



# Interpolační aproximace

- Naměřenými body, danými tabulkou, chceme proložit polynom a požadujeme, aby aproximace přesně procházela zadanými body.



# Interpolační polynom

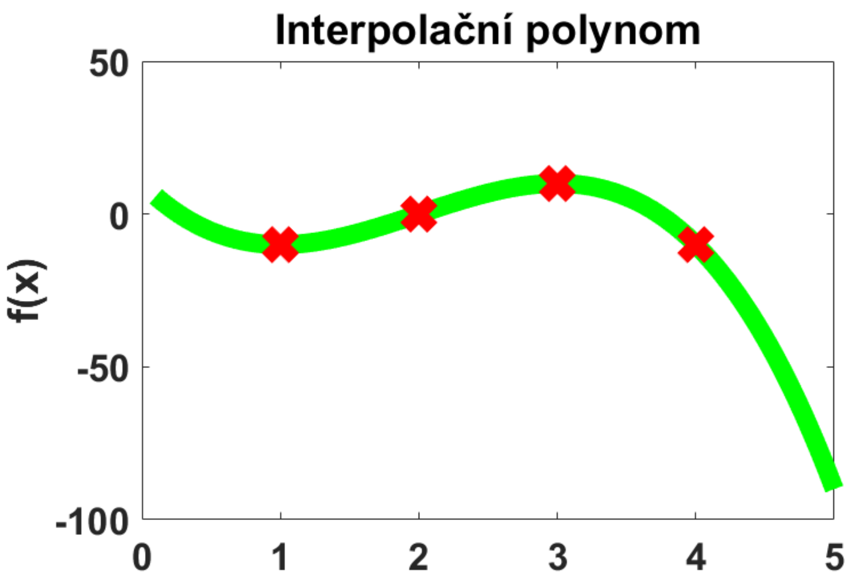
- Jak může vypadat interpolační polynom pro tyto naměřené hodnoty?

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | -10 | 0 | 10 | -10 |

# Interpolační polynom

- Jak může vypadat interpolační polynom pro tyto naměřené hodnoty?

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | -10 | 0 | 10 | -10 |




Interpolační polynom je znázorněn zelenou barvou.

# Interpolační polynom

- Naměřené hodnoty

| $x$ | $x_0$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(x_0)$ | $\dots$ | $f(x_n)$ |

- Chceme polynom

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = f(x)$$

# Interpolační polynom

- Naměřené hodnoty

| $x$ | $x_0$ | $\dots$ | $x_n$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $f(x)$ | $f(x_0)$ | $\dots$ | $f(x_n)$ |

- Chceme polynom $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = f(x)$$

Mě zajímají koeficienty

$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n.$

# Interpolační polynom

- Naměřené hodnoty

| $x$ | $x_0$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(x_0)$ | $\dots$ | $f(x_n)$ |

- Chceme polynom

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = f(x)$$

- Z tabulky doplníme soustavu polynomů

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= f(x_0) \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n &= f(x_1) \\
&\vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n &= f(x_n)
\end{aligned}$$

# Interpolační polynom

- Naměřené hodnoty

| $x$ | $x_0$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(x_0)$ | $\dots$ | $f(x_n)$ |

- Chceme polynom

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = f(x)$$

- Z tabulky doplníme soustavu polynomů

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= f(x_0) \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n &= f(x_1) \\
&\vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n &= f(x_n)
\end{aligned}$$

# Vandermondova matice

- Ze soustavy rovnic dostaneme Vandermondovu matici

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n & f(x_n) \end{array}\right)$$

- Soustavu vyřešíme pro hledané koeficienty $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

