ITIS MOLINARI MILANO

Prof Di Tore Roberto

Programma di Matematica classe 4ª A INF. SIRIO a.s. 2006/07

Mod 1

Equazioni di 1° e 2° grado fratte
Sistemi lineari 2x2, 3x3, 4x4 con i metodi di sostituzione e confronto
Disequazioni di 1° e 2° grado intere e fratte
Sistemi di disequazioni
Disequazioni di grado superiore al 2°
Il piano cartesiano
Punto medio di un segmento
Distanza tra 2 punti
Equazione implicita ed esplicita della retta
Significato geometrico del coefficiente angolare
Rette parallele e rette perpendicolari
Retta passante per 2 punti
Retta passante per un punto e parallela o perpendicolare ad una retta data
Intersezione tra due rette
Equazione dell'asse di un segmento
Distanza punto-retta
Condizione di allineamento di 3 punti
Problemi sulla retta

Definizione ed equazione della circonferenza
Calcolo di centro e raggio di una circonferenza di equazione nota
Retta-Circonferenza
Rette tangenti alla circonferenza per un punto esterno
Retta tangente alla circonferenza in un suo punto
Intersezione di 2 circonferenze
Definizione ed equazione normale dell'ellisse
Ellisse con fuochi sull'asse x e sull'asse y
Eccentricità dell'ellisse
Parabola: definizione e costruzione della parabola
Parabola con asse parallelo all'asse y
Grafico della parabola e casi particolari
Rette e parabole

Retta tangente alla parabola in un suo punto
Rette tangenti alla parabola per un punto esterno
Problemi sulla parabola
Definizione e equazione normale dell'iperbole
Iperbole con fuochi sull'asse x
Asintoti dell'iperbole
Iperbole equilatera
La funzione omografica

DISEQUAZIONI

(intere di primo grado)

$$4\left[\frac{x-2}{3}-2\left(\frac{x-1}{6}-\frac{1-x}{9}\right)\right]<x-8$$

$6=2\cdot 3$
$9=3^2$
$18=3^2\cdot 2$

$$4\left[\frac{x-2}{3}-2\left(\frac{3x-3-2+2x}{18}\right)\right]<x-8$$

$$4\left[\frac{x-2}{3}-\cancel{2}\left(\frac{5x-5}{\cancel{18}_{9}}\right)\right]<x-8$$

$$4\left[\frac{x-2}{3}-\frac{5x-5}{9}\right]<x-8$$

$$4\left[\frac{3x-6-5x+5}{9}\right]<x-8$$

$$4\left[\frac{-2x-1}{9}\right]<x-8$$

$$\frac{-8x-4}{9}<x-8$$

$$\frac{-8x-4-9x+72}{9}<0$$

$$-17x+68<0$$

$$-17x<-68$$

$$x>\frac{68}{17}\rightarrow x>4$$

$S=(4;+\infty)$

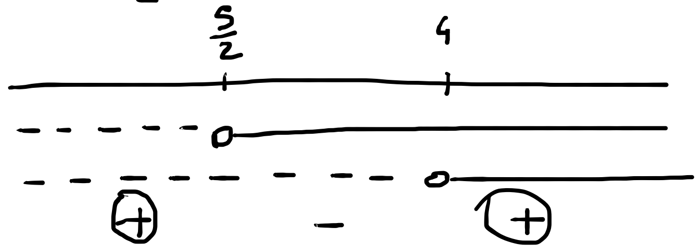
Disequazione fratta di primo grado

$\frac{2x-5}{x-4} > 0$ non si fa la c.a.
numeratore e den. devono essere concordi

$N>0: \; 2x-5>0$ $\quad D>0: \; x-4>0$

$2x>5$ $\quad x>4$

$x>5/2$



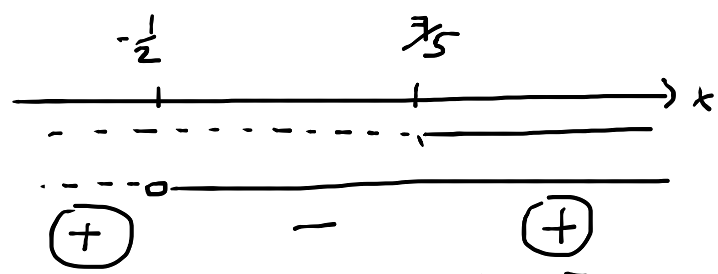
$x<\frac{5}{2} \vee x>4$ oppure $S=\left(-\infty; \frac{5}{2}\right) \cup (4; +\infty)$

$\frac{5x-7}{2x+1} \geq 0$ Anche se la disequaz ha ≥ 0, nel denominatore si mette >0 (perché non può essere $=0$).

$N\geq 0: \; 5x-7\geq 0$ $\quad D>0: \; 2x+1>0$

$5x\geq 7$ $\quad 2x>-1$

$x\geq 7/5$ $\quad x>-1/2$



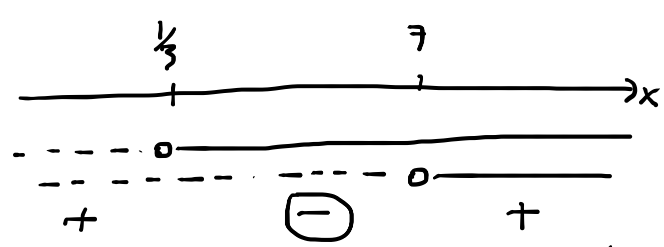
$S=\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{7}{5}; +\infty\right)$

$\frac{3x-1}