# Calcolo Numerico

Massimo Nocentini

November 30, 2009
Firenze
release 0.3

# Contents

# Chapter 1

# Errori ed aritmetica finita

## 1.1 Errori di discretizzazione

Questi errori sorgono tutte le volte che si vuole modellare un problema matematico (formulato nel continuo) con un sistema discreto. Per ottenere questo uso dei processi di discretizzazione, dei quali mi interessa controllare quanto "bene" approssimano il problema che voglio modellare.

Più specificamente, l'errore di troncamento *locale* corrisponde all'errore introdotto nel passo di integrazione corrente assumendo esatto il valore di partenza, mentre l'errore di troncamento *globale* rappresenta l'effetto di tutti gli errori precedenti.

Per i seguenti due esercizi si utilizza la formula di Taylor-Peano, con il resto "infinitesimo di ordine superiore" rispetto al massimo grado $n$ a cui si arresta lo sviluppo e quindi consente di ottenere una approssimazione locale, cioè in un intorno di $x_0$.

**Exercise 1.1.1** (1.1). *Sia* $x = \pi \approx 3.14159265$. *Considero come valore approssimato* $\tilde{x} = 3.1415$.

*Calcolare il corrispondente errore relativo*[1] $\varepsilon_x$.

*Verificare che il numero di cifre decimali corrette nella rappresentazione approssimata di* $x$ *mediante* $\tilde{x}$ *all'incirca è dato da* $-\log_{10}|\varepsilon_x|$.

Ottengo

$$\varepsilon_x = \frac{\tilde{x} - x}{x} = -2.9491 * 10^{-5}$$

Adesso considero

$$-\log_{10}|-2.9491 * 10^{-5}| = -\left(\log_{10} 2.9491 + \log_{10} 10^{-5}\right) = -\log_{10} 2.9491 + 5\log_{10} 10 \approx 4.53$$

Voglio dimostrare che $-\log_{10}|\varepsilon_x|$ dá il numero di cifre decimali di $\tilde{x}$, con cui approssimo $x$.

[1] Dá l'ordine di grandezza rispetto alla base 10

*Proof.* Scrivo in forma normalizzata:

$$x \in \mathbb{R}, x \geq 0, x = m * 10^e, 1 \leq m < 10$$
$$\tilde{x} \in \mathbb{R}, \tilde{x} \geq 0, \tilde{x} = M * 10^e, 1 \leq M < 10$$

Adesso voglio trovare sia una maggiorazione che una minorazione dell'errore relativo per avere $r$ cifre esatte:

$$|\varepsilon_x| = \left| \frac{(M-m) * 10^e}{m * 10^e} \right|$$
$$10^{-r-1} \leq |\varepsilon_x| < 10^{-r+1}$$

[2] Passo ai logaritmi:

$$-r - 1 \leq \log_{10} |\varepsilon_x| < -r + 1$$
$$r + 1 \geq -\log_{10} |\varepsilon_x| > r - 1$$

Considero le due disuguaglianze per avere l'intervallo di variazione di $r$:

$$-1 - \log_{10} |\varepsilon_x| \leq r < 1 - \log_{10} |\varepsilon_x|$$

□

**Exercise 1.1.2** (1.2)**.** *Dimostrare che, se $f(x)$ è sufficientemente regolare e $h > 0$ è una quantità piccola, allora:*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + O(h^2),$$
$$\frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0) + O(h^2)$$

Per entrambe considero gli sviluppi di Taylor di $f(x_0 + h)$ e $f(x_0 - h)$:

$$T(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + \frac{f'''(x_0)h^3}{6} + O(h^4)$$
$$T(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} - \frac{f'''(x_0)h^3}{6} + O(h^4)$$

Devo prestare attenzione al segno di alcuni termini dello sviluppo [3]

- nel primo sviluppo, la combinazione lineare ammette tutti segni positivi in quanto il passo di discretizzazione è positivo, ovvero si cerca di approssimare con valori $> x_0$.

[2]describe this step

[3]Attenzione: nello sviluppo di Taylor di una funzione $f(x)$, le derivate $n$-esime vengono calcolate nel punto $x_0$ in cui si vuole centrare lo sviluppo, e non nell'argomento della funzione

- nel secondo invece, il fattore $((x - x_0)(= h))^k < 0, \forall k = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$ fa si che i termini dello sviluppo di grado dispari siano negativi, in quanto si sta discretizzando con un valore minore a $x_0$, di conseguenza $x - x_0 < 0$.

Sottraendo termine a termine e semplificando dove possibile ottengo la prima equazione:

$$T(x_0 + h) - T(x_0 - h) = 2f'(x_0)h + \frac{f'''(x_0)h^3}{3} + O(h^4)$$

dividendo per $2h$:

$$\frac{T(x_0 + h) - T(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{f'''(x_0)h^2}{3} + O(h^3)$$

Osserviamo che, per $h \to 0$, la quantità $O(h^3)$ diminuisce più velocemente del termine

$$\frac{f'''(x_0)h^2}{3}$$

per cui possiamo dedurre che si approssima la derivata prima con una quantità $O(h^2)$.

Per la seconda equazione invece che sottrarre termine a termine, sommiamo, ottenendo:

$$T(x_0 + h) + T(x_0 - h) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + O(h^4)$$
$$\frac{T(x_0 + h) - 2f(x_0) + T(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0) + O(h^2)$$

ovvero la quantità al primo membro approssima la $f''(x_0)$ con un errore dell'ordine $O(h^2)$.

**Exercise 1.1.3.** *Riferendosi all'esercizio precedente, dimostrare le stesse richieste, usando come passi di integrazione due quantità $w, k > 0, w \neq k$.*

## 1.2 Errori di convergenza

**Exercise 1.2.1** (1.3)**.** *Dimostrare che il metodo iterativo*

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

*convergente a x*, deve verificare la condizione di **consistenza***

$$x^* = \phi(x^*)$$

*ovvero la soluzione cercata deve essere un punto fisso per la funzione di iterazione che definisce il metodo.*

*Proof.* Suppongo che il metodo $\phi$ sia monotono e convergente a $x^*$. Definisco il preordine $\to$ per catturare la convergenza:

$$\to = \{(x_n, x_{n+1}) : x_{n+1} = \phi(x_n) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x^*\}$$

Suppongo *per assurdo* che

$$\phi(x^*) = x^{\triangle} \neq x^*$$

Per l' ipotesi $x_n \to x^*$ (grazie alla transitività di $\to$), posso applicare la monotonia di $\phi$ rispetto a $\to$:

$$\phi(x_n) \to \phi(x^*) = x^{\triangle}$$

ma questo contraddice l'ipotesi che $\phi$ converge a $x^*$. $\square$

## 1.3 Errori di round-off

```
private int a = 0;
```

# Chapter 2

# Ciao

**Exercise 2.0.1** (cio)**.** *Riferendosi all'esercizio precedente, dimostrare le stesse richieste, usando come passi di integrazione due quantità* $w, k > 0, w \neq k$.

*Proof.* Riferendosi all'esercizio precedente, dimostrare le stesse richieste, usando come passi di integrazione due quantità $w, k > 0, w \neq k$. □

**Theorem 2.0.1.** *theo*

**Corollary 2.0.2.** *cor*

**Lemma 2.0.3.** *lem*

### 2.0.1 sub

**Theorem 2.0.4.** *theo*