广义相对论基础

1、流形：物理体发生的背景　　可用坐标描述的时空集合体，不同坐标间变换十分光滑

上有坐标系O_α、$O_\beta\cdots$

2、张量　　具有一定坐标变换规律的n^(k+l)个数

定义：一点处的(k,l)型张量为n^{k+l}个数，由 k 个上指标，l 个下指标区分。

$$T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}$$

坐标变换满足：　　坐标变换x’=x’(x)

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}=\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_l}}{\partial x'^{\nu_l}}T^{\rho_1\cdots\rho_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}$$

定义动机：矢量的推广。从矢量引入到张量需要把矢量理解为映射，见微分几何书。

例子：

矢量：(1,0)型 V^μ

坐标变化：

$$V'^\mu=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}V^\sigma$$

对偶矢量：（0,1）型

坐标变化：

$$\omega'_\nu=\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\omega_\rho$$

直积：

$$C^\mu{}_\nu=A^\mu B_\nu$$

缩并：

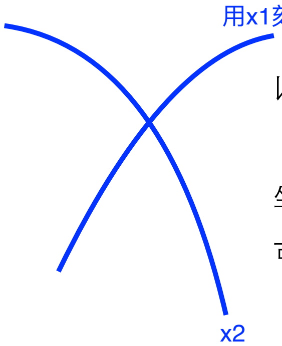
$$V^\sigma=T^{\sigma\rho}{}_\rho$$

3、切矢

对于曲线 x=x(t)，

其切矢：　理解为实数到矢量的映射

用x1刻画的一条曲线：x=x(x1)



记为T^μ $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu=\frac{dx^\mu}{dt}$

以上均谈及分量，若谈及矢量本身，可将希腊字母改为罗马字母。

沿用切矢的记号

坐标线的切矢：坐标基矢：$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$

可写为：

切矢用坐标基矢表示： $T^a\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a=\boxed{\frac{dx^\mu}{dt}}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$

来自张量定义

4、度规张量

g_{ab} (0,2)型对称张量，非退化$(\det(g_{\mu\nu})\neq 0)$

作用于任意非0矢量都不输出0

度规定义类似内积，但不一定正定

关于指标升降：

A^μ (1,0)型

B_ν (0,1)型

或记为 $A^\mu B_\nu$

$\Longrightarrow$ def. $C^\mu{}_\nu = A^\mu \cdot B_\nu$ 为(1,1)型张量.

记：$C^a{}_b = A^a \cdot B_b$.

有 $C^a{}_b = \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x^b} C^\mu{}_\nu$

指标升降：$\boxed{T^{ab\mu}} := T^{ab}{}_\nu g^{\mu\nu}$.

一种简写.

关于顺序：$\boxed{T^{ab} \neq T^{ba}} \Longrightarrow T^a{}_\mu{}^b{}_\nu \neq T^{ab}{}_{\mu\nu}$ 指标升降后不等.

定义矢量$\vec{u},\vec{v}$内积为:

$$g_{\mu\nu}u^{\mu}v^{\nu}$$

定义矢量$\vec{v}$长度:

$$|v|:=\sqrt{|g(v,v)|}$$

现在就可以定义：正交归一基底$\left(e_{\mu}\right)^{a}$:

$$g\left(\left(e_{\mu}\right)^{a},\left(e_{\nu}\right)^{b}\right)=\pm\delta_{\mu\nu}$$

不同基底下将 g 对角化，其号差相同。

坐标变换下内积不变：x=By，x^T Ax=y^T B^T A By，其中有trace(B^T AB)=trace(A)（即trace内可交换）号差：对角化后正的个数 减 负的个数

全为+1:正定度规

1 个为-1:洛伦兹度规

洛伦兹度规：号差为 2，即 diag{-1,1,1,1}

g(v,v)<0：类时矢量　　=0 类光　　>0 类空

曲线长度:

用切矢+dt定义正好可以消掉dt

$$l:=\int|T|dt=\int\sqrt{|g(T,T)|}dt$$

参数 t 有重参数化不变性。

重参数化：同一曲线x=x(t),x=x'(t')曲线长度不变

$$l=\int\sqrt{|g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}|}$$

记线元:

$$ds^2\equiv g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

有:

$$l=\int\sqrt{|ds^2|}$$

欧氏度规

$$g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$$

n=2:

$$ds^2=\delta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}=dx^2+dy^2$$

闵氏度规:

