

実験レポート P3

東京大学工学部電気電子工学科 03210517

藤田誠之

April 6, 2021

1 実験方法

- (1) LTSpice のインストールし、使い方を習熟する
- (2) Butterworth 特性と Chebyshev 特性を持つように図 1 における L1, L2 の値を決定する
- (3) 周波数変換及びインピーダンススケーリングを行い低域通過フィルタを設計し、回路シミュレーションで振幅特性、位相特性、ステップ応答の伝達特性を調べる
- (4) 規格化低域通過フィルタを基準として広域通過フィルタを設計し伝達特性をシミュレーションする
- (5) 規格化低域通過フィルタを基準として中心周波数および帯域幅通過フィルタを設計し伝達特性をシミュレーションする

2 考察・検討

- (1) Butterworth 特性と Chebyshev 特性の LPF の周波数特性を比較せよ

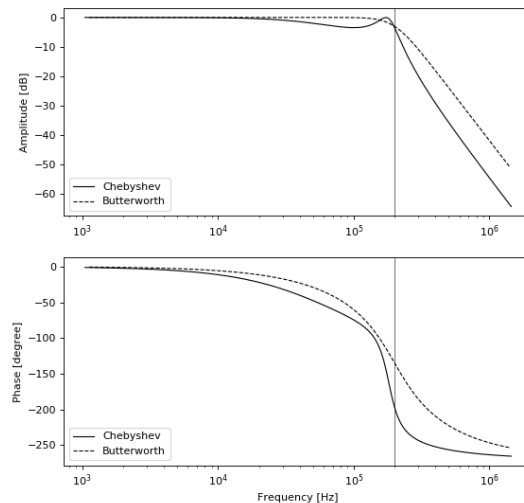


Figure 1: LPF Frequency Response (Butterworth & Chebyshev)

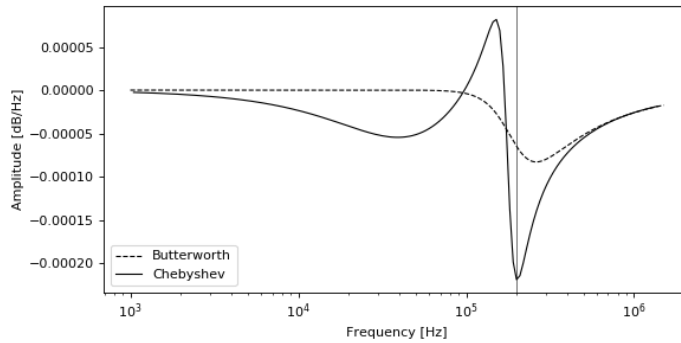


Figure 2: LPF Frequency Response Differential(Butterworth & Chebyshev)

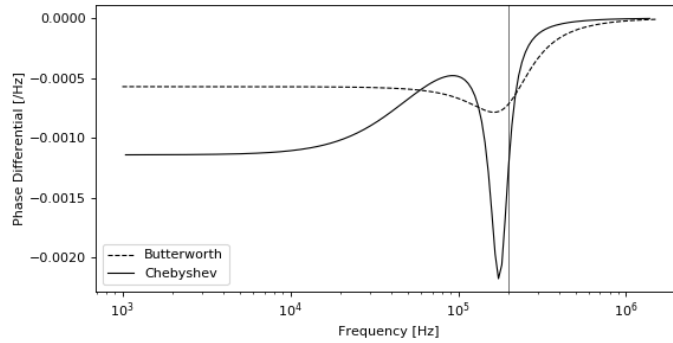


Figure 3: LPF Frequency Response Differential(Butterworth & Chebyshev)

実験結果は上図のようになった。カットオフ周波数は200kHzとして設計をした。Figure 2はFigure 1の振幅のデータを微分したものである。Figure 2を見ると、Butterworthフィルタは0.0を超えていないことがわかる。つまり、Butterworthフィルタでは周波数が増えるにつれ単調減少しているということがわかる。一方、Chebyshevフィルタでは一度減少した後、200kより手前で増加に転じ、0に近づいたあと再び減少している。両者とも、200kを超えてからは、両対数グラフにおいて直線に近似できるが、Butterworthフィルタの方が振幅の減少が遅いこともわかる。さらに、Figure 2を見ると、200kHzにおいて振幅の微分が減少していることがわかるが、これはFigure 1の振幅のグラフにおいて通過域から遮断域へ移るときの「角の強さ」を表していると考えることができる。ButterworthフィルタとChebyshevフィルタを比較すると、Chebyshevフィルタのほうに急激に微分が減少している、つまり切り替わりがより急であるということである。また、Figure 3は位相特性を微分したものであるが、200k付近で位相が急激に変化していることが分かる。この変化はChebyshevフィルタの方が強いということも分かる。

