

## Numerické riešenie Poissonovej rovnice Sústava s tridiagonálnou maticou

Počítajme rovnicu v tvare

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -2. \quad (1)$$

s okrajovými podmienkami

$$\phi(-1) = 0, \quad \phi(1) = 0. \quad (2)$$

na intervale  $x \in (-1, 1)$ . Jedná sa o jednorozmernú, stacionárnu verziu Poissonovej rovnice  $\nabla^2\phi = -f(x)$ . Analytické riešenie rovnice má tvar:

$$\phi(x) = 1 - x^2. \quad (3)$$

Vyskúšame riešiť metódu numericky aproximovaním druhej derivácie:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -2 = \frac{\phi(x+h) - 2\phi(x) + \phi(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h). \quad (4)$$

Nekonečne krátky krok  $dx$  z derivácie sme nahradili konečne krátkym krokom  $h$ . Metóda aproximácie derivácie je prvého rádu.

Z rovnice vyjadríme hodnotu

$$\phi(x) = 0,5\phi(x+h) + 0,5\phi(x-h) + h^2. \quad (5)$$

Položme teraz na ukážku hodnotu  $h := 0,5$  (v praxi by sme použili menšie časové kroky, ktoré by nám aproximovali spojitost'). Hodnotu  $\phi(-1) = 0$  poznáme z okrajovej podmienky. Keďže máme časový krok s veľkosťou  $h$ , tak ďalšiu hodnotu  $\phi$  budeme aproximovať v bode  $x = -1 + h = -0,5$ , ďalej v bode  $x = -0,5 + h = 0$ , a napokon v  $x = 0 + h = 0,5$ :

$$\phi(-0,5) = 0,5\phi(0) + 0,5\phi(-1) + h^2, \quad (6)$$

$$\phi(0) = 0,5\phi(0,5) + 0,5\phi(-0,5) + h^2, \quad (7)$$

$$\phi(0,5) = 0,5\phi(1) + 0,5\phi(0,5) + h^2. \quad (8)$$

Okrajovú hodnotu  $\phi(1) = 0$  opäť poznáme. Označme teraz  $\phi_1 := \phi(-0,5)$ ,  $\phi_2 := \phi(0)$ ,  $\phi_3 := \phi(0,5)$ . Dostávame

$$\phi_1 - 0,5\phi_2 = h^2 \quad (9)$$

$$-0,5\phi_1 + \phi_2 - 0,5\phi_3 = h^2 \quad (10)$$

$$-0,5\phi_2 + \phi_3 = h^2 \quad (11)$$

Keďže  $h^2 = 0,5^2 = 0,25$ , dostávame

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -0,5 & 0 & 0,25 \\ -0,5 & 1 & -0,5 & 0,25 \\ 0 & -0,5 & 1 & 0,25 \end{array} \right) \quad (12)$$

Vidíme, že úloha viedla na riešenie sústavy s tridiagonálnou maticou. V prípade kroku  $h = 0,5$  sme interval  $< -1, 1 >$  rozdelili na 4 intervaly  $< -1; -0,5 >$ ,  $< -0,5; 0 >$ ,  $< 0; 0,5 >$ ,  $< 0,5; 1 >$ . Pre  $n + 1$  intervalov by sme riešili sústavu s maticou s veľkosťou  $n \times n$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -0,5 & 1 & -0,5 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ \dots \\ \dots \\ 0,25 \\ 0,25 \end{vmatrix} \quad (13)$$

a vytvorili by sme hustejšiu sieť bodov, na ktorých aproximujeme funkciu.

Takto by vyzeralo riešenie v Matlabe pre maticu s veľkosťou 3x3:

```
clear all;
close all;
x0 = -1;
xn = 1;
n = 3;
h = (xn-x0)/(n+1);

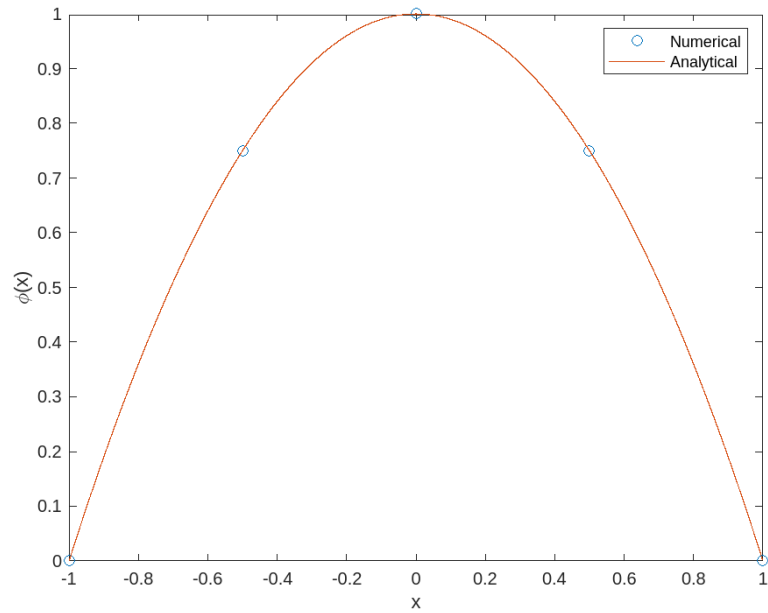
a = [0, -0.5, -0.5];
b = [1, 1, 1];
c = [-0.5, -0.5, 0];
d = [h*h; h*h; h*h];

for k = 2:n
    mult = a(k)/b(k-1);
    b(k) = b(k)-c(k-1)*mult;
    d(k) = d(k)-d(k-1)*mult;
end

phi(n) = d(n)/b(n);
for k=n-1:-1:1
    phi(k) = (-c(k)*phi(k+1)+d(k))/b(k);
end

x = -1:h:1;
phi = [0, phi, 0];

plot(x, phi, 'o')
hold on;
x = -1:0.0001:1;
plot(x, 1-x.*x)
legend('Numerical', 'Analytical')
xlabel('x')
ylabel('\phi(x)')
```



A takto pre maticu so všeobecným  $n$  (v kóde je použitý príklad  $n = 100$ ):

```

clear all;
close all;
x0    = -1;
xn    = 1;
n     = 100;
h     = (xn-x0)/(n+1);

a     = -0.5*ones(n,1);
a(1) = NaN;
c     = -0.5*ones(n,1);
c(n) = NaN;
b     = ones(n,1);
d     = ones(n,1)*h*h;
phi   = NaN(1,n);

for k =2:n
    mult = a(k)/b(k-1);
    b(k) = b(k)-c(k-1)*mult;
    d(k) = d(k)-d(k-1)*mult;
end

phi(n) = d(n)/b(n);
for k=n-1:-1:1
    phi(k)= (-c(k)*phi(k+1)+d(k))/b(k);
end

```

```

x = -1:h:1;
phi = [0,phi,0];

plot(x,phi,'o')
hold on;
plot(x,1-x.*x)
legend('Numerical','Analytical')
xlabel('x')
ylabel('\phi(x)')

```

