

♪ Corrigé du baccalauréat Métropole Antilles-Guyane ♪

12 septembre 2024 – Jour 2

**ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**

**Exercice 1**

**5 points**

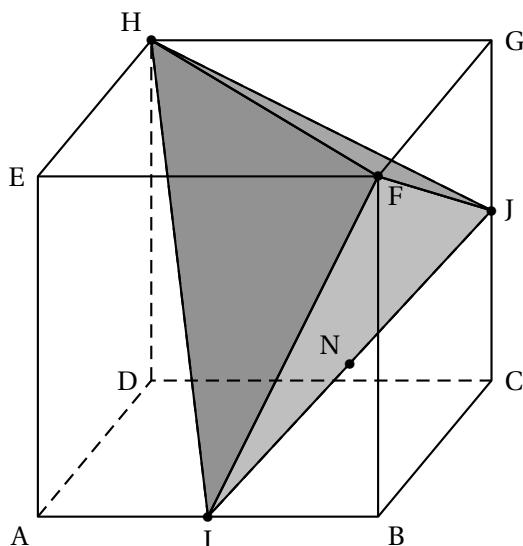
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CG].

Le point N est le milieu du segment [IJ].

*L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre HFJ.*

On se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .



1. a.  $A(0; 0; 0)$  et  $B(1; 0; 0)$  donc  $I(0,5; 0; 0)$ ;

$C(1; 1; 0)$  et  $G(1; 1; 1)$  donc  $J(1; 1; 0,5)$ .

Donc  $N(0,75; 0,5; 0,25)$ .

b.  $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 1 - 0,5 \\ 1 - 0 \\ 0,5 - 0 \end{pmatrix}$ , soit  $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ .

De même avec  $F(1; 0; 1)$ ,  $\overrightarrow{NF} = \begin{pmatrix} 1 - 0,5 \\ 0 - 0,5 \\ 1 - 0,25 \end{pmatrix}$ , soit  $\overrightarrow{NF} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 - 0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}$ .

- c. On calcule le produit scalaire des deux vecteurs précédents :

$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{NF} = 0,125 - 0,5 + 0,375 = 0$  : le produit scalaire est nul, les deux vecteurs  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{NF}$  sont orthogonaux.

On admet que  $NF = \frac{\sqrt{14}}{4}$ .

d. On a  $IJ^2 = 0,5^2 + 1^2 + 0,5^2 = 1,5 = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ , d'où  $IJ = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

On a démontré que la droite (NF) est perpendiculaire à la droite (IJ) : la droite (FN) est donc la hauteur issue de N dans le triangle FIJ.

L'aire de ce triangle est donc égale à  $\frac{IJ \times FN}{2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{14}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{8}$ .

2. On considère le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

a. On a  $\vec{u} \cdot \vec{IJ} = 2 - 1 - 1 = 0$ . D'autre part  $\vec{u} \cdot \vec{NF} = 1 + 0,5 - 1,5 = 0$ , donc le vecteur  $\vec{u}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan FIJ (car la droite (NF) est perpendiculaire à la droite (IJ)) : il est donc normal à ce plan.

b. On sait que les coordonnées du vecteur normal au plan sont les coefficients respectifs de  $x, y$  et  $z$  dans l'équation de celui-ci :

$$M(x; y; z) \in (\text{FIJ}) \iff 4x - y - 2z + d = 0, \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ainsi par exemple : } F(1; 0; 1) \in (\text{FIJ}) \iff 4 - 0 - 2 + d = 0 \iff d = -2.$$

$$\text{Conclusion : } M(x; y; z) \in (\text{FIJ}) \iff 4x - y - 2z - 2 = 0$$

c. La droite  $d$  a donc pour vecteur directeur le vecteur  $\vec{u}$  et contient le point H. Ses équations paramétriques s'obtiennent en traduisant la colinéarité des vecteurs  $\vec{HM}$  et  $\vec{u}$  : avec  $H(0; 1; 1)$ ,

$$M(x; y; z) \in (d) \iff \vec{HM} = t \vec{u}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}, \text{ soit :}$$

$$M(x; y; z) \in (d) \iff \begin{cases} x - 0 &= 4t \\ y - 1 &= -t \\ z - 1 &= -2t \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 4t \\ y &= 1 - t \\ z &= 1 - 2t \end{cases}$$

d. La droite  $d$  est perpendiculaire au plan (FIJ) en un point K dont les coordonnées vérifient les équations de  $d$  et celle de (FIJ) soit le système :

$$\begin{cases} x &= 4t \\ y &= 1 - t \\ z &= 1 - 2t \\ 4x - y - 2z - 2 &= 0 \end{cases}$$

