广义相对论基础 2

前情回顾：

1、度规

定义了局部的几何。

定义了“线长”：

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

交代了“矢量的内积”：

$$\hat{V}\cdot\hat{T} = g_{\mu\nu}V^\mu T^\nu$$

2、测地线

“直线”概念在弯曲空间的推广。“线长”

意义 1：弯曲空间中两点之间“距离”“最短”的路径称为测地线。

$$\delta\tau = 0$$

意义 2：切矢量沿着曲线平行移动。(见上节课)

$$\nabla_{\hat{t}}\hat{t} = 0$$

在取克里斯托弗联络下，两个意义是统一的。

测地线方程：

λ是曲线参数

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

两个定义的等价性：
直观：比如平直时空，两点间的最快路径当然是走直线（速度平行于连线）
证明：1可以得到拉格朗日方程（作用量最小），2可以得到测地线方程，再加上节课的度规相容条件（内积沿曲线平移不变），这三者知二推三（略）。
直观2：对光而言，费马原理=1（g=η），沿直线传播=2（Γ=0），度规相容条件就是g与Γ对应。

3、观测理论

得到实数！！如何得到动量的某一个分量？与单位矢量做点积。
推广到四维：找到合适的“单位矢量”。

观测：建立标架

观测者有自己的世界线，观测者的四速度定义了时钟的方向：

$$\hat{e}_0 = \hat{u}_{\mathrm{obs}} = \text{观测者 (有质量粒子) 的 4-速度}$$

其它空间方向与时间方向正交，并且互相正交归一：

$$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_0 = 0, \hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \delta_{ij}$$

对运动粒子能量的观测：

$$E = -\hat{p}\cdot\hat{e}_0$$

对运动粒子动量的观测：

$$P_i = -\hat{p}\cdot\hat{e}_i$$

分割线

1、基林矢量 killing vector

描述对称性，对称意味着守恒。

对称：

保度规不变性：

这里仅举一个很特殊但是很有意义的例子：

比如说坐标(x,y,z)的度规：

$$g_{\mu\nu}=\begin{matrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{matrix}$$

那么如果我们沿 z 轴平移，我们的度规是没有变化的，也就是局部的几何没有变化，此时就是一种“对称性”。

考虑到一般情况，假设坐标有一个无穷小的变换：

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \epsilon\xi^{\alpha}(x)$$ 无穷小量*任意矢量

根据度规在变换前后不变的条件： 代入

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g'_{\alpha\beta}(x\ )$$ (张量变换规则)

我们得到了基林矢量满足的方程： “泰勒展开”g_αβ+εξ^γ ∂_γ g_αβ

“反对称” $\nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \nabla_{\nu}\xi_{\mu} = 0$

主被动观点的等价性：
g'_μν(x)=g_μν(x')
（坐标变换是换一套坐标系）
新系新坐标下老张量的分量=
（坐标变换是移动张量在老坐标系的位置）老系老坐标下新张量的分量

结论：

如果度规不依赖于某个坐标，沿此坐标的平移就是一个基林矢量。

不是曲线意义上的平移（Γ），是主被动观点与坐标变换等价的“移动”

举例：R^3上的基林矢量

对称性对应的守恒律：

(曲线的切矢)

如果粒子沿测地线运动，粒子的四动量与基林矢量的内积是不变量。

注意
1、内积需要度规
2、四速度就是切矢
3、之前定义的协变导数是否有“前导后不导+后导前不导”?

沿曲线求导 $\frac{d}{d\lambda}(\hat{\xi}\cdot\hat{p}) = 0$

曲线的参数

=p^μ ∇_μ(ξ_ν p^ν)
=p^μ ξ_ν(∇_μ p^ν)
+p^μ p^ν(∇_μ ξ_ν)
前者是测地线方程，后者交换μν相等（只在前面有求和号的时候可以用！），写作两个相加除二，就有基林矢量方程。

2、史瓦西度规

真空、静态、球对称度规——史瓦西度规：

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

立体角dΩ=sinθdθdφ
但这里定义：“球面线元”（类似ds^2=dx^2+dy^2）
dΩ^2=dθ^2+sin^2θdφ^2
立体角是“球面面元”。
球面线元前的系数r^2与θφ无关，因此在球面上走，度规不变。

稳态：∂g_μν/∂x^0 = 0
静态：时间反演变换ds^2不变
例：g^μν = (1 1
1 1)
ds^2 = dt^2 + dx^2 + dtdx + dxdt，时间反演后两项变号，因此对二维，静态要求对角项为0.

