

Exercice 1

5 points

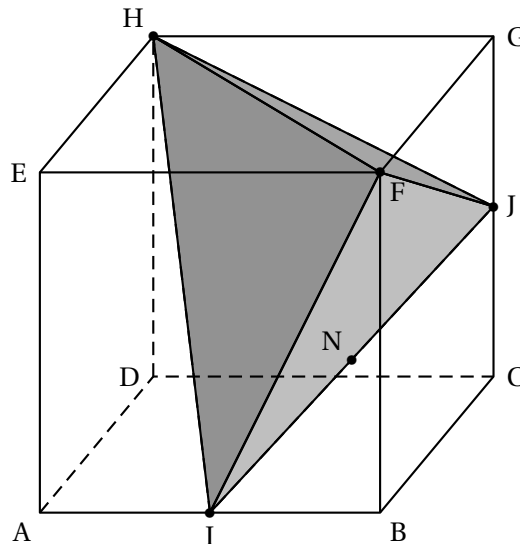
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CG].

Le point N est le milieu du segment [IJ].

L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre HFIJ.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. a. $A(0; 0; 0)$ et $B(1; 0; 0)$ donc $I(0,5; 0; 0)$;

$C(1; 1; 0)$ et $G(1; 1; 1)$ donc $J(1; 1; 0,5)$.

Donc $N(0,75; 0,5; 0,25)$.

- b. $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 1-0,5 \\ 1-0 \\ 0,5-0 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

De même avec $F(1; 0; 1)$, $\overrightarrow{NF} \begin{pmatrix} 1-0,75 \\ 0-0,5 \\ 1-0,25 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{NF} \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0-0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}$.

- c. On calcule le produit scalaire des deux vecteurs précédents :

$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{NF} = 0,125 - 0,5 + 0,375 = 0$: le produit scalaire est nul, les deux vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{NF} sont orthogonaux.

On admet que $NF = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

d. On a $IJ^2 = 0,5^2 + 1^2 + 0,5^2 = 1,5 = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$, d'où $IJ = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

On a démontré que la droite (NF) est perpendiculaire à la droite (IJ) : la droite (FN) est donc la hauteur issue de N dans le triangle FIJ.

L'aire de ce triangle est donc égale à $\frac{IJ \times FN}{2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{14}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{8}$.

2. On considère le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a. On a $\vec{u} \cdot \vec{IJ} = 2 - 1 - 1 = 0$. D'autre part $\vec{u} \cdot \vec{NF} = 1 + 0,5 - 1,5 = 0$, donc le vecteur \vec{u} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan FIJ (car la droite (NF) est perpendiculaire à la droite (IJ)) : il est donc normal à ce plan.

b. On sait que les coordonnées du vecteur normal au plan sont les coefficients respectifs de x, y et z dans l'équation de celui-ci :

$$M(x; y; z) \in (\text{FIJ}) \iff 4x - y - 2z + d = 0, \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ainsi par exemple : } F(1; 0; 1) \in (\text{FIJ}) \iff 4 - 0 - 2 + d = 0 \iff d = -2.$$

$$\text{Conclusion : } M(x; y; z) \in (\text{FIJ}) \iff 4x - y - 2z - 2 = 0$$

c. La droite d a donc pour vecteur directeur le vecteur \vec{u} et contient le point H. Ses équations paramétriques s'obtiennent en traduisant la colinéarité des vecteurs \vec{HM} et \vec{u} : avec $H(0; 1; 1)$,

$$M(x; y; z) \in (d) \iff \vec{HM} = t \vec{u}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}, \text{ soit :}$$

$$M(x; y; z) \in (d) \iff \begin{cases} x - 0 = 4t \\ y - 1 = -t \\ z - 1 = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

d. La droite d est perpendiculaire au plan (FIJ) en un point K dont les coordonnées vérifient les équations de d et celle de (FIJ) soit le système :

