

Graph Theory (Reinhard Diestel) exercises

2020 年 8 月 16 日

1 The Basics

1.1

$2|E| = \sum_v \deg(v)$ より $|E| = \frac{1}{2}n(n-1)$.

1.2

以下, 内周と外周については $d \geq 2$ とする.

このグラフを G として, $d(G) = d$, $\|G\| = \frac{1}{2} \cdot d \cdot 2^d$, $\text{diam}(G) = d$, $g(G) = 4$, 外周は 2^d .

外周の計算は Hamilton サイクルの存在証明と同値. 「 $C^n \times \{0, 1\}$ 」が C^{2n} を含むことから ($d = 2$ を base step として) 帰納法が使える.

1.3

C の長さが \sqrt{k} 以上であれば示すことはない. C の長さが \sqrt{k} 未満であれば, 問題のパス P が C と交わる回数も \sqrt{k} 以下である. 交点から交点までパスに分解すると, どれかのパスは \sqrt{k} 以上の長さを持って, C と合わせて求めたいサイクルが得られる.

1.4

Yes. $G = C^{2k+1}$ のときに $g(G) = 2k+1$, $\text{diam}(G) = k$ となって等号.

1.5

BFS 木の性質. 容易である.

1.6

任意のグラフとあるが、 $G \neq \emptyset$ が必要である。中心をとって ($G \neq \emptyset$ よりとれる) 議論すれば容易。

1.7

$g = 2k + 1$ あるいは $g = 2k + 2$ とおく。 g が奇数ならば 1 点、偶数ならば隣接する 2 点を固定。これらの点から距離 n の点集合を D_n とする。

$1 \leq n < k$ ならば $v \in D_n$ の近傍 $N(v)$ は $D_{n-1} \cup D_n \cup D_{n+1}$ に含まれる。 D_{n-1} に少なくとも 1 点の近傍がある。 $D_{n-1} \cup D_n$ に 2 点あると g より小さな閉歩道ができて矛盾。 $N(v)$ の元は、唯一の D_{n-1} の点および D_{n+1} の点からなることが分かる。

特に、 $d - 1$ 個以上の D_{n+1} の点と接続する。また再び内周の議論から $u, v \in D_n$ に対して $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ がいえるのでこれらの点は v ごとに disjoint. $|D_{n+1}| \geq (d - 1)|D_n|$ がいえる。

あとは D_0 が 1, 2 点であることを使って下から評価すればできる。

後半の主張 (平均次数の場合) は、1.2.2 を使って最小次数の大きな部分グラフに注目すればよい。

1.8

$d = \delta(G)$ とすると、1.3.4 より $n \geq n_0(d, g) \geq n_0(d, 5) = d^2 + 1$ となる。よって $d \leq \sqrt{n - 1}$ 。

1.9

Ore の定理の証明を少し改変すればよい。

$|G| = n$ とする。長さが最大のパス $P = v_0 v_1 \dots v_m$ (長さ m) をとる。 $m \geq 2\delta(G)$ であれば示すことはない。 $m < 2\delta(G)$ を仮定する。

まず、長さ $m + 1$ のサイクルの存在を示す。 $A = \{1 \leq i \leq m \mid v_i \in N(v_0)\}$, $B = \{0 \leq i < m \mid v_i \in N(v_m)\}$, $B_+ = \{i + 1 \mid i \in B\}$ とおく。 $A, B_+ \subset \{1, \dots, m\}$ である。

P の最大性の仮定より、 v_0, v_m と隣接する頂点は v_i のいずれかであるから、 $|A| = \deg(v_0) \geq \delta(G)$ である。同様に $|B_+| = |B| \geq \delta(G)$ である。 $|A| + |B_+| \geq 2\delta(G) > m \geq |A \cup B_+|$ であるから、 A と B_+ は交わる。

$i \in A \cap B_+$ とする。 $v_0 P v_{i-1} v_n P v_i v_1$ が長さ $m + 1$ のサイクルとなる。以上で長さ $m + 1$ のサイクルの存在が示された。

$m+1 = |G|$ であれば, このサイクルが求めるものである. そうでない場合, G の連結性よりサイクルと隣接する新たな頂点が存在し, 長さ $m+1$ のパスが出来てしまう. 最大性の仮定に矛盾.

1.10

中心を根とする BFS 木を観察する. 深さ i の部分の頂点集合を D_i と書く. $i \leq k$ とすると, $v \in D_i$ が存在. $N(v) \subset D_{i-1} \cup D_i \cup D_{i+1}$ から, $|D_{i-1}| + D_i + D_{i+1} > 1 + d$ が分かる.

$|G| = (D_0 + D_1 + D_2) + (D_3 + D_4 + D_5) + \dots$ という要領で評価すれば, $|G| > (1+d)\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ が得られる.

逆の評価: D_{3i+1} が d 点集合で, D_{3i}, D_{3i+2} が 1 点集合となるように作れば最小次数の条件を満たす.

1.11

2 点間のパスの存在という関係が同値関係であることを確かめればよい. パスの存在と歩道の存在が同値であり, 歩道で考えれば推移律も自明である.

1.12

対偶. サイクルがなかったら木である. 頂点数 3 以上の木は葉でない頂点を持つ. その頂点を消すと連結性が失われることから, 1-連結であることが分かる.

頂点数 2 以下の場合も大丈夫.

1.13

- (i) $G = P^m$ の場合: $\kappa = \lambda = 1$ である. 容易.
- (ii) $G = C^m$ の場合: $\kappa = \lambda = 2$ である. 容易.
- (iii) $G = K^n$ の場合: $\kappa = \lambda = n - 1$ である. κ については, いくつかの頂点を削除した部分グラフも完全グラフであることから分かる. λ については 1.4.2 を使えばよい.
- (iv) $G = K_{m,n}$ の場合: $\kappa = \lambda = \min m, n - 1$ である. 完全グラフの場合と同様.

