Baccalauréat Amérique du Nord 21 mai 2025

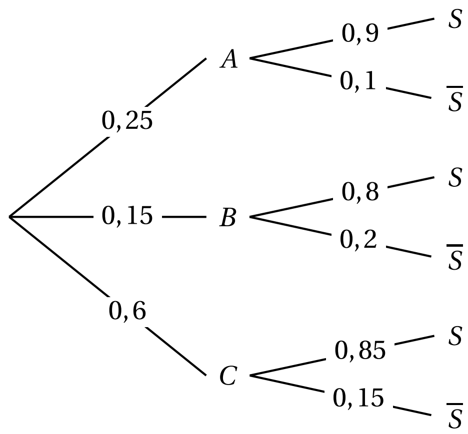
Sujet 1

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

1. Puisqu'on s'intéresse à une connexion au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions annoncées dans l'énoncé sont assimilables à des probabilités.
Cela donne l'arbre pondéré ci-dessous :



2. La probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est $P(S \cap B)$.
$P(S \cap B) = P(B) \times P_B(S) = 0,15 \times 0,8 = 0,12$.

3. De même :
$P\left(C \cap \overline{S}\right) = P(C) \times P_C\left(\overline{S}\right) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$.
Cela signifie que 9 % des connexions à distance de l'entreprise sont des connexions transitant via le serveur C et qui sont instables.

4. Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned} P(S) &= P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) + P(C) \times P_C(S) \\ &= 0,25 \times 0,9 + 0,15 \times 0,8 + 0,6 \times 0,85 \\ &= 0,225 + 0,12 + 0,51 \\ &= 0,855 \end{aligned}$$
La probabilité de l'évènement S est donc bien $P(S) = 0,855$.

5. La probabilité demandée est $P_S(B)$. Par définition, on a :
$P_S(B) = \dfrac{P(S \cap B)}{P(S)} = \dfrac{0,12}{0,855} = \dfrac{8}{57} \approx 0,1403$.
La probabilité que la connexion ait transité par le serveur B, sachant qu'elle est stable est d'environ 0,140, au millième près.

Partie B

1. **a.** Les éléments suivants ne sont pas nécessaires, puisqu'on admet que X suit une loi binomiale :

   — Chaque connexion est vue comme une expérience aléatoire à deux issues : le succès « la connexion est instable », de probabilité p
   $p = P\left(\overline{S}\right) = 1 - 0,855 = 0,145$;

   — cette épreuve est répétée $n = 50$ fois, de façon supposée identique et indépendante, puisque la constitution de l'échantillon est réputée assimilable à un tirage avec remise;

   — X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de connexions instables, sur ces 50 répétitions.

   Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$.

   b. La probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est $P(X \leqslant 8)$.

   Avec la calculatrice, on a : $P(X \leqslant 8) \approx 0,7044$,

   Donc la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est 0,704 arrondi au millième.

2. **a.** Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$, pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on aura :

   $P(X_n = k) = \binom{n}{k} \times 0,145^k \times 0,855^{n-k}$.

   L'évènement « au moins une connexion de cet échantillon est instable » est l'évènement contraire de « aucune connexion de cet échantillon n'est instable », autrement dit $\{X = 0\}$.

   Ainsi : $p_n = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,145^0 \times 0,855^{n-0} = 1 - 0,855^n$.

   b. Résolvons, pour n entier naturel :

   $$\begin{aligned} p_n \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,855^n \geqslant 0,99 \\ &\iff -0,855^n \geqslant -0,01 \\ &\iff 0,855^n \leqslant 0,01 \quad \text{car } -1 < 0 \\ &\iff \ln\left(0,855^n\right) \leqslant \ln(0,01) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\ &\iff n\ln(0,855) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \quad \text{car } 0,855 < 1 \text{ donc } \ln(0,855) < 0 \end{aligned}$$

   Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \approx 29,4$, donc c'est à partir de $n = 30$ que l'on a une probabilité p_n supérieure ou égale à 0,99.

3. **a.** Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0,145$, alors l'espérance de X_n est, par propriété : $E(X_n) = np = 0,145n$.

   On a ensuite $F_n = \dfrac{1}{n} \times X_n$,

   donc, par linéarité de l'espérance : $E(F_n) = \dfrac{1}{n}E(X_n) = \dfrac{1}{n} \times 0,145n = 0,145$.

