Algorithmen und Datenstrukturen: Übung 4

Tanja Zast, Alexander Waldenmaier

3. Dezember 2020

Aufgabe 4.1

a) Wenn mit Wahrscheinlichkeit $p' = \frac{2}{3}$ zwei Marsianer am selben Tag Geburtstag haben, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für völlig unterschiedliche Geburtstage $p = \frac{1}{3}$. Mit $m = 687$ ergibt die Formel aus dem Skript dann für die gesuchte Anzahl n an Marsianern:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n-1} \frac{m-1}{m} = p &\approx e^{-\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{2m}} \\
\ln p &\approx -\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{2m} \\
2m \ln p &\approx -\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \\
\sqrt{-2m \ln p} &\approx n - \frac{1}{2} \\
n &\approx \sqrt{-2m \ln p} + \frac{1}{2} \\
n &\approx \sqrt{-2 \cdot 687 \ln \frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \approx 39,3522 \\
\Rightarrow n &= 40
\end{aligned}$$

Ab 40 Marsianern beträgt die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Dopplung der Geburtstage mehr als $\frac{2}{3}$.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Einträgen in einer m großen Hashtabelle eine Kollision auftritt, beträgt:

$$p = 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \frac{m-1}{m} \approx 1 - e^{-\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{2m}}$$

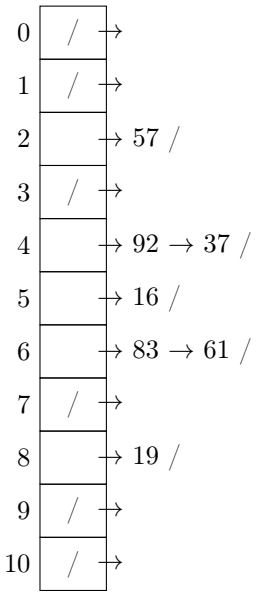
Mit der Bedingung $p > \frac{2}{3}$ und unter Verwendung der Approximation folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} &\lesssim 1 - e^{-\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{2m}} \\
\frac{1}{3} &\gtrsim e^{-\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{2m}} \\
\ln \frac{1}{3} &\gtrsim -\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{2m} \\
2m \ln \frac{1}{3} &\gtrsim -\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \\
\sqrt{-2m \ln \frac{1}{3}} &\lesssim n - \frac{1}{2} \\
n &\gtrsim \sqrt{-2m \ln \frac{1}{3}} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

Gegeben: $S = \{92, 19, 83, 37, 16, 57, 61\}, m = 11$

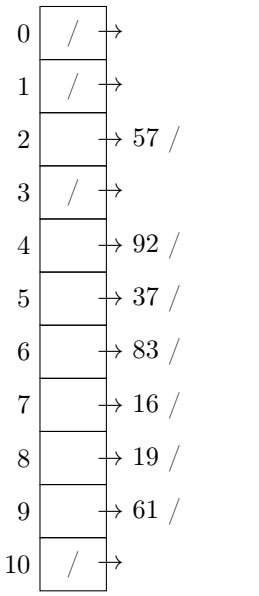
a)



Es entstehen zwei Kollisionen: 92 kollidiert mit 57 am Index 4, 83 kollidiert mit 61 am Index 6.

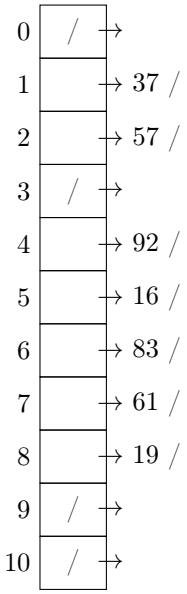
b)

s	92	19	83	37	16	57	61
i	0	0	0	1	2	0	3



Es entstehen insgesamt 6 Kollisionen.

c)



$$\begin{aligned} h(37,1) &= (h_1(37) + 1 \cdot h_2(37)) \mod 11 \\ &= (4 + (1 + ((37-1) \mod (11-1)))) \mod 11 \\ &= (4 + (1 + 36 \mod 10)) \mod 11 \\ &= (4+4) \mod 11 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(37,2) &= (h_1(37) + 2 \cdot h_2(37)) \mod 11 \\ &= (4 + 2 \cdot 4) \mod 11 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(61,1) &= (h_1(61) + 1 \cdot h_2(61)) \mod 11 \\ &= (6 + (1 + ((61-1) \mod (11-1)))) \mod 11 \\ &= (4 + (1 + 60 \mod 10)) \mod 11 \\ &= (4+1) \mod 11 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(61,2) &= (h_1(61) + 2 \cdot h_2(61)) \mod 11 \\ &= (4 + 2 \cdot 1) \mod 11 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(61,3) &= (h_1(61) + 2 \cdot h_2(61)) \mod 11 \\ &= (4 + 3 \cdot 1) \mod 11 \\ &= 7 \end{aligned}$$

s	92	19	83	37	16	57	61
i	0	0	0	2	0	0	3

Es entstehen insgesamt 5 Kollisionen.