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}&=0, &&\mu\neq\nu\\ \eta_{\mu\nu}&=-1, &&\mu=\nu=0\\ \eta_{\mu\nu}&=1, &&else\end{aligned}$$

n=4:

$$ds^2=-(dx^0)^2+(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2$$

度规张量 指标升降:

$$\det\left(g_{\mu\nu}\right)\neq0$$

度规有其逆：$g^{\mu\nu}$

矢量:

$$V^{\mu}g_{\mu\rho}\equiv V_{\rho}$$

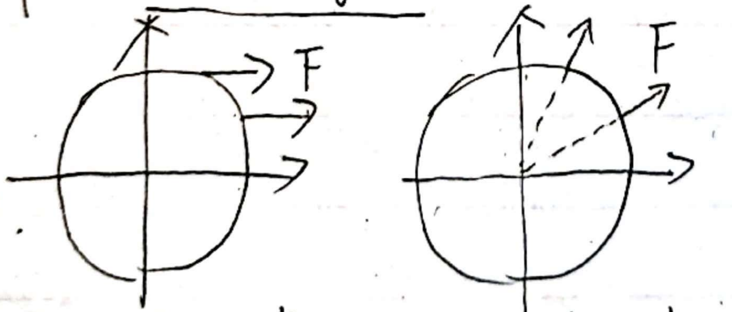
为了给导数一个合理的定义：

5. 联络. 张量导数：(以covec为例) $\partial_a W_b$ 不是张量？

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} w'_\nu = \underbrace{\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}}_{\text{链式法则}}\underbrace{\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} w_\rho\right)}_{\text{covec坐标变换}} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\left[\underbrace{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma} w_\rho\right)}_{\text{若只有这一项，满足张量定义}} + w_\rho\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\right)\right]$$

原因：这样定义张量的导数与坐标系有关。

eg. 两种力.



在XY系 $\partial_a F^b = 0$. 在(r,θ)系 $\partial_a F^b = 0$

如何定义两点的矢量一样？

⇒ 要比较两个矢量，首先要把它们平移至同一起点 ⇒ "联络"

如何平移？

5、联络 connection 想要发生联系 之前考虑的运算都是在同一点（比如同一曲线参数t）上

张量的导数非张量

希望：

平移的基本要求：平移后仍是个矢量。

“平移” $\tilde{V}^{\mu}\big|_{q} - V^{\mu}\big|_{p} = -\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu}\boxed{V^{\sigma}\big|_{p}dx^{\nu}}$

动机：平移前后的矢量可能有一定差异，比如按直角坐标的方式平移，前后矢量相等，gamma=0。若在极坐标描述下“平移”，在直角坐标看来前后矢量有差异，差异正比于原来矢量的长度以及平移距离。

为保证$\tilde{V}\big|_{q}^{\mu}$为矢量，可用坐标变换来检查：

$$\tilde{V}^{\mu}\big|_{q} = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right)_{q}\tilde{V}^{\nu}\big|_{q}$$

将上式定义的V一飘代入这个式子，可得对于gamma的约束。

可给出对于联络的约束：

$$\Gamma'^{\tau}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial^{2}x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\sigma}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}$$

注意到$\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu}$并非张量。 满足条件的有很多，挑一个合适的，比如直接坐标平移$\Gamma=0$

6、协变导数∇_{μ}

为使张量导数仍为张量，需使用协变导数：

$$\nabla_{\lambda}V^{\mu} = \lim_{q\to p}\frac{V^{\mu}|q - \tilde{V}^{\mu}|q}{\Delta x^{\lambda}} = \partial_{\lambda}V^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\lambda}V^{\sigma}$$

利用：$\nabla_{\mu}(f) := \partial_{\mu}f$ 没有平移带来的困惑，标量的协变导数就是其普通导数

可推得对偶矢量协变导数：

∇_μ(V^ν w_ν)=∂_μ(V^ν w_ν)

$$\nabla_{\mu}w_{\nu} = \partial_{\mu}w_{\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}w_{\alpha}$$

同理 张量的协变导数：

$$\underbrace{T^{\mu}{}_{\nu;\lambda}}_{\nabla_\lambda T^\mu{}_\nu} = \underbrace{T^{\mu}{}_{\nu,\lambda}}_{\partial_\lambda T^\mu{}_\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\lambda}T^{\rho}{}_{\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}T^{\mu}{}_{\rho}$$

7、张量沿曲线的导数

标量场：

$$\frac{df}{dt} = \frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} = T^{\mu}\partial_{\mu}f = T^{\mu}\nabla_{\mu}f$$

推广到张量场：定义矢量沿$C(t)$导数：

$$T^{b}\nabla_{b}v^{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(v^{a}|_{q} - \tilde{v}^{a}|_{q}\right)$$

8、测地线

∂_b于d/dt可交换，∂_b x^a=δ()

曲线切矢沿曲线平移。 曲线切矢沿曲线的导数为0

$$T^{b}\nabla_{b}T^{a} = 0$$

依赖于Γ

分量方程：

(dx^b/dt)[∂_b(dx^a/dt)+…]，其中d/dt=(∂/x_b)(dx_b/dt)

定义为测地线方程：
$$\frac{d^{2}x^{\mu}}{dt^{2}} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\frac{dx^{\nu}}{dt}\frac{dx^{\sigma}}{dt} = 0$$

若Γ取为0：x^μ=a^μ t +b^μ 就是欧几里得中的直线

给定Γ就是二阶线性常微分方程，给定初值：x^μ(0), x'^μ(0)可以解得x^μ(t)

