广义相对论基础

1、流形：物理体发生的背景

上有坐标系Q_α、$Q_\beta\cdots$

2、张量

定义：一点处的张量(k,l)型为n^{k+l}个数，由 k 个上指标，l 个下指标区分。

$$T^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_l}$$

坐标变换满足：

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_k} = \prod\left(\frac{\partial x'^{\mu_i}}{\partial x^{\sigma_i}}\frac{\partial x^{\rho_i}}{\partial x'^{\nu_j}}\right)\Bigg|\ T^{\sigma_1\cdots\sigma_k}_{\rho_1\ldots\rho_j}$$

例子：

矢量：(1,0)型 V^μ

坐标变化：

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}V^\sigma$$

对偶矢量：(0,1) 型

坐标变化：

$$\omega'_\nu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\omega_\rho$$

直积：

$$C^\mu_\nu = A^\mu B_\nu$$

缩并：

$$V^\sigma = T^{\sigma\rho}_\rho$$

3、切矢

对于曲线 x=x(t),

其切矢：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$$

以上均谈及分量，若谈及矢量本身，可将希腊字母改为英文字母。

坐标线的切矢：坐标基矢：$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$

可写为：

$$T^a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = \frac{dx^\mu}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$$

4、度规张量

g_{ab} (0,2)型对称张量，非退化($\det\left(g_{\mu\nu}\right) \neq 0$)

度规定义类似内积，但不一定正定

定义矢量$\vec{u},\vec{v}$内积为：

$$g_{\mu\nu}u^{\mu}v^{\nu}$$

定义矢量$\vec{v}$长度：

$$|v|:=\sqrt{|g(v,v)|}$$

正交归一基底$\left(e_{\mu}\right)^{a}$：

$$g\left(\left(e_{\mu}\right)^{a},(e_{\nu})^{b}\right)=\pm\delta_{\mu\nu}$$

不同基底下将 g 对角化，其号差相同。
全为+1:正定度规
1 个为-1:洛伦兹度规

洛伦兹度规：号差为 2，即 diag{-1,1,1,1}
g(v,v)<0：类时矢量　　　=0 类光　　>0 类空

曲线长度：

$$l:=\int|T|dt=\int\sqrt{|g(T,T)|}dt$$

参数 t 有重参数化不变性。

$$l=\int\sqrt{|g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}\ |}$$

记线元：

$$ds^2\equiv g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

有：

$$l=\int\sqrt{|ds^2|}$$

欧氏度规

$$g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$$

n=2:

$$ds^2=\delta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}=dx^2+dy^2$$

闵氏度规：

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$$

$$\eta_{\mu\nu}=0,\qquad \mu\neq\nu$$
$$\eta_{\mu\nu}=-1,\qquad \mu=\nu=0$$
$$\eta_{\mu\nu}=1,\qquad else$$

n=4:

$$ds^2=-(dx^0)^2+(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2$$

度规张量 指标升降：

$$\det\left(g_{\mu\nu}\right)\neq 0$$

度规有其逆：$g^{\mu\nu}$
矢量：

$$V^{\mu}g_{\sigma\mu}\equiv V_{\rho}$$

5、联络

张量的导数非张量

希望：

$$\tilde{V}\Big|_q^\mu - V^\mu|_p = -\Gamma_{\sigma\nu}^\mu V^\mu\Big|_p dx^\nu$$

为保证$\tilde{V}\Big|_q^\mu$为矢量，可用坐标变换来检查：

$$\tilde{V}\Big|_q^\mu = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\nu}\right)_q \tilde{V}^\nu\ |_q$$

可给出对于联络的约束：

$$\Gamma'^\tau_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu\,\partial x'^\gamma}\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\beta} + \Gamma^\beta_{\alpha\sigma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\gamma}$$

注意到$\Gamma^\tau_{\mu\nu}$并非张量。

6、协变导数∇_μ

为使张量导数仍为张量，需使用协变导数：

$$\nabla_\lambda V^\mu = \lim_{q\to p}\frac{V^\mu|q - \tilde{V}^\mu|q}{\Delta x^\lambda} = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}V^\sigma$$

利用：$\nabla_\mu(f) := \partial_\mu f$

可推得对偶矢量协变导数：

$$\nabla_\mu w_\nu = \partial_\mu w_\nu - \Gamma^\nu_{\mu\sigma}w_\nu$$

张量的协变导数：

$$T^\mu_{\nu;\lambda} = T^\mu_{\nu,\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda}T^p_\nu - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}T^\mu_\rho$$

7、张量沿曲线的导数

标量场：

$$\frac{df}{dt} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = T^\mu\,\partial_\mu f = T^\mu\nabla_\mu f$$

定义矢量沿$\zeta(t)$导数：

$$T^b\nabla_b v^a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(v^q|_q - \tilde{v}^q|_q\right)$$

8、测地线

曲线切矢沿曲线平移。

$$T^b\nabla_b T^a = 0$$

分量方程：

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\sigma}{dt} = 0$$

9、适配导数算子

对于流形 M:

联络空间

$$(M, \nabla_a)$$

广义黎曼空间：

$$(\mathrm{M}, g_{ab})$$

希望二者适配：

度规相容条件：

$$\nabla_c g_{ab} = 0$$

$$g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\lambda} - g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} = 0$$

解出：

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}\left(g_{\nu\rho,\mu} + g_{\mu\rho.\nu} - g_{\mu\nu,\rho}\right)$$

10、测量理论

定义质点 4 速度：

$$U^a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a$$

$$U^a U_a = -1$$

再取一观测者：t, x^i

$$U^a = \frac{dt}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a + \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a$$

观者 4 速度：

$$z^a = (1,0,0,0) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$$

定义 4 动量：

$$p^a := mU^a$$

z^a测量到的动量与能量：

$$E = -p^a z_a = -mu^a z_a = -m\eta_{00}\frac{dt}{d\tau}\cdot 1 = \gamma m$$

$$p^a = mU^a - Ez^a = \gamma m(1, u^a) - \gamma m\left(1, \vec{0}\right) = \gamma m u^a$$

能动量关系：

$$p^a p_a = (Ez^a + p^a)(Ez_a + p_a) = p^2 - E^2$$

$$p^a p_a = m^2 U^a U_a = -m^2$$

得到：

$$E^2 = p^2 + m^2$$