En remplaçant  $x, y$  et  $z$  par leurs valeurs en fonction de  $t$  dans la dernière équation, on obtient :

$$4 \times 4t - (1 - t) - 2(1 - 2t) - 2 = 0 \iff 16t - 1 + t - 2 + 4t - 2 = 0 \iff 21t - 5 = 0 \iff t = \frac{5}{21}.$$

$$\text{Les coordonnées de K sont donc : } \begin{cases} x &= 4 \times \frac{5}{21} \\ y &= 1 - \frac{5}{21} \\ z &= 1 - 2 \times \frac{5}{21} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{20}{21} \\ y &= \frac{16}{21} \\ z &= \frac{11}{21} \end{cases}$$

$$\text{La distance de H au plan (FIJ) est donc égale à HK et avec } \vec{HK} \begin{pmatrix} \frac{20}{21} \\ -\frac{5}{21} \\ -\frac{10}{21} \end{pmatrix},$$

$$HK^2 = \left(\frac{20}{21}\right)^2 + \left(-\frac{5}{21}\right)^2 + \left(-\frac{10}{21}\right)^2 = \frac{400+25+100}{21^2} = \frac{525}{21^2} = \frac{25 \times 21}{21^2}, \text{ donc}$$

$$HK = \frac{5\sqrt{21}}{21}.$$

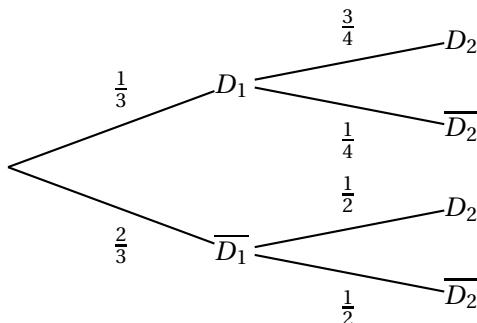
e. D'après la question précédente [HK] est la hauteur relative à la base (FIJ) du tétraèdre HFHIJ, donc le volume de celui-ci est :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{FIJ}) \times HK = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{8} \times \frac{5\sqrt{21}}{21} = \frac{5 \times 3 \times 7}{3 \times 8 \times 21} = \frac{5}{24}.$$

**Exercice 2****5 points****Partie A : étude du cas particulier où  $n = 2$** 

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

- On complète l'arbre pondéré suivant :



- On a  $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ .
- De la même façon  $P(\overline{D}_1 \cap D_2) = P(\overline{D}_1) \times P_{\overline{D}_1}(D_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ .

D'après la loi des probabilités totales :

$$p_2 = P(D_2) = P(D_1 \cap D_2) + P(\overline{D}_1 \cap D_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{3 \times 4} = \frac{7}{12}.$$

- On a d'abord  $p(\overline{D}_2) = 1 - p(D_2) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ .

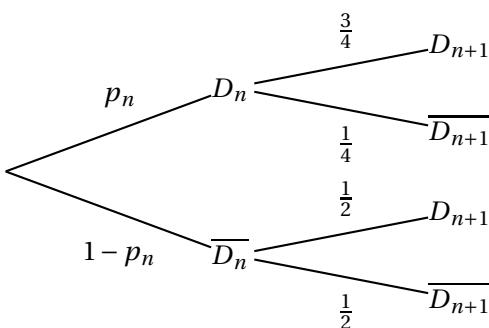
Il faut calculer la probabilité conditionnelle :

$$p_{\overline{D}_2}(D_1) = \frac{p(\overline{D}_2 \cap D_1)}{p(\overline{D}_2)} = \frac{p(D_1 \cap \overline{D}_2)}{p(\overline{D}_2)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

**Partie B : étude de la suite  $(p_n)$ .**

- $$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

On reprend l'arbre initial en partant de la branche  $D_n$  pondérée par le nombre  $p_n$  et la branche  $\overline{D}_n$  pondérée par  $1 - p_n$ , soit :



Toujours d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(D_{n+1}) = P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D}_n) \times P_{\overline{D}_n}(D_{n+1}) = p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. a. On montre par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}.$$

*Initialisation*: on a  $p_1 = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ ,  $p_2 = \frac{7}{12}$  et  $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ .

On a  $\frac{4}{12} < \frac{7}{12} < \frac{8}{12}$ , soit  $p_1 < p_2 < \frac{2}{3}$  : l'encadrement est vrai au rang 1.

