Grundlagen der Rechnerarchitektur: Übungsblatt 5

Alexander Waldenmaier, Maryia Masla

13. Dezember 2020

Aufgabe 1: Minimierung zu Ehren Maurice Karnaugh

Die Wahrheitstabelle von $f(x_1, x_2, x_3)$ und $g(x_1, x_2, x_3)$:

x_3	x_2	x_1	$f(x_1, x_2, x_3)$	$g(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

a) Die DKNF und KKNF lassen sich für beide Funktionen aus der Wahrheitstabelle ablesen.

DKNF:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_3 x_2 x_1} + \overline{x_3} x_2 x_1 + x_3 \overline{x_2} x_1 + x_3 x_2 \overline{x_1} + x_3 x_2 x_1$$
$$g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_3 x_2} x_1 + x_3 \overline{x_2 x_1} + x_3 \overline{x_2} x_1 + x_3 x_2 x_1$$

KKNF:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + x_2 + \overline{x_1}) \cdot (x_3 + \overline{x_2} + x_1) \cdot (\overline{x_3} + x_2 + x_1)$$
$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + x_2 + x_1) \cdot (x_3 + \overline{x_2} + x_1) \cdot (x_3 + \overline{x_2} + \overline{x_1}) \cdot (\overline{x_3} + \overline{x_2} + x_1)$$

b) Vollständig minimierte DKNF von f():

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_3 x_2 x_1} + x_3 x_2 + x_3 x_1 + x_2 x_1$$

x_1 \ $x_3 x_2$	00	01	11	10
0	1		1	
1		1	1	1

c) Vollständig minimierte KKNF von g():

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + \overline{x_2}) \cdot (x_3 + x_1) \cdot (\overline{x_2} + x_1)$$

x_1 \ x_3x_2	00	01	11	10
0	0	0	0	
1		0		

Aufgabe 2: Moment - Warum eigentlich minimieren?

a) Die Wertetabelle der Funktion $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$f(x_1, .., x_4) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (x_1x_2x_3x_4)_{10}\ mod\ 4 = 1 \\ 1 & \text{falls die Quersumme von } (x_1x_2x_3x_4)_{10} = 6 \text{ ist} \\ 1 & \text{falls } (x_1x_2x_3x_4)_{10}\ mod\ 2 = 0 \\ 1 & \text{falls } (x_1x_2x_3x_4)_{10} = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) DKNF:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\overline{x_2}\overline{x_3}\overline{x_4} + \overline{x_1}\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\overline{x_3}\overline{x_4} + \\ + x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + x_1x_2\overline{x_3}\overline{x_4} + x_1x_2\overline{x_3}x_4 + x_1x_2x_3\overline{x_4} + x_1x_2x_3x_4$$

c) KKNF:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + \overline{x_4}) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3} + \overline{x_4})$$

d)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\overline{x_2}x_3 + x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_3} + x_1x_2 + \overline{x_4}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + \overline{x_4}) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}) \cdot \\ \cdot\ (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3} + \overline{x_4})$$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	1	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	0	1

e) Aus dem KV-Diagramm von $f()$ lässt sich ablesen, dass KKNF nicht weiter minimiert werden kann d.h. die Maxterme sind gleichzeitig Primimplikanten. Die DKNF kann von 13 Mintermen auf 5 Primimplikanten reduziert werden. Außerdem beinhalten Primimplikanten weniger Literale (1 Term mit 3 Literalen, 3 Terme mit 2 Literalen und 1 mit 1 Literal) im Unterschied zu 4 Literalen in jedem Term in der DKNF.

Die Minimierung von (Schalt-) Funktionen bringt in Hinsicht auf elektrische Schaltungen folgende Vorteile:

- Reduzierung vom benötigten Platz/Raum (kleinere Funktion $\rightarrow$ weniger Verknüpfungen/Operationen $\rightarrow$ kleinere Größe der Schaltung $C(S)$)
- Laufzeitoptimierung (bei Minimierung der Funktion eventuell kleinere Tiefe der Schaltung $D(S)$)
- Kostenreduzierung durch ersparte Materialien und Energie

Aufgabe 3: A B C-MOS

a) Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ lässt sich aus der Schaltung ablesen und anschließend in KNF überführen und mithilfe von KV-Diagramm minimieren:

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	1	0
01	1	0
11	0	0
10	1	1

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1 x_2 + x_2 x_3 + \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}} x_3} \\ &= \overline{x_1 x_2} \cdot \overline{x_2 x_3} \cdot \overline{\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}} x_3} \\ &= (\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ f(x_1, x_2, x_3)_{DNF} = \overline{x_1 x_3} + x_1 \overline{x_2}$$
$$\Rightarrow\ f(x_1, x_2, x_3)_{KNF} = (\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_3})$$

b) Wertetabelle von $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

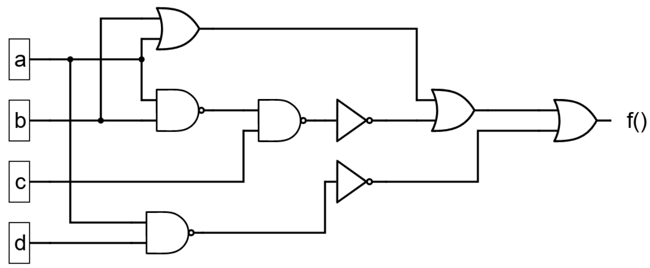
c) Um von der NMOS-Schaltung zur PMOS-Schaltung zu gelangen, invertieren wir zunächst die Funktion f_N:

$$\begin{aligned} f_P(x_1, x_2, x_3) &= \overline{f_N(x_1, x_2, x_3)} = \overline{(\overline{x_1} + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_3})} \\ &= \overline{(\overline{x_1} + x_2)} + \overline{(x_1 + \overline{x_3})} \\ &= x_1 x_2 + \overline{x_1} x_3 \end{aligned}$$

d) PMOS- und NMOS-Transistoren haben jeweils ein Schaltzustand bei dem immer ein Strom fließt. In CMOS fließt ein Strom nur beim Umschalten (von logischer 0 auf 1 oder von 1 auf 0) $\rightarrow$ reduzierte Wärmeerzeugung und Energieverbrauch.

Aufgabe 4: Noch mehr CMOS

a) Gatterschaltung von $f(a, b, c, d)$:



b $f(a, b, c, d) = \overline{\overline{\overline{a} \cdot \overline{\overline{b}}} + \overline{ab}c + ad}$

a	b	c	d	$f(a, b, c, d)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

c) $f(a, b, c, d) = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0