また、以下のようなグラフも作成した。

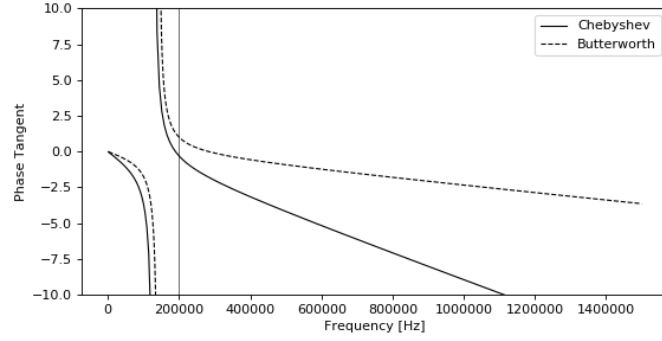


Figure 4: LPF Frequency Response Differential(Butterworth & Chebyshev)

これは、位相の tangent の値をプロットしたものである。周波数が 200kHz を超えたところで直線となっている。何かしら意味があるのかと思うが、レポートの提出期限までにはわからなかった。

- (2) 3 次の LPF は、高周波における伝達関数が $1/s^3$ で近似できるはずである。振幅特性、位相特性からこのことを確認せよ。

今回の LPF の回路図は以下のようになる。

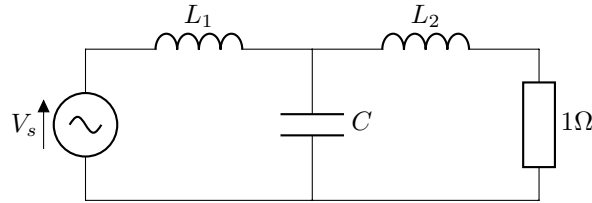


Figure 5: 3 次規格化 0-R 型 LPF

伝達関数を計算すると以下のようになる。

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{s^3 L_1 L_2 C + s^2 C L_1 + s(L_1 + L_2) + 1} (= F(s))$$

Butterworth については $L_1 = 1.5, L_2 = 0.5, C = 1.333$ 、Chebyshev については $L_1 = 2.158, L_2 = 1.123, C = 1.833$ と求まる。また、伝達関数は、Butterworth については $F(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$ 、Chebyshev については $F(s) = \frac{1}{4.44s^3 + 2.424s^2 + 3.991s + 1}$ で表されるが、カットオフ周波数以上でのグラフの傾きを算出した。200kHz 以上のデータを使い、周波数の値の底 10 の対数をとった値を独立変数、振幅の値 (dB) を従属変数とし、最小 2 乗法を用いて算出した。結果は、Butterworth フィルタと Chebyshev フィルタでそれぞれ以下のようになった。

Butterworth	-2.9165
Chebyshev	-3.3836

Table 1: LPF Frequency Response Slope

両対数グラフでの傾きは、関数の指数を表すため、3 次の LPF において高周波数では伝達関数が $1/s^3$ と近似すると Butterworth フィルタでは 2.783%, Chebyshev フィルタでは 12.7% の誤差率で近似できているということが分かる。Butterworth フィルタの伝達関数を $s = \infty$ でテイラー展開すると、

$$\frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

となるため、 s が十分大きければ伝達関数 $\frac{1}{s^3}$ で近似できると考えることができる。Chebyshev フィルタについても同じである。

- (3) Butterworth 特性と Chebyshev 特性の LPF のステップ応答を比較せよ。周波数特性の違いはステップ応答のどこに現れているか論ぜよ。

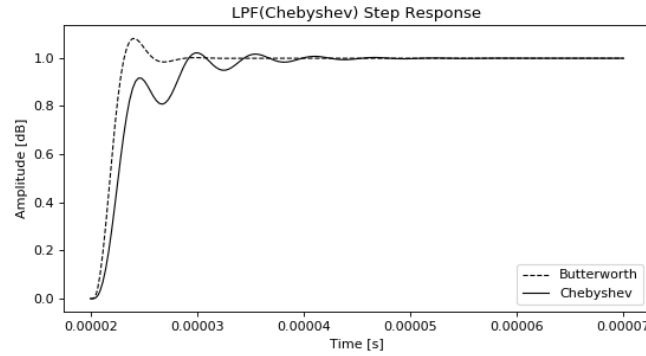


Figure 6: LPF Step Response (Butterworth & Chebyshev)

