Formale Grundlagen
WS 2020/21

Universität Ulm
Torán/ Nickerl

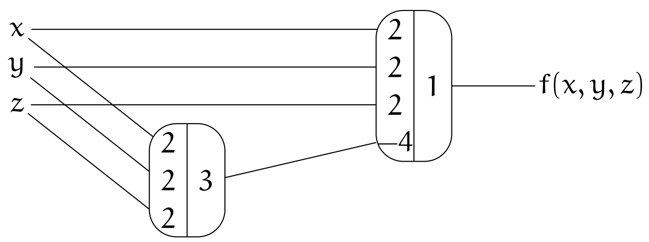
Übungsblatt 5 07. Dezember 2020

Abgabe bis 14. 12. 2019, 08:00 Uhr

Bitte versehen Sie Ihre Lösungen mit den/dem eigenen Namen sowie dem Namen Ihres Tutors. Laden Sie ein einzelnes gut lesbares PDF Ihrer Lösung zur Bewertung im Moodle hoch. Genauere Informationen finden Sie auf der Kursseite im Moodle → https://moodle.uni-ulm.de/course/view.php?id=17961

Aufgabe 5.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Wahrheitstafel der Funktion f an, die durch die untenstehenden Perzeptronen berechnet wird.



Aufgabe 5.2 (3 Punkte)

Für zwei n-stellige Binärzahlen $x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$ und $y = \sum_{i=0}^{n-1} y_i 2^i$ soll bestimmt werden, ob $x > y$ ist. Konstruieren Sie dazu ein Perzeptron mit den $2n$ Eingängen $x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1}$: Wie sind Gewichte und Schwellenwert des Perzeptrons zu wählen?

Aufgabe 5.3 (2 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie:
Seien $f(x_1, \ldots, x_n)$ und $g(x_1, \ldots, x_n)$ linear separierbare Funktionen, dann ist auch $f(x_1, \ldots, x_n) \wedge g(x_1, \ldots, x_n)$ linear separierbar.

Aufgabe 5.4 (3 Punkte)

Ein erweitertes Perzeptron soll über den Mengen

$$Y_1 = \left\{ a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad Y_0 = \left\{ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

trainiert werden. Wenden Sie den Perzeptronlernalgorithmus an, bis das Perzeptron die Mengen richtig erkennt. Dabei soll beginnend mit a zyklisch in der Reihenfolge a, b, c vorgegangen werden. Zu Beginn ist der Gewichtsvektor mit 0 initialisiert.
Geben Sie alle Lernschritte des Verfahrens an.

Hinweis:
Wenn exakt der Schwellenwert getroffen wird, wird beim Lernalgorithums immer gelernt, unabhängig davon ob das Perzeptron das richtige Ergebnis ausgeben würde.

Aufgabe 5.5 (1+2+2 Punkte)

In dieser Aufgabe befassen wir uns mit Perzeptronenschaltkreisen.

a) Zeigen Sie:
   Die Funktion $\neg x$ ist linear separierbar.

b) Zeigen Sie:
   Die Funktionen $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i$ sowie $g(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=1}^{n} x_i$ sind linear separierbar.

c) Ähnlich zur Tiefe eines Schaltkreises kann die Tiefe eines Perzeptronennetzwerks definierte werden als die höchste Anzahl von Perzeptronen auf einem Pfad von einer Eingabe zu einer Ausgabe (es gibt hier **kein** Ein- oder Ausgabeperzeptrone). Zeigen Sie: Jede n-stellige Boolesche Funktion $f : \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$ kann mittels eines Perzeptronenschaltkreises der Tiefe ≤ 3 berechnet werden.