Grundlagen der Rechnerarchitektur: Übungsblatt 3

Alexander Waldenmaier, Maryia Masla

27. November 2020

Aufgabe 1: Multiplikation und Division

a) Anwendung der Definition 2.1.14 aus dem Skript:

$10111011_2 \cdot 1001101_2 = (1_2 \cdot 1000000_2 + 0_2 \cdot 100000_2 + 0_2 \cdot 10000_2 + 1_2 \cdot 1000_2 + 1_2 \cdot 100_2 + 0_2 \cdot 10_2 + 1_2 \cdot 1_2) \cdot 10111011_2 = 10111011_2 \cdot 1000000_2 + 10111011_2 \cdot 1000_2 + 10111011_2 \cdot 100_2 + 10111011_2$

$$\begin{array}{rl}
10111011 \cdot 1001101 & = \\
\hline
10111011000000 & \\
10111011000 & \\
1011101100 & \\
10111011 & \\
\hline
11100000111111 &
\end{array}$$

b) Def. 2.1.14:

$10011010_2 \cdot 111001_2 = (1_2 \cdot 100000_2 + 1_2 \cdot 10000_2 + 1_2 \cdot 1000_2 + 0_2 \cdot 100_2 + 0_2 \cdot 10_2 + 1_2 \cdot 1_2) \cdot 10011010_2 = 10011010_2 \cdot 100000_2 + 10011010_2 \cdot 10000_2 + 10011010_2 \cdot 1000_2 + 10011010_2$

$$\begin{array}{lrl}
 & 10011010 \cdot 111001 & = \\
\hline
 & 1001101000000 & \\
+ & 100110100000 & \\
 & 10011010000 & \\
 & 10011010 & \\
\hline
 & 10001001001010 &
\end{array}$$

c) Anwendung der Definition (2.1.15) aus dem Skript:

$$\begin{array}{l}
10011010 : 10010 = 1000 \\
\underline{10010} \\
\quad\;\; 10 \\
\;\;\underline{00000} \\
\quad\;\; 101 \\
\quad \underline{00000} \\
\quad\;\; 1010 \\
\quad\; \underline{00000} \\
\quad\;\; 1010 \; \textit{Rest}
\end{array}$$

d) (2.1.15):

$$
\begin{array}{l}
11101100001 : 10110 = 1010101 \\
\underline{10110} \\
01111 \\
\underline{00000} \\
11110 \\
\underline{10110} \\
10000 \\
\underline{00000} \\
100000 \\
\underline{10110} \\
10100 \\
\underline{00000} \\
101001 \\
\underline{10110} \\
\underline{10011}\ \mathit{Rest}
\end{array}
$$

Aufgabe 2: Multiplizieren & Dividieren aber schnell

a) $01\,0010\,1010_2 \cdot 00\,0000\,0010_2 = 10\,0101\,0100_2$

b) $000\,0101_2 \cdot 00\,0100_2 = 01\,0100_2$

c) $0011\,1010\,1001_2 \div 0010\,0000\,0000_2 = 0000\,0000\,0001_2$

d) $0101\,0111_2 \div 0000\,1000_2 = 0000\,1010,1110\,0000_2 =$
$2^3 + 2^1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-2} = 8 + 2 + 0,5 + 0,25 + 0,125 = 10,875_{10}$

Aufgabe 3: Binär und doch Dezimal

a) 377_{10} in BCD:

Z_{10}	3	7	7
BCD	0011	0111	0111

$\Rightarrow 377_{10} = 0011\,0111\,0111$ in BCD

b) $17_{10} + 13_{10}$ in BCD:

Z_{10}	1	7
BCD	0001	0111
Z_{10}	1	3
BCD	0001	0011

$$
\begin{array}{rcc}
 & 0001 & 0011 \\
+ & 0001 & 0111 \\
 & 0001 & \\
\hline
 & 0011 & 0000
\end{array}
$$

$\Rightarrow 17_{10} + 13_{10} = 0011\,0000$ in BCD

c) $110_{10} + 99_{10}$ in BCD:

Z_{10}	1	1	0
BCD	0001	0001	0000
Z_{10}	9	9	
BCD	1001	1001	

$$
\begin{array}{rccc}
 & 0001 & 0001 & 0000 \\
+ & & 1001 & 1001 \\
 & 0001 & & \\
\hline
 & 0010 & 0000 & 1001
\end{array}
$$