1.14

No. 1 点 A と $G_1 = G_2 = K^n$ を用意して, A と $G_1 \cup G_2$ の間を全部辺でつなぐと, 最小次数が n でありながら点連結度が 1 になる.

1.15

次のように定式化できる.

$$(i) \exists f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \beta \leq f(\alpha).$$

$$(ii) \forall N, \exists M, \beta \geq M \implies \alpha \geq N.$$

$$(iii) \exists g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \alpha \leq g(\beta).$$

(i) \implies (ii): $M = \max_{1 \leq i \leq N} f(i)$ とすればよい. (ii) \implies (i): (ii) の M を $f_0(N)$ とするとき, $f(N) = f_0(N+1)$ が条件を満たす ((ii) の対偶を見れば分かる).

(iii) が同値にならない例として, 例えば任意のグラフ G に対して $\beta(G) = 0$ となる β は反例になる.

1.16

頂点数 n , 最小次数 $2k$ のグラフ G が $k+1$ -辺連結の部分グラフを持たないと仮定 (※) して背理法で示す. 二分木 T と、 T の頂点を G の部分グラフに送る写像 f を考える. T と f は次の 3 つの条件を満たすとする.

- 頂点 v が木 T の根ならば $f(v) = G$.
- 頂点 v が木 T の葉ならば $f(v)$ の位数は 1.
- 頂点 v の子が p, q ならば $V(f(p))$ と $V(f(q))$ は $V(f(v))$ の分割であり, $V(f(p))$ と $V(f(q))$ 間の辺は $f(v)$ に k 個以下しか存在しない.

仮定 (※) よりこのような T と f が取れる. G を T の各葉 v に対応する $f(v)$ にするために取り去った辺は合計で高々 $k(n-1)$ 個である. 一方、仮定より辺は少なくとも kn 個ある. 従って矛盾.

1.17

題意が取りにくいけど大した問題ではない. 証明で仮定している $m > \gamma(n-k)$ という不等式が $m > cn$ の形だったらどうなるかだが, 単に最後の計算がうまくいかなくなるだけである.

証明のように H_1, H_2 をとって平均次数 $2c$ 以下だと仮定しても, $H = H_1 \cup H_2$ の平均次数が $2c$ 以下であることが従わない (頂点の数が k 減る) ので失敗する. 定数項も含めて議論することで, 頂点数 k の減少に対応しているのが本証明である.

1.18

(Hints では $G = K^{k+1}$ がギリギリであるような書かれ方がされていましたが, この証明のどこがおかしいですか?)

$b = -k + 1$ が最小であることを示す. つまり,

- $\|G\| = k|G| - k$ かつ G が k 辺連結部分グラフを持たないものが存在する.
- $\|G\| > k|G| - k$ ならば, G は k 辺連結部分グラフを持つ.

を示せばよい.

(i) は, $|G| = 1$ の場合が満たす.

(ii) を示す. $|G|$ に関する帰納法. $|G| = 1$ の場合はよい. $|G| \geq 2$ かつ $\|G\| > k|G| - k$ であるとする. G そのものが $(k+1)$ 辺連結ならば示すことはない. G が $(k+1)$ 辺連結でないとする. このとき, 空でない頂点集合 A, B であって, $V(G) = A \amalg B$ かつ $|E(A, B)| \leq k$ となるものが存在する.

$\|G\| = \|G[A]\| + \|G[B]\| + |E(A, B)| \leq \|G[A]\| + \|G[B]\| + k$ かつ $|G| = |A| + |B|$ である.

$$0 < \|G\| - k|G| + k \leq (\|G[A]\| + \|G[B]\| + k) - k(|A| + |B|) + k = (\|G[A]\| - k|A| + k) + (\|G[B]\| - k|B| + k)$$

であるから, $\|G[A]\| > k|A| - k$ または $\|G[B]\| > k|B| - k$ が成り立つ. よって帰納法の仮定より, $G[A]$ または $G[B]$ が $(k+1)$ 辺連結部分グラフを持つ. それは G の部分グラフでもあるから示された.

1.19

- (i) \implies (ii) : 一意性のみが問題. 相異なるパス P, Q があったとしてサイクルの存在を示す.

$|P|$ で帰納法をする. $P = v_0 v_1 \dots v_n$ とするとき, $v_i \in Q$ となる最小の $i \geq 1$ をとる. $i = n$ なら容易にサイクルが得られる. $P_1 = v_0 P v_i$, $P_2 = v_i P v_n$, $Q_1 = v_0 Q v_i$, $Q_2 = v_i Q v_n$ とすると, $P_1 \neq Q_1$ または $P_2 \neq Q_2$ であるから, どちらかに対して帰納法の仮定が使えてサイクルが得られる.

- (ii) \implies (iii) : 連結性はよい. $T - e$ が連結でないことを示せばよい. $e = xy$ に対して $T - e$ が連結だとすると, x やら y へのパス P が存在し, T において P, e が相異なる xy 間のパスとなって矛盾.
- (iii) \implies (iv) : $T + xy$ がサイクルを含むことは, x から y へのパスと xy を合わせたものがサイクルなので. T がサイクルを含まないことは, サイクルを含むとするとサイクルの 1 辺を除いても連結なので.
- (iv) \implies (i) : 連結性を示せばよい. x, y が隣接していないとき, $T + xy$ のサイクル C に注目. T はサイクルを含まないので C は xy を含み, x から y への T 上のパスが得られる.

