Def: A, B zwei Mengen. Das **kartesische Produkt** von beiden ist

$$\underline{A \times B} = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Eine Menge $R \subseteq A \times B$ heißt (zweistellige) **Relation**.
Anstatt "$(a, b) \in R$" schreibt man oft auch "$\underline{a\,R\,b}$".

R

$A = \{1,3\}$ $A \times B$

$B = \{1,2,3\}$

$(1,1) \in R$ $1R1$

$R = \{(1,1),(1,3),(3,1)\}$

$(1,2) \notin R$ $\neg(1R2)$

$A = B = \mathbb{N}$

$R = \{(x,y) \mid x \text{ teilt } y\}$

$(2,4) \in R$

$(2,3) \notin R$

$A = B = \text{Menschen}$ $\qquad M \subseteq A \times B$

$(x,y) \in M \iff x \text{ Mutter von } y$

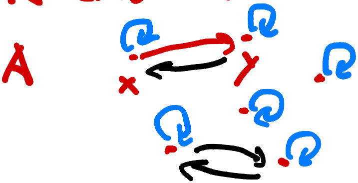
Einige Eigenschaften von Relationen. Sei $R \subseteq A \times A$:

reflexiv: für alle $x \in A$, $x\,R\,x$

symmetrisch: für alle $x, y \in A$, $x\,R\,y \;\Rightarrow\; y\,R\,x$

transitiv: für alle $x, y, z \in A$, $x\,R\,y$, $y\,R\,z \;\Rightarrow\; x\,R\,z$

A endlich $\quad R \subseteq A \times A$



$x\,R\,y$

Beispiele

$R \subseteq A \times A$

Sei $A = \mathbb{N}$

$2 R_1 8$ $\neg(8 R_1 2)$

R_1 : x teilt y.

$x = 3$
$y = 5$
$z = 3$

R_2 : $x \neq y$.

R_3 : x und y haben die gleichen Primfaktoren.

$(2,8) \in R_3$

	Ref.	Sym.	Trans.
R_1	✓	—	✓
R_1	~	✓	—
R_1	✓	✓	✓

Äquivalenzrelationen

$R = \{(x,y) \mid x \text{ MOD } 5 = y \text{ MOD } 5\}$ $(3,8) \in R$

Rest x durch 5 $(1,7) \notin R$

Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt **Äquivalenzrelation**.

Die Mengen $X_i = [x_i]_R$ heißen **Äquivalenzklassen**

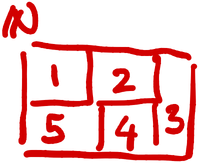
$[3]_R = \{3, 8, 13, 18, \dots\}$

$$[x_i]_R := \{x \mid x\,R\,x_i\} = \{x \mid x_i\,R\,x\}$$

$[1]_R = \{1, 6, 11, 16 \dots$

$[8]_R = [3]_R$

Index(R) ist die Anzahl der durch R erzeugten Äquivalenzklassen.
Mit X/R bezeichnen wir das Mengensystem $\{[x]_R \mid x \in X\}$.
Dieses wird als **Quotientenmenge** (oder auch **Faktormenge**) von X nach R bezeichnet.



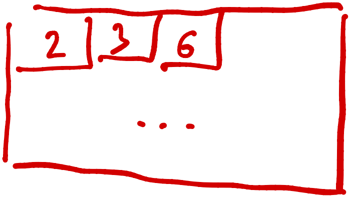
Index$(R) = 5$

$R = \{(x,y) \mid x$ und y haben die gleichen Primfaktoren$\}$

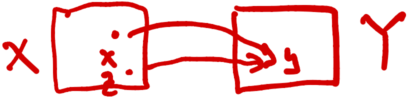
$[2]_R = \{2, 4, 8, 16 \ldots\}$

$[6]_R = \{6, 12, 18, \ldots\}$

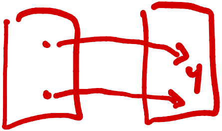
$\mathbb{N}$



Funktionen

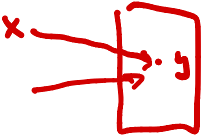


Sei $F \subseteq X \times Y$ eine Relation.
Falls es für jedes $x \in X$ **genau ein** $y \in Y$ mit $(x, y) \in F$ gibt,
dann nennen wir F eine Funktion.
($f(x) = y$ statt $(x, y) \in F$ oder xFy).



X Definitionsbereich, Y Wertebereich.

Für $y \in Y, f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$.



f heißt **Injektiv** falls für alle $y \in Y, |f^{-1}(y)| \leq 1$.
f heißt **Surjektiv** falls für alle $y \in Y, |f^{-1}(y)| \geq 1$.
f heißt **Bijektiv** falls für alle $y \in Y, |f^{-1}(y)| = 1$.

Beispiele

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

$x \neq y \quad x+1 \neq y+1$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f_1(x) = x + 1,$$
$$f_2(x) = x^2,$$
$$f_3(x) = 2x,$$
$$f_4(x) = \lfloor \tfrac{x}{2} \rfloor = x \text{ DIV } 2,$$
$$f_5(x) = \begin{cases} x+1 & x \text{ ~~gerade~~ ungerade} \\ x-1 & x \text{ ~~un~~gerade} \end{cases}$$

$\lfloor 2 \rfloor = \max\{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \leq 2\}$

$\lceil 2 \rceil = \min\{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \geq 2\}$

$\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$

$\lceil \frac{1}{2} \rceil = 1$

$\lceil 2 \rceil = \lfloor 2 \rfloor = 2$

$\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$

$\lfloor \frac{4}{2} \rfloor = 2$

	Inj.	Surj.	Bij.
f_1	✓	—	—
f_2	✓	—	—
f_3	✓	—	—
f_4	—	✓	—
f_5	✓	✓	✓

$x \qquad 2x \in f_4^{-1}(x)$

$1 \to 2$
$2 \to 1$
$3 \to 4$
$4 \to 3$

Sind R, S zwei Relationen, so ist die **Komposition** von R und S definiert als

$$R \circ S = \{(a, c) \mid \exists b : \; a\,R\,b, \; b\,S\,c\}$$

Mit R^2 bezeichnen wir die Relation $R \circ R$.

$R = M = \{(x,y) \mid x$ Mutter von $y\}$

$R^2 \quad R \circ R \quad (x,z) \in R^2 \Leftrightarrow \exists y \; xMy \wedge yMz$

$R^2 \subseteq G = \{(x,y) \mid x$ Großmutter von $y\}$

$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$R = \{(x, y) \mid x \leq y\}$

$R^2 = \{(x, y) \mid \exists z \quad x \leq z \wedge z \leq y\}$

$R^2 = R$

Beispiele

$f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \qquad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x+1,\\
f_2(x) &= x^2,\\
f_3(x) &= 2x,\\
f_4(x) &= \lfloor \tfrac{x}{2} \rfloor = x \text{ DIV } 2,\\
f_5(x) &= \begin{cases} x+1 & x \text{ gerade} \\ x-1 & x \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\sigma \mid \exists z \quad f_1(x) = z \wedge f_2(z) = \sigma$

$f_1 \circ f_2(x) = f_2(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$

$f_2 \circ f_1(x) = f_1(x^2) = x^2+1$

$f_3 \circ f_4(x) = \lfloor \frac{2x}{2} \rfloor = x$

$f_4 \circ f_3(x) =$

$\lfloor \frac{x}{2} \rfloor \cdot 2$

$f_1 \circ f_5(x) =$

$0 \to 0$
$1 \to 0$
$2 \to 2$
$3 \to 2$

$x+2 \quad x$ ungerade

$x \quad x$ gerade