Aufgabe 4.3

Aussage:

$$A : \forall h(s_i) \exists s_1, s_2 \in S \subset U \mid \; n = |S|, |U| > m(n-1) : h(s_1) = h(s_2)$$

Gegenaussage:

$$\bar{A} : \exists h(s_i) \forall s_1, s_2 \in S \subset U \mid \; n = |S|, |U| > m(n-1) : h(s_1) \neq h(s_2)$$

Die Gegenaussage gilt es nun zu widerlegen.
Damit alle Schlüssel des Universums einen eigenen Platz in der Hashtabelle bekommen können (sonst würden zwangsläufig Kollisionen auftreten), muss gelten:

$$\begin{aligned} & m \geq |U| \\ \overset{\bar{A}}{\Rightarrow} \; & m \geq |U| \overset{!}{>} m(n-1) \\ & m \not\geq m(n-1), \text{mit } n \geq 2 \end{aligned}$$

Die Gegenaussage wurde widerlegt, womit A gilt.

Aufgabe 4.4

Wir nehmen an, dass zwei unterschiedliche Werte x_1, x_2 durch die k Hash-Funktionen auf die selben Indizes abgebildet werden. Ist x_1 bereits gespeichert, dann werden beim Abspeichern von x_2 keine Bits verändert. Wird nun beispielswiese x_1 gelöscht, so würde eine Abfrage (bloomCheck) von x_2 *false* ergeben, da alle zugehörigen Bits bei der Löschung von x_1 auf *false* gesetzt wurden. Das widerspricht dem Anspruch des BloomFilters, keine False Negatives herauszugeben.

Aufgabe 4.5

Qualitativ lässt sich sagen: Je mehr Hash-Funktionen, desto geringer sollte die Wahrscheinlichkeit für false positives werden, da die Anzahl an Bits, die identisch sein müssen, zunimmt. Andererseits werden mit mehr Hash-Funktionen auch mehr Bits befüllt, der Belegungsgrad wird höher, wodurch irgendwann wieder mehr false positives auftreten. Dies zeigt sich an der Formel aus dem Skript:

$$\begin{aligned} P(\text{false positive}) &= (1-p)^k \\ &\approx (1-\underbrace{e^{-\frac{nk}{m}}}_{p=P(A[i]=\text{FALSE})})^k \end{aligned}$$

Die minimale Kollisionswahrscheinlichkeit liegt bei $k = 7$ vor. Im Folgenden sind die Werte für alle zulässigen k und $n = 100, m = 1000$ aufgetragen und grafisch dargestellt:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P [%]	3.2859	1.7411	1.1813	0.9431	0.8436	0.8194	0.8455	0.9127	1.0186	1.1650	1.3561

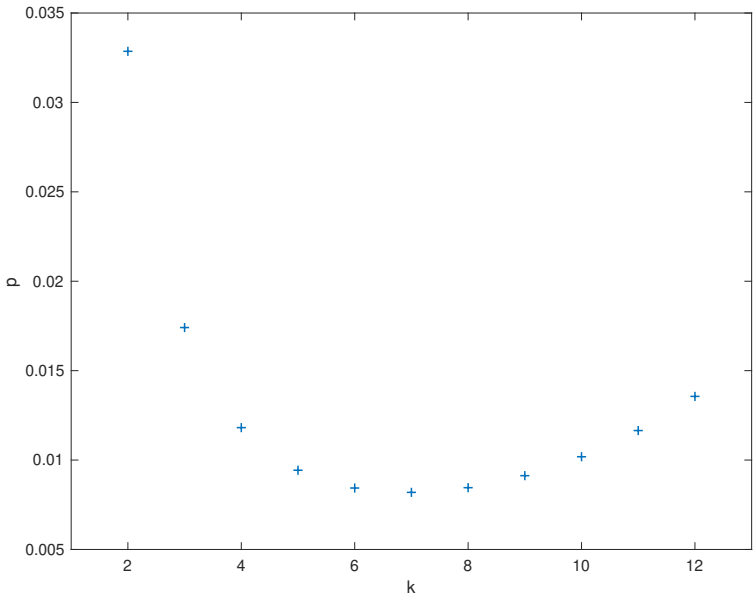


Abbildung 1: Wahrscheinlichkeit p für false positives bei k Hash-Funktionen ($n = 100, m = 1000$)

Aufgabe 4.6

Abgabe in DOMjudge. Teamname: "test"