ertis embedded real-time systems institute
ulm university

Übung 4

Die Abgabe erfolgt als Datei-Upload in Moodle, **gruppenweise** bis spätestens **06.12.2020** um **24:00**. Beschriften Sie die Abgaben mit Vor- und Nachnamen von beiden Gruppenmitgliedern. Das Übungsblatt gilt als bestanden, wenn mindestens 10 der maximal 20 Punkte erreicht werden. Die zu erreichenden Punkte werden schwerpunktmäßig auf den Rechenweg gegeben.

Aufgabe 1: Teileralgebra .... 2 Punkte

In der Vorlesung haben Sie bereits die Teileralgebra als eine Boolesche Algebra kennengelernt.

Gegeben ist die Teileralgebra $(T, ggT, kgV, 0, 30)$, mit $T := \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}$. Zeigen Sie, dass die 30 das absorbierende Element bezüglich des *kgV* und das neutrale Element bezüglich des *ggT* dieser Teileralgebra ist.

Aufgabe 2: De-morgansche Gesetze .... 2 Punkte

Wie für jede andere mathematische Struktur gelten auch für die Boolesche Algebra Rechenregeln und Gesetze. Überprüfen Sie mit Hilfe einer Wertetabelle, ob die De-morganschen Gesetzte gelten. Beweisen Sie die Gesetzte anschließend mit Hilfe der Booleschen Algebra.

a) $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

b) $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$

Aufgabe 3: Äquivalenz Beweisen .... 3 Punkte

Zeigen Sie, dass die folgenden Booleschen Funktionen äquivalent sind. Verwenden Sie hierfür die Gesetze der Booleschen Algebra. Geben Sie jeweils die verwendete Axiom an.

a) $(x_1 \cdot x_2) + (\overline{x_1} \cdot x_3) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) = \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_3}) \cdot (x_2 + x_3)}$

b) $(x_1 \cdot \overline{x_2}) + (\overline{x_1} \cdot x_2) = \overline{\overline{(x_1 \cdot \overline{(x_2 \cdot x_2)})} \cdot \overline{((\overline{x_1 \cdot x_1}) \cdot x_2)}}$

Aufgabe 4: Minimierung macht alles einfacher! .... 3 Punkte

Minimieren Sie die angegebenen Funktionen soweit es möglich ist.
Geben Sie den vollständigen Rechenweg an und referieren Sie die benutzten Axiome aus der Formelsammlung.

a) $g(x_1, x_2) = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2} \cdot x_1}$

b) $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) + x_1 \cdot (x_2 + x_3 \cdot x_4) + x_1$

c) $k(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 + x_3 \cdot (x_2 + x_3)) \cdot 1) \cdot 1$

Aufgabe 5: Kanonen? Nein kanonisch! .... 0,5 + 1 + 1 Punkte

Sie haben folgende Funktion gegeben:

$$f(x_2, x_1, x_0) = \begin{cases} 1 & \text{falls der Dezimalwert von } (x_2 x_1 x_0) \bmod 2 = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $(x_2 x_1 x_0)$ eine unsigned Dualzahl mit x_0 als LSB ist.

a) Stellen Sie die Wahrheitstabelle von $f(x_2, x_1, x_0)$ auf.

b) Stellen Sie die DKNF und KKNF von $f(x_2, x_1, x_0)$ auf.

c) Minimieren Sie die DKNF von $f(x_2, x_1, x_0)$ und geben Sie die dazu die benutzten Axiome aus der Formelsammlung an.

Aufgabe 6: Nicht oder und, oder? .... (1,5 + 1,5) + 1 Punkte

Wie bereits aus der Vorlesung bekannt ist, bilden OR und NOT, AND und NOT, NAND sowie NOR eine vollständige Basis. Das bedeutet, dass jede beliebige Boolesche Funktion nur mit Hilfe der Funktionen einer Basis dargestellt werden kann.

a) Stellen Sie den Booleschen Ausdruck $x_1 \oplus x_2$ nur unter Verwendung von NAND bzw. NOR dar. Geben Sie die benutzten Axiome aus der Formelsammlung an.

b) Stellen Sie folgenden Booleschen Ausdruck nur unter Verwendung von NAND dar. Geben Sie die benutzten Axiome aus der Formelsammlung im Moodle an.
$(x_1 \cdot \overline{x_2}) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) + (x_3 \cdot \overline{x_0}) + (x_0 \cdot \overline{x_1})$

Aufgabe 7: KV & Shannon .... 4 Punkte

Minimieren Sie die angegebenen DKNF mit Hilfe eines Karnaugh-Veitch-Diagrammes (verwenden Sie dazu die Vorlage auf der letzten Seite). Überprüfen Sie sich anschließend mit Hilfe der Shannonzerlegung ihr Ergebnis, indem sie die Ursprungs-DKNF wieder herstellen.

a) $f(x_0, x_1, x_2) = x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_0} \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_0} \cdot x_1 \cdot x_2$

b)

$$\begin{aligned} g(x_0, x_1, x_2, x_3) = & x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_0} \cdot \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_0} \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\ & + \overline{x_0} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_0} \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_0} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\ & + x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_0} \cdot \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \end{aligned}$$

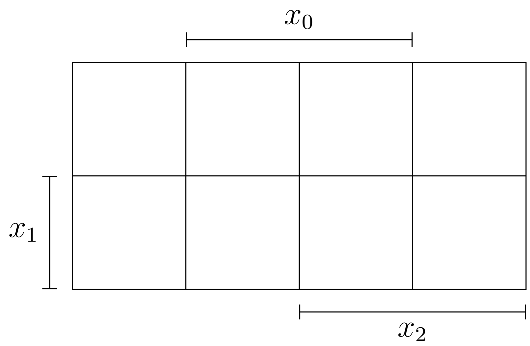

Abbildung 1: Vorlage KV-Diagramm mit drei Variablen

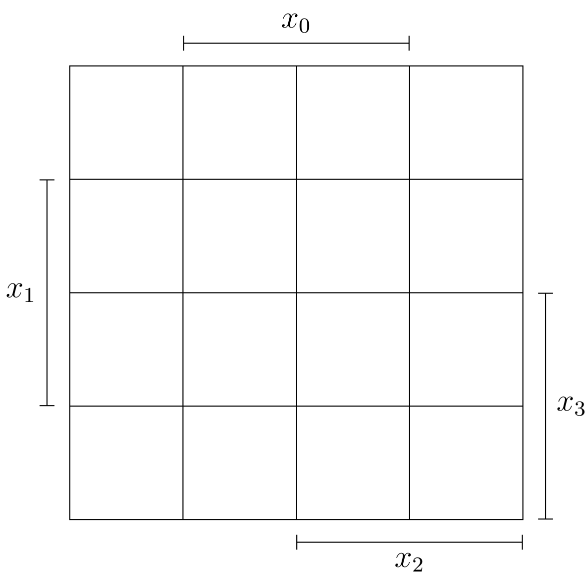

Abbildung 2: Vorlage KV-Diagramm mit vier Variablen