   On admet que $V(F_n) = \dfrac{0,123975}{n}$.

   b. Écrivons l'inégalité de concentration de Bienaymé-Tchebychev pour la moyenne empirique F_n, avec une précision $t = 0,1$:

$$\begin{aligned} P\left(|F_n - E(F_n)| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(F_n)}{t^2} &\implies P\left(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1\right) \leqslant \dfrac{\dfrac{0{,}123\,975}{n}}{0,1^2} \\ &\implies P\left(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1\right) \leqslant \dfrac{0{,}123\,975}{n} \times \dfrac{1}{0,01} \\ &\implies P\left(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1\right) \leqslant \dfrac{12,3975}{n} \\ &\implies P\left(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1\right) \leqslant \dfrac{12,5}{n} \\ &\quad \text{car } 12{,}3975 < 12,5 \end{aligned}$$

On a donc bien l'inégalité annoncée.

c. Si on étudie un échantillon de 1 000 connexions et que l'on constate que pour cet échantillon $F_{1\,000} = 0,3$, alors on a $0,3 - 0,145 = 0,155$: cette conduite de l'expérience réalise l'évènement $\left\{\left|F_{1\,000} - 0,145\right| \geqslant 0,1\right\}$.

D'après la question précédente, la probabilité de cet évènement est inférieure ou égale à $\dfrac{12,5}{1\,000} = 0{,}0125$, il est donc hautement probable que les serveurs dysfonctionnent, car si la modélisation (basée sur un fonctionnement normal des serveurs) est fiable, une telle fréquence est très peu probable.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour cet exercice, on admet que les deux suites (a_n) et (u_n) sont bien définies, ce qui équivaut à admettre que les termes de la suite (u_n) sont tous différents de -2 (pour que la suite (u_n) soit bien définie) et de 1 (pour que (a_n) soit bien définie).

1. On a : $u_1 = \dfrac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \dfrac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \dfrac{5}{4} = 1,25.$

2. **a.** On a : $a_0 = \dfrac{u_0}{u_0 - 1} = \dfrac{2}{2 - 1} = 2$

et $a_1 = \dfrac{u_1}{u_1 - 1} = \dfrac{1,25}{1,25 - 1} = \dfrac{1,25}{0,25} = 5.$

b. Soit n un entier naturel.

On a, d'une part : $$\begin{aligned} a_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} &= \dfrac{\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1} = \dfrac{\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} - \dfrac{u_n + 2}{u_n + 2}} \\ &= \dfrac{\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\dfrac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2}} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} \times \dfrac{u_n + 2}{u_n - 1} \\ &= \dfrac{2u_n + 1}{u_n - 1} \end{aligned}$$

et, d'autre part : $$\begin{aligned} 3a_n - 1 = 3 \times \dfrac{u_n}{u_n - 1} - 1 &= \dfrac{3u_n}{u_n - 1} - \dfrac{u_n - 1}{u_n - 1} = \dfrac{3u_n - (u_n - 1)}{u_n - 1} \\ &= \dfrac{2u_n + 1}{u_n - 1} \end{aligned}$$

On constate donc bien que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

Autre méthode :

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \frac{u_{n+1}-1+1}{u_{n+1}-1} = 1+\frac{1}{u_{n+1}-1}\\
&= 1+\frac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-1} = 1+\frac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-\dfrac{u_n+2}{u_n+2}}\\
&= 1+\frac{1}{\dfrac{u_n-1}{u_n+2}} = 1+\frac{u_n+2}{u_n-1}\\
&= 2+\frac{u_n+2}{u_n-1}-1 = \frac{2(u_n-1)+u_n+2}{u_n-1}-1\\
&= \frac{2u_n-2+u_n+2}{u_n-1}-1\\
&= \frac{3u_n}{u_n-1}-1 = 3\frac{u_n}{u_n-1}-1\\
&= 3a_n-1
\end{aligned}$$

c. Posons, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'affirmation P_n :

« $a_n \geqslant 3n-1$ ».

Initialisation : On a calculé $a_1 = 5$ et donc on a bien $5 \geqslant 3\times 1-1 = 2$.

L'affirmation P_1 est donc vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $a_n \geqslant 3n-1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
a_n \geqslant 3n-1 &\implies 3a_n \geqslant 3(3n-1) \quad \text{car } 3>0\\
&\implies 3a_n-1 \geqslant 9n-3-1\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 9n-4 \quad \text{d'après la question } \textbf{2. b.}\ 3a_n-1 = a_{n+1}\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3n+6n+3-7\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)+6n-7\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1+6n-6\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1+6(n-1)\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1 \quad \text{car } 6(n-1)\geqslant 0
\end{aligned}$$

Si, pour un entier n naturel non nul (ce qui garantit $(n-1)\geqslant 0$), P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.