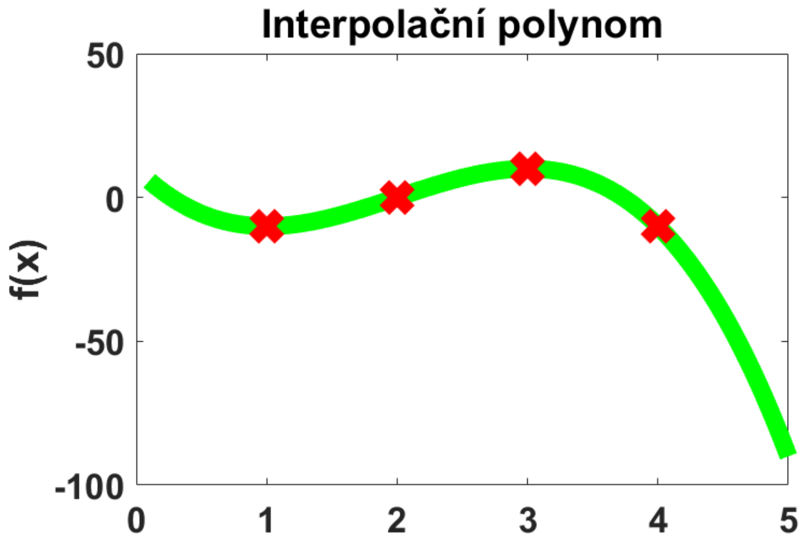
- A mám interpolační polynom, který prochází naměřenými hodnotami

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = f(x)$$

# Úkol č. 1

- Sestavte interpolační polynom pro naměřené hodnoty

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | -10 | 0 | 10 | -10 |




1. x = [ 1 2 3 4]
2. y = [-10 0 10 -10]
3. Vandermondova matice V
   `doc vander`
4. Koeficienty polynomu získáme jako řešení
   V*koef = y
5. Spočítejte interpolaci v
   xPoly = 0.1:0.01:5
6. `doc polyval`

$$f(x) = 10 - 45x + 30x^2 - 5x^3$$

# Lagrangeův polynom

- Místo Vandermond. matice

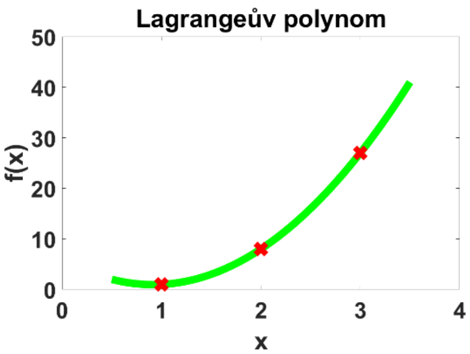
  -> Lagrangeův vzorec.

- Lagrangeův interpolační polynom n-tého stupně má tvar

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \; F_i(x)$$

$$F_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

# Lagrangeův polynom




- Nemusí se řešit výpočetně náročný systém rovnic

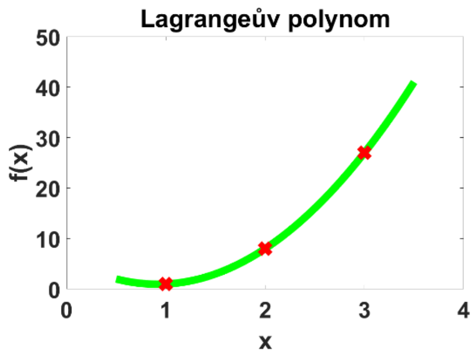
$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = 1$$

$$x_1 = 2 \qquad f(x_1) = 8$$

$$x_2 = 3 \qquad f(x_2) = 27$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \; F_i(x) \qquad F_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

# Lagrangeův polynom




- Nemusí se řešit výpočetně náročný systém rovnic

$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = 1$$

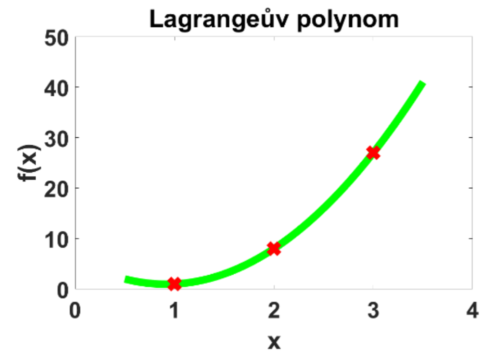
$$x_1 = 2 \qquad f(x_1) = 8$$

$$x_2 = 3 \qquad f(x_2) = 27$$

$$L(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} + 8 \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 27 \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2}$$

$$= 6x^2 - 11x + 6.$$

# Lagrangeův polynom




- Nemusí se řešit výpočetně náročný systém rovnic

$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = 1$$

$$x_1 = 2 \qquad f(x_1) = 8$$

$$x_2 = 3 \qquad f(x_2) = 27$$

$$L(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} + 8 \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 27 \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2}$$

$$= 6x^2 - 11x + 6.$$

# MATLAB Úkol č. 2 - Lagrangeův polynom

- V tomto cvičení budeme aproximovat funkci Lagrangeovým polynomem.