对度规做一个说明：

$r = 0$：曲率奇点

$r = 2GM$：坐标奇点

测地线的不完备性：测地线无法到达曲率奇点。
进行坐标变换可以消除坐标奇点。
penrose：所有的曲率奇点会被坐标奇点包裹。
penrose过程：进入视界（坐标奇点）后，dt^2项变成正的，dr^2项变成负的，时间、空间地位交换，这是其能带出能量的关键因素。但是史瓦西黑洞进入视界就出不来，但克尔黑洞进入无限红移面就能满足这个条件。

如何方便的求测地线?
测地线方程太复杂，我们可以用“沿测地线运动四动量与killing矢量内积不变”（见下页）

Killing 矢量：$\begin{cases} \eta=(0,0,0,1) & \text{由于度规对}\phi\text{对称} \\ \xi=(1,0,0,0) & \text{由于度规不含时} \end{cases}$

变换后度规不变.

四速度：$u^\mu=\left(\frac{dt}{d\lambda},\frac{dr}{d\lambda},\frac{d\theta}{d\lambda},\frac{d\phi}{d\lambda}\right)$ 四个坐标有四个.

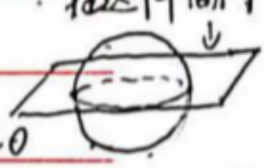
守恒量：$\begin{cases} E:=-g_{\mu\nu}\xi^\mu u^\nu=\frac{dt}{d\lambda}\left(1-\frac{2GM}{r}\right) \\ L:=g_{\mu\nu}\eta^\mu u^\nu=\frac{d\phi}{d\lambda}r^2\sin^2\theta \end{cases}$ $\longrightarrow$ 求导后可得到测地线方程中的两个.

代入

θ方向的测地线方程：

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{d\lambda}\frac{d\theta}{d\lambda}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2=0 \Rightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(r^2\frac{d\theta}{d\lambda}\right)-\frac{L^2\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}=0$$

在这个平面内



二阶微分方程，选取初条件：$\theta(0)=\frac{\pi}{2}$, $\frac{d\theta}{d\lambda}(0)=0$（θ是λ的函数）$\Rightarrow$ 解得 $\theta(\lambda)=\frac{\pi}{2}$. $\therefore \frac{d\theta}{d\lambda}=0$

r方向的测地线方程：

"四速度归一"：$-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=\epsilon$ $\begin{cases} 1, & \text{有质量}, v<c, ds^2<0 \\ 0, & \text{无质量}, v=c, ds^2=0 \end{cases}$

对λ求导即可得到测地线方程

$$\Rightarrow -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2+\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+r^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2=-\epsilon$$

角向速度 $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ $(\dot{\theta}=0)$ 带来的离心势.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+V(r)=\frac{1}{2}E^2\text{，其中 } V(r):=\frac{1}{2}\epsilon-\epsilon\frac{GM}{r}+\frac{L^2}{2r^2}-\frac{GML^2}{r^3}$$

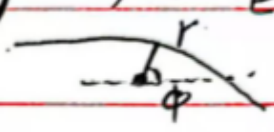
径向速度，而 $\frac{1}{2}E^2$ 为守恒量（想到能量守恒），因此定义 $V(r)$ 为"等效势能"。单位质量

光线偏转：

光子测地线 $\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\frac{L^2}{2r^2}-\frac{GML^2}{r^3}=\frac{1}{2}E^2$. 两边同除 $L^2=\left(\frac{d\phi}{d\lambda}r^2\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dr}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^3}(r-2GM)\right)^{-1/2}, \quad b^2=\frac{L^2}{E^2}$$

若认为光线转折点（R_0）有 $\frac{dr}{d\phi}=0$



$\Rightarrow R_0=\cdots$

$$\Delta\phi=2\int_{R_0}^{\infty}\boxed{\frac{d\phi}{dr}}\,dr=\frac{4GM}{bc^2}$$