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \\ 4x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$$4 \times 4t - (1 - t) - 2(1 - 2t) - 2 = 0 \iff 16t - 1 + t - 2 + 4t - 2 = 0 \iff 21t - 5 = 0 \iff t = \frac{5}{21}.$$

$$\text{Les coordonnées de K sont donc : } \begin{cases} x = 4 \times \frac{5}{21} \\ y = 1 - \frac{5}{21} \\ z = 1 - 2 \times \frac{5}{21} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{20}{21} \\ y = \frac{16}{21} \\ z = \frac{11}{21} \end{cases}$$

$$\text{La distance de H au plan (FIJ) est donc égale à HK et avec } \vec{HK} \begin{pmatrix} \frac{20}{21} \\ -\frac{5}{21} \\ -\frac{10}{21} \end{pmatrix},$$

$$HK^2 = \left(\frac{20}{21}\right)^2 + \left(-\frac{5}{21}\right)^2 + \left(-\frac{10}{21}\right)^2 = \frac{400+25+100}{21^2} = \frac{525}{21^2} = \frac{25 \times 21}{21^2}, \text{ donc}$$

$$HK = \frac{5\sqrt{21}}{21}.$$

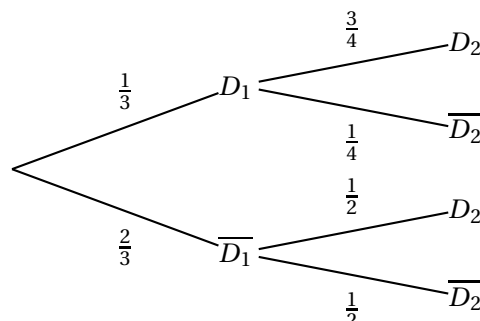
e. D'après la question précédente [HK] est la hauteur relative à la base (FIJ) du tétraèdre HFIJ, donc le volume de celui-ci est :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{FIJ}) \times HK = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{8} \times \frac{5\sqrt{21}}{21} = \frac{5 \times 3 \times 7}{3 \times 8 \times 21} = \frac{5}{24}.$$

Exercice 2**5 points****Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$**

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. On complète l'arbre pondéré suivant :



2. On a $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

3. De la même façon $P(\overline{D_1} \cap D_2) = P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

D'après la loi des probabilités totales :

$$p_2 = P(D_2) = P(D_1 \cap D_2) + P(\overline{D_1} \cap D_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{3 \times 4} = \frac{7}{12}.$$

4. On a d'abord $p(\overline{D_2}) = 1 - p(D_2) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.

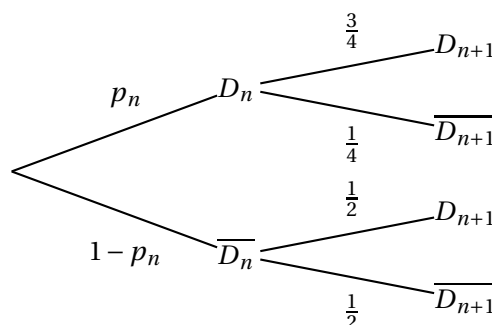
Il faut calculer la probabilité conditionnelle :

$$p_{\overline{D_2}}(D_1) = \frac{p(\overline{D_2} \cap D_1)}{p(\overline{D_2})} = \frac{p(D_1 \cap \overline{D_2})}{p(\overline{D_2})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Partie B : étude de la suite (p_n) .

1.
$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

On reprend l'arbre initial en partant de la branche D_n pondérée par le nombre p_n et la branche $\overline{D_n}$ pondérée par $1 - p_n$, soit :



Toujours d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(D_{n+1}) = P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) = p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. a. On montre par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}.$$

Initialisation : on a $p_1 = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $p_2 = \frac{7}{12}$ et $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.

On a $\frac{4}{12} < \frac{7}{12} < \frac{8}{12}$, soit $p_1 < p_2 < \frac{2}{3}$: l'encadrement est vrai au rang 1.