1.20

頂点数 n の木グラフは $\sum_v \deg(v) = 2n - 2$ を満たすのであった. $\sum_v (\deg(v) - 2) = -2$ である. 葉の個数を k とすると, 左辺は $-k + (\Delta(G) - 2)$ 以上. $-k + \Delta(G) - 2 \leq -2$ から $k \leq \Delta(G)$ が分かる.

1.21

$\sum (\deg(v) - 2) = -2$ を使えばよい. 葉を x 個, 次数 3 以上の頂点を y 個とすると, $y - x \leq -2$ が分かる.

1.22

一般に G の連結成分の個数を $\text{comp}(G)$ と書くことにする.

$n = |F| = |F'|$ とする. 森なので $\text{comp}(F) = n - \|F\|$, $\text{comp}(F') = n - \|F'\|$ である. $F' \setminus F = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ として, $F_k = F + \{e_1, \dots, e_k\}$ とすると, $\text{comp}(F_m) \leq \text{comp}(F') < \text{comp}(F) = \text{comp}(F_0)$ なので, ある k に対して $\text{comp}(F_{k-1}) > \text{comp}(F_k)$ となる. $e = e_k$ が条件を満たす.

1.23

根を r とする.

$x \leq x$ は明らか.

$x \leq y, y \leq x \implies x = y$ を示す. $x \leq y$ とすると, して, $y \leq x \iff x = y$ を示せばよい. r から y へのパス P をとる. x は P に含まれる. よって r から x への唯一のパスは, rPx に他ならない. $y \leq x$ となるのはこれが y を含むときなので, $x = y$ の場合に限られる.

$x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$ を示す. P を r から z への唯一のパスとする. $y \leq z$ より $y \in P$. よって r から y への唯一のパスは rPy である. これと $x \leq y$ より $x \in rPy$. よって $x \in P$ なので $x \leq z$ である.

1.24

まず, 強連結な向き付けを持つならば 2 辺連結であることを示す. 2 辺連結でないとして, 強連結な向き付けがないことをいえばよい. 辺 e であって, $G - e$ が不連結なものをとる. $G - e$ の連結成分を V_1, V_2 とすると, e の向きに応じて V_1 から V_2 または V_2 から V_1 への有向歩道が存在しないのでよい.

次に, 2 辺連結ならば強連結な向き付けが存在することを示す. 適当な根 r および normal spanning tree T をひとつとり固定する. $e = xy \in E(G)$ に対して, x, y は T の順序で比較可能である. $x \leq y$ としたとき, $e \in T$ ならば x から y , $e \notin T$ ならば y から x へ向きを付ける.

この向き付けが強連結性を満たすことを示そう. 任意に頂点 $x \neq r$ をとる. r から x および x から r への有向歩道が存在することを示せばよい. r から x へは, rTx が条件を満たす. x から r への有向歩道が存在しないとする. x から有向歩道で到達可能な頂点のうち, 木順序に関する極小元 y をとる. $y \neq r$ として矛盾を導く.

y の親を z とする ($y \neq r$ より一意存在) と, 辺連結性の仮定より $G - yz$ は連結. よって y の部分木から部分木の外への yz でない辺が存在する. a を部分木の点, b を部分木外の点とすると, DFS 木の性質より b は a の先祖なので $b \leq z < y \leq a$. すると x から z への有向歩道ができる ($x \rightarrow y \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow z$) ので y の極小性に矛盾する.

1.25

頂点数の少ないグラフと好き勝手な根に対して存在が示されたとする. G の r を根とする normal spanning tree を構成する. $G \setminus \{r\}$ の連結成分を G_1, \dots, G_m とする. r と隣接する $v_i \in G_i$ を適当にとる. (G_i, v_i) に対して帰納法の仮定で normal spanning tree を作ったあと, r と各 v_i をつなげば, 条件を満たすことは容易に分かる.

1.26

DFS 木のよく知られた性質である. 探索順序を考えれば明らか.

1.27

木から葉を除いたものは再び木になることに注目すると帰納法ができる。
全部 T でつらいので、部分木は A と書いていく。

(i) $|T|$ に関する帰納法. $|T| = 1$ はよい.

葉 v をとる. 任意の $A \in \mathcal{T}$ が v を含むならよい. そうでないとする
と, v を含まない A_0 がとれて, 任意の $A \in \mathcal{T}$ に対して $A \cap A_0 \neq \emptyset$
より $A \neq \{v\}$ である. よって各 A に対して $A' = A \setminus v$ は木である.
木 $T - v$ と $\mathcal{T}' = \{A' \mid A \in \mathcal{T}\}$ に対して帰納法が使えばよい.

(ii) $|T|$ に関する帰納法. $|T| = 1$ はよい.

葉 v をとる. $A \in \mathcal{T}$ に対して $A' = A \setminus v$ とする.

(a) $\{v\} \in \mathcal{T}$ のとき. $\mathcal{T}' = \{T \in \mathcal{T} \mid v \notin T\}$ とする. $(T, \mathcal{T}, k) =$
 $(T - v, \mathcal{T}', k - 1)$ に帰納法の仮定を使う. \mathcal{T}' から $(k - 1)$ 個の
disjoint trees がとれるならば, それと $\{v\}$ を合わせたものが k
個の \mathcal{T} の disjoint trees になるのでよい. そうでないなら高々
 $(k - 2)$ 元集合 X' であって任意の \mathcal{T}' の元と交わるものが存在す
る. $X = X' \cup \{v\}$ が高々 $(k - 1)$ 元かつ任意の \mathcal{T} の元と交わる
ので示された.