*Hérédité*: soit  $n$  un naturel avec  $n \geq 1$  et supposons que  $p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$ ; comme  $\frac{1}{4} > 0$ , on a donc par produit :

$\frac{1}{4}p_n \leq \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ , soit  $\frac{1}{4}p_n \leq \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$  et, en ajoutant à chaque membre  $\frac{1}{2}$  :

$\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$ , soit d'après la relation de récurrence démontrée à la question 1.:  $p_{n+1} < p_{n+2} < \frac{2}{3}$ .

La relation est donc vraie au rang  $n + 1$ .

*Conclusion*: la relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang  $n$  au moins égal à 1, elle l'est aussi au rang  $n + 1$  : d'après le principe de récurrence, quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $p_n < p_{n+1} < \frac{2}{3}$ .

b. Le résultat précédent montre que la suite est croissante et majorée par  $\frac{2}{3}$  : d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge donc vers un nombre réel inférieur ou égal à  $\frac{2}{3}$ .

3. a. Quel que soit  $n \geq 1$ , on a  $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6}$

$$= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right) = \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}u_n.$$

La relation  $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$ , avec  $n \geq 1$  montre que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{4}$  et de premier terme  $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ .

b. On sait que pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ .

Comme  $-1 < \frac{1}{4} < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ .

On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = p_n - \frac{2}{3} = 0$  et finalement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{2}{3}$ .

**Conclusion**: sur un grand nombre de déplacements du robot celui-ci se dirigera en moyenne deux fois sur trois à droite et donc une fois sur trois à gauche.

## Partie C

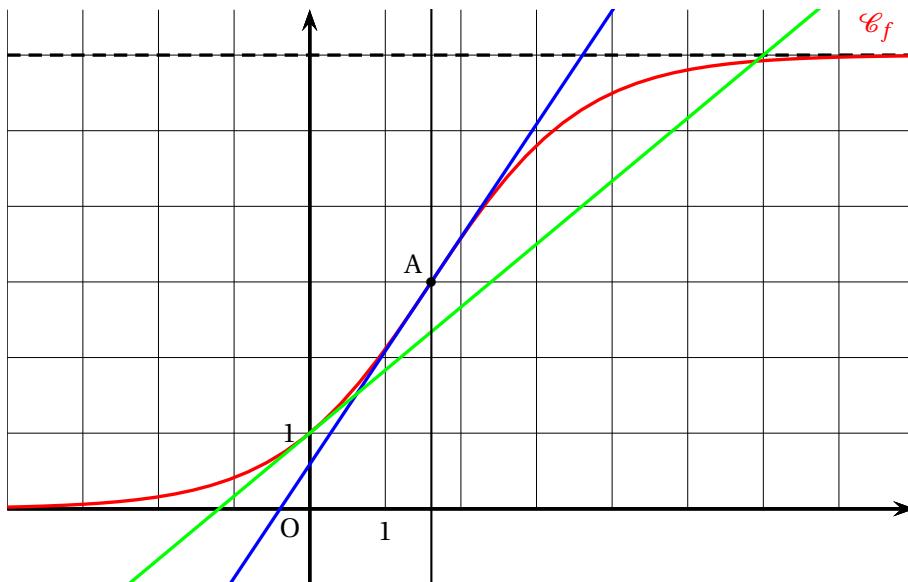
La variable aléatoire  $X$  égale au nombre de déplacements vers la droite suit une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = \frac{3}{4}$ .

La seule possibilité de revenir au point de départ est de faire (globalement) 5 déplacements à droite et donc 5 déplacements à gauche, soit :

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \approx 0,0583, \text{ soit } 0,058 \text{ au millième près.}$$

**Exercice 3****5 points****Partie A**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{6}{1+5e^{-x}}$ .



1. On a  $f(\ln 5) = \frac{6}{1+5e^{-\ln 5}}$ .

Or  $e^{-\ln 5} = \frac{1}{e^{\ln 5}} = \frac{1}{5}$ , donc  $f(\ln 5) = \frac{6}{1+5 \times \frac{1}{5}} = \frac{6}{2} = 3$ . Donc  $A(\ln 5; 3) \in \mathcal{C}_f$ .

2. On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+5e^{-x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$ .

Donc la droite d'équation  $y = 6$  est asymptote horizontale à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .

