Grundlagen der Rechnerarchitektur: Übungsblatt 4

Maryia Masla, Alexander Waldenmaier

4. Dezember 2020

Aufgabe 1: Teileralgebra

Alle Elemente von T sind Teiler der 30: $30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Für alle Elemente $a \in T$, gilt offensichtlich: $30 > a$ und a ist ein Teiler von 30. Daraus folgt:

- Neutralelement: $ggT(a, 30) = a$
- Absorption: $kgV(ggT(a, 30), 30) \overset{\text{Neutral-element}}{=} kgV(a, 30) = 30$

Aufgabe 2: De-morgansche Gesetze

a) Um $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$ zu beweisen, nutzen wir Komplementarität und zeigen, dass $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot (x_1 + x_2) = 0$ und $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + (x_1 + x_2) = 1$ gilt:

Wertetabelle:

x_1	x_2	$\overline{x_1 + x_2}$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Algebraischer Beweis:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \overline{x_1 x_2} \cdot \overline{\overline{x_1 + x_2}} \\ &\overset{\text{P7}}{=} \overline{x_1 x_2} \cdot (x_1 + x_2) \\ &\overset{\text{P4}}{=} \overline{x_1 x_2} x_1 + \overline{x_1 x_2} x_2 \\ &\overset{\text{P9, P6}}{=} 0 + 0 \\ &\overset{\text{P5'}}{=} 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &\overset{!}{=} \overline{x_1 x_2} + \overline{\overline{x_1 + x_2}} \\ &\overset{\text{P7}}{=} \overline{x_1 x_2} + x_1 + x_2 \\ &\overset{\text{P4'}}{=} (x_1 + x_2 + \overline{x_1})(x_1 + x_2 + \overline{x_2}) \\ &\overset{\text{P9'}}{=} (x_2 + 1)(x_1 + 1) \\ &\overset{\text{P6'}}{=} 1 \cdot 1 \\ &\overset{\text{P3}}{=} 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

b) $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$ gilt, wenn $(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$ und $(\overline{x_1} + \overline{x_2}) + x_1 \cdot x_2 = 1$ gilt (Komplementarität):

Wertetabelle:

x_1	x_2	$\overline{x_1 \cdot x_2}$	$\overline{x_1} + \overline{x_2}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Algebraischer Beweis:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} (\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot \overline{\overline{x_1 x_2}} \\ &\overset{\text{P7}}{=} (\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot x_1 x_2 \\ &\overset{\text{P4}}{=} \overline{x_1} x_1 x_2 + \overline{x_2} x_1 x_2 \\ &\overset{\text{P9, P6}}{=} 0 + 0 \\ &\overset{\text{P5'}}{=} 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &\overset{!}{=} \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{\overline{x_1 x_2}} \\ &\overset{\text{P7}}{=} \overline{x_1} + \overline{x_2} + x_1 x_2 \\ &\overset{\text{P4'}}{=} (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_1)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_2) \\ &\overset{\text{P9'}}{=} (\overline{x_2} + 1)(\overline{x_1} + 1) \\ &\overset{\text{P6'}}{=} 1 \cdot 1 \\ &\overset{\text{P3}}{=} 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Äquivalenz Beweisen

Die linken Seiten liegen bereits in DNF vor, daher müssen jeweils die rechten Seiten noch umgewandelt werden.

a)

$$
\begin{aligned}
& x_1x_2 + \overline{x_1}x_3 + \overline{x_2x_3} \\
&= \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_3}) \cdot (x_2 + x_3)} \\
&\overset{\text{P8}}{=} \overline{\overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}}} + \overline{(x_1 + \overline{x_3}) \cdot (x_2 + x_3)} \\
&\overset{\text{P8}}{=} \overline{\overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}}} + \overline{x_1 + \overline{x_3}} + \overline{x_2 + x_3} \\
&\overset{\text{P8'}}{=} x_1x_2 + \overline{x_1}x_3 + \overline{x_2x_3} \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
& x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2 \\
&= \overline{\overline{x_1 \cdot \overline{x_2x_2}} \cdot \overline{\overline{x_1x_1} \cdot x_2}} \\
&\overset{\text{P8}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot \overline{x_2x_2}}} + \overline{\overline{\overline{x_1x_1} \cdot x_2}} \\
&\overset{\text{P7}}{=} x_1 \cdot \overline{x_2x_2} + \overline{x_1x_1} \cdot x_2 \\
&\overset{\text{P3}}{=} x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: Minimierung macht alles einfacher!