(b) $\{v\} \notin \mathcal{T}$ のとき. $A \in \mathcal{T}$ に対して A' は木である. $\mathcal{T}' = \{A' \mid A \in$
 $\mathcal{T}\}$ とする. $(T, \mathcal{T}, k) = (T - v, \mathcal{T}', k)$ に対して帰納法の仮定を用
いる. k disjoint trees がとれるなら, それに対応する \mathcal{T} の trees
が条件を満たす. そうでないなら高々 $(k - 1)$ 元集合で任意の \mathcal{T}'
の元と交わるものが存在し, これが \mathcal{T}' に対しても条件を満たす.

1.28

木の中心は 1 点または隣接する 2 点である. 自己同型はこれらを保つので
よい.

1.29

Yes. 握手補題の要領で二部グラフ $G = (V_1 \amalg V_2, E)$ に対して, $\sum_{v \in V_1} \deg(v) =$
 $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ が分かる.

1.30

\implies は Prop1.6.1 より明らかな。 \impliedby を示す。

二部グラフではないとして、奇誘導サイクルの存在を示す。 Prop 1.6.1 より奇サイクルはある。奇サイクルのうち長さが最小のものをとって、これが誘導サイクルであることを示す。そうでないとするとき弦がとれて、小さなサイクルが 2 つ見つかるが、このうちどちらかが奇サイクルになるので矛盾する。

1.31

Yes. 証明する。

\implies : 隣接頂点 x, y がある頂点 z から等距離 (距離 d) だとすると、長さ $2d + 1$ の奇閉歩道できて矛盾する。

\impliedby : 二部でないとして、距離 $1, d, d$ となる 3 点対の存在を確かめる。二部グラフでないとして、奇サイクル $C = C^{2d+1}$ が存在。 $x, y, z \in C$ をそれぞれとって、 C に沿った距離が $d_C(x, y) = 1, d_C(x, z) = d_C(y, z) = d$ となるようにする。この距離が G においても最短距離であることを確認する。 y から z に距離 $k < d$ のパスがあったとする。このとき、 C の一部と合わせて長さ $k + d, k + d + 1$ の閉歩道が見つかる。どちらかは長さが C より短い奇閉歩道になる。奇閉歩道があれば奇サイクルがあるので C の最小性に矛盾。

1.32

$f(k) = 4k$ が条件を満たすことを示す。

G が $\frac{|E|}{|V|} \geq 4k$ を満たすとする。各頂点を赤、青で塗り分け $V = R \amalg B$ に対して、 $E' = \{e = xy \mid x \in R, y \in B\}$ とすると、 $G' = (V, E')$ は二部グラフである。この二部グラフであって、最も生き残る辺の数 $|E'|$ が多いものとする。

あらゆる塗り分けに対する生き残る辺の数の平均値は、 $\frac{1}{2}|E|$ である (辺ごとの生存確率を足す)。よって $|E'| \geq \frac{1}{2}|E|$ である。 G' の平均次数は $2k$ 以上。よって Prop 1.2.2 より、その部分グラフであって最小次数が k 以上のもの H が存在。 H が条件を満たす。

1.33

(i) $a \leq a$.

(ii) $a \leq b, b \leq a \implies a \cong b$.

(iii) $a \leq b, b \leq c \implies a \leq c$.

のうち, (i), (iii) については容易である. (ii) について, 有限グラフならば成り立ち無限グラフについては反例があることを示す.

G, H を有限グラフとし, 互いにマイナーであるとする. マイナーは縮約と部分グラフをとる操作と同型写像で得られ, これらは頂点と辺の個数を増加させない操作である. 有限グラフであることを使って元の個数を比べることで, $|G| + \|G\| = |H| + \|H\|$ であり, 頂点・辺が同一の縮約・部分グラフ・同型でうつりあう. 頂点, 辺の個数を変えない縮約・部分グラフは自分自身に限られるから示された.

無限グラフについて, (ii) がこわれる. 反例を作る.

$n \geq 2$ を半直線上に並べつつ, n に隣接点を n 個ずつ追加して図のようなグラフを作る. H は G の部分グラフである. H から $3, 4, 5, \dots$ の隣接点をひとつずつ削除すると G と同型な部分グラフが得られる. よって G, H は互いにマイナーである. 一方, G と H は同型でない. 例えば G には次数 3 の頂点が存在し, H には次数 3 の頂点が存在しないことから確かめられる. 反例が作れた.

1.34

ネタ問題. スターグラフで中心を 0 として, $e_i = \{0, i\}$ としたとき, $0, e_1, 0, e_2, 0, e_3, \dots$ がすべての辺を通る「パス」になる.

1.35

存在する. dfs walk が満たす.

1.36

まず $F = E(A, B)$ かつ A が非連結であるとして, 極小でないことを示す. F がより小さなカットを含むことを示せばよい.

A の連結成分のひとつを A_1 とし, $A_2 = A \setminus A_1$ とする. A_1, A_2 の間に辺が存在しないので $E(A_1, B) = E(A_1, A_2 \cup B)$, $E(A_2, B) = E(A_2, A_1 \cup B)$ が成り立ちこれらはカットである. G の連結性よりこれらは空ではない. F は F_1, F_2 に分割されることは明らか.

以上により, $E(A, B)$ がボンドならば A は連結であることが示された.

逆に, 空でない連結集合 A, B への分割に対して $F = E(A, B)$ がボンドであることを示す. F がより小さなカット $F' = E(C, D) \subset F$ を含むとする. A の点同士を含む辺は F' に含まれない. よって, A 全体が C, D でどちらかに完全に含まれる. B についても同様で, 結局 $F' = E(A, B)$ が言える.