3. a. Pour tout réel :  $f'(x) = -6 \times \frac{(1+5e^{-x})'}{(1+5e^{-x})^2} = -\frac{6 \times 5 \times (-1)e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2} = \frac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2}$

b. On sait que quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $30e^{-x} > 0$  et  $(1+5e^{-x})^2 > 0$ ; donc  $f'(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}$  : la fonction  $f$  est croissante (strictement) sur  $\mathbb{R}$ .

D'autre part  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1+5e^{-x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$ .

Enfin  $f(0) = \frac{6}{1+5 \times 1} = \frac{6}{6} = 1$  : d'où le tableau de variation :

$x$	$-\infty$	0	$\ln 5$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	
$f(x)$	0	1	3	6

4. a. Comme  $30e^{-x} > 0$ ,  $1+5e^{-x} > 0$  et donc  $(1+5e^{-x})^3 > 0$ , le signe de  $f''(x)$  est celui de  $5e^{-x}-1$  :

- $5e^{-x}-1=0 \iff 5e^{-x}=1 \iff e^{-x}=\frac{1}{5} \Rightarrow -x=\ln \frac{1}{5} \iff -x=-\ln 5 \iff x=\ln 5$ ;

- $5e^{-x} - 1 > 0 \Rightarrow x > \ln 5;$
- $5e^{-x} - 1 < 0 \Rightarrow x < \ln 5.$

Conclusion :  $f$  est convexe sur l'intervalle  $]-\infty ; \ln 5[$ , concave sur  $\] \ln 5 ; +\infty [$  et a en  $\ln 5$  un point d'inflexion car la dérivée seconde change de signe en ce point : il s'agit du point A.

- b. Une équation de la tangente  $T_0$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0 est :

$$M(x ; y) \in T_0 \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

$$\text{On a vu que } f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = \frac{30e^0}{(1+5e^0)^2} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Donc } M(x ; y) \in T_0 \iff y - 1 = \frac{5}{6}(x - 0) \iff y = \frac{5}{6}x + 1.$$

Or on a vu que sur l'intervalle  $]-\infty ; \ln 5[$ , la fonction  $f$  est convexe et par conséquent que sa courbe représentative  $\mathcal{C}$  est au dessus de toutes ses tangentes menées en un point de l'intervalle  $]-\infty ; \ln 5[$ , donc en particulier au dessus de la tangente  $T_0$  en  $x = 0$ , donc numériquement :

$$f(x) \geqslant \frac{5}{6}x + 1 \quad \text{sur } ]-\infty ; \ln 5[.$$

5. On considère une fonction  $F_k$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F_k(x) = k \ln(e^x + 5)$ , où  $k$  est une constante réelle.

- a.  $F_k$  est une fonction composée de fonctions dérивables sur  $\mathbb{R}$  (car  $e^x + 5 > 0$ ), elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  : elle est une primitive de  $f$  si :

$$F'_k(x) = f(x) \iff k \frac{e^x}{e^x + 5} = \frac{6}{1+5e^{-x}},$$

soit en multipliant chaque terme de  $F'_k(x)$  par  $e^{-x}$  :

$$k \frac{1}{1+5e^{-x}} = \frac{6}{1+5e^{-x}} \iff k = 6.$$

Donc  $F_6(x) = 6 \ln(e^x + 5)$ .

- b. On a vu que  $f(0) = 1 > 0$  et la fonction est croissante ; elle est donc positive sur l'intervalle  $[0 ; \ln 5]$ .

L'aire demandée  $\mathcal{A}$  est donc égale (en unités d'aire) à :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\ln 5} f(x) dx = [F_6(x)]_0^{\ln 5} = F_6(\ln 5) - F_6(0) = 6 \ln(e^{\ln 5} + 5) - 6 \ln(e^0 + 5) \\ &= 6 \ln 10 - 6 \ln 6 = 6[\ln 10 - \ln 6] = 6 \ln \frac{10}{6} = 6 \ln \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

## Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle : (E)  $y' = y - \frac{1}{6}y^2$ .

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a } f(x) - \frac{1}{6}[f(x)]^2 &= \frac{6}{1+5e^{-x}} - \frac{1}{6} \times \frac{36}{(1+5e^{-x})^2} \\ &= \frac{6}{1+5e^{-x}} - \frac{6}{(1+5e^{-x})^2} = \frac{6(1+5e^{-x}) - 6}{(1+5e^{-x})^2} = \frac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2} = f'(x) \end{aligned}$$

Donc  $f$  est bien une solution de l'équation (E).

