Induktionsprinzip

Sei $A(n)$ eine Aussage die von einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ abhängt

$$\frac{\text{Falls} \quad A(n_0) \text{ und} \quad \forall n \geq n_0,\ \text{wenn } A(n) \text{ dann } A(n+1)}{\forall n \geq n_0, A(n)}$$

$A(n) \longrightarrow A(n+1)$

$\exists n \geq n_0 \ \neg A(n)$

$n \neq n_0$

$A(n-1) \longrightarrow A(n)$

n_0 n $n+1$

$A(n)$

Induktionsprinzip

Induktionsanfang (I.A.): Zeige, dass die Aussage für den Basiswert n_0 gilt. I.V. $A(n_0)$

Induktionshypothese (I.H.): Es wird angenommen, dass die Aussage bis zu einem Wert n gilt. Der Wert wird dabei nicht näher definiert. $A(n_0) \cdots A(n-1)\,A(n)$

Induktionsschritt (I.S.): Die zu zeigende Eigenschaft wird für $n+1$ gezeigt mit hilfe der Induktionshypothese.

$\Rightarrow A(n+1)$

Beispiel: $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ ist durch 3 teilbar.

$n_0 = 1$ $\underline{\underline{A(n_0)}}$ $4^{n_0}+5 = 4^1+5 = 4+5 = 9$ ✓

I.H. für $\underline{\underline{m \leq n}}$ 4^m+5 durch 3 teilbar

I.S. $A(n+1)$? $4^{n+1}+5 = 4^n \cdot 4 + 5 =$

$= (4^n+5)4 - 5 \cdot 4 + 5 = (4^n+5) \cdot 4 - 15$

I.V.

$= (3 \cdot k) \cdot 4 - 3 \cdot 5 = \underline{3(k \cdot 4 - 5)}$ ✓

Beispiel: $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\underbrace{1+2+3+4+\cdots+99+100}_{101} = 5050$$

$$\frac{100(101)}{5}$$

$$101 \cdot \frac{100}{2}$$

I.A. $n=1$ $\quad \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

I.V. $\sum_{i=1}^{n} i \quad \frac{n(n+1)}{2}$

I.S. $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Strukturelle Induktion

Einige Informatik-Objekte lassen sich am besten induktiv definieren. Ein Beweis über solche Objekte kann entlang der induktiven Definition folgen.

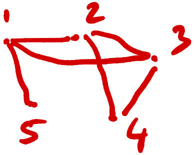
Beispiel: Binärbäume (BB)

Ein **Graph** $G = (V, E)$ ist eine mathematische Struktur mit $V = \{1, 2, \ldots n\}$ Knoten und $E \subseteq \binom{V}{2}$ (Kanten)

$E \subseteq V \times V$

Bsp: $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (4, 3)\}$

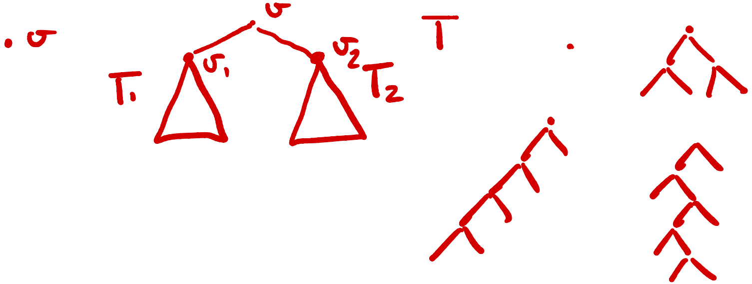
$G=(V,E)$



Binärbäume

Def: Binärbaum (BB)

- Ein Knoten v ist ein BB mit Wurzel v.
- Wenn $T_1 = (V_1, E_1)$ und $T_2 = (V_2, E_2)$ BB mit Wurzeln $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ sind, mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und v ein Knoten ist $v \notin V_1 \cup V_2$ dann ist $T = (V, E)$ mit
  $V = V_1 \cup V_2 \cup \{v\}$ und
  $E = E_1 \cup E_2 \cup \{(v, v_1), (v, v_2)\}$ auch ein BB (mit Wurzel v).



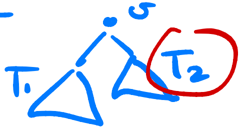
Binärbäume

Satz: Ein BB T hat immer eine ungerade Anzahl von Knoten.

Induktion über s die Anzahl der Schritte in der Def. von T

$s=1 \qquad T = \bullet \qquad \|\text{Knoten}\| = 1$ ✓

$s \Rightarrow s+1 \qquad T$



$$\|V\| = 1 + \underbrace{\|V_1\|}_{\text{ungerade}} + \underbrace{\|V_2\|}_{}$$

$T_1 = (V_1, E_1)$

$T_2 = (V_2, E_2)$

$T = (V, E)$

$\|V\|$ ungerade

Binärbäume

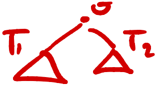
Satz: Ein BB T mit n Knoten

1. hat $n-1$ Kanten.
2. hat $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ viele Blätter (Knoten mir nur einem Nachbarknoten) .

(oder 0)

$S=1 \quad T = \bullet \quad \|E\| = 0 \quad \|V\| = 1 \quad \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lceil \frac{1}{2} \rceil = 1$

$S \Rightarrow S+1$



$\|V\| = \overbrace{\|V_1\|}^{n_1} + \overbrace{\|V_2\|}^{n_2} + 1$

$\|E\| = 2 + \underbrace{\|E_1\|}_{n_1-1} + \|E_2\| \overset{\text{I.V}}{=} 2 + n_1 - 1 + n_2 - 1$

$= \underbrace{n_1 + n_2 + 1}_{\|E\|} - 1$

$\|B(T)\| = \|B(T_1)\| + \|B(T_2)\| \overset{\text{I.V.}}{=} \lceil \frac{n_1}{2} \rceil + \lceil \frac{n_2}{2} \rceil$

$n_1 \quad n_2$ ungerade

$= \lceil \frac{2k_1+1}{2} \rceil + \lceil \frac{2k_2+1}{2} \rceil = k_1+1+k_2+1$

$= \lceil \frac{2(k_1+k_2+1+1)}{2} \rceil = \lceil \frac{2k_1+1+2k_2+1+1+1}{2} \rceil$

$= \lceil \frac{n}{2} \rceil$