Hérédité : soit n un naturel avec $n \geq 1$ et supposons que $p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$; comme $\frac{1}{4} > 0$, on a donc par produit :

$$\frac{1}{4}p_n \leq \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}, \text{ soit } \frac{1}{4}p_n \leq \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6} \text{ et, en ajoutant à chaque}$$

membre $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{1}{6} + \frac{1}{2}, \text{ soit d'après la relation de récurrence démontrée}$$

$$\text{à la question 1. : } p_{n+1} < p_{n+2} < \frac{2}{3}.$$

La relation est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang n au moins égal à 1, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_n < p_{n+1} < \frac{2}{3}$.

- b. Le résultat précédent montre que la suite est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$: d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge donc vers un nombre réel inférieur ou égal à $\frac{2}{3}$.

3. a. Quel que soit $n \geq 1$, on a $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6}$
- $$= \frac{1}{4} \left(p_n - \frac{4}{6} \right) = \frac{1}{4} \left(p_n - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{4}u_n.$$

La relation $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$, avec $n \geq 1$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

- b. On sait que pour $n \geq 1$, $u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$.

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = 0$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = p_n - \frac{2}{3} = 0$ et finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{2}{3}$.

Conclusion : sur un grand nombre de déplacements du robot celui-ci se dirigera en moyenne deux fois sur trois à droite et donc une fois sur trois à gauche.

Partie C

La variable aléatoire X égale au nombre de déplacements vers la droite suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$.

La seule possibilité de revenir au point de départ est de faire (globalement) 5 déplacements à droite et donc 5 déplacements à gauche, soit :

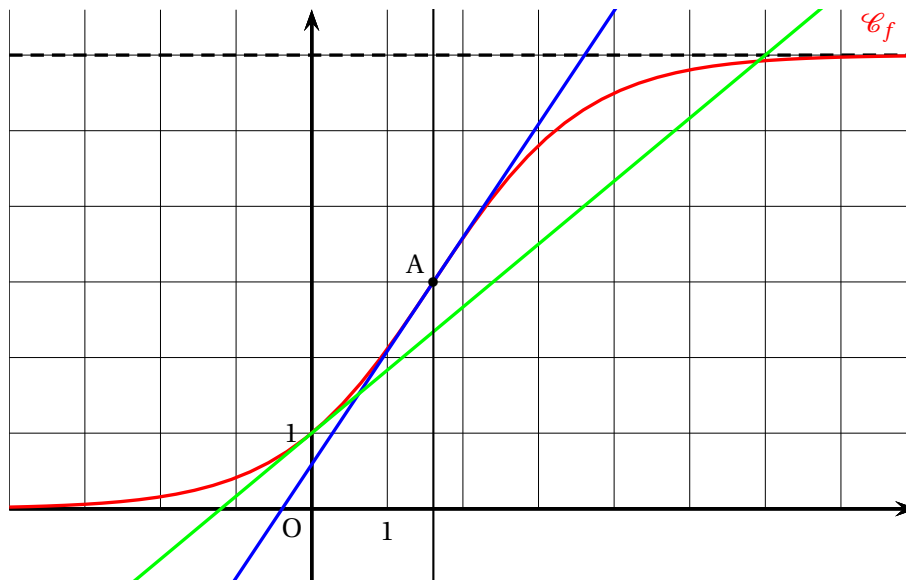
$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \approx 0,0583, \text{ soit } 0,058 \text{ au millième près.}$$

Exercice 3

5 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{6}{1+5e^{-x}}$.



1. On a $f(\ln 5) = \frac{6}{1+5e^{-\ln 5}}$.

Or $e^{-\ln 5} = \frac{1}{e^{\ln 5}} = \frac{1}{5}$, donc $f(\ln 5) = \frac{6}{1+5 \times \frac{1}{5}} = \frac{6}{2} = 3$. Donc $A(\ln 5; 3) \in \mathcal{C}_f$.

2. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+5e^{-x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$.