1.37

誘導サイクルで生成される部分空間に属さないサイクル C があったとする. このうち長さ最小のものをとる. 弦をとると, C はより長さの小さいサイクル 2 つの和で書けることが分かる. 最小性の仮定からこれら 2 つのサイクルは誘導サイクルで生成され, C も誘導サイクルで生成されることになって矛盾.

測地サイクルの場合も同様.

1.38

$F_A = E(A, V \setminus A)$, $F_B = E(B, V \setminus B)$ に対して $C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ とするとき, $F_C = E(C, V \setminus C)$ が $F_A + F_B = F_C$ を満たす. 頂点を A, B に含まれるか否かで 4 種類に分類し, 両端点の種類ごとに F_A, F_B, F_C のどれに含まれるかを確認すれば証明できる.

1.39

1.40

G が連結であるとき, 適当に r をとったとき, $\{E(v) \mid v \neq r\}$ が基底であることを確かめる. カット空間は $|G| - 1$ 次元 (Thm1.9.5) なので, 線形独立性を示せばよい.

$\sum_{v \neq r} a_v E(v) = 0$ ($a_v \in \mathbb{F}_2$) を仮定する. 根に隣接する頂点 v に対して, 辺 rv カットが $E(v)$ のみであることから, $a_v = 0$ が分かる. 同様にして親から順番に係数が 0 に決まっていくことを示せる.

G が連結でないときは, 連結成分ごとに頂点 r_1, \dots, r_k を選ぶと $\{E(v) \mid v \neq r_i\}$ が基底になる.

1.41

長さ偶数のサイクルが反例．カット空間，サイクル空間の任意の元が偶数個の辺からなり，これらの空間からは偶数個の辺からなる集合しか生成されない．

1.42

$f = ab, e = cd$ とする． $T - f$ は 2 つの連結成分を持つ． A と B とする ($a \in A, b \in B$) ．

$e \in D_f = E(A, B)$ のとき． $c \in A, d \in B$ としてよい． c から a へのパス P_1 ， b から d へのパス P_2 をとると， $P_1 + f + P_2$ が T において c, d を結ぶパスである．よって $C_e = P_1 + f + P_2 + e$ である．特に $f \in C_e$ ．

$f \in C_e$ のとき． c から d への T 上のパスが f を通るので，必要があれば a, b を入れ替えることで， a と c ， b と d の間に $T - f$ 上のパスがとれる．したがって $c \in A, d \in B$ であるから $e = cd \in E(A, B) = D_f$ ．

1.43

- (i) ボンド F が，任意の全域木と交わる極小辺集合であること．

F はカットである ($G - F$ は非連結である) ことから，任意の全域木と交わることは分かる．極小性を示す． $e \in F$ として， $F - e$ と交わらない全域木の存在を示せばよい． $e \in F$ として， $F \cap T = \{e\}$ となる全域木 T の存在を示せばよい．

$F = E(A, B)$ とすると， F はボンドなので A, B は連結 (問題 1.36) ． A の全域木 T_A ， B の全域木 T_B をとって $T = T_A + T_B + e$ とすれば， T は全域木であり， $T \cap F = T \cap E(A, B) = \{e\}$ が成り立つのでよい．

- (ii) 任意の全域木と交わる極小辺集合 F が，ボンドであること．

まず $G \setminus F$ は非連結であることを示す．そうでないとすると， $G \setminus F$ の全域木 T がとれる．これは G の全域木でもあり， F と交わらないので仮定に矛盾する．

F からひとつずつ辺を捨てていくと， $G \setminus F$ の連結成分は広義単調に減少し， $F = \emptyset$ のとき連結成分ひとつであるから， $F_0 \subset F$ であって， $G \setminus F_0$ の連結成分がちょうど 2 つであるものが存在する． $G \setminus F_0$ の連結成分を $A, B \subset V$ とする． $E(A, B) \subset F_0$ である． G の任意の全域木は $E(A, B)$ の元と交わるので， F_0 と交わる． F の極小性より $F = F_0$ である．よって， A, B は連結かつ $E(A, B) \subset F$ が成り立つ．

$F_1 = E(A, B)$ はボンドであるから, (i) で示したことにより, 任意の全域木と交わる. $F_1 \subset F$ と F の極小性より $F = F_1 = E(A, B)$ である. よって問題 1.36 より, F はボンドである.

1.44

- (i) (a) カットに延長できるならば奇サイクルを含まないこと. カットが奇サイクルを含まないことを示せばよい. 任意のカットとサイクルは直交することから, カットに含まれるサイクル長は偶数に限られるのでよい.
- (b) 奇サイクルを含まないならばカットに延長できること. 奇サイクルを含まないならば二部グラフなので, ある分割 $V = A \perp B$ に対して $F \subset E(A, B)$ が成り立つ. $E(A, B)$ が求めるカットである.
- (ii) (a) サイクル空間の元に延長できるならば奇カットを含まないこと. これは (i)(a) と同様である.
- (b) F が奇カットを含まない辺集合として, F がサイクル空間の元に延長できることを示す.

A を $G - F$ の連結成分のひとつとする. $F_0 = E(A, V \setminus A)$ とすると, F_0 は F に含まれるカットであるから, 仮定により $|F_0|$ は偶数である. $\sum_{v \in A} \deg_G(v) = \sum_{v \in A} \deg_A(v) + |F_0|$ より, $\sum_{v \in A} \deg_G(v)$ は偶数. よって, A は奇点を偶数個持つ (したがって任意の連結成分はそうである).