a)

$$
\begin{aligned}
g(x_1, x_2) &= \overline{\overline{x_1 \cdot x_2} \cdot x_1} \\
&\overset{\text{P8}}{=} \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} + \overline{x_1} \\
&\overset{\text{P7}}{=} (x_1 \cdot x_2) + \overline{x_1} \\
&\overset{\text{P4'}}{=} (x_1 + \overline{x_1}) \cdot (\overline{x_1} + x_2) \\
&\overset{\text{P9'}}{=} 1 \cdot (\overline{x_1} + x_2) \\
&\overset{\text{P5}}{=} \overline{x_1} + x_2
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
h(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) + x_1 \cdot (x_2 + x_3 \cdot x_4) + x_1 \\
&\overset{\text{P4}}{=} (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3 \cdot x_4) + x_1 \\
&\overset{\text{P3'}}{=} (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_3 \cdot x_4) + x_1 \\
&\overset{\text{P4}}{=} (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) \cdot (1 + x_4) + x_1 \\
&\overset{\text{P6'}}{=} (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) \cdot 1 + x_1 \\
&\overset{\text{P5}}{=} (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) + x_1 \\
&\overset{\text{P4}}{=} x_1 \cdot (x_2 + x_3 + 1) \\
&\overset{\text{P6'}}{=} x_1 \cdot 1 \\
&\overset{\text{P5}}{=} x_1
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
k(x_1, x_2, x_3) &= ((x_1 + x_3 \cdot (x_2 + x_3)) \cdot 1) \cdot 1 \\
&\overset{\text{P5}}{=} (x_1 + x_3 \cdot (x_2 + x_3)) \cdot 1 \\
&\overset{\text{P5}}{=} x_1 + x_3 \cdot (x_2 + x_3) \\
&\overset{\text{P11'}}{=} x_1 + x_3
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5: Kanonen? Nein kanonisch!

$$
f(x_2, x_1, x_0) = \begin{cases} 1 \text{ falls der Dezimalwert von } (x_2, x_1, x_0) \bmod 2 = 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}
$$

(x_2, x_1, x_0) eine vorzeichenlose Binärzahl, x_0 ist LSB.
$(x_2, x_1, x_0) \bmod 2 = 0$, wenn (x_2, x_1, x_0) eine gerade Zahl ist d.h. $x_0 = 0$

a)

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

b) DKNF von f:

$$f(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot x_1 \cdot \overline{x_0}$$

KKNF von f:

$$f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 + x_1 + \overline{x_0}) \cdot (x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}) \cdot (\overline{x_2} + x_1 + \overline{x_0}) \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_0})$$

c)

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) &= \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} \\ &\overset{\text{P4}}{=} \overline{x_2} \cdot \overline{x_0} \cdot (\overline{x_1} + x_1) + x_2 \cdot \overline{x_0} \cdot (\overline{x_1} + x_1) \\ &\overset{\text{P9'}}{=} \overline{x_2} \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot \overline{x_0} \\ &\overset{\text{P4}}{=} \overline{x_0} \cdot (\overline{x_2} + x_2) \\ &\overset{\text{P9'}}{=} \overline{x_0} \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Nicht oder und, oder?