- Vaším úkolem je:
  1. Otevři kód „lagrange.m“
  2. Pochop, co kód dělá.
  3. Všimni si příkazu *waitforbuttonpress* – ten zastaví běh programu při zobrazení grafu – pro pokračování musíš kliknout myší na zobrazený graf.
  4. Dole v kódu, v komentáři, odpověz na příslušné otázky.

# Lagrangeův polynom

- Nevhodný pro velký počet bodů.

- Pro 1000 bodů potřebujeme Lagrangeův polynom stupně 999

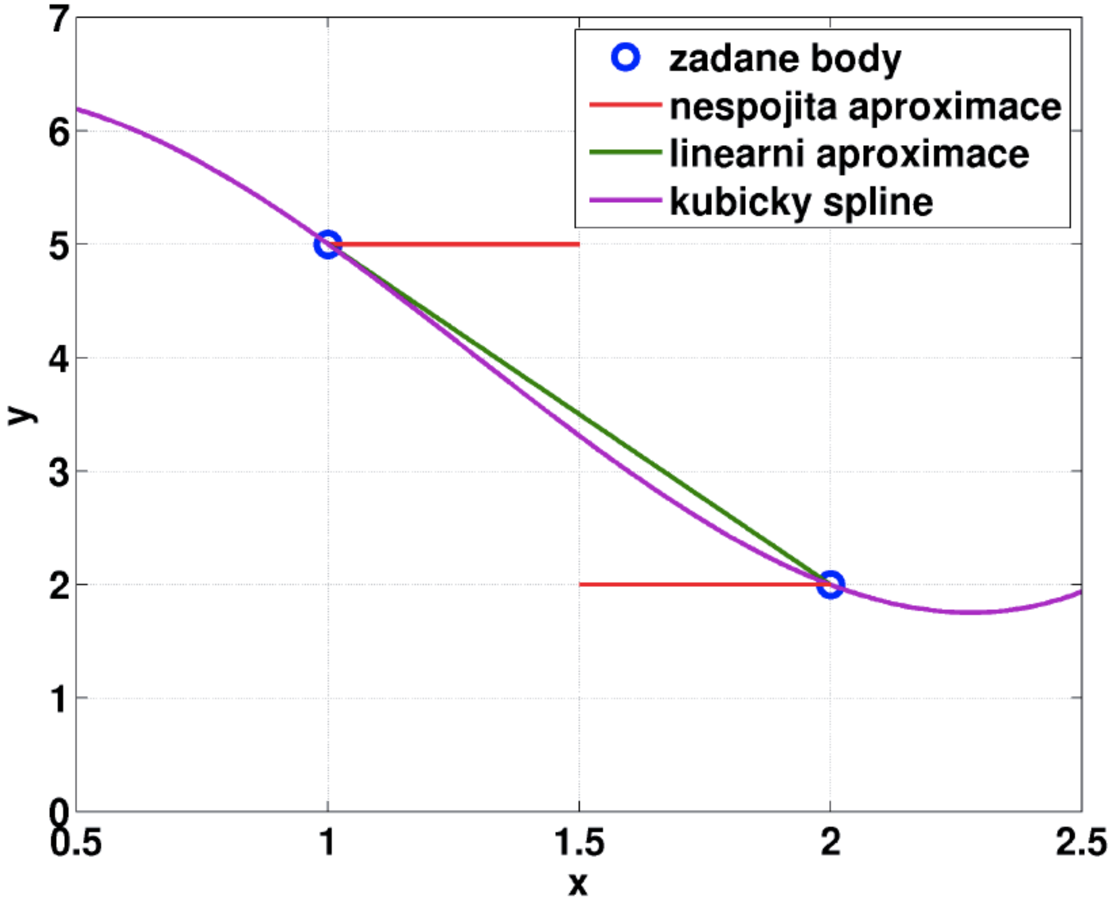
# Lagrangeův polynom

- Nevhodný pro velký počet bodů.