$\Rightarrow 110_{10} + 99_{10} = 0010\,0000\,1001$ in BCD

d) $3_{10} \cdot 4_{10}$ in BCD:

Z_{10}	3
BCD	0011
Z_{10}	4
BCD	0100

$$\begin{array}{rrl} & 0011 \cdot 0100 & = \\ \hline & 0000\,0010 & \\ + & 0001\,0000 & \\ \hline & 0001\,0010 & = 12_{10} \end{array}$$

Z_{10}	1	2
BCD	0001	0010

$\Rightarrow 3 \cdot 4 = 0011_{BCD} \cdot 0100_{BCD} = 0001\,0010_{BCD}$

Aufgabe 4: Kettenbruch

a) $$\frac{43}{30} = 1 + \frac{13}{30} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

b) $$\frac{55}{19} = 2 + \frac{17}{19} = 2 + \frac{1}{\frac{19}{17}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{17}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{17}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{2}}}$$

Aufgabe 5: Festkommazahlen

a)

i	x_i	b			a_i
0	0,453125	$*2 =$	0,90625	≥ 1:	0
1	0,90625	$*2 =$	1,8125	≥ 1:	1
2	0,8125	$*2 =$	1,625	≥ 1:	1
3	0,625	$*2 =$	1,25	≥ 1:	1
4	0,25	$*2 =$	0,5	≥ 1:	0
4	0,5	$*2 =$	1,0	≥ 1:	1

$\Rightarrow 1,453125_{10} = 0000\,01,01\,1010_2$

Es ist kein Abschneiden notwendig!

b) $\frac{1}{3}_{10} = 1_{10} \div 3_{10} = 0,\bar{3}$

i	x_i	b			a_i
0	$0,\bar{3}$	$*2 =$	$0,\bar{6}$	≥ 1:	0
1	$0,\bar{6}$	$*2 =$	$1,\bar{3}$	≥ 1:	1
2	$0,\bar{3}$	$*2 =$	$0,\bar{6}$	≥ 1:	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
7	$0,\bar{6}$	$*2 =$	$1,\bar{3}$	≥ 1:	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\Rightarrow \frac{1}{3}_{10} = 0000\,00,01\,0101_2$

Um nicht abschneiden zu müssen, könnte man die Nachkommastellen als Kettenbruch darstellen. Dann müsste die Zahl 3 als einziges Kettenbruch-Glied gespeichert werden.

Aufgabe 6: Grey Code

a) Farbkodierung: aufgefüllte Nullen, aufgefüllte Einsen:

$$
\begin{array}{c}
0000 \\
0001 \\
001\overline{1} \\
0010 \\
01\overline{10} \\
0111 \\
0101 \\
0100 \\
1\overline{100} \\
1101 \\
1111 \\
1110 \\
1010 \\
1011 \\
1001 \\
1000
\end{array}
$$

b)
- Bei jedem Übergang von einer Zeile zur nächsten ändert jeweils nur eine Stelle ihren Wert. Die Auswirkungen von Ablesefehlern bleiben somit minimal.
- Durch das oben gezeigte Spiegel-Verfahren ist der Grey Code sehr einfach zu konstruieren.

Aufgabe 7: Minimierung macht alles einfacher!

a)

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= (x_1 + 0) \cdot (0 + 1) \cdot 1 \\
&\overset{\text{P2}}{=} (x_1 + 0) \cdot 1 \\
&\overset{\text{P5'}}{=} x_1 \cdot 1 \\
&\overset{\text{P5}}{=} x_1
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
i(x_1, x_2) &= \overline{((\overline{x_1 x_2})(\overline{x_1 x_2}))} \\
&\overset{\text{P8}}{=} \overline{\overline{x_1 x_2}} + \overline{\overline{x_1 x_2}} \\
&\overset{\text{P7}}{=} x_1 x_2 + x_1 x_2 \\
&\overset{\text{P4}}{=} 2 \cdot x_1 x_2
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
j(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 + x_2 x_4 + x_3 + x_1 x_4 \\
&\overset{\text{P1}}{=} x_1 + x_4 x_2 + x_3 + x_4 x_1 \\
&\overset{\text{P1'}}{=} x_1 + x_3 + x_4 x_1 + x_4 x_2 \\
&\overset{\text{P4}}{=} x_1 + x_3 + x_4 (x_1 + x_2)
\end{aligned}
$$