Conclusion : L'affirmation P_1 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n, la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n, on a : $a_n \geqslant 3n-1$.

d. Comme $3>0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-1 = +\infty$.

Par comparaison, puisque pour tout n non nul, on a $a_n \geqslant 3n-1$, on en déduit que la suite (a_n) diverge vers $+\infty$.

3. **a.** Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{u_n}{u_n-1} &\iff a_n\times(u_n-1) = u_n \quad \text{car } u_n-1\neq 0\\
&\iff a_n\times u_n - a_n - u_n = 0\\
&\iff (a_n-1)\times u_n - a_n = 0\\
&\iff (a_n-1)\times u_n = a_n\\
&\iff u_n = \frac{a_n}{a_n-1}
\end{aligned}$$

Pour la dernière étape, la division par a_n-1 est légitime, puisque a_n est un quotient de deux nombres différents, car le dénominateur est égal au numérateur moins 1, donc a_n ne peut pas être égal à 1, donc $a_n - 1$ est non nul.

Ainsi, on a bien exprimé u_n en fonction de a_n avec la relation annoncée dans le question.

b. Avec les questions **2. a.** on a $a_0 = 2$ et avec **2. c.**, pour n naturel non nul, on a $a_n \geqslant 3n - 1 > 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, a_n est non nul.

On déduit donc de la question précédente que, pour tout n naturel, on a : $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{a_n}}$.

Enfin, puisque (a_n) diverge vers $+\infty$, par limite du quotient, on a : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$,

puis, par limite de la somme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{a_n} = 1$,

enfin, par limite du quotient : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{a_n}} = 1$.

La suite (u_n) converge donc vers 1.

4. Puisqu'on admet que la suite (u_n) est décroissante, cela signifie que la suite est minorée par sa limite et donc que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$ donc $u_n - 1 \geqslant 0$.

a. Cette fonction python initialise la variable `u` à 2, ce qui est la valeur de u_0 et la variable `n` à 0, ce qui est l'indice correspondant.

Puis, à chaque exécution de la boucle `while`, `u` se voit affecter le terme suivant dans la suite (u_n) et `n` se voit affecter l'entier suivant, donc l'indice correspondant au terme dont la valeur est stockée dans la variable `u`.

Cette boucle `while` tourne tant que l'écart entre le terme stocké dans la variable `u` et la limite 1 est strictement supérieur à la valeur `p`, qui est l'argument choisi pour invoquer la fonction.

Les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` correspondent donc respectivement à l'indice et à la valeur du premier terme de la suite pour lequel l'écart entre le terme et la limite de la suite est inférieur ou égal à la valeur `p` choisie.

b. On parcourt la suite à la calculatrice, et on constate que $u_5 \approx 1{,}0027$, donc $u_5 - 1 > 0{,}001$ et $u_6 \approx 1{,}0009$, donc $u_6 - 1 \leqslant 0{,}001$.

La valeur de n pour $p = 0{,}001$ est donc 6 (et la valeur renvoyée pour `u` est donc une valeur approchée de u_6).

On peut aussi programmer la fonction python sur la calculatrice et faire l'appel `algo(0.001)`, qui renvoie `(6, 1,000914913083257)`

EXERCICE 3 — 4 points

Affirmation 1 : Vraie

(d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ et l'axe des ordonnées par $\overrightarrow{\jmath}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Les deux droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires (ils sont même orthogonaux) donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.

L'axe des ordonnées passe par l'origine du repère, de coordonnées $(0~;~0~;~0)$ et est dirigé par $\overrightarrow{\jmath}$ donc une représentation paramétrique de l'axe des ordonnées est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0\\ y &=& 0+s\\ z &=& 0\end{array}\right. \quad \text{, où } s \in \mathbb{R}$$

(d) et l'axe des ordonnées seront donc coplanaires si et seulement si ces deux droites sont sécantes, c'est-à-dire si et seulement si le système suivant a une solution :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3-2t &=& 0\\ -1 &=& s\\ 2-6t &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2t &=& 3\\ 6t &=& 2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t &=& 1,5\\ s &=& -1\\ t &=& \dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Le système n'admet pas de solution, donc les droites n'ont pas de point commun.
Les droites ne sont ni parallèles, ni confondues, ni sécantes, par élimination, elles sont donc non coplanaires.

Affirmation 2 : Vraie

Soit $\mathcal{Q}$ plan passant par A et orthogonal à la droite (d).