A 内の奇点を a_1, \dots, a_{2n} とする. A は $G - F$ の連結成分であるから, F の辺を使わないパス P_i であって a_{2i-1} と a_{2i} を結ぶものが存在する. $F_A = P_1 \text{ xor } P_2 \text{ xor } \dots \text{ xor } P_n$ とする. F_A は F の辺を使っておらず, A の各頂点は奇点ならば奇数個, 偶点ならば偶数個 F_A の辺と接続する.

$G - F$ の各連結成分 A に対して上のような F_A を作って, $F_0 = E(G) \setminus (\bigcup_A F_A)$ とおく. $F_A \cap F = \emptyset$ であったから, F_0 は F を含む. さらに, 任意の $v \in V(G)$ に対して $\deg_{F_0}(v)$ は偶数である. したがって $F_0 \in \mathcal{C}(G)$ が成り立ち, これが求めるものである.

1.45

1.46

1.47

1.48

1.49

2 Matching, Covering and Packing

2.1

2.2

2.3

ベルンシュタインの定理と呼ばれる結果である。有名でありネットで簡単に手に入る証明なので、省略する。

2.4

2.5

$n = |A| = |B|$ とする。marriage condition のもと、任意の点カバリー $U = (A_U, B_U) \subset (A, B) = V$ に対して、 $|U| \geq n$ を示せばよい。カバリーであることから $N(A - A_U) \subset B_U$ が成り立つ。これと marriage condition より $|A| - |A_U| \leq |B_U|$ が成り立つので $|U| = |A_U| + |B_U| \geq |A| = n$ が分かる。

2.6

2.7

次のようにして反例が作れる。上段・下段に無限個の頂点を並べて、上段のひとつめの頂点から下段の全ての頂点に辺を張っている。

2.8

まず、Thm 2.1.2 および Cor 2.1.3 が、多重グラフについても成り立つことを確かめておく。Thm 2.1.2 は parallel edge を消してもすべての条件が保たれることから明らか。すると Cor 2.1.3 は単純グラフと全く同様に示せる。

さて集合 S の分割 $S = A_1 \amalg A_2 \amalg \cdots = B_1 \amalg B_2 \amalg \cdots$ があるとする。このとき、 $\{A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots\}$ を頂点集合とし、各 $x \in A_i \cap B_j$ を A_i と B_j を結ぶ辺として多重二部グラフ G ができる。分割が k 集合への分割であ

るとき、 G は k 正則二部グラフである。これは Cor 2.1.3 の多重グラフ版より 1-factor を含む。これが共通の代表系を与える。

2.9

各 A_i に対して、 d_i 個の頂点 $A_i^{(j)}$ を作る。 $x \in A_i$ と $A_i^{(j)}$ を結ぶ (j に関しては同じ結び方になっている) ことで二部グラフを作る。このグラフの完全マッチングができれば、マッチングにおいて $A_i^{(j)}$ たちと隣接する頂点全体を D_i とすることで欲しいものが得られる。よって完全マッチングの存在を示せばよい。そのためには marriage condition を確かめればよい。

marriage condition を考える際、 $A_i^{(j)}$ の形の頂点は、1 つ以上含むならば全て含むとしてよい。その場合の marriage condition が不等式 $\left| \bigcup_i A_i \right| \geq \sum_i d_i$ に対応する。

2.10

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。

証明 1 $\emptyset \subset \{a_1\} \subset \{a_1, a_2\} \subset \dots \subset \{a_1, \dots, a_n\} = X$ の形の鎖は $n!$ 個ある。

A を反鎖とする。 $S \subset A$ に対して、 S を通る極大鎖 (上の形の鎖) 全体を $f(S)$ とする。反鎖より $S, T \in A$ ($S \neq T$) に対して $f(S) \cap f(T) = \emptyset$ である。特に $\sum_{S \in A} |f(S)| \leq n!$ が分かる。

$|f(S)| = |S|!(n - |S|)! = \frac{n!}{\binom{n}{|S|}} \geq \frac{n!}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}$ であるから $\sum_{S \in A} \frac{n!}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leq n!$ となって、 $|A| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ を得る。

証明 2 (「離散数学への招待」による鎖の構成) $S \subset X$ に対して、文字列 $f(S)$ を対応させる。 i 文字目に、 $i \in S$ であるか否かに応じて $(,)$ をあてる。

S	$f(S)$
2, 3, 5, 9) ((())) (()))
2, 3, 5, 9, 12) ((())) (()) (
2, 3, 5, 9, 11, 12) ((())) (() ((
2, 3, 5, 8, 9, 11, 12) ((())) (() ((
1, 2, 3, 5, 8, 9, 11, 12	(((())) (() ((

$f(S)$ における括弧が対応つく部分・対応のつき方が同一であるような S を集める。括弧列の対応箇所、対応方法を固定した場合、 $f(S)$ の残りの部分の選択肢は $))) \dots (((((\dots ($ のように、2 種の括弧の境界をどこに置くかしかない。よって鎖になること、また S として $k, k+1, \dots, n-k$ 元集合がひとつずつ含まれることが分かる。

特に、任意の鎖が $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 元部分集合を唯一含むような鎖に分解できた。

2.11

$S \subset A$ を任意にとる．次の不等式が成り立つ：

$$|S| = \sum_{e=ab \in E(S, N(S))} \frac{1}{\deg(a)} \leq \sum_{e=ab \in E(S, N(S))} \frac{1}{\deg(b)} \leq |N(S)|$$