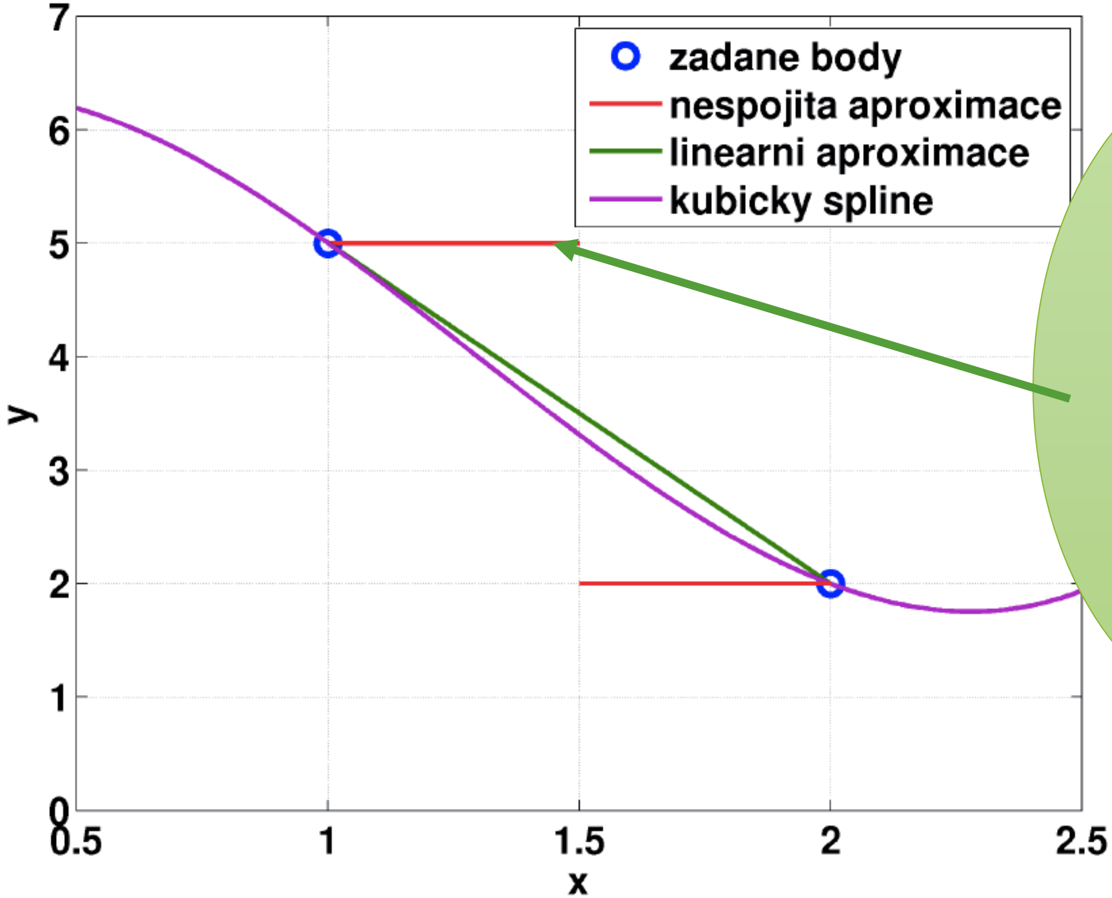
- Pro 1000 bodů potřebujeme Lagrangeův polynom stupně 999