Wir machen uns folgende Tatsachen zunutze (die Nummerierung wird bei der Gleichungsumformung unten wiederverwendet):

1. $\overline{a} = a \text{ NAND } 1 = a \text{ NOR } 0$
2. $a \text{ AND } b = \overline{a \text{ NAND } b} = \overline{a} \text{ NOR } \overline{b}$
3. $a \text{ OR } b = \overline{a} \text{ NAND } \overline{b} = \overline{a \text{ NOR } b}$

a)

$$x_1 \oplus x_2 = (x_1\overline{x_2}) + (\overline{x_1}x_2)$$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{P8}}{=} \overline{\overline{(x_1\overline{x_2})} \cdot \overline{(\overline{x_1}x_2)}} \\ &\overset{2.}{=} \overline{(x_1 \text{ NAND } \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} \text{ NAND } x_2)} \\ &\overset{2.}{=} (x_1 \text{ NAND } \overline{x_2}) \text{ NAND } (\overline{x_1} \text{ NAND } x_2) \\ &\overset{1.}{=} (x_1 \text{ NAND } (x_2 \text{ NAND } 1)) \text{ NAND } ((x_1 \text{ NAND } 1) \text{ NAND } x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{P7}}{=} \overline{\overline{(x_1\overline{x_2}) + (\overline{x_1}x_2)}} \overset{\text{P8'}}{=} \overline{\overline{(x_1\overline{x_2})} \cdot \overline{(\overline{x_1}x_2)}} \\ &\overset{\text{P8}}{=} \overline{(\overline{x_1}x_2) \cdot (x_1\overline{x_2})} \overset{\text{P4}}{=} \overline{\overline{x_1}x_1 + \overline{x_1}\overline{x_2} + ab + x_2\overline{x_2}} \\ &\overset{\text{P9}}{=} \overline{\overline{x_1}\overline{x_2} + ab} \overset{3.}{=} (\overline{x_1}\overline{x_2}) \text{ NOR } (ab) \\ &\overset{3.}{=} (x_1 \text{ NOR } x_2) \text{ NOR } (\overline{x_1} \text{ NOR } \overline{x_2}) \\ &\overset{1.}{=} (x_1 \text{ NOR } x_2) \text{ NOR } ((x_1 \text{ NOR } 0) \text{ NOR } (x_2 \text{ NOR } 0)) \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
&(x_1 \text{ AND } \overline{x_2}) \text{ OR } (\overline{x_2} \text{ AND } \overline{x_3}) \text{ OR } (x_3 \text{ AND } \overline{x_0}) \text{ OR } (x_0 \text{ AND } \overline{x_1}) \\
&\overset{\text{P2', 2.}}{=} \overline{(x_1 \text{ AND } \overline{x_2})} \text{ NAND } \overline{(\overline{x_2} \text{ AND } \overline{x_3})} \text{ NAND } \overline{(x_3 \text{ AND } \overline{x_0})} \text{ NAND } \overline{(x_0 \text{ AND } \overline{x_1})} \\
&\overset{\text{2.}}{=} \overline{\overline{(x_1 \text{ NAND } \overline{x_2})}} \text{ NAND } \overline{\overline{(\overline{x_2} \text{ NAND } \overline{x_3})}} \text{ NAND } \overline{\overline{(x_3 \text{ NAND } \overline{x_0})}} \text{ NAND } \overline{\overline{(x_0 \text{ NAND } \overline{x_1})}} \\
&\overset{\text{P7}}{=} (x_1 \text{ NAND } \overline{x_2}) \text{ NAND } (\overline{x_2} \text{ NAND } \overline{x_3}) \text{ NAND } (x_3 \text{ NAND } \overline{x_0}) \text{ NAND } (x_0 \text{ NAND } \overline{x_1}) \\
&\overset{\text{1.}}{=} (x_1 \text{ NAND } (x_2 \text{ NAND } 1)) \text{ NAND } ((x_2 \text{ NAND } 1) \text{ NAND } (x_3 \text{ NAND } 1)) \text{ NAND } \\
&(x_3 \text{ NAND } (x_0 \text{ NAND } 1)) \text{ NAND } (x_0 \text{ NAND } (x_1 \text{ NAND } 1))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7: KV & Shannon

a) KV-Diagramm:

x_1 \ x_2, x_0	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	0	1

$\Rightarrow f(x_0, x_1, x_2) = x_0\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1$