Donc la droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

3. a. Pour tout réel : $f'(x) = -6 \times \frac{(1+5e^{-x})'}{(1+5e^{-x})^2} = -\frac{6 \times 5 \times (-1)e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2} = \frac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2}$

b. On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $30e^{-x} > 0$ et $(1+5e^{-x})^2 > 0$; donc $f'(x) > 0$ sur \mathbb{R} : la fonction f est croissante (strictement) sur \mathbb{R} .

D'autre part $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1+5e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f en $-\infty$.

Enfin $f(0) = \frac{6}{1+5 \times 1} = \frac{6}{6} = 1$: d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$\ln 5$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+
$f(x)$	0	1	3	6

4. a. Comme $30e^{-x} > 0$, $1+5e^{-x} > 0$ et donc $(1+5e^{-x})^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $5e^{-x} - 1$:

• $5e^{-x} - 1 = 0 \iff 5e^{-x} = 1 \iff e^{-x} = \frac{1}{5} \iff -x = \ln \frac{1}{5} \iff -x = -\ln 5 \iff x = \ln 5$;

- $5e^{-x} - 1 > 0 \Rightarrow x > \ln 5$;
- $5e^{-x} - 1 < 0 \Rightarrow x < \ln 5$.

Conclusion : f est convexe sur l'intervalle $] -\infty ; \ln 5[$, concave sur $] \ln 5 ; +\infty[$ et a en $\ln 5$ un point d'inflexion car la dérivée seconde change de signe en ce point : il s'agit du point A.

b. Une équation de la tangente T_0 à \mathcal{C} au point d'abscisse 0 est :

$$M(x; y) \in T_0 \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

$$\text{On a vu que } f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = \frac{30e^0}{(1+5e^0)^2} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Donc } M(x; y) \in T_0 \iff y - 1 = \frac{5}{6}(x - 0) \iff y = \frac{5}{6}x + 1.$$

Or on a vu que sur l'intervalle $] -\infty ; \ln 5[$, la fonction f est convexe et par conséquent que sa courbe représentative \mathcal{C} est au dessus de toutes ses tangentes menées en un point de l'intervalle $] -\infty ; \ln 5[$, donc en particulier au dessus de la tangente T_0 en $x = 0$, donc numériquement :

$$f(x) \geq \frac{5}{6}x + 1 \quad \text{sur }] -\infty ; \ln 5[.$$

5. On considère une fonction F_k définie sur \mathbb{R} par $F_k(x) = k \ln(e^x + 5)$, où k est une constante réelle.

a. F_k est une fonction composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} (car $e^x + 5 > 0$), elle est donc dérivable sur \mathbb{R} : elle est une primitive de f si :

$$F'_k(x) = f(x) \iff k \frac{e^x}{e^x + 5} = \frac{6}{1 + 5e^{-x}},$$

soit en multipliant chaque terme de $F'_k(x)$ par e^{-x} :

$$k \frac{1}{1 + 5e^{-x}} = \frac{6}{1 + 5e^{-x}} \iff k = 6.$$

$$\text{Donc } F_6(x) = 6 \ln(e^x + 5).$$

b. On a vu que $f(0) = 1 > 0$ et la fonction est croissante; elle est donc positive sur l'intervalle $[0 ; \ln 5]$.

L'aire demandée \mathcal{A} est donc égale (en unités d'aire) à :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\ln 5} f(x) dx = [F_6(x)]_0^{\ln 5} = F_6(\ln 5) - F_6(0) = 6 \ln(e^{\ln 5} + 5) - 6 \ln(e^0 + 5) \\ &= 6 \ln 10 - 6 \ln 6 = 6[\ln 10 - \ln 6] = 6 \ln \frac{10}{6} = 6 \ln \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle : (E) $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a } f(x) - \frac{1}{6}[f(x)]^2 &= \frac{6}{1 + 5e^{-x}} - \frac{1}{6} \times \frac{36}{(1 + 5e^{-x})^2} \\ &= \frac{6}{1 + 5e^{-x}} - \frac{6}{(1 + 5e^{-x})^2} = \frac{6(1 + 5e^{-x}) - 6}{(1 + 5e^{-x})^2} = \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2} = f'(x) \end{aligned}$$

Donc f est bien une solution de l'équation (E).