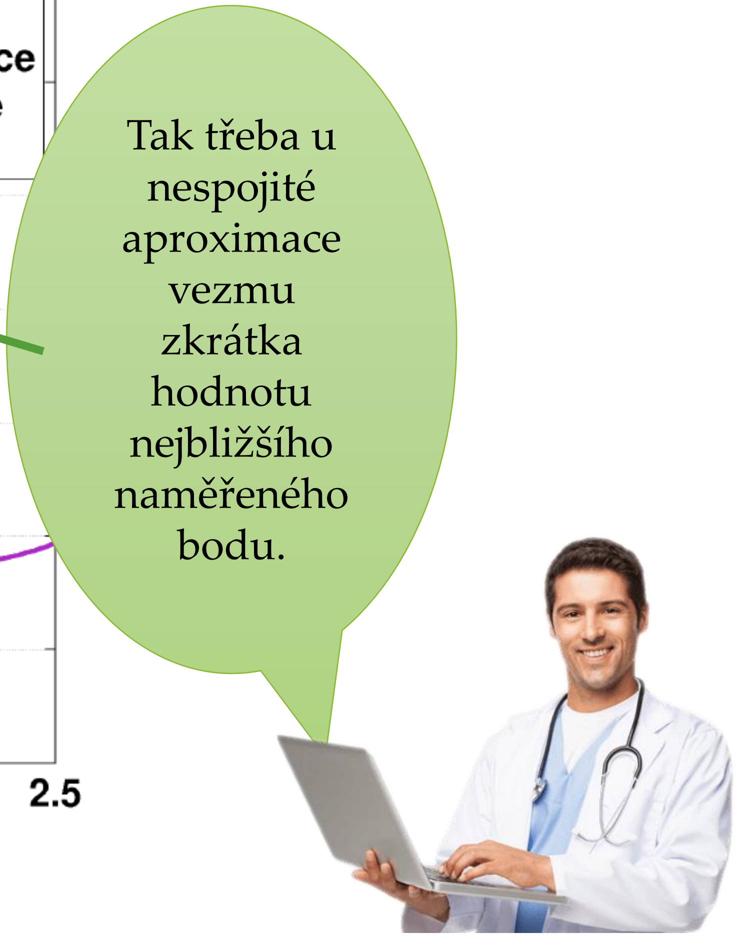
Co třeba lokální aproximace?