(d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathcal{Q}$ et donc aussi $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires et non nuls.

Le plan $\mathcal{Q}$ admet donc une équation de la forme $x+0y+3z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
De plus, le point A appartient au plan $\mathcal{Q}$ donc $x_A+3z_A+d=0$ soit $3+3\times(-2)+d=0$.
On a donc $d=-3+6=3$.
Une équation cartésienne du plan passant par A et orthogonal à la droite (d) est donc : $x+3z+3=0$.

Affirmation 3 : Fausse

Afin de déterminer l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ nous allons déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}$
Déterminons tout d'abord les coordonnées du point C :

C est un point de (d), il existe donc un réel t tel que : $\left\{\begin{array}{l} x_C = 3-2t\\ y_C=-1\\ z_C=2-6t\end{array}\right.$

Or C est le point d'abscisse 2, on a donc $x_C=2$ d'où $3-2t=2 \iff 1=2t$.

$$\iff t=\frac{1}{2}$$

On a donc $z_C = 2-6\times\dfrac{1}{2} = 2-3=-1$

Les coordonnées du point C sont donc $(2\,;\,-1\,;\,-1)$.
On peut donc calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$:

$\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ de même : $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

Nous sommes dans un repère orthonormé, nous avons donc :
$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 2\times(-1)+(-1)\times2+1\times1=-3$
Calculons les normes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$:
$\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|^2 = 2^2+(-1)^2+1^2=6$, donc, comme une norme est positive $\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|=\sqrt{6}$.
$\left\|\overrightarrow{\text{AC}}\right\|^2 = (-1)^2+2^2+1^2=6$, donc, de même : $\left\|\overrightarrow{\text{AC}}\right\|=\sqrt{6}$.
Or $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = \text{AB}\times\text{AC}\times\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right)$

on en déduit donc que : $-1 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right)$,

soit $\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \dfrac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

et donc une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{\text{BAC}}$ est $\dfrac{2\pi}{3}$.

Affirmation 4 : Vraie

Déterminons les coordonnées du point H.

H est le projeté orthogonal du point B sur la plan $\mathscr{P}$, c'est donc l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite Δ orthogonal au plan $\mathscr{P}$ passant par le point B.

Le vecteur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ.

De plus le point B(5 ; -4 ; -1) appartient à la droite Δ, une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5+t\\ y &=& -4+0t\\ z &=& -1+3t \end{array}\right., \text{ où } t\in\mathbb{R}$$

L'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ donne l'équation en la variable t :

$$\begin{aligned}(5+t)+3(-1+3t)-7=0 &\iff 5+t-3+9t-7=0\\ &\iff 10t=5\\ &\iff t=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Le point H d'intersection entre la droite Δ et $\mathscr{P}$ est le point de paramètre $t = \dfrac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de la droite Δ.

Il a comme coordonnées : $\text{H}\left(5+\dfrac{1}{2}~;~-4~;~-1+3\times\dfrac{1}{2}\right)$ soit $\text{H}\left(\dfrac{11}{2}~;~-4~;~\dfrac{1}{2}\right)$.

On a donc : $\overrightarrow{\text{BH}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

d'où : $\left\|\overrightarrow{\text{BH}}\right\|^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4} = \dfrac{10}{4}$, donc $\left\|\overrightarrow{\text{BH}}\right\| = \sqrt{\dfrac{10}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

La distance BH est égale à $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

EXERCICE 4 — 5 points

Partie A

1. La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}_1$ est décroissante sur $]-\infty~;~-2]$ et sur $[1~;~+\infty[$, et croissante sur $[-2~;~1]$.

   La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}_2$ est négative sur $]-\infty~;~-2]$ et sur $[1~;~+\infty[$, et positive sur $[-2~;~1]$.

   Les variations d'une fonction étant déterminées par le signe de sa dérivée, on peut en déduire que la courbe $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction g et la courbe $\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction g'.

2. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est : $y = g'(0)(x-0)+g(0) = g'(0)x+g(0)$.

   La courbe $\mathscr{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; 1) donc $g(0) = 1$.

La courbe $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$ donc $g'(0) = 2$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est donc $y = 2x + 1$.

