$$A \vee \neg A$$

$$- - - \ldots P - - - q$$

$$\frac{\qquad\qquad}{q}$$

Axiome: $A_1, \ldots A_k$

Regeln: $R_1, \ldots R_l$

$$\frac{A \qquad A \to B}{B} \qquad\qquad \frac{A \vee B \qquad \neg B \vee C}{A \vee C}$$

Beweis von B :
$A_1, A_2, \ldots A_n$

$$\underset{A_1}{A} \qquad \underset{A_2}{\neg A \vee B} \qquad \underset{A_3}{\neg B \vee C}$$

$A_n = B$
Für $1 \leq i \leq n$, A_i ist ein Axiom oder folgt aus $A_1, \ldots A_{i-1}$ durch Anwendung den Regeln.

$$A_1, A_2, A_3, \underset{A_4}{\neg A \vee C} \qquad \underset{A_5}{C}$$

Direkter Beweis

Beispiel: R binäre Relation. $R^T := \{(y,x) \,|(x,y) \in R\}$.

Satz: Für zwei binäre Relationen R, S gilt $(R \circ S)^T = S^T \circ R^T$.

$$(x,y) \in (R \circ S)^T \Longleftrightarrow (y,x) \in R \circ S$$

$$\Longleftrightarrow \exists z \quad (y,z) \in R \wedge (z,x) \in S$$

$$\Longleftrightarrow \exists z \quad (z,y) \in R^T \wedge (x,z) \in S^T$$

$$\Longleftrightarrow \exists z \quad (x,z) \in S^T \wedge (z,y) \in R^T$$

$$\Longleftrightarrow (x,y) \in S^T \circ R^T$$

Beispiel:

Satz: $\forall x \in \mathbb{N}$ gilt $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$.

Fall 1 n Gerade $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2}$ $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$

$$\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

Fall 2 n ungerade

$$n = 2k+1 \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\lceil \frac{n}{2} \rceil = \lceil \frac{2k+1}{2} \rceil = \lceil k + \frac{1}{2} \rceil = k+1$$

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = \lfloor k + \frac{1}{2} \rfloor = k$$

$+ \Big\}$ $k+k+1$ $= 2k+1 = n$

Indirekter Beweis

$A \to B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg B \to \neg A.$

$A_1, A_2, A_3 \dots \to B$ $\quad \neg B \to !¡$ $\quad \neg A_1$

Wir wollen B beweisen. Falls aus $\neg B$ ein Widerspruch folgt (z.B $\neg A$ für ein Axiom A), dann gilt B weil sonst hätten wir A und $\neg A$.

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $\quad p$

Beispiel:
Satz: $\underbrace{\sqrt{2}\text{ ist keine rationale Zall}}_{B}$.

$\neg B \quad \sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$ $\quad p$ gerade, $p = 2 \cdot k$

$\Rightarrow 2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2q^2 = 4k^2$

$\Rightarrow q^2 = 2k^2$ $\quad q$ gerade

!¡

B

Indirekter Beweis

Beispiel:

Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

B

$\neg B$

$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$

$k = \underbrace{\prod_{i=1}^{n} p_i}+1$ $\quad p_i$ teilt k nicht

k Primzahl oder

$\exists\, q \notin \{p_1 \ldots p_n\}$ $\quad q$ teilt k

q Primzahl