# Lokální aproximace

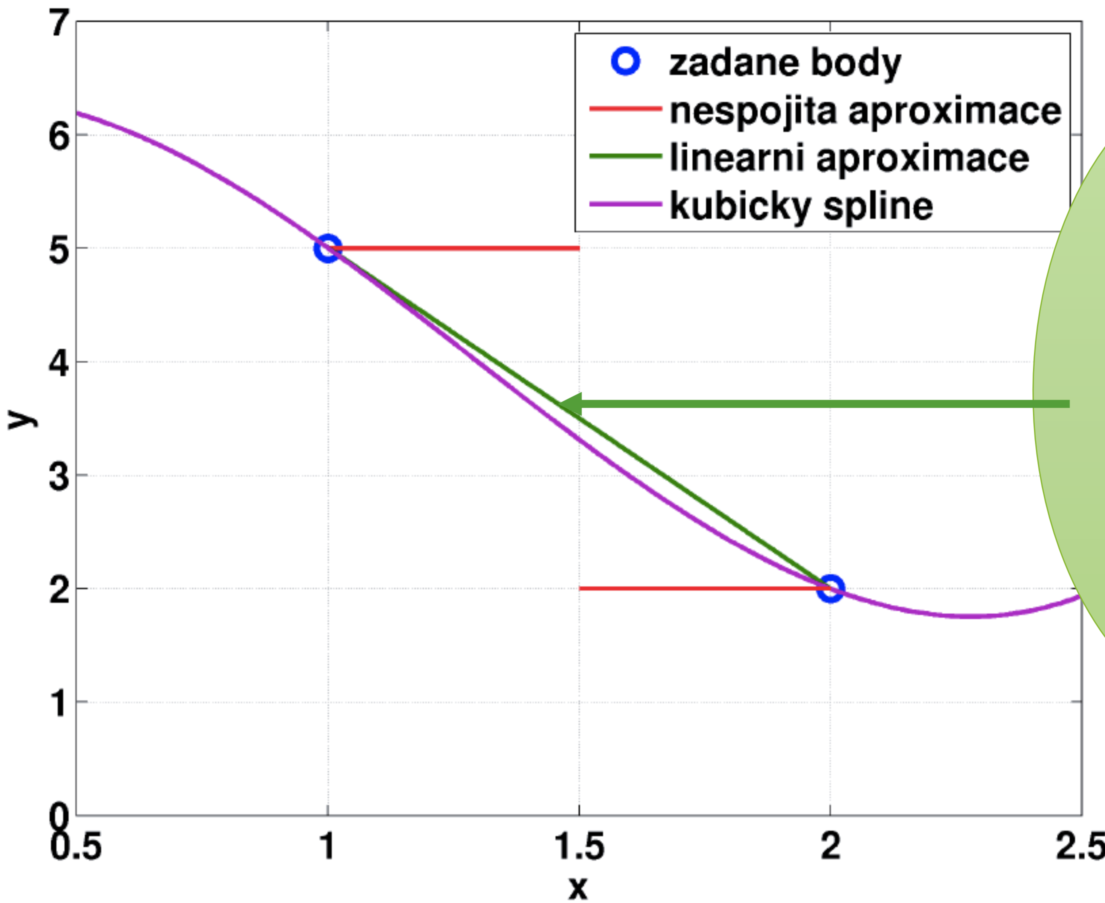



# Lokální aproximace



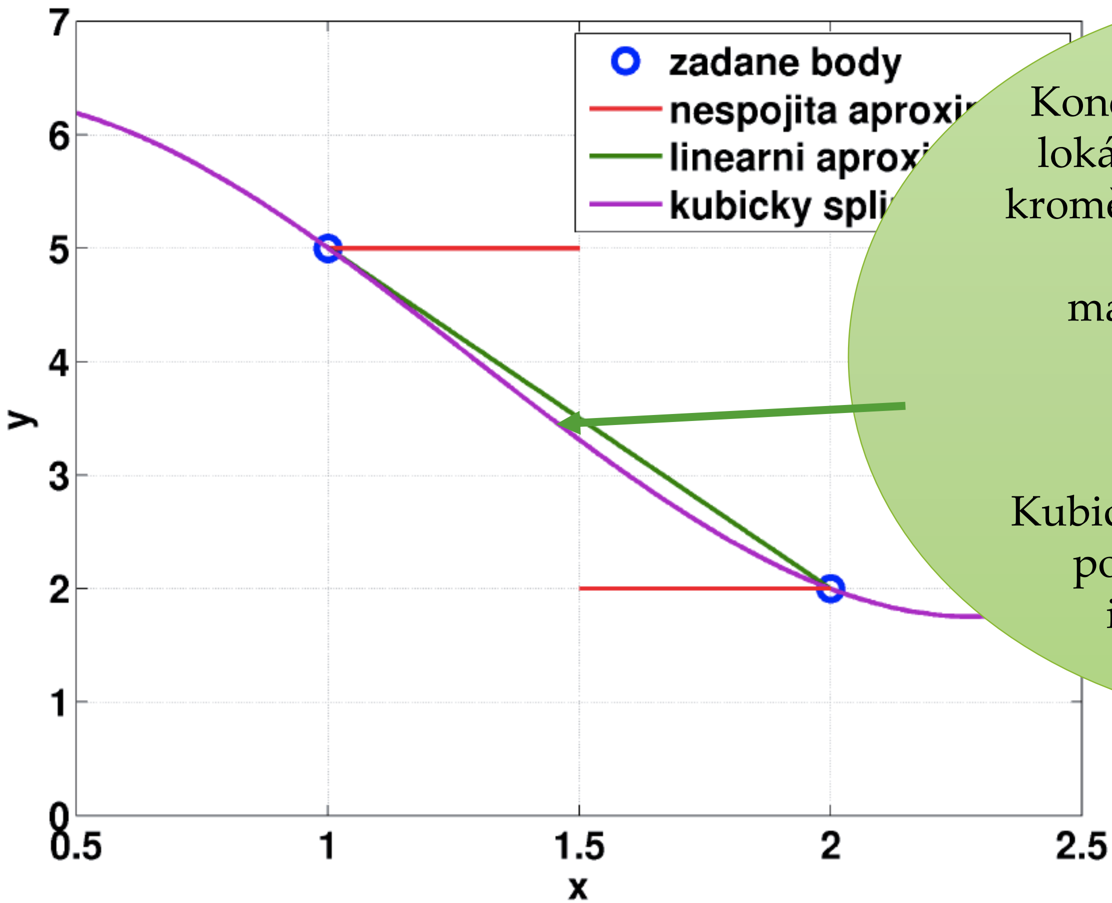



# Lokální aproximace




Lineární aproximace proloží body přímkou. Příslušnou hodnotu pak hledám na dané přímce.

