ZETTEL 11

FLORIAN LERCH(2404605)/WALDEMAR HAMM(2410010)

Aufgabe 1. Statistisches Modell:

Das statistische Modell sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, P_\theta : \theta \in \Theta)$ mit:

Sei Y = Ausgang des Experiments(=001101...), $\mathcal{X} = [0, 10] \subset \mathbb{N}$ mit $\mathcal{X} \ni x = \Pi_{y \in Y} y$

$\mathcal{F} = \mathfrak{P}(\mathcal{X})$ also die Potenzmenge von $\mathcal{X}$

$\Theta = [0, 1]$

P_θ = Binomialverteilung mit den Parametern $n = 10$ und $p = \theta$

Likelihood Funktion:

$L(\theta|x) = P_\theta(x)$

$= \binom{10}{x}\theta^x * (1 - \theta)^{10-x}$

Maximum likelihood Schätzer:

Da die logarithmus Funktion von $L(\theta)$ an der selben Stelle ihr maximum erreicht, reicht es, diese zu maximieren.

alternativ, falls x = Anzahl: $= log(L(\theta)) = log(\binom{10}{x}) + x * log(\theta) + (10 - x) * log(1 - \theta)$

$\Rightarrow \frac{d}{d\theta} log(L(\theta)) = \frac{x}{\theta} - \frac{10-x}{1-\theta}$

Sei nun $\frac{x}{\theta} - \frac{10-x}{1-\theta} = 0$

$\Rightarrow \frac{x-x\theta}{\theta-\theta^2} - \frac{10\theta-x\theta}{\theta-\theta^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{4-4\theta}{\theta-\theta^2} - \frac{10\theta-4\theta}{\theta-\theta^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{4-10\theta}{\theta-\theta^2} = 0$

$\Rightarrow 4 - 10\theta = 0$

$\Rightarrow 4 = 10\theta$

$\Rightarrow \theta = 0,4$ = Maximum likelihood Schätzer

Aufgabe 2.

a). Statistisches Modell:

Seien $x_1, x_2, ..., x_n$ die Poisson-verteilten Werte

Das statistische Modell ist dann $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, P_\nu : \nu \in \Theta)$ mit

$\mathcal{X} = \mathbb{R}^n_+$

$\mathcal{F} = \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n_+) = \mathfrak{P}(\mathcal{X})$

$\Theta = \mathbb{N}_+$

$P_\nu =$ Poissonverteilung zum Parameter ν

b). Maximum-Likelihood-Schätzer:

Nach Def. der Poissonverteilung gilt: $P_\nu(X = x) = \frac{\nu^x}{x!} exp(-\nu)$

$\Rightarrow L(\nu) = \frac{\nu^{x_1+x_2+...+x_n}}{x_1!*x_2!*...*x_n!} exp(-n\nu)$

$\Rightarrow log(L(\nu)) = (x_1 + x_2 + ... + x_n)log(\nu) - log(x_1! * x_2! * ... * x_n!) - n\nu$

$\Rightarrow \frac{d}{d\nu} log(L(\nu)) = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{\nu} - 0 - n$

Sei nun $log(L(\nu)) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2+...+x_n}{\nu} - n = 0$

$\Rightarrow (\sum_{i=1}^n x_i) - \nu n = 0$

$\Rightarrow (\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}) = \nu$

$\Rightarrow T_{ML} = (\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n})$

c). Erwartungstreue:

$E(T_{ML}) = E(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}) = \frac{1}{n} E(\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{n}{n}\mu = \mu$

$\Rightarrow$ Da der Erwartungswert bei der Poissonverteilung gleich dem Parameter (in diesem Fall ν) ist, ist

T_{ML} erwartungstreu

d). Varianz:

$V_\nu[T_{ML}] = V_\nu(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}) = \sum_{i=1}^n Var(\frac{1}{n} X_i) = \sum_{i=1}^n (\frac{1}{n^2} Var(X_i))$

$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\mu}{n} = \frac{\nu}{n}$

e). Fisher-Information:

$I(\nu) = -E[(\frac{d^2}{d\nu^2} log(f_\nu(X)))]$

$= -E[(\frac{d^2}{d\nu^2} x log(\nu) - log(x!) - \nu)]$

$= -E[(\frac{d}{d\nu}\frac{x}{\nu} - 0 - 1)]$

$= -E[\frac{-x}{\nu^2})]$

$= -(\frac{-\nu}{\nu^2}) = -(-\frac{1}{\nu}) = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sigma^2}$

f). Cramer Rao Schranke: $Var(T_M L) = \frac{\nu}{n}$

Schranke $= \frac{1}{I(\nu)} = \nu$

$\Rightarrow$ Der Schätzer liegt auf der Schranke.

Aufgabe 3. Seien x_u und x_o die untere und obere Grenze des Konfidenzintervalls:

$\Rightarrow P(x_u \leq b \leq x_o) = 1 - \alpha$

$\Rightarrow F(x_o) - F(x_u) = 1 - \alpha$

Sei $x_m = max(X_1, ..., X_n)$

$\Rightarrow x_u = x_m$ da b nicht kleiner als x_m sein kann.

Weiter weiß ich auch nicht, stimmt denn der Anfang so?

Aufgabe 4. -