Partie B

1. f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x : $f_0'(x) = (2x+3) \times \mathrm{e}^{-x} + \left(x^2+3x\right) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$.
$$= \left(2x+3-x^2-3x\right)\mathrm{e}^{-x}$$
$$= \left(-x^2-x+3\right)\mathrm{e}^{-x}$$
Pour tout réel x on a donc :
$$f_0(x) + f_0'(x) = \left(x^2+3x\right)\mathrm{e}^{-x} + \left(-x^2-x+3\right)\mathrm{e}^{-x}$$
$$= \left(x^2+3x-x^2-x+3\right)\mathrm{e}^{-x}$$
$$= (2x+3)\,\mathrm{e}^{-x}$$
La fonction f_0 est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. $(E_0) : y + y' = 0 \iff y' = -y$
Les solutions sont donc les fonctions de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x}$, $C \in R$

3. (E) est une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$, avec f_0 une solution particulière, les solutions sont donc les fonctions : $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x} + f_0(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$.
(c'est à dire les fonctions $x \longmapsto \left(x^2+3x+C\right)\mathrm{e}^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.)

4. La fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E), il existe donc un réel C tel que pour tout réel x, $g(x) = \left(x^2+3x+C\right)\mathrm{e}^{-x}$.
Or $g(0) = 1$ donc $1 = (0+0+C)\mathrm{e}^0 = C$
L'expression de la fonction g est donc : $g(x) = \left(x^2+3x+1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

5. La courbe admet exactement deux points d'inflexion si et seulement si la dérivée seconde de la fonction s'annule exactement deux fois en changeant de signe.
Soit f une solution de l'équation différentielle (E).
Il existe un réel C tel que pour tout réel x, $f(x) = \left(x^2+3x+C\right)\mathrm{e}^{-x}$.
Déterminons la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de f.
$$f'(x) = (2x+3) \times \mathrm{e}^{-x} + \left(x^2+3x+C\right) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$
$$= \left(2x+3-x^2-3x-C\right)\mathrm{e}^{-x} \quad .$$
$$= \left(-x^2-x+3-C\right)\mathrm{e}^{-x}$$
et
$$f''(x) = (-2x-1) \times \mathrm{e}^{-x} + \left(-x^2-x+3-C\right) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$
$$= \left(-2x-1+x^2+x-3+C\right)\mathrm{e}^{-x} \quad .$$
$$= \left(x^2-x-4+C\right)\mathrm{e}^{-x}$$
Une fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f''(x)$ est du signe de $x^2-x-4-C$.
Un polynôme du second degré s'annule deux fois en changeant de signe si et seulement si son discriminant est strictement positif.
Calculons le discriminant :
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-4+C) = 1 + 16 - 4C = 17 - 4C$$
La courbe admettra donc exactement deux points d'inflexion si $17 - 4C > 0$ c'est à dire $C < \dfrac{17}{4}$.
Les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion sont donc les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \left(x^2+3x+C\right)\mathrm{e}^{-x} \text{ avec } C<\frac{17}{4}.$$

Partie C

1. $f(x)=\left(x^2+3x+2\right)\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}+3\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^x}$

lim $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ donc, par inverse, lim $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}=0$

Par croissances comparées : pour tout entier n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}=0$

Donc par produit et par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}+3\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^x}=0$

2. **a.** Pour tout nombre réel x, $f'(x)=(2x+3)\,\mathrm{e}^{-x}+\left(x^2+3x+2\right)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$.

$$\begin{aligned} &=\left(2x+3-x^2-3x-2\right)\mathrm{e}^{-x}\\ &=\left(-x^2-x+1\right)\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

b. Une fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe du polynôme du second degré $-x^2-x-1$.

$\Delta=(-1)^2-4\times(-1)\times1=1+4=5>0$

Le polynôme admet donc deux racines :

$x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{-2}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{-2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Le coefficient dominant est négatif on en déduit donc :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$		$f(x_1)$		$f(x_2)$		0

La fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Elle est croissante sur $\left]\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\,;\,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

3. Une fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ est du signe du polynôme du second degré x^2+3x+2.

Pour tout réel x : $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$

Les racines sont donc -2 et -1.

De plus le coefficient dominant est positif donc x^2+3x+2 est positif, entre autre, sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ et donc sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

La fonction f est donc positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

4. La fonction f est positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc sur $[0\,;\,\alpha]$ donc l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\alpha$ est égale à $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\alpha)&=\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{dx}=\left[\mathrm{F(x)}\right]_0^\alpha=\mathrm{F}(\alpha)-\mathrm{F}(0)\\ &=\left(-\alpha^2-5\alpha-7\right)\mathrm{e}^{-\alpha}+7\end{aligned}$$

L'aire cherchée est égale à $\left(-\alpha^2 - 5\alpha - 7\right)\mathrm{e}^{-\alpha} + 7$ unités d'aire.