# Lokální aproximace



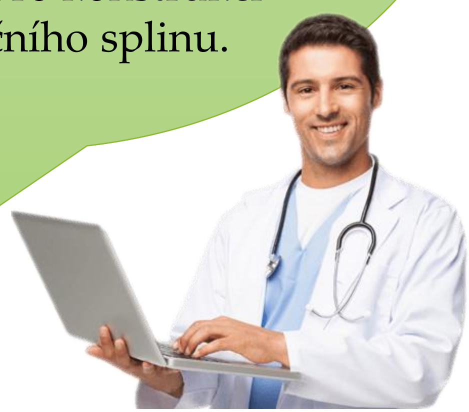

Konečně interpolační spline je lokální interpolace taková, že kromě průchodu uzlovými body

$$f(x_i) = y_i$$

má spojitou alespoň první derivaci $\forall\ x_i$ tedy

$$\lim_{x \to x_{i-}} f'(x) = \lim_{x \to x_{i+}} f'(x) \quad .$$

Kubický spline používá kubické polynomy pro konstrukci interpolačního splinu.



# Kubický spline

- Hledáme funkci, která:
  1. Prochází krajními body
  2. Je v bodech spojitá

$$y(x_i) = y_i, \qquad \lim_{x\to x_{i,+}} y'(x) = \lim_{x\to x_{i,-}} y'(x),$$

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}, \qquad \lim_{x\to x_{i+1,-}} y'(x) = \lim_{x\to x_{i+1,+}} y'(x)$$

$$y(x) = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3$$

# MATLAB Úkol č. 3 - Kubický spline

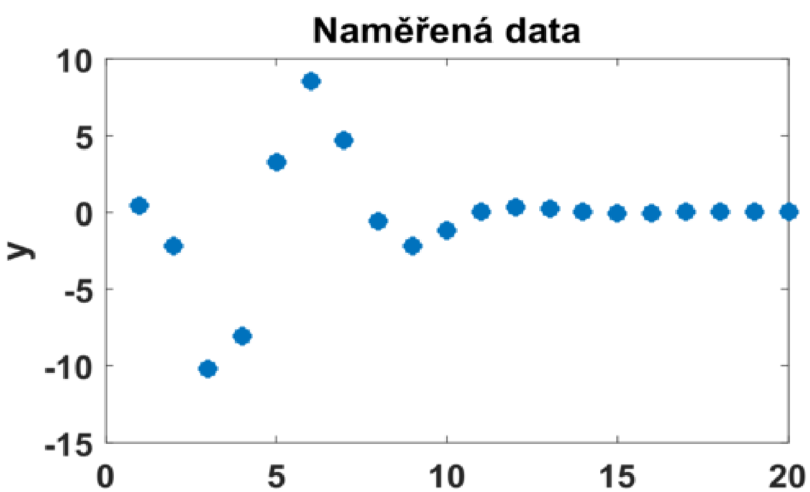
- V tomto cvičení budeme provádět lokální interpolaci pomocí kubického splinu.

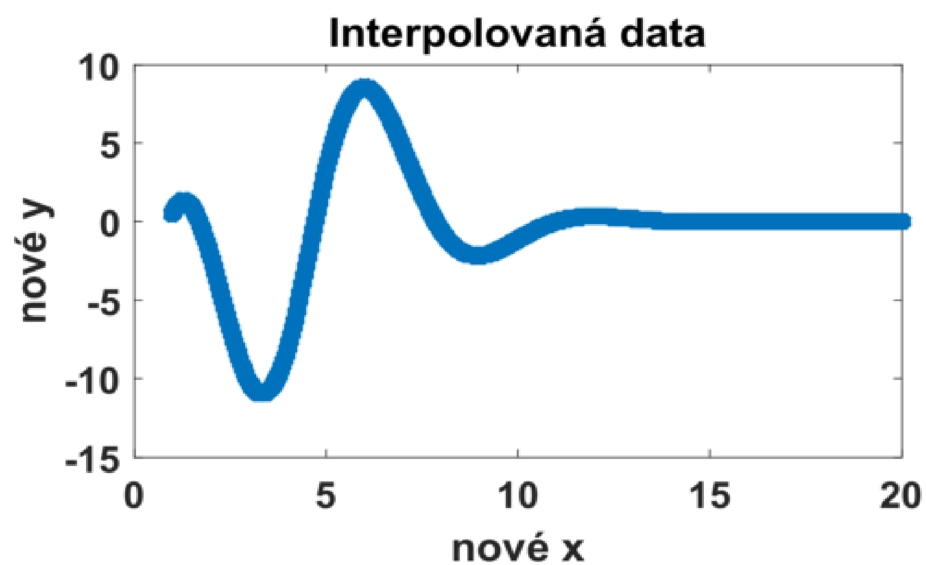
- Vaším úkolem je:
  1. Otevři kód „kubspline.m“
  2. Pochop, co kód dělá.
  3. Dole v kódu, v komentáři, odpověz na příslušné otázky.

