广义相对论基础 2

前情回顾：

1、度规

定义了局部的几何。

定义了“线长”：

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

交代了“矢量的内积”：

$$\hat{V} \cdot \hat{T} = g_{\mu\nu}V^\mu T^\nu$$

2、测地线

“直线”概念在弯曲空间的推广。

意义 1：弯曲空间中两点之间“距离”“最短”的路径称为测地线。

$$\delta\tau = 0$$

意义 2：切矢量沿着曲线平行移动。

$$\nabla_{\hat{t}}\hat{t} = 0$$

在取克里斯托弗联络下，两个意义是统一的。

测地线方程：

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

3、观测理论

观测：建立标架

观测者有自己的世界线，观测者的四速度定义了时钟的方向：

$$\hat{e}_0 = \hat{u}_{\text{obs}} = \text{观测者 (有质量粒子) 的 4-速度}$$

其它空间方向与时间方向正交，并且互相正交归一：

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_0 = 0, \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

对运动粒子能量的观测：

$$E = -\hat{p} \cdot \hat{e}_0$$

对运动粒子动量的观测：

$$P_i = -\hat{p} \cdot \hat{e}_i$$

————————————————分割线————————————————

1、基林矢量

描述对称性，对称意味着守恒。

对称：

保度规不变性：

这里仅举一个很特殊但是很有意义的例子：

比如说坐标(x,y,z)的度规：

$$g_{\mu v=}\begin{matrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{matrix}$$

那么如果我们沿 z 轴平移，我们的度规是没有变化的，也就是局部的几何没有变化，此时就是一种“对称性”。

考虑到一般情况，假设坐标有一个无穷小的变换：

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \epsilon\xi^{\alpha}(x)$$

根据度规在变换前后不变的条件：

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}g'_{\alpha\beta}(x'(x)$$

我们得到了基林矢量满足的方程：

$$\nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \nabla_{\nu}\xi_{\mu} = 0$$

结论：

如果度规不依赖于某个坐标，沿此坐标的平移就是一个基林矢量。

举例：R^3上的基林矢量

对称性对应的守恒律：

如果粒子沿测地线运动，粒子的四动量与基林矢量的内积是不变量。

$$\frac{d}{d\lambda}(\hat{\xi} \cdot \hat{p}) = 0$$

2、史瓦西度规

真空、静态、球对称度规——史瓦西度规：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

对度规做一个说明：

$r = 0$：曲率奇点

$r = 2GM$：坐标奇点

定义史瓦西半径：

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

3、广义相对论修正的牛顿势

关注史瓦西度规下的测地线：
写出测地线方程有两种方法，一种是通过测地线方程，通过计算联络写出：
比如比如我们可以写出：

$$\frac{d}{d\lambda}(r^2\frac{d\theta}{d\lambda}) - \frac{L^2\cos\theta}{r^2\sin^3\theta} = 0$$

此外，通过守恒量的方法写出测地线方程：
基林矢量场$\hat{K}$与测地线切矢$\hat{u}$的内积沿测地线不变。

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \text{ 常数}$$

对于史瓦西坐标，发现有类时基林矢量：

$$\xi^\mu = (1,0,0,0)$$

得到守恒量：

$$E = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}$$

此外，还有类空基林矢量：

$$\eta^\mu = (1,0,0,0)$$

从而定义角动量：

$$L = g^{\mu\nu}\eta_\mu u_\nu = r^2\sin^2\theta\frac{d\phi}{d\lambda}$$

对于之前的测地线方程，我们可以改写为：

$$(r^2\frac{d\theta}{d\lambda})^2 = -L^2\cot^2\theta + C$$

我们总可取平面满足：

$$\theta(\lambda) = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda) = 0$$

此时粒子的运动平面锁定。

最后，根据四速度归一，我们得到方程：

$$\epsilon = -g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

$$-\left(1-\frac{R_s}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2+\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+r^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2=-\epsilon$$

最终写为：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+V(r)=\frac{1}{2}E^2$$

等效势能：

$$V(r)=\frac{1}{2}\epsilon-\epsilon\frac{GM}{r}+\frac{L^2}{2r^2}-\frac{GML^2}{r^3}$$

可以看到，广义相对论对牛顿引力势的修正，在于多了一项，因为多出的一项，所以带来了很多广义相对论的效应。

4、引力红移

讨论简单的引力红移的情形,发射器与接收器固定。所以发射器接收器的四速度都写成：

$$u^\mu=(a,0,0,0)$$

做四速度归一：

$$u^0=\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}$$

假如有一个光子，四动量写为：

$$P^\mu$$

根据观测理论，A 地发射器观测到的能量：

$$E_R=\hat{u}(A)\cdot\hat{P}(A)$$

B 地接收器接收到的能量：

$$E_R=\hat{u}(B)\cdot\hat{P}(B)$$

得到光子频率比：

$$\frac{\nu_R}{\nu_E}=\frac{P_0(B)}{P_0(A)}\left(\frac{g_{00}(A)}{g_{00}(B)}\right)^{1/2}=\left(\frac{g_{00}(A)}{g_{00}(B)}\right)^{1/2}$$

5、光线偏折

考虑光子的测地线：

$$-\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{-1}E^2+\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}=0$$

$$E=(1-\frac{R_s}{r})\frac{dt}{d\lambda},\quad L=r^2\frac{d\phi}{d\lambda}$$

引入：

$$b^2=\frac{L^2}{E^2}$$

得到：

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{L^2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+W_{eff}(r)$$

$$W_{eff}(r)=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{R_s}{r}\right)$$

对于光线偏折问题：

先找到光线的转折点：

转折点在$r=R_0$处，满足：

$$dr/d\phi=0$$

通过对光子测地线的分析，我们得到：

$$\frac{d\phi}{dr}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^3}(r-R_s)\right)^{-1/2}$$

求出转折点半径：

$$R_0^3-b^2(R_0-R_s)=0\quad\Rightarrow\quad R_0=\frac{2b}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(-\frac{b_c}{b}\right)\right)$$

偏转角写为：

$$\Delta\phi=2\int_{R_0}^{\infty}\frac{dr}{(r^4b^{-2}-r(r-R_s))^{1/2}}$$

接下来就是数学细节了，这里直接给出最终结论：

$$\delta\phi=\frac{4GM}{bc^2}$$