Mengen

Def: Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohldefinierter Objekte. Diese Objekte heißen Elemente.

Mengen notiert man mittels geschweifter Klammern $\{\}$. $\{\}$
$M = \{1, 3, 5\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$1 \in M$ "1 ist ein Element von M" $0 \notin \mathbb{N}$
$4 \notin M$ 4 kein
$0 \in \mathbb{N}_0$

Def: Eine Menge A ist eine Teilmenge (Untermenge) von M wenn jedes Element in A auch in M enthalten ist.
$\{3\} \subseteq M$ "$\{3\}$ ist eine Teilmenge von M"
$\{3\} \subset M$ "$\{3\}$ ist eine echte Teilmenge von M"
$\{3\} \subsetneq M$
$\emptyset = \{\}$ Leere Menge.

$$M = \{1, 3, 5\}$$

$$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}$$

Grundmenge

$$P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}$$

$$= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$$

$M = \{1,3,5\}$ $\Sigma = \{0,1\}$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$ $M \cup \Sigma = \{0,1,3,5\}$

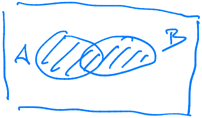
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$ $M \cap \Sigma = \{1\}$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$ $M \setminus \Sigma = \{3,5\}$

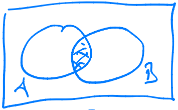
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$ $M \triangle \Sigma = \{0,3,5\}$

Grundmenge Ω, $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$ $\Omega = \mathbb{N}$

$\overline{M} = \{2,4,6,7,8,\ldots\}$

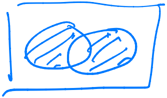


$A \cup B$

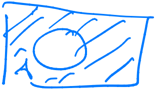


$A \cap B$

$A \setminus B$



$A \triangle B$

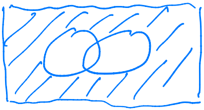


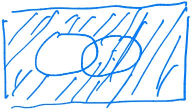
$\overline{A}$

Gesetze von DeMorgan

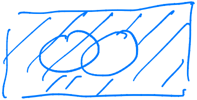
i) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

ii) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.





$\overline{A}$



$\overline{B}$

$X \overset{?}{=} Y$ alle $x \in X$ gilt $x \in Y$ $\quad X \subseteq Y$

für alle $y \in Y$ gilt $y \in X$ $\quad Y \subseteq X$

$$x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B$$

$$\iff x \notin A \text{ und } x \notin B$$

$$\iff x \in \overline{A} \text{ und } x \in \overline{B}$$

$$\iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

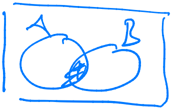
Mächtigkeit

$M = \{1,3,5\}$ $\quad \|M\| = 3$

$\|\mathbb{N}\| = \infty$

$|M| = ||M||$ Mächtigkeit oder Kardinalität von M.

$$\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\| - \|A \cap B\|$$



$A = \{\{1,2\}, \{3,2\}, \mathbb{N}, \emptyset\}$

$\|A\| = 4$

Def: Ein Mengensystem ist eine Menge die aus Mengen besteht.

Für eine Menge M, $\mathcal{P}(M) = \{T \mid T \subseteq M\}$ ist die Potenzmenge von M.

$M = \{1,3,5\}$

$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\} \ldots\ldots \{1,3,5\}\}$

$\|\mathcal{P}(M)\| = 8$

Lemma: Für eine endliche Menge M gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$

$M = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ $A = \{e_2, e_3\}$

A $0, 1, 1, 0 0 \dots 0$

$\emptyset$ $0\ 0 \dots\dots 0$

M $1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \dots 1$

0-1 Vektoren der Länge $n = |M|$

$0\ 0\ 0$

$1\ 1\ 1\ \dots\dots$

$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n} = 2^n$

$|\emptyset| = 0$ $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^0 = 1$ $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$0 \leq k \leq |M|$

$M = \{1, 3, 5\}$

$$\boxed{\binom{M}{k}} := \{ T \subseteq M \mid |T| = k \}$$

$\binom{M}{2} = \{\{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}\}$

Def: Für $n, k \in \mathbb{N}$, $n! := n(n-1)(n-2)\dots 1.$ $\quad (0! := 1)$

1, 2, 3

Lemma: $\boxed{\left|\binom{M}{k}\right| = \binom{|M|}{k}} = \frac{|M|!}{k!(|M|-k)!}$

$|M| = n$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$

k-Elementen aus M

$\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k}$ $\quad \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{n-k}$

$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

ohne Ordnung

$\left|\binom{M}{2}\right| = \binom{|M|}{2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{6}{2 \cdot 1}$