Třeba tohle pomůže:
http://nme.8u.cz/files/05/05-opakovani.pdf

# Úkol č. 4 - Interpolace v praxi

1. Načti data `spline.dat`  `doc load`
   x = první sloupec z dat
   y = druhý sloupec z dat
2. Navzorkuj data x  `xJemne = linspace(min(x), max(x), 200);`
3. Proveď interpolaci pomocí Matlab funkce
   `doc interp1`  `(zkus parametry 'linear' nebo 'spline')`



Tímto cvičení skončilo, další slidy jsou pouze pro dobrovolníky.

# Taylorův rozvoj

Malý přírůstek

n-tá derivace funkce f

$$f\left(x+h\right)=\sum_{n}\frac{h^{n}\,f^{(n)}\left(x\right)}{n!}$$

# Taylorův rozvoj

$$f\left(x+h\right)=\sum_{n}\frac{h^{n}\,f^{(n)}\left(x\right)}{n!}$$

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \ \sigma(h^2)$$

- Z toho snadno aproximujeme derivaci

Něco řádu $h^2$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \ \sigma(h)$$

Něco řádu $h$

# Taylorův rozvoj

$$f(x+h) = \sum_n \frac{h^n f^{(n)}(x)}{n!}$$

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + o(h^2)$$

Něco řádu $h^2$

- Z toho snadno aproximujeme derivaci

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \cancel{o(h)}$$

Něco řádu $h$

# Aproximace derivace (centrální)

$$f\left(x+\frac{h}{2}\right) = f(x) + \frac{h}{2}\cdot f'(x) + \frac{h^2}{8} f''(x) + o(h^3)$$

$$f\left(x-\frac{h}{2}\right) = f(x) - \frac{h}{2}\cdot f'(x) + \frac{h^2}{8} f''(x) + o(h^3)$$

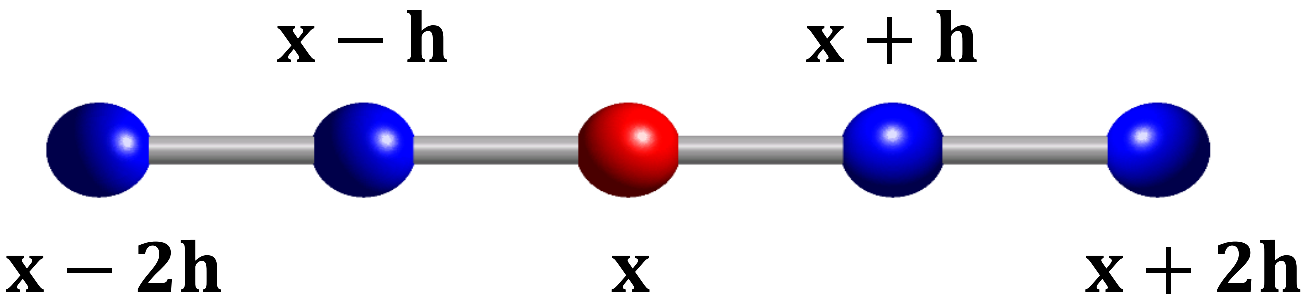
$$f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right) = h\cdot f'(x) + o(h^3)$$

$$\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} = f'(x) + o(h^2)$$

Něco řádu $h^2$

$$f'(x) \approx \frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

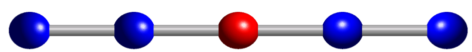
# Aproximace derivace na 5ti bodech




$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}$$

# Bonusový úkol – aproximace derivace

- V tomto cvičení budeme aproximovat derivaci metodou 4. řádu (tedy na 5 bodech)



- Vaším úkolem je:
  1. Otevři kód „appDer.m“
  2. Pochop, co kód dělá.
  3. Všimni si příkazu *waitforbuttonpress* – pro načtení dalšího grafu musíš kliknout myší na právě zobrazený graf.
  4. Doplň funkci **df = df_n4(x,h)** odhadu derivace metodou čtvrtého řádu

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}$$

Konec