

Some Proof of Logic

1. $\vdash_{INT} (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \rightarrow \neg B}^{(1)}}{\neg B, B} i\bot \quad \frac{\perp}{\neg A} i\neg(2)}{B \rightarrow \neg A} i\rightarrow(3) \quad \overline{A}^{(2)}}{e\rightarrow} \quad \frac{}{i\rightarrow(1)}$$

2. $\vdash_{INT} A \rightarrow \neg\neg A$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A}^{(1)}}{\neg\neg A} i\bot \quad \frac{\perp}{\neg A} i\neg(2)}{A \rightarrow \neg\neg A} i\rightarrow(1) \quad \overline{\neg A}^{(2)}}{e\rightarrow}$$

$\nVdash_{INT} \neg\neg A \rightarrow A$ but $\nVdash_{CL} \neg\neg A \rightarrow A$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\neg\neg A}^{(1)}}{A} e\neg(2) \quad \overline{\neg A}^{(2)}}{i\bot} \quad \frac{\perp}{\neg\neg A \rightarrow A} i\rightarrow(1)}{\text{Problem for INT}}$$

3. 49.b $\vdash_{INT} \neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$

$\vdash \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\neg A}^{(1)}}{\neg\neg\neg A} i\bot \quad \frac{\perp}{\neg\neg A} i\neg(2)}{\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A} i\rightarrow(1) \quad \overline{\neg\neg A}^{(2)}}{e\rightarrow}$$

$\vdash \neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\neg\neg\neg A}^{(1)}}{\neg A} RD \text{ (ex. 2)} \quad \frac{\perp}{\neg\neg\neg A} i\bot}{\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A} i\rightarrow(2) \quad \overline{\neg A}^{(2)}}{e\rightarrow}$$

4. 50 a. $\neg(A \leftrightarrow \neg A)$

$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{(A \rightarrow \neg A) \wedge (A \leftarrow \neg A)}}{A \rightarrow \neg A} \quad (1) \quad e\wedge \quad \overline{A} \quad (2) \quad e\rightarrow \\
\frac{\neg A, A}{\perp} i\perp \quad \frac{\perp}{\neg A} i\neg(2) \quad \frac{\overline{\neg A, A}}{\perp} i\perp \quad \frac{\perp}{\neg A} i\neg(2) \quad \frac{\overline{\neg A \rightarrow A}}{A} i\perp \quad (1) \quad e\rightarrow \\
\frac{\perp}{\neg(A \leftrightarrow \neg A)} i\neg(1)
\end{array}$$

5. 63. De Morgan: $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

←

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\neg A \wedge \neg B}^{(1)} e\wedge}{\overline{\neg A}}^{(2)} \quad \overline{A}^{(3)} i\perp}{\perp} \quad \frac{\frac{\overline{\neg A \wedge \neg B}^{(1)} e\wedge}{\overline{\neg B}}^{(4)} \quad \overline{B}^{(4)} i\perp}{\perp} e\vee(3)(4)}{\frac{\perp}{\neg(A \vee B)} i\rightarrow(2)} i\rightarrow(1)$$