Dr. Roland Friedrich
Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg
D-35032 Marburg

30. November 2012

Übungsblatt 6 Stochastik 0 WS 2012/13

NLA

Aufgabe 1 - Einfache Irrfahrt

Seien $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$ und $\mathbb{P}_n$ die Laplace-Verteilung auf Ω_n. Für $0 \leq k \leq n$ seien die Zufallsvariablen $S_k : \Omega_n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$S_0(\omega) = 0,\ \ S_k(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i,\ \ k = 1, ..., n,\ \ \omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega_n$$

a) 3Pkt. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k den Bildbereich $S_k(\Omega_n)$ sowie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S_k auf diesem.

b) 2Pkt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich die Irrfahrt $(S_k)_k$ zum Endzeitpunkt n wieder in ihrem Ausgangspunkt?

c) 3Pkt. Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.

Aufgabe 2

a) 4Pkt. Wie kann man aus der Poisson- bzw. Binomialverteilung auf $\mathbb{R}$ eine Dichte erhalten? Kann man daraus eine allgemeine Regel ableiten? Formulieren Sie diese.

b) 4Pkt. Zeigen Sie, eine beliebige Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ welche eine Sprungstelle hat, besitzt keine Dichte. Wie schaut es mit einer "stückweise Dichte" aus?

Aufgabe 3

a) 4Pkt. Zeigen Sie, dass die Exponentialverteilung zum Parameter $\alpha > 0$ gedächtnislos ist, d.h. für alle $s, t > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)\ .$$

Interpretieren Sie diese Eigenschaft.

b) 2Pkt. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Exponentialverteilung.

c) 2Pkt. Berechnen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, den Erwartungswert und die Varianz der Gleichverteilung auf $[a, b]$.

Aufgabe 4

a) 4Pkt. Betrachten Sie für $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ die Funktion $\mathbb{1}_1$ auf $\mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass diese Riemann-integrierbar ist. Betrachten sie nun folgende Funktion auf $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} \mathbb{1}_q$$

und zeigen Sie, dass sie nicht Riemann-integriebar ist. Daraus folgt, dass die σ-Additivität für das Riemann-integral nicht gegeben ist.

b) 4Pkt. Berechnen Sie die Faltung der Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ mit sich selber. Ist das wieder eine Dichtefunktion?

Abgabe in der Vorlesung am 12. Dezember 2012.