2. • Les solutions de l'équation  $y' = -y$  sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto K e^{-x}$  avec  $K \in \mathbb{R}$ ;  
 • La fonction constante  $x \mapsto \frac{1}{6}$  est la seule fonction constante solution de l'équation à résoudre;

- Les fonctions solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions définies par :

$$x \longmapsto \frac{1}{6} + K e^{-x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

3. a. On a donc :  $h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$

$$\text{Or si } h(x) = \frac{1}{g(x)}, \text{ alors } h'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

L'équation précédente devient :

$$-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{6} \text{ soit en multipliant par } [g(x)]^2$$

$-g'(x) = -g(x) + \frac{1}{6}[g(x)]^2 \iff g'(x) = g(x) - \frac{1}{6}[g(x)]^2$  ce qui signifie que la fonction  $g$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = y - \frac{1}{6}y^2$ .

b.

$$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6m e^{-x}}.$$

Puisque  $m$  est positif, alors  $6m e^{-x}$  l'est aussi et  $1 + 6m e^{-x} \geqslant 1 > 0$ , donc finalement  $g_m(x) > 0$  quel que soit le réel  $x$ . La fonction  $h_m$  définie par  $h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)}$  est donc bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

Or  $h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)} = \frac{1 + 6m e^{-x}}{6} = \frac{1}{6} + m e^{-x}$  et on reconnaît une solution de l'équation différentielle de la question 2..

On a ensuite vu à la question 3. a. que si la fonction  $h_m$  était une solution de  $y' = -y + \frac{1}{6}$ , alors  $g_m$  était elle solution de l'équation  $y' = y - \frac{1}{6}y^2$ .

## Exercice 4

5 points

1. On considère le script écrit en langage Python ci-dessous.

```
def seuil(S) :
    n=0
    u=7
    while u < S :
        n=n+1
        u=1.05*u+3
    return(n)
```

**Affirmation 1** : l'instruction `seuil(100)` renvoie la valeur 18. **Vraie**

En partant de 7 l'algorithme multiplie le nombre précédent par 1,05 et ajoute 3.

On peut simuler ceci avec une simple calculatrice et on obtient en arrondissant au centième :

<b><i>n</i></b>	0	1	2	...	17	<b><i>18</i></b>
<b><i>u</i></b>	7	10,35	13,87	...	93,57	<b><i>101,24</i></b>

10,35 est le premier résultat et 101,24 le 18<sup>e</sup> l'algorithme s'arrête au 19<sup>e</sup> passage.

**2.** Soit  $(S_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}.$$

**Affirmation 2 :** la suite  $(S_n)$  converge vers  $\frac{5}{4}$ . **Vraie**

On a la somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison  $\frac{1}{5}$ .

En écrivant sous la somme  $S$  la somme  $\frac{1}{5}S$  décalée d'un rang vers la droite et en calculant la différence des deux lignes, on obtient :

$$S - \frac{1}{5}S = 1 - \frac{1}{5^{n+1}} \iff \frac{4}{5}S = 1 - \frac{1}{5^{n+1}} \iff S = \frac{5}{4} \left[ 1 - \frac{1}{5^{n+1}} \right].$$

Comme  $-1 < \frac{1}{5} < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{5^{n+1}} = 1$  et enfin  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S = \frac{5}{4} = 1,25$ .

**3. Affirmation 3 :** dans une classe composée de 30 élèves, on peut former 870 binômes de délégués différents. **Fausse**

Le nombre de binômes différents est  $\binom{30}{2} = \frac{30 \times 29}{2} = 435$ .

**4.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1 ; +\infty[$  par  $f(x) = x(\ln x)^2$ .

**Affirmation 4 : Vraie** l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $[1 ; +\infty[$  et sur cet intervalle :

$$f'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = (\ln x)^2 + 2 \ln x = \ln x (\ln x + 2).$$

On sait que la fonction logarithme népérien est croissante et comme  $\ln 1 = 0$  et  $\ln 1 + 2 > 0$ ,  $f'(x) \geqslant 0$ .

La fonction est donc croissante de  $f(1) = 0$  à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires  $f$  ne peut prendre la valeur 1 qu'une seule fois.

**5. Affirmation 5 : Vraie**

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}.$$

Les fonctions  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto e^{-x}$  étant dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[0; 1]$ , on fait une intégration par parties :

avec  $u(x) = x$  et  $v'(x) = e^{-x}$ , on obtient :  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = -e^{-x}$ , d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-x} dx &= [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = [xe^{-x}]_0^1 + [-e^{-x}]_0^1 = [-e^{-x}(1+x)]_0^1 \\ &= -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e} \end{aligned}$$