和牛二很像，因此含Γ的项和力很有关系！！ 对于一定的坐标变换，Γ'(见“对于联络的约束”) 给出的正是惯性力。

举个例子：

$$\begin{cases} x' = x + \frac{1}{2}at^2 \\ t' = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'^0 = x^0 + \frac{1}{2}a(x^1)^2 \\ x'^1 = x^1 \end{cases} \xrightarrow{\text{逆变换}} \begin{cases} x^0 = x'^0 - \frac{1}{2}a(x'^1)^2 \\ x^1 = x'^1 \end{cases}$$

右边没有 x'^1, x'^0 就行

$\Gamma = 0$ 为欧几里德空间

$$\Rightarrow \Gamma'^{\tau}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\beta}$$

用逆变换写出来再求

$$\Gamma'^0{}_{00} = \frac{\partial^2 x^0}{\partial (x'^0)^2} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} + \frac{\partial^2 x^1}{\partial (x'^0)^2} \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} = 0$$

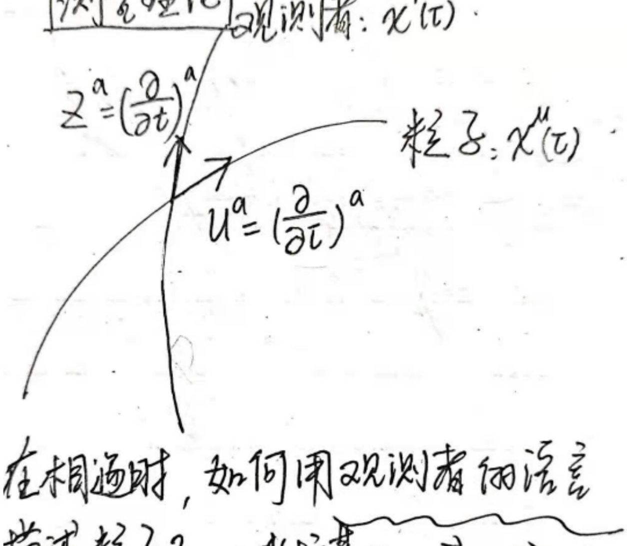
$$\Gamma'^1{}_{00} = \frac{\partial^2 x^0}{\partial (x'^0)^2} \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} + \frac{\partial^2 x^1}{\partial (x'^0)^2} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} = 0$$

…… 只有 $\Gamma'^0{}_{11} = a$.

$$\Rightarrow \frac{d^2 x'}{dt^2} + a \underbrace{\boxed{\frac{dt'}{dt} \frac{dt'}{dt}}}_{(=1)} = 0$$

即惯性力.

$\boxed{\text{测量理论}}$



在相遇时，如何用观测者的语言描述粒子?

坐标基矢: $a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \cdots$

$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^\alpha \cdots$

9、适配导数算子

对于流形 M:

联络空间

$$(M,\nabla_a)$$

期待：沿某曲线（在某个联络Γ定义下）平移不变的两个矢量，其内积（在某个度规g定义下）沿曲线平移不变的（标量）

广义黎曼空间:

$$(M,g_{ab})$$

希望二者适配:

度规相容条件: T^c ∇_c(g_ab v^a w^b)=0 协变导数分别作用于g,v,w

标量：坐标变换下不变，但沿着一条曲线平移不一定不变。(沿曲线导数为0)

$$\nabla_c g_{ab}=0$$

$$\underbrace{g_{\mu\nu,\lambda}}_{\partial_\lambda g_{\mu\nu}}-g_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\nu\lambda}-g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}=0$$

解出:

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(g_{\nu\rho,\mu}+g_{\mu\rho,\nu}-g_{\mu\nu,\rho}\right)$$ 进行一些坐标轮换即可得到，见图片

“流形语言中的线长不变可以对应物理中的光速不变”

10、测量理论 先看图片演示

定义质点 4 速度:

$$U^a\equiv\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a$$ 就是切矢

$$U^aU_a=-1$$ 定义它的归一化（在度规下）

再取一观测者: $\{t,x^i\}$

$$U^a=\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\text{定义为}\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a+\underbrace{\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)}_{=\gamma v}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a$$ 用新的坐标的坐标基矢表示 =(γ,γ\vec{v})

定义为γ =γv（v=dxi/dt三维速度） 恰好满足以前我们对γ的定义

观者 4 速度:

$$Z^a=\underbrace{(1,0,0,0)}_{\text{在观测者的坐标基矢下表述}}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$$

定义 4 动量:

$$p^a:=mU^a$$

Z^a测量到的动量与能量:

p^a=EZ^a

在观测者的坐标基矢下的第一个分量: $E=-p^aZ_a=-mu^aZ_a=-m\eta_{00}\dfrac{dt}{d\tau}\cdot 1=\boxed{\gamma m}$

剩下的部分: $p^a=mU^a-EZ^a=\gamma m(1,u^a)-\gamma m(1,\vec{0})=\boxed{\gamma m u^a}$ 这就是观测者看到的动量

能动量关系:

$$p^ap_a=(EZ^a+p^a)(EZ_a+p_a)=p^2-E^2$$

$$p^ap_a=m^2U^aU_a=-m^2$$

得到:

$$E^2=p^2+m^2$$ 坐标变换下内积不变