Shannon-Zerlegung:

$$
\begin{aligned}
f(x_0, x_1, x_2) &= x_0\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1 \\
\\
&= \overline{x_0} \cdot f_{\overline{x_0}}(x) + x_0 \cdot f_{x_0}(x) \\
&= \overline{x_0} \cdot (0 \cdot \overline{x_2} + 1 \cdot x_1) + x_0 \cdot (1 \cdot \overline{x_2} + 0 \cdot x_1) \\
&= \overline{x_0}x_1 + x_0\overline{x_2} \\
\\
&= \overline{x_1} \cdot f_{\overline{x_1}}(x) + x_1 \cdot f_{x_1}(x) \\
&= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_0} \cdot 0 + x_0\overline{x_2}) + x_1 \cdot (\overline{x_0} \cdot 1 + x_0\overline{x_2}) \\
&= x_0\overline{x_1}\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1 + x_0x_1\overline{x_2} \\
\\
&= \overline{x_2} \cdot f_{\overline{x_2}}(x) + x_2 \cdot f_{x_2}(x) \\
&= \overline{x_2} \cdot (x_0\overline{x_1} \cdot 1 + \overline{x_0}x_1 + x_0x_1 \cdot 1) + x_2 \cdot (x_0\overline{x_1} \cdot 0 + \overline{x_0}x_1 + x_0x_1 \cdot 0) \\
&= x_0\overline{x_1}\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2} + x_0x_1\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1x_2 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

b) KV-Diagramm:

x_3, x_1 \ x_2, x_0	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	0	1

$\Rightarrow g(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1 + \overline{x_0}x_2$

Shannon-Zerlegung:

$$
\begin{aligned}
& g(x_0, x_1, x_2, x_3) \\
&= x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1 + \overline{x_0}x_2 \\
\\
&= \overline{x_0} \cdot g_{\overline{x_0}}(x) + x_0 \cdot g_{x_0}(x) \\
&= \overline{x_0} \cdot (0 \cdot \overline{x_1}\,\overline{x_2} + 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2) + x_0 \cdot (1 \cdot \overline{x_1}\,\overline{x_2} + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2) \\
&= \overline{x_0}x_1 + \overline{x_0}x_2 + x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2} \\
\\
&= \overline{x_1} \cdot g_{\overline{x_1}}(x) + x_1 \cdot g_{x_1}(x) \\
&= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_0} \cdot 0 + \overline{x_0}x_2 + x_0 \cdot 1 \cdot \overline{x_2}) + x_1 \cdot (\overline{x_0} \cdot 1 + \overline{x_0}x_2 + x_0 \cdot 0 \cdot \overline{x_2}) \\
&= \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2 + x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1 + \overline{x_0}x_1x_2 \\
\\
&= \overline{x_2} \cdot g_{\overline{x_2}}(x) + x_2 \cdot g_{x_2}(x) \\
&= \overline{x_2} \cdot (\overline{x_0}\,\overline{x_1} \cdot 0 + x_0\overline{x_1} \cdot 1 + \overline{x_0}x_1 + \overline{x_0}x_1 \cdot 0) + x_2 \cdot (\overline{x_0}\,\overline{x_1} \cdot 1 + x_0\overline{x_1} \cdot 0 + \overline{x_0}x_1 + \overline{x_0}x_1 \cdot 1) \\
&= x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2 + \overline{x_0}x_1x_2 + \overline{x_0}x_1x_2 \\
\\
&= \overline{x_3} \cdot g_{\overline{x_3}}(x) + x_3 \cdot g_{x_3}(x) \\
&= \overline{x_3} \cdot (x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2 + \overline{x_0}x_1x_2 + \overline{x_0}x_1x_2) + x_3 \cdot (x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2 + \overline{x_0}x_1x_2 + \overline{x_0}x_1x_2) \\
&= x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_0}x_1x_2\overline{x_3} + \overline{x_0}x_1x_2\overline{x_3} \\
&+ x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3 + \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2x_3 + \overline{x_0}x_1x_2x_3 + \overline{x_0}x_1x_2x_3 \\
\\
&= x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \\
&+ \overline{x_0}x_1x_2\overline{x_3} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3 + \overline{x_0}x_1x_2x_3 \\
&+ x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2x_3 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$