- Les solutions de l'équation $y' = -y$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto K e^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$;
 - La fonction constante $x \mapsto \frac{1}{6}$ est la seule fonction constante solution de l'équation à résoudre;

- Les fonctions solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions définies par :

$$x \mapsto \frac{1}{6} + K e^{-x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

3. a. On a donc : $h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$

Or si $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, alors $h'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$.

L'équation précédente devient :

$$-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{6} \text{ soit en multipliant par } [g(x)]^2$$

$$-g'(x) = -g(x) + \frac{1}{6}[g(x)]^2 \iff g'(x) = g(x) - \frac{1}{6}[g(x)]^2 \text{ ce qui signifie que la fonction } g \text{ est une solution de l'équation différentielle } y' = y - \frac{1}{6}y^2.$$

b.

$$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6m e^{-x}}.$$

Puisque m est positif, alors $6m e^{-x}$ l'est aussi et $1 + 6m e^{-x} \geq 1 > 0$, donc finalement $g_m(x) > 0$ quel que soit le réel x . La fonction h_m définie par $h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)}$ est donc bien définie sur \mathbb{R} .

Or $h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)} = \frac{1 + 6m e^{-x}}{6} = \frac{1}{6} + m e^{-x}$ et on reconnaît une solution de l'équation différentielle de la question 2..

On a ensuite vu à la question 3. a. que si la fonction h_m était une solution de $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors g_m était elle solution de l'équation $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

Exercice 4

5 points

1. On considère le script écrit en langage Python ci-dessous.

```
def seuil(S) :
    n=0
    u=7
    while u < S :
        n=n+1
        u=1.05*u+3
    return(n)
```

Affirmation 1 : l'instruction `seuil(100)` renvoie la valeur 18. **Vraie**

En partant de 7 l'algorithme multiplie le nombre précédent par 1,05 et ajoute 3.

On peut simuler ceci avec une simple calculatrice et on obtient en arrondissant au centième :

n	0	1	2	...	17	18
u	7	10,35	13,87	...	93,57	101,24

10,35 est le premier résultat et 101,24 le 18^e l'algorithme s'arrête au 19^e passage.

2. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}.$$

Affirmation 2 : la suite (S_n) converge vers $\frac{5}{4}$. **Vraie**

On a la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{5}$.

En écrivant sous la somme S la somme $\frac{1}{5}S$ décalée d'un rang vers la droite et en calculant la différence des deux lignes, on obtient :

$$S - \frac{1}{5}S = 1 - \frac{1}{5^{n+1}} \iff \frac{4}{5}S = 1 - \frac{1}{5^{n+1}} \iff S = \frac{5}{4} \left[1 - \frac{1}{5^{n+1}} \right].$$

Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{5^{n+1}} = 1$ et enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} S = \frac{5}{4} = 1,25$.

3. **Affirmation 3 :** dans une classe composée de 30 élèves, on peut former 870 binômes de délégués différents. **Fausse**

Le nombre de binômes différents est $\binom{30}{2} = \frac{30 \times 29}{2} = 435$.

4. On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.

Affirmation 4 : Vraie l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = (\ln x)^2 + 2 \ln x = \ln x (\ln x + 2).$$

On sait que la fonction logarithme népérien est croissante et comme $\ln 1 = 0$ et $\ln 1 + 2 > 0$, $f'(x) \geq 0$.

La fonction est donc croissante de $f(1) = 0$ à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires f ne peut prendre la valeur 1 qu'une seule fois.

5. **Affirmation 5 : Vraie**

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}.$$

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ étant dérivables sur \mathbb{R} donc sur $[0; 1]$, on fait une intégration par parties :

avec $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$, on obtient : $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$, d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-x} dx &= [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = [x e^{-x}]_0^1 + [-e^{-x}]_0^1 = [-e^{-x}(1+x)]_0^1 \\ &= -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e} \end{aligned}$$