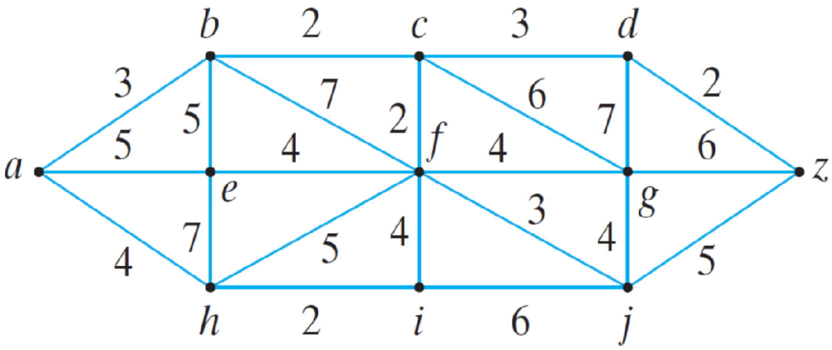
Canvas Problem

Use Dijkstra's algorithm to find the shortest path from b to j.



Rules for Djikstra's algorithm:

Add the vertex of least distance to set S.

Find the least distance from the first to the current vertex, accessed only if S has the vertex.

Adding vertices to S fixes their distances as constants.

With two vertices of same distance, add either.

Step 0: Set empty set S and each vertex to infinity, as their paths are undetermined.

Step	S	$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(f)$	$L(g)$	$L(h)$	$L(i)$	$L(j)$	$L(z)$
0	$\{\}$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Continued on next page

Canvas Problem (Continued)

The current fastest route is emboldened in each step.

Step 1: Add a, the first vertex, to set S.
Update the distance to each a-adjacent vertex:
b is distance 3;
$e = 5$; and
$h = 4$.

Step	S	$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(f)$	$L(g)$	$L(h)$	$L(i)$	$L(j)$	$L(z)$
0	$\{\}$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	$\{a\}$	**0, a**	$3, b$	∞	∞	$5, e$	∞	∞	$4, h$	∞	∞	∞

Step 2: Add b to set S. Update the columns:
$a \in S$;
$c = 2$, but $b + c = 3 + 2 = 5$;
$b + e = 3 + 5 = 8 > 5, e$; and
$f = 7$, but $b + f = (a, b) + f = 3 + 7 = 10$.

Step	S	$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(f)$	$L(g)$	$L(h)$	$L(i)$	$L(j)$	$L(z)$
0	$\{\}$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	$\{a\}$	**0, a**	$3, b$	∞	∞	$5, e$	∞	∞	$4, h$	∞	∞	∞
2	$\{a, b\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	$5, e$	$10, (a, b)$	∞	$4, h$	∞	∞	∞

Step 3: Add h to set S. Update the columns:
$a \in S$;
$h + e = 4 + 7 = 11 > 5, e$;
$h + f = 4 + 5 = 9 < 10, (a, b)$; and
$i = 2$, but $(a, h) + i = 4 + 2 = 6$.

Step	S	$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(f)$	$L(g)$	$L(h)$	$L(i)$	$L(j)$	$L(z)$
0	$\{\}$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	$\{a\}$	**0, a**	$3, b$	∞	∞	$5, e$	∞	∞	$4, h$	∞	∞	∞
2	$\{a, b\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	$5, e$	$10, (a, b)$	∞	$4, h$	∞	∞	∞
3	$\{a, b, h\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	$5, e$	$9, (a, h)$	∞	**4 (a, h)**	$6, (a, h)$	∞	∞

Continued on next page

Canvas Problem (Continued)

Step 4: Add e to set S, though $c = e \equiv 5 = 5$. Update the columns:
$a \in S$;
$e + b = (a, e) + b = 5 + 5 = 10 > 3, b$;
$e + f = (a, e) + f = 5 + 4 = 9 = 9, (a, h)$; and
$h \in S$.

Step	S	$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(f)$	$L(g)$	$L(h)$	$L(i)$	$L(j)$	$L(z)$
0	$\{\}$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	$\{a\}$	**0, a**	$3, b$	∞	∞	$5, e$	∞	∞	$4, h$	∞	∞	∞
2	$\{a, b\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	$5, e$	$10, (a, b)$	∞	$4, h$	∞	∞	∞
3	$\{a, b, h\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	$5, e$	$9, (a, h)$	∞	**4 (a, h)**	$6, (a, h)$	∞	∞
4	$\{a, b, h, e\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	**5, (a, e)**	$9, (a, h)$	∞	**4, (a, h)**	$6, (a, h)$	∞	∞

Step 5: Add c to set S, as e didn't yield less distance. Update the columns:
$b \in S$;
$c + d = (b + c) + d = (3 + 2) + 3 = 5 + 3 = 8$;
$c + f = (b + c) + f = (3 + 2) + 2 = 5 + 2 = 7 < 9(a, h)$; and
$g = 6$, but $(a, c) + g = 5 + 6 = 11$.