1 つめの等号は， a を含む e が $\deg(a)$ 個あることから．2 つめの不等号は問題の仮定．3 つめの不等号は，1 つめの等号と同様である（ $A \setminus S$ と $N(S)$ の辺があるかもしれないので，等号ではなく不等号である）．

marriage condition を確かめられたので示された．

2.12

- (i) 最大マッチングが安定マッチングとならない二部グラフ： $V = \{a, b, x, y\}$, $E = \{ax, bx, by\}$ として， $x >_b y, b >_x a$ とすればよい．
- (ii) 安定マッチングの存在しないグラフの例：3 頂点の完全グラフの頂点集合を $\{a, b, c\}$ とし， $b <_a c, c <_b a, a <_c b$ とすればよい．

2.13

2.14

2.15

2.16

2.17

2.18

2.19

2.20

2.21

Tutte condition に矛盾させようとする例例えば以下のような例が作れる．

2.22

2.23

2.24

2.25

2.26

2.27

2.28

2.29

2.30

2.31

2.32

2.33

2.34

2.35

2.36

2.37

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に順序 \leq を, $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \iff x_1 \leq y_1$ かつ $x_2 \leq y_2$ により定める.

反鎖 A をひとつとりにおいて第 1 成分が最小のものを (x_1, x_2) とすると, $(y_1, y_2) \in A$ に対して $y_2 < x_2$ が成り立つ. 特に第 2 成分としてありうる値は有限通り. また同一の第 2 成分を持つ点は高々ひとつしかないので, $|A| < \infty$ が分かる.

k を定数として k 元からなる反鎖 $\{(x, y) \mid x + y = k + 1\}$ を考えることで, k 個未満の鎖で被覆できないことも分かる.

3 Connectivity

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

3.6

3.7

3.8

3.9

3.10

3.11

3.12

3.13

3.14

3.15

3.16

3.17

3.18

3.19

3.20

3.21

3.22

3.23

3.24

3.25

20

3.26

3.27

3.28

3.29

4 Planar Graphs

4.1

n 番目の頂点を (n, n^2, n^3) に配置すればよい.

4.2

4.3

4.4

定理 2.4.3 という強力な定理があるのでそれを使う. $U \subset V[G]$ に対して $\|G[U]\| \leq 3(|U| - 1)$ を示せばよい. $G[U]$ も平面グラフであるから, G を $G[U]$ に取り換えることで, $\|G\| \leq 3(|G| - 1)$ を示せばよい. 系 4.2.10 よりよい.

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

4.13

4.14

4.15

4.16

4.17

4.18

No.

$V(G) = \{u, v, w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $E(G) = \{uw_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{vw_i \mid 1 \leq i \leq 4\}$ とすればよい. Euler の公式より 4 つの面ができる. 線分 uv を内部または境界に含む面は高々 2 つである. この 2 面以外は凸になりえない. 外面を除いても, 1 つは凸でない多角形ができてしまう.

4.19

4.20

4.21

4.22

4.23

4.24

二部グラフであれば任意のサイクルは偶数長なので, 当然各面は偶数角形. 逆に任意の面が偶数角形であるとする. サイクル空間は, 面で生成されるのであったから, 任意のサイクルの長さは偶数, したがって二部グラフになる.

4.25

4.26

4.27

4.28

4.29

4.30

4.31

4.32

4.33

4.34

4.35

4.36

4.37

4.38

4.39

4.40

4.41

4.42

5 Colouring

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

$V = \{1, 2, \dots, 2n\}$ とする.

- $2n-1$ と $2n$ の間には辺を張らない.
- その他の奇数・偶数の間には辺を張る.

としてグラフ G を作る.

貪欲アルゴリズムによって, 頂点 v は色 $\lceil \frac{v}{2} \rceil$ で塗られることが順に確かめられるので, これが反例である.

5.6

5.7

単純な計算問題.

$\max\{\delta(H) \mid H \subset G\} + 1 \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2\|G\| + \frac{1}{4}}$ を示せばよい. H をひとつ固定して, $\delta(H) + 1 \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2\|G\| + \frac{1}{4}}$ を示せばよい. $\delta(H) + 1 \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2\|H\| + \frac{1}{4}}$ を示せばよい.

$\delta = \delta(H)$ とする. $|H| \geq \delta + 1$ であるから $\|H\| \geq \frac{1}{2}\delta(\delta + 1)$ である. これを代入して計算すればよい.

5.8

5.9

5.10

前半の主張を示す. k を任意にとる. $d(G) \geq \frac{2}{k} \implies \text{col}(G) \geq k$ を示す. 命題 1.2.2 より $\delta(H) > \frac{\|G\|}{|G|} = \frac{1}{2}d(G) \geq k$ となる G の部分グラフ H が存在. $\text{col}(G) \geq \delta(H) + 1 > k$ となるので示された.

後半の主張を示す. $d(G) \geq k \implies \chi(G) \geq 3$ となる k の非存在を示せばよい. 完全二部グラフ $K_{k+1, k+1}$ がこれを満たすので示された.

5.11

5.12

5.13

5.14

頂点数 $n+1$ のスターグラフを G とすると $\text{col}(G) = 2$ かつ $\Delta(G) = n$ である.

5.15

5.16

(i) \implies (iii) k 色以下の彩色 c をとり, 辺 $e = uv$ の向きを, $c(u) < c(v)$ であるか否かによって u から v , v から u と定めれば, 条件を満たすことは容易に確かめられる.

(iii) \implies (ii) 自明.

(ii) \implies (i) (ii) の向き付けを固定し, G は有向グラフであるとして扱う. $H \subset G$ を, G の部分グラフかつ DAG であるもののうち極大なものとする.