LPF に方形波を入力した場合の出力は振動する。上の Figure 6 が Butterworth フィルタと Chebyshev フィルタのステップ応答である。グラフを比較すると、Chebyshev フィルタの方が Butterworth フィルタに比べて振動が多いことが分かる。Butterworth フィルタはオーバーシュートした後に比較的速やかに収束している。一方、Chebyshev フィルタは振動を複数回繰り返してから収束しており、Butterworth フィルタより収束が遅いように見受けられる。

- (4) HPF の設計

Butterworth, Chebyshev を用いて HPF を設計した。 H_{cutoff} が 200kHz となるように設計し、LPF と同様に周波数応答とステップ応答を記録した。回路図と結果はそれぞれ以下になった。

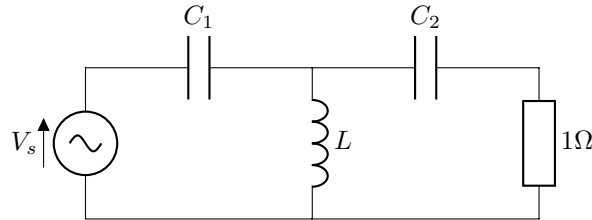


Figure 7: 3次規格化 0-R 型 HPF

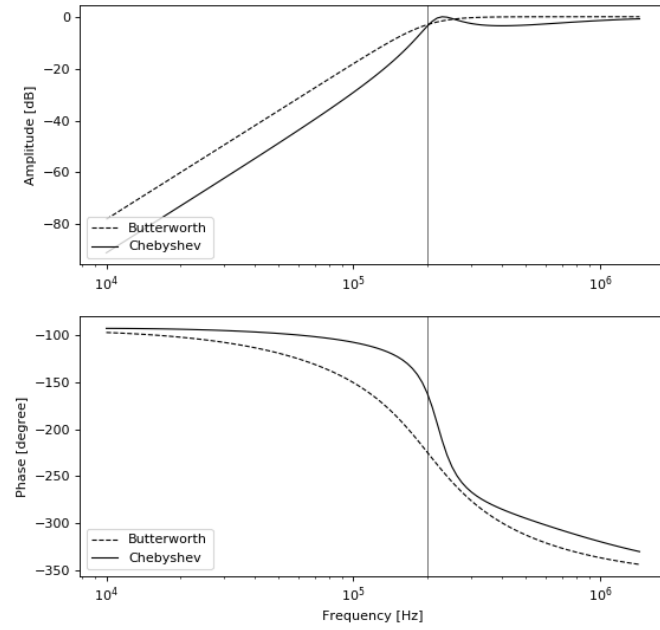


Figure 8: HPF Frequency Response (Butterworth & Chebyshev)

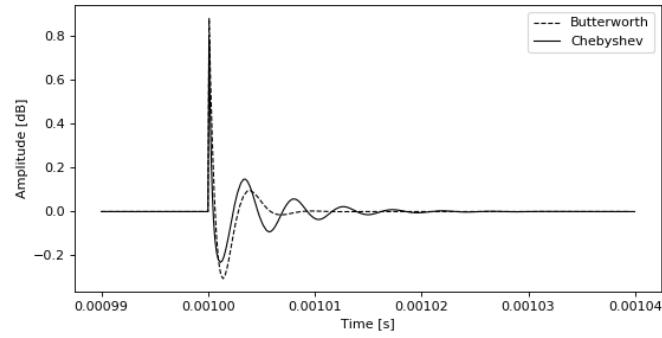


Figure 9: HPF Step Response (Butterworth & Chebyshev)

