Formale Grundlagen: Übung 1

Alexander Waldenmaier, Tutorin: Vanessa Hiebeler

11. November 2020

Aufgabe 1.1

Hinweis: Ich verstehe es so, dass die Menge einer Zahl nicht das selbe wie die Zahl selbst ist, also $x \neq \{x\}$, aber $x \in \{x\}$.

(a) $M_a = \{3\}$

(b) $M_b = \{2, 4, 5, 6\}$

(c) $M_c = \{1, \{3\}\}$

(d) $M_d = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}\Delta\{1, \{1, 2\}, \emptyset\} = \{\{1\}, \{2\}, 1\}$

(e) $M_e = \{7, 14, 21, 28, 35, 42\}$

(f) $M_f = \{\{3, 4, 5\}, \{4, 3, 5\}, \{6, 8, 10\}, \{8, 6, 10\}\}$

Aufgabe 1.2

(a)

$$|M_a| = \binom{|\{a, b, c, d\}|}{3} = \frac{|\{a, b, c, d\}|!}{3!(|\{a, b, c, d\} - 3)!} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{24}{6 * 1} = 4$$

(b)

$$\begin{aligned} |M_b| =& |\{\{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}\Delta ... \\ & \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}| \\ =& |\{\{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}\}| = 8 \end{aligned}$$

(c) $|M_c| = |\emptyset| = 0$

(d) $|M_d| = |\emptyset| = 0$

Aufgabe 1.3

(a) Bijektiv, da für alle Elemente des Wertebereichs $y \in Y$ genau ein Element aus dem Definitionsbereich $x \in X$ existiert. (Frage: Müsste hier nicht korrekterweise der Wertebereich alle natürlichen Zahlen UND Null enthalten?)

(b) Nicht injektiv, da beispielsweise $(x, y) = (1, -1)$ das selbe Ergebnis liefert wie $(x, y) = (-1, 1)$. Surjektiv, da für jedes Element des Wertebereichs mindestens eine Wertekombination des Definitionsbereichs existiert, für den $f_b(x, y) = \frac{x}{y}$ gilt (Grund: Definition der rationalen Zahlenmenge). Da nicht sowohl injektiv als auch surjektiv, ist die Funktion nicht bijektiv.

(c) Nicht injektiv, da beispielsweise $x = 1$ und $x = -1$ beide das Ergebnis $f_c(x) = 1$ liefern. Surjektiv, da alle natürlichen Zahlen genau die Menge aller positiver ganzen Zahlen ist, was durch die Betragsfunktion dargstellt wird. Da nicht sowohl injektiv als auch surjektiv, ist die Funktion nicht bijektiv.

(d) Nicht surjektiv, da beispielsweise für die Zahl $y = 0.5$ aus dem Wertebereich keine zugehörige Zahl aus dem Definitionsbereich gefunden werden kann, die $f_d(x) = x^2$ erfüllt. Injektiv, da für jede Zahl aus dem Wertebereich entweder genau eine Zahl aus dem Definitionsbereich vorliegt, die die Funktionsvorschrift erfüllt, oder keine. Ersteres tritt für alle Zahlen auf, die Quadratzahlen sind, da in diesem Fall ausschließlich $x = |\sqrt{y}|$ möglich ist ($x = -|\sqrt{y}|$ liegt bspw. nicht im Definitionsbereich). Zweiteres tritt für alle Zahlen auf, die keine Quadratzahlen sind. Da nicht sowohl injektiv als auch surjektiv, ist die Funktion nicht bijektiv.

Aufgabe 1.4

Zu beweisen:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i = -1$$

Wenn n ungerade ist, so lässt es sich darstellen als $i = 2k + 1$ wobei $k \in \mathbb{N}_0$. Eingesetzt in die obige Gleichung ergibt das:

$$A(k) : \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^i = -1$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $A(k_0), k_0 = 0$

$$\sum_{i=1}^{1} (-1)^i = (-1)^1 = -1$$

Induktionsschritt: $A(k) \to A(k+1)$

Induktionsbehauptung: $\sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^i = -1$

$$\begin{aligned} A(k+1): \sum_{i=1}^{2(k+1)+1} (-1)^i &= -1 \\ \sum_{i=1}^{2k+3)+1} (-1)^i &= -1 \\ \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^i + (-1)^{2k+2} + (-1)^{2k+3} &= -1 \\ \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^i + 1 - 1 &= -1 \\ \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^i &= -1 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile entspricht wieder der Induktionsbehauptung, weshalb der Induktionsschritt bewiesen wurde.

q.e.d.

Aufgabe 1.5

Zu beweisen:

$$A(n,k): \frac{n!}{k!^2} \in \mathbb{N} |\ n,k \in \mathbb{N} \wedge n = 2k$$

Direkter Beweis:

$$A(n,k): \frac{n!}{k!^2} = \frac{n!}{k!k!} = \frac{n!}{k!(2k-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

Aus der Definition des Binomialkoeffizienten ergibt sich die Aussage.

q.e.d.