Step	S	$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(f)$	$L(g)$	$L(h)$	$L(i)$	$L(j)$	$L(z)$
0	$\{\}$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	$\{a\}$	**0, a**	$3, b$	∞	∞	$5, e$	∞	∞	$4, h$	∞	∞	∞
2	$\{a, b\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	$5, e$	$10, (a, b)$	∞	$4, h$	∞	∞	∞
3	$\{a, b, h\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	$5, e$	$9, (a, h)$	∞	**4 (a, h)**	$6, (a, h)$	∞	∞
4	$\{a, b, h, e\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	**5, (a, e)**	$9, (a, h)$	∞	**4, (a, h)**	$6, (a, h)$	∞	∞
5	$\{a, b, h, e, c\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	**5, (a, c)**	$8, (a, c)$	**5, (a, e)**	$7, (a, c)$	$11, (a, c)$	**4, (a, h)**	$6, (a, h)$	∞	∞

Step 6: Add i to set S. Update the columns:
$i + f = (a, i) + f = 6 + 4 = 10 < 7, (a, c)$;
$h \in S$; and
$j = 6$, but $(a, i) + j = 6 + 6 = 12$.

Step	S	$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(f)$	$L(g)$	$L(h)$	$L(i)$	$L(j)$	$L(z)$
0	$\{\}$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	$\{a\}$	**0, a**	$3, b$	∞	∞	$5, e$	∞	∞	$4, h$	∞	∞	∞
2	$\{a, b\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	$5, e$	$10, (a, b)$	∞	$4, h$	∞	∞	∞
3	$\{a, b, h\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	$5, e$	$9, (a, h)$	∞	**4 (a, h)**	$6, (a, h)$	∞	∞
4	$\{a, b, h, e\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	**5, (a, e)**	$9, (a, h)$	∞	**4, (a, h)**	$6, (a, h)$	∞	∞
5	$\{a, b, h, e, c\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	**5, (a, c)**	$8, (a, c)$	**5, (a, e)**	$7, (a, c)$	$11, (a, c)$	**4, (a, h)**	$6, (a, h)$	∞	∞
6	$\{a, b, h, e, c, i\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	**5, (a, c)**	$8, (a, c)$	**5, (a, e)**	$7, (a, c)$	$11, (a, c)$	**4, (a, h)**	**6, (a, i)**	$12, (a, i)$	∞

Continued on next page

Canvas Problem (Continued)

Step 7: Vertex j is reached, but path [...]

$$a, h, i, j$$

[...] isn't necessarily the shortest route.

Add f to set S. Update the columns:
$b \in S$;
$c \in S$;
$e \in S$;
$f + g = (a, f) + g = 7 + 4 = 11 = 11, (a, c)$;
$h \in S$;
$i \in S$; and
$j = 3$, but $f + j = (a, f) + j = 7 + 3 = 10 < 12, (a, i)$

Step	S	$L(a)$	$L(b)$	$L(c)$	$L(d)$	$L(e)$	$L(f)$	$L(g)$	$L(h)$	$L(i)$	$L(j)$	$L(z)$
0	$\{\}$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	$\{a\}$	**0, a**	$3, b$	∞	∞	$5, e$	∞	∞	$4, h$	∞	∞	∞
2	$\{a, b\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	$5, e$	$10, (a, b)$	∞	$4, h$	∞	∞	∞
3	$\{a, b, h\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	$5, e$	$9, (a, h)$	∞	**4 (a, h)**	$6, (a, h)$	∞	∞
4	$\{a, b, h, e\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	$5, (a, b)$	∞	**5, (a, e)**	$9, (a, h)$	∞	**4, (a, h)**	$6, (a, h)$	∞	∞
5	$\{a, b, h, e, c\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	**5, (a, c)**	$8, (a, c)$	**5, (a, e)**	$7, (a, c)$	$11(a, c)$	**4, (a, h)**	$6, (a, h)$	∞	∞
6	$\{a, b, h, e, c, i\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	**5, (a, c)**	$8, (a, c)$	**5, (a, e)**	$7, (a, c)$	$11(a, c)$	**4, (a, h)**	**6, (a, i)**	$12, (a, i)$	∞
7	$\{a, b, h, e, c, i, f\}$	**0, a**	**3, (a, b)**	**5, (a, c)**	$8, (a, c)$	**5, (a, e)**	**7, (a, c)**	$11(a, c)$	**4, (a, h)**	**6, (a, i)**	$10, (a, f)$	∞

Answer: A shorter route to j is now possible, but a viable route still exists in $8, (a, d)$. Check the d-adjacent vertices:
$c \in S$;
$(a, d) + g = 8 + 7 = 15 > 11(a, f)$; and
$z = 2$, but $(a, d) + z = 8 + 2 = 10$.

Paths (a, f) and (a, z) are distance 10, but (a, z) hasn't yet reached j, and traveling an edge of distance 0 isn't possible.

So, the shortest route from a to j is:

$$a, b, c, f, j$$

$$= \text{ distances } 0 + 3 + 2 + 2 + 3$$

$$= \text{ distance } 10$$