Formale Grundlagen: Übung 2

Alexander Waldenmaier, Tutorin: Constanze Merkt

20. November 2020

Aufgabe 2.1

a)

A	B	C	F_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Die Aussage ist erfüllbar.

b)

A	B	F_2
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Die Aussage ist erfüllbar.

c)

A	B	F_3
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Die Aussage ist eine Tautologie.

Aufgabe 2.2

Zu beweisen:

$$A: \text{Längen } a, b, c \in \mathbb{R}^+ \text{ bilden Dreieck mit Hypotenuse } c \text{ und rechtem Winkel zwischen } a, b \rightarrow a + b > c$$

Beispiel: $a = 1, b = 2, c = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} : a + b = 3 > c = \sqrt{5} \quad \checkmark$

Beweis durch Widerspruch in der Gegenaussage

Anhand des linksseitig stehenden Axioms folgert die Gegenaussage die Negation dessen, wass die Aussage folgert:

$$\bar{A}: \text{Längen } a, b, c \in \mathbb{R}^+ \text{ bilden Dreieck mit Hypotenuse } c \text{ und rechtem Winkel zwischen } a, b \rightarrow a + b \leq c$$

Zu prüfen ist also, ob aus der linken Hälfte von $\bar{A}$ die Implikation $a + b \leq c$ folgt. Ist dies nicht der Fall, war die Aussage falsch und folglich die Aussage A richtig.
Unter der Annahmen, dass $\bar{A}$ richtig ist, können wir die Behauptung aufstellen:

$$\begin{aligned} a + b &\leq c \\ \text{I}: \ (a+b)^2 &\leq c^2 \end{aligned}$$

Die Quadratur ist erlaubt, da alle Zahlen $\in \mathbb{R}^+$ sind. Da a, b, c ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse c bilden, lässt sich der Satz des Pythagoras aufstellen und schließlich mit der obigen Aussage kombinieren:

$$\begin{aligned} \text{II}: \ a^2 + b^2 &= c^2 \\ \text{II in I}: \ (a+b)^2 &\leq a^2 + b^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &\leq a^2 + b^2 \\ 2ab &\nleq 0, \ \text{da } a, b > 0 \end{aligned}$$

Die Gegenaussage $\bar{A}$ wurde widerlegt, demnach muss A gelten. **q.e.d.**

Aufgabe 2.3

Zu beweisen:

$$A(n):\ \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$$

Induktionsanfang

$$\begin{aligned}A(2):\ \prod_{i=2}^{2}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)&=\frac{2+1}{2\cdot 2}\\ \left(1-\frac{1}{2^2}\right)&=\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}&=\frac{3}{4}\quad\checkmark\end{aligned}$$

Induktionsschritt

Induktionsbehauptung (IB): $A(n)\rightarrow A(n+1)$

$$\begin{aligned}A(n+1):\ \prod_{i=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)&=\frac{n+1+1}{2(n+1)}\\ \underbrace{\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)}_{=A(n)}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)&=\frac{n+2}{2(n+1)}\\ \frac{n+1}{\cancel{2}n}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)&=\frac{n+2}{\cancel{2}(n+1)}\\ \frac{n+1}{n}-\frac{\cancel{n+1}}{n(n+1)^{\cancel{2}}}&=\frac{n+2}{n+1}\\ \frac{(n+1)^2}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)}&=\frac{n(n+2)}{n(n+1)}\\ (n+1)^2-1&=n(n+2)\\ n^2+2n+1-1&=n^2+2n\\ 0&=0\quad\checkmark\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Induktionsbehauptung wurde der Induktionsschritt durchgeführt. Damit gilt $A(n)$. **q.e.d**

Aufgabe 2.4

Zu beweisen:

$$A(n):\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1:\ \frac{a_{4n}}{3}\in\mathbb{N}$$

Induktionsanfang

$$A(1):\ \frac{a_{4\cdot 1}}{3}=\frac{1}{3}(a_4)=\frac{1}{3}(a_3+a_2)=\frac{1}{3}(a_2+a_1+a_2)=\frac{1}{3}(1+1+1)=1\in\mathbb{N}\quad\checkmark$$

Induktionsschritt

Induktionsbehauptung (IB): $A(n) \rightarrow A(n+1)$

$$
\begin{aligned}
A(n+1): \ \frac{a_{4(n+1)}}{3} &= \frac{1}{3}(a_{4n+4}) = \frac{1}{3}(a_{4n+3} + a_{4n+2}) = \frac{1}{3}(a_{4n+2} + a_{4n+1} + a_{4n+1} + a_{4n}) \\
&= \frac{1}{3}(a_{4n+1} + a_{4n} + a_{4n+1} + a_{4n+1} + a_{4n}) \\
&= \frac{1}{3}\left(3 \cdot \underbrace{a_{4n+1}}_{\text{Fibonacci: } = c_1, c_1 \in \mathbb{N}} + 2 \cdot \underbrace{a_{4n}}_{\text{IB: } = 3c_2, c_2 \in \mathbb{N}}\right) \\
&= \frac{1}{3}(3 \cdot c_1 + 2 \cdot 3c_2) \\
&= c_1 + 2c_2 \in \mathbb{N} \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung der Induktionsbehauptung wurde der Induktionsschritt durchgeführt. Damit gilt $A(n)$.
q.e.d