

به نام خدا

تمرین کامپیوتری دوم

درس فرآیندهای تصادفی

موعد تحویل: ۱۴۰۲/۰۹/۲۵

استاد: دکتر بهنیا

نکات تحویل تمرین:

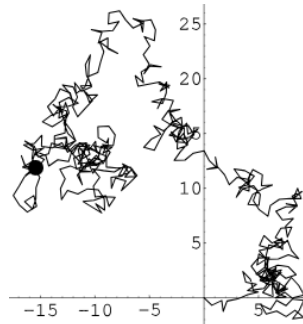
- (۱) برای انجام این تمرین از MATLAB استفاده کنید.
- (۲) برای این تمرین لازم است که علاوه بر نوشتن کدهای مورد نیاز، یک فایل گزارش به فرمت pdf. برای پاسخگویی به پرسشهای مطرح شده و درج نتایج و توضیح آنها تحویل بدهید.
- (۳) کد هر سوال را در یک m. فایل جداگانه با نام شماره سوال بنویسید. قسمت‌های مختلف یک سوال را با %% از هم جدا و نام‌گذاری کنید.
- (۴) کامنت‌گذاری مناسب انجام دهید.
- (۵) برای نمودارها عناوین مناسب استفاده کنید.
- (۶) در نهایت باید یک فایل به فرمت zip. تحویل بدهید که حاوی کدها و گزارش شما باشد.
- (۷) سوالات خود را از طریق ایمیل sm.matin.alemohammad@gmail.com مطرح کنید.

۱- یک ذره از مبدا مختصات دوبعدی شروع به حرکتی تصادفی می‌کند. حرکت این ذره به این شکل است که جهش‌هایی با طول تصادفی و در جهت تصادفی انجام می‌دهد. طول هر جهش متغیر تصادفی یکنواخت  $U(0, 1)$  است و جهت آن هم متغیر تصادفی  $U(0, 2\pi)$ . حرکت این ذره را با اطلاعات داده‌شده، شبیه‌سازی کنید. بندهای ذیل را به ازای  $N = 100, 1000, 10000$  انجام دهید.

الف) میانگین و واریانس جابه‌جایی را از مبدا مختصات تا پایان جهش  $N$ ، بر اساس نتایج شبیه‌سازی، حساب کنید. میانگین و واریانس بدست آمده را با محاسبات تئوری توجیه کنید.

ب) بر اساس نتایج شبیه‌سازی بگویید که به چه احتمالی ذره در حلقه‌ای به مرکز مبدا، با شعاع داخلی ۸ و شعاع خارجی ۱۲ قرار می‌گیرد. یکبار هم با روابط تئوری این احتمال را حساب کنید.

ج) مکان‌های نهایی ذره در صفحه دوبعدی را، که با تکرار آزمایش به دفعات بدست آمده‌اند، با نقطه رسم کنید. نحوه پراکندگی نقاط را به ازای تغییرات  $N$  گزارش کنید.



۲- در فعالیت‌های نجومی و هنگام رصد اجرام آسمانی فرض می‌شود که تعداد فوتون‌های رسیده از منبع نور به آشکارساز، یک فرآیند پواسون با چگالی  $\lambda$  است. در این سوال قصد داریم که با دریافت یک تحقق<sup>۱</sup> از این فرآیند تصادفی به تخمین  $\lambda$  بپردازیم.

خروجی سیستم آشکارساز یک سطح ولتاژ  $X(t) = \pm 1$  است. آشکارساز به این صورت کار می‌کند که با دریافت هر فوتون، سطح ولتاژ خودش را تغییر می‌دهد. در زمان  $t = 0$  اولین فوتون رسیده است و سطح ولتاژ  $X(0^+) = +1$  است.



<sup>1</sup> Realization

در فایل Q2\_DATA.csv یک تحقق از  $X(t)$  حاصل از رصد یک کهکشان دوردست آمده است. البته از روی داده‌ها هم مشخص است که این سیگنال تحت تاثیر نویز سیستم قرار گرفته است. ستون اول داده‌های این فایل زمان و ستون دوم سطح ولتاژ در آن زمان است.

الف) به کمک میانگین طول پالس‌های مستطیلی،  $\lambda$  را تقریب بزنید.

ب) فرآیند

$$I(t) = \frac{\int_{0+}^t X(\tau) d\tau}{t}$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید که

$$E[I(t)] = \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2\lambda t}.$$

ج) از تعریف  $I(t)$  در قسمت ب و فایل داده‌ها استفاده کنید تا تقریبی از  $E[I(t = 16.67 \text{ ns})]$  به دست آورید. سپس تخمینی از  $\lambda$  به دست آورید. روش خود را توضیح دهید.

۳- پل براونی<sup>۲</sup> عبارت از حرکت براونی بین دو نقطه ثابت است. این فرآیند تصادفی با رابطه کلی زیر تعریف می‌شود.

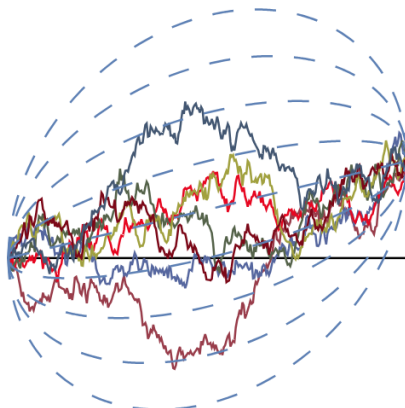
$$X(t) = b + \left(1 - \frac{t}{T}\right) \left( a - b + \int_0^t \frac{\sigma}{1 + \frac{t'}{T}} dW(t') \right)$$

در رابطه بالا  $a$  و  $b$  به ترتیب نقاط ثابت ابتدا و انتهای مسیر هستند و  $[0, T]$  بازه زمانی حرکت است.  $W(t)$  یک فرآیند وینر با میانگین 0 و واریانس  $t$  است. طبق این رابطه، میانگین و واریانس فرآیند  $X(t)$  به دست می‌آید: (چرا؟)

$$X(t) \sim N \left( a + (b - a) \frac{t}{T}, \sigma^2 \frac{t}{T} (T - t) \right)$$

مقادیر جدول زیر را برای پارامترهای مسئله در نظر بگیرید.

$a$	0.5
$b$	0.8
$T$	1
$\sigma$	0.2



---

الف) به تعداد 10000 مسیر حرکت را شبیه‌سازی و در یک نمودار مکان-زمان رسم کنید. برای این کار از مشتق رابطه اول نسبت به زمان استفاده کنید؛ نقاط ابتدای و انتهای هر مسیر را می‌دانید فقط باید نقاط میانی مسیر را به طور تصادفی تولید کنید. با طول گام‌های مناسب و استفاده از رابطه بازگشتی حاصل از مشتق، این گام‌ها را محاسبه کنید.

$$dX(t) = \frac{b - X(t)}{T - t} dt + \sigma dW(t)$$

راهنمایی:  $X(t + dt) = X(t) + \frac{b - X(t)}{T - t} dt + \sigma \sqrt{dt} N(0, 1)$  که  $dt$  طول گام‌ها است.

ب) میانگین و واریانس را در هر لحظه هم از رابطه تئوری و هم با استفاده از مسیرهای شبیه‌سازی شده بدست آورده و رسم کنید.

---

موفق باشید.