H の topological 順序 (v_1, v_2, \dots) をひとつ固定する. 次の要領で貪欲に着色 c を構成する:

$$c(v) = \max\{c(u) \mid uv \in H\} + 1.$$

ただし, u が存在しない場合には $c(v) = 0$ とする.

次の性質が容易に確かめられる:

(a) $uv \in H \implies c(u) < c(v)$.

(b) $c(v) > 1 \implies \exists u, uv \in H, c(v) = c(u) + 1$.

性質 (b) より, 各頂点 v に対して v を終点とする長さ $c(v)$ の有向パスが存在する. (ii) の仮定より $c(v) < k$ である. よって着色 c は k 色以下からなる. これが彩色であることを確かめればよい.

性質 (a) より, H に含まれる有向辺 uv については端点の色は異なる. $uv \in E(G) \setminus E(H)$ とする. H の極大性より, 有向 vu パスが存在する. したがって性質 (a) より $c(v) < c(u)$ であるからこの場合も u, v の色は異なる. 以上により示された.

5.17

5.18

5.19

5.20

5.21

$K_{n,n}$ の n 辺彩色の構成と等価である.

5.22

系 2.1.3 を繰り返し使って, k 個の 1-factor に分解できる. それぞれの 1-factor にひとつの色をあてればよい.

5.23

5.24

$\chi(G) = k$ かつ三角形を含まないグラフ G をもとにして, $k+1$ の場合のそれを作る. $G = \{v_1, \dots, v_n\}$ とする.

\overline{G} を以下のようにつくる:

- $V(\overline{G}) = \{v_1, \dots, v_n\} \amalg \{u_1, \dots, u_n\} \amalg \{w\} = V \amalg U \amalg \{w\}$.
- V の頂点間は, G と同様に辺を張る.
- $v_i v_j \in E(G)$ であるか否かにしたがって, $v_i u_j$ に辺を張る・張らない.
- U の頂点間には辺を張らない.
- V と $\{w\}$ の間には辺を張らない.
- 任意の $u \in U$ に対して u と w の間に辺を張る.

☒ !

次を示せばよい.

(a) \overline{G} は三角形を含まない.

(b) $\chi(\overline{G}) \leq k+1$.

(c) $\chi(\overline{G}) \geq k+1$.

(a) の証明 w は U の点としか隣接せず, U の点どうしは隣接しないので, w を含む三角形は存在しない. G に対する仮定より, V の点だけからなる三角形は存在しない. また, U の点同士は隣接しない. よって, $v_i v_j u_k$ の形の三角形が存在しないことを示せばよい ($v_i, v_j \in V, u_k \in U$). $v_i v_j u_k$ が \overline{G} の三角形であるとする, $v_i v_j v_k$ は G の三角形となるので示された.

(b) の証明 $c: G \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ を G の k 彩色とする. $\bar{c}: \overline{G} \rightarrow \{1, 2, \dots, k+1\}$ を次のようにつくる: $\bar{c}(v_i) \bar{c}(u_i) = c(v_i)$, $\bar{c}(w) = k+1$. これが彩色になることは容易に確かめられる.

(c) の証明 $\bar{c}: \overline{G} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ を k 彩色が存在したと仮定. $\bar{c}(w) = k$ としよ. $c(v_i) = \begin{cases} \bar{c}(v_i) & (\bar{c}(v_i) \neq k) \\ \bar{c}(u_i) & (\bar{c}(v_i) = k) \end{cases}$ により $c: G \rightarrow \{1, 2, \dots, k-1\}$ を定めると, G の彩色になる. $\chi(G) = k$ に矛盾.

参考: Mycielski, J. (1955), “Sur le coloriage des graphes”, Colloq. Math. 3: 161–162.

5.25

5.26

5.27

$|G|$ について帰納法. G の次数 5 以下の頂点 v が存在する. $G-v$ について示されたとして, G について示せばよい. $G-v$ をまず彩色して, 最後に v を彩色すればよい.

5.28

5.29

5.30

5.31

5.32

5.33

5.34

5.35

5.36

5.37

5.38

5.39

5.40

5.41

5.42

5.43

5.44

5.45

5.46

5.47

5.48

5.49

6 Flows

6.1

6.2

6.3

6.4

6.5

6.6

6.7

6.8

6.9

6.10

6.11

6.12

6.13

6.14

6.15

6.16

6.17

6.18

6.19

6.20

6.21

6.22

6.23

6.24

6.25

7 Extremal Graph Theory

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

7.13

7.14

7.15

7.16

7.17

7.18

7.19

7.20

7.21

7.22

7.23

7.24

7.25

30

7.26

7.27

7.28

7.29

8 Infinite Graphs

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

8.12

8.13

8.14

8.15

8.16

8.17

8.18

8.19

8.20

8.21

8.22

8.23

8.24

8.25

31

8.26

8.27

8.28

8.29

9 Ramsey Theory for Graphs

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

9.10

9.11

9.12

9.13

9.14

9.15

9.16

9.17

9.18

9.19

9.20

9.21

9.22

10 Hamilton Cycles

10.1

10.2

10.3

10.4

10.5

10.6

10.7

10.8

10.9

10.10

10.11

10.12

10.13

10.14

10.15

10.16

11 Random Graphs

11.1

11.2

11.3

11.4

11.5

11.6

11.7

11.8

11.9

11.10

11.11

11.12

11.13

11.14

11.15

11.16

11.17

11.18

11.19

11.20

12 Graphs Minors

12.1

12.2

12.3

12.4

12.5

12.6

12.7

12.8

12.9

12.10

12.11

12.12

12.13

12.14

12.15

12.16

12.17

12.18

12.19

12.20

12.21

12.22

12.23

12.24

12.25

35

12.26

12.27

12.28

12.29