200kHz 未満の傾きを調べると、以下ようになった。

Butterworth	2.9558
Chebyshev	3.2232

Table 2: HPF Frequency Response Slope

このことから、伝達関数がどちらも低周波数域では s^3 で近似できるということが分かる。実際、伝

達関数を計算すると

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{sC_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{sL} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{sC_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{s^2LC_1} & \frac{1}{sC_2} \left(1 + \frac{1}{s^2LC_1}\right) + \frac{1}{sC_1} \\ \frac{1}{sL} & \frac{1}{s^2LC_2} + 1 \end{pmatrix}$$

$$F(s) = \frac{s^3 LC_1 C_2}{s^3 LC_1 C_2 + s^2 L(C_1 + C_2) + sC_2 + 1}$$

これを $s = 0$ でテイラー展開すると

$$F(s) = As^3 + O(s^4) \quad (A \text{ は定数})$$

となるので、 s が十分小さければ伝達関数は s^3 で近似できることが分かる。

(5) BPF の設計

Butterworth, Chebyshev を用いて BPF を設計した。BPF の回路図は以下になる。

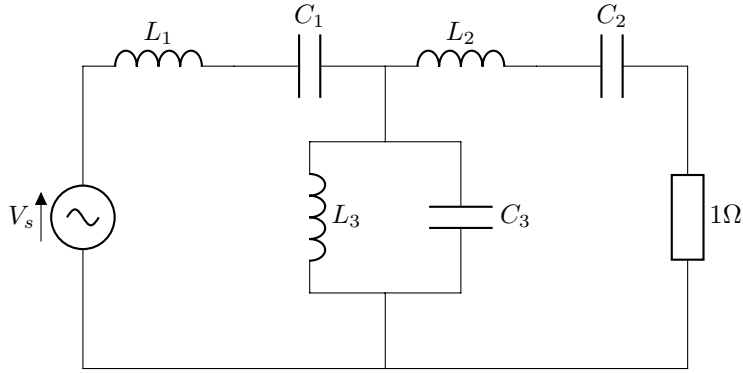


Figure 10: 3次規格化 0-R 型 HPFD

周波数応答とステップ応答は以下の図のようになった。

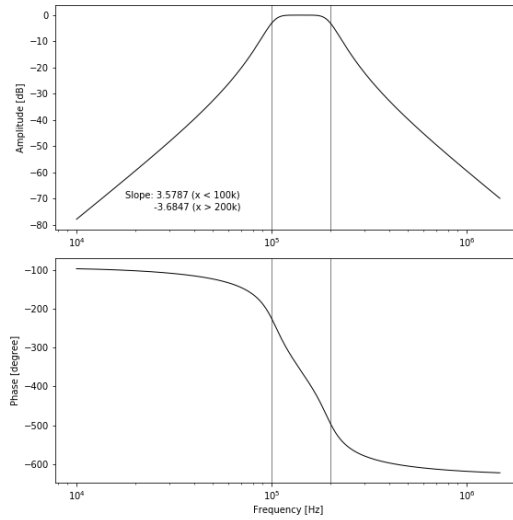


Figure 11: BPF Response (Butterworth)

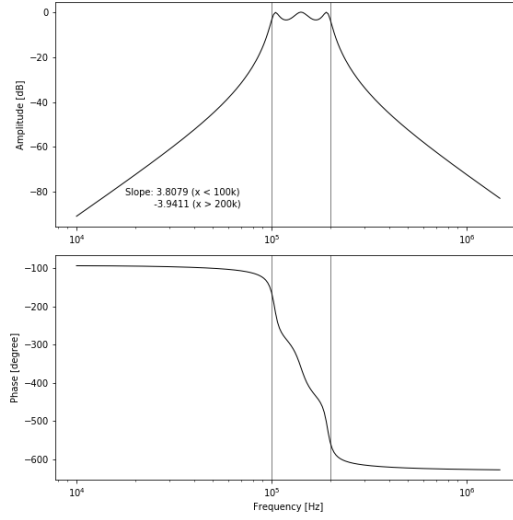


Figure 12: BPF Response (Chebyshev)

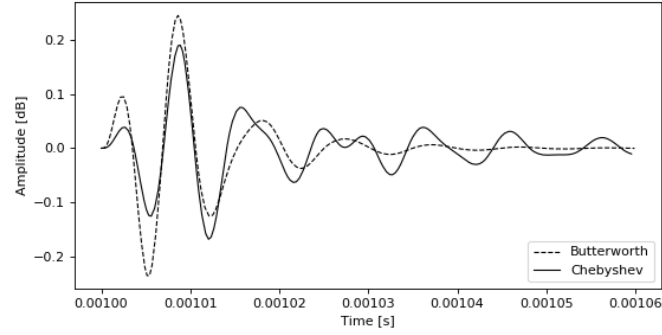


Figure 13: BPF Response (Chebyshev)

	$\leq 100kHz$	$\geq 200kHz$
Butterworth	3.5787	-3.6847
Chebyshev	3.8079	-3.9411

Table 3: LPF Frequency Response Slope

振動や応答については、LPF と HPF と似たような動き、つまり Butterworth フィルタに比べて Chebyshev フィルタは振動が多く、また傾きが大きいということが分かる。また、ステップ応答に関しては、Butterworth フィルタのほうがオーバーシュートが大きかった。伝達関数を計算すると、適当な係数を用いて $F = a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 + a_5s^{-1} + a_6s^{-2} + a_7s^{-3}$ と表すことができる。つまり、低周波数領域では $F(s) = s^3$ と近似でき、高周波数領域では $F(s) = s^{-3}$ と近似できることが分かる。実際、傾きを調べるとおおよそこの近似が成り立っていることが分かる。

(6) BEF の設計

Butterworth と Chebyshev を用いて BEF フィルタを設計した。周波数応答、ステップ応答は以下の通りになった。

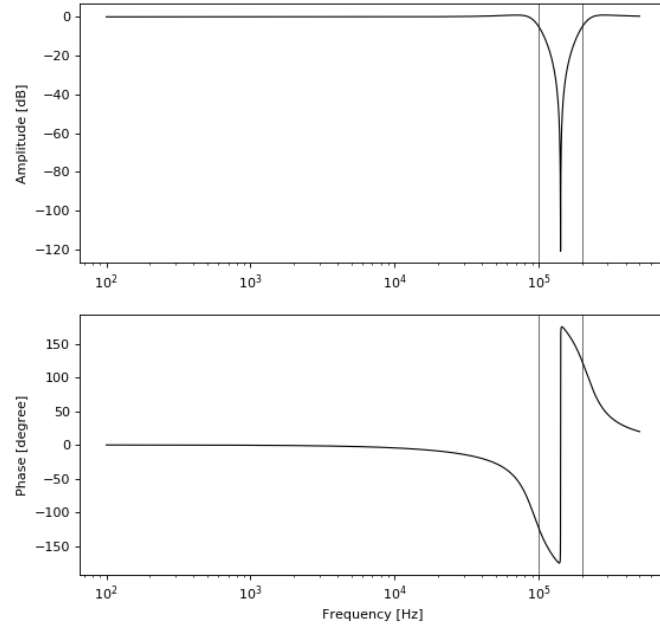


Figure 14: BPF Frequency Response (Butterworth)

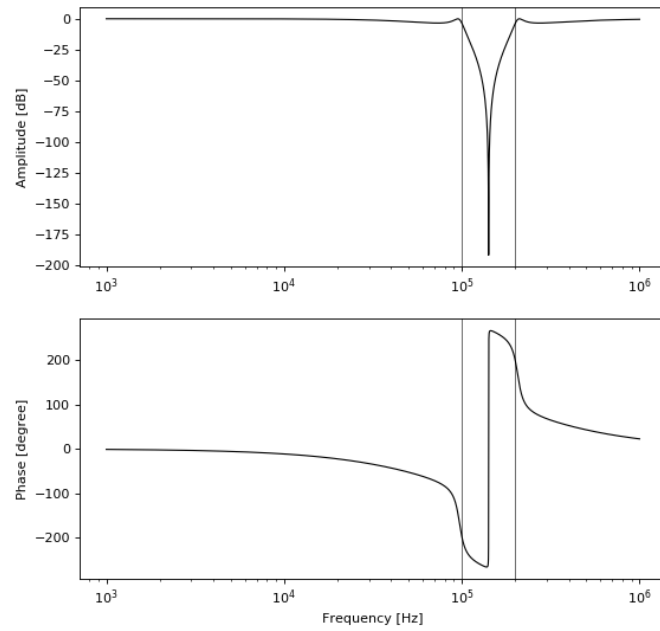


Figure 15: BPF Frequency Response (Chebyshev)

周波数応答では、100kHz から 200kHz までのバンドの信号が弱まっていることが分かる。また、中間の 150kHz 付近で位相が大きく（約 360 度）変化していることも分かる。ステップ応答では Butterworth フィルタがオーバーシュートしていることが分かる。

3 参考文献

『計測とフィルタ（その 2：フィルタの周波数特性と波形応答）』 <https://www.orixrentec.jp/helpful_info/detail.html?id=43> 2020 年 4 月 14 日アクセス