Grundlagen der Rechnerarchitektur: Übungsblatt 4

Alexander Waldenmaier, Maryia Masla

4. Dezember 2020

Aufgabe 1: Teilalgebra

Aufgabe 2: De-morgansche Gesetze

a) Um $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$ zu beweisen, nutzen wir Komplementarität und zeigen, dass $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot (x_1 + x_2) = 0$ und $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + (x_1 + x_2) = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot (x_1 + x_2) &\overset{\text{P4}}{=} \overline{x_1} \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_2 \\
&\overset{\text{P9}}{=} 0 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot 0 \\
&\overset{\text{P6}}{=} 0 + 0 \\
&\overset{\text{P5'}}{=} 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + (x_1 + x_2) &\overset{\text{P4'}}{=} (\overline{x_1} + x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_2 + \overline{x_2}) \\
&\overset{\text{P9'}}{=} (1 + x_2) \cdot (x_1 + 1) \\
&\overset{\text{P6'}}{=} 1 \cdot 1 \\
&\overset{\text{P5}}{=} 1
\end{aligned}$$

x_1	x_2	$\overline{x_1 + x_2}$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

b) $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$ gilt, wenn $(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$ und $(\overline{x_1} + \overline{x_2}) + x_1 \cdot x_2 = 1$ gilt (Komplementarität)

$$\begin{aligned}
(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot x_1 \cdot x_2 &\overset{\text{P4}}{=} \overline{x_1} \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_2} \\
&\overset{\text{P9}}{=} 0 \cdot x_2 + x_1 \cdot 0 \\
&\overset{\text{P6}}{=} 0 + 0 \\
&\overset{\text{P5'}}{=} 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{x_1} + \overline{x_2} + (x_1 \cdot x_2) &\overset{\text{P4'}}{=} (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_1) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_2) \\
&\overset{\text{P9'}}{=} (1 + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} + 1) \\
&\overset{\text{P6'}}{=} 1 \cdot 1 \\
&\overset{\text{P5}}{=} 1
\end{aligned}$$

x_1	x_2	$\overline{x_1 \cdot x_2}$	$\overline{x_1} + \overline{x_2}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Aufgabe 3: Äquivalenz Beweisen

a)

$$\begin{aligned}
\overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_3}) \cdot (x_2 + x_3)} &\overset{\text{P8}}{=} \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2})} + \overline{(x_1 + \overline{x_3})} + \overline{(x_2 + x_3)} \\
&\overset{\text{P8}}{=} (\overline{\overline{x_1}} \cdot \overline{\overline{x_1}}) + (\overline{x_1} \cdot \overline{\overline{x_3}}) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) \\
&\overset{\text{P7}}{=} (x_1 \cdot x_1) + (\overline{x_1} \cdot x_3) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x_1 \cdot x_1) + (\overline{x_1} \cdot x_3) + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) = \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_3}) \cdot (x_2 + x_3)}$$

b)

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{(x_1 \cdot \overline{(x_2 \cdot x_2)})} \cdot \overline{(\overline{(x_1 \cdot x_1)} \cdot x_2)}} &\overset{\text{P3}}{=} \overline{\overline{(x_1 \cdot \overline{x_2})} \cdot \overline{(\overline{x_1} \cdot x_2)}} \\
&\overset{\text{P8}}{=} \overline{\overline{(x_1 \cdot \overline{x_2})}} + \overline{\overline{(\overline{x_1} \cdot x_2)}} \\
&\overset{\text{P7}}{=} (x_1 \cdot \overline{x_2}) + (\overline{x_1} \cdot x_2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x_1 \cdot \overline{x_2}) + (\overline{x_1} \cdot x_2) = \overline{\overline{(x_1 \cdot \overline{(x_2 \cdot x_2)})} \cdot \overline{(\overline{(x_1 \cdot x_1)} \cdot x_2)}}$$

Aufgabe 4: Minimierung macht alles einfacher!

a)

$$\begin{aligned}
g(x_1, x_2) &= \overline{\overline{x_1 \cdot x_2} \cdot x_1} \\
&\overset{\text{P8}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} + \overline{x_1} \\
&\overset{\text{P7}}{=} (x_1 \cdot x_2) + \overline{x_1} \\
&\overset{\text{P4'}}{=} (x_1 + \overline{x_1}) \cdot (\overline{x_1} + x_2) \\
&\overset{\text{P9'}}{=} 1 \cdot (\overline{x_1} + x_2) \\
&\overset{\text{P5}}{=} \overline{x_1} + x_2
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
h(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) + x_1 \cdot (x_2 + x_3 \cdot x_4) + x_1 \\
&\overset{\text{P4}}{=} (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3 \cdot x_4) + x_1 \\
&\overset{\text{P3'}}{=} (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_3 \cdot x_4) + x_1 \\
&\overset{\text{P4}}{=} (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) \cdot (1 + x_4) + x_1 \\
&\overset{\text{P6'}}{=} (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) \cdot 1 + x_1 \\
&\overset{\text{P5}}{=} (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) + x_1 \\
&\overset{\text{P4}}{=} x_1 \cdot (x_2 + x_3 + 1) \\
&\overset{\text{P6'}}{=} x_1 \cdot 1 \\
&\overset{\text{P5}}{=} x_1
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
k(x_1,x_2,x_3) &= ((x_1 + x_3 \cdot (x_2 + x_3)) \cdot 1) \cdot 1 \\
&\overset{\text{P5}}{=} (x_1 + x_3 \cdot (x_2 + x_3)) \cdot 1 \\
&\overset{\text{P5}}{=} x_1 + x_3 \cdot (x_2 + x_3) \\
&\overset{\text{P11'}}{=} x_1 + x_3
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Kanonen? Nein kanonisch!

$$f(x_2,x_1,x_0) = \begin{cases} 1 \text{ falls der Dezimalwert von } (x_2,x_1,x_0) \bmod 2 = 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

(x_2,x_1,x_0) eine vorzeichenlose Binärzahl, x_0 ist LSB.
$(x_2,x_1,x_0) \bmod 2 = 0$, wenn (x_2,x_1,x_0) eine gerade Zahl ist d.h. $x_0 = 0$

a)

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

b) DKNF von f:

$$f(x_2,x_1,x_0) = \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot x_1 \cdot \overline{x_0}$$

KKNF von f:

$$f(x_2,x_1,x_0) = (x_2 + x_1 + \overline{x_0}) \cdot (x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}) \cdot (\overline{x_2} + x_1 + \overline{x_0}) \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_0})$$

c)

$$
\begin{aligned}
f(x_2, x_1, x_0) &= \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} \\
&\overset{\text{P4}}{=} \overline{x_2} \cdot \overline{x_0} \cdot (\overline{x_1} + x_1) + x_2 \cdot \overline{x_0} \cdot (\overline{x_1} + x_1) \\
&\overset{\text{P9'}}{=} \overline{x_2} \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot \overline{x_0} \\
&\overset{\text{P4}}{=} \overline{x_0} \cdot (\overline{x_2} + x_2) \\
&\overset{\text{P9'}}{=} \overline{x_0}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6: Nicht oder und, oder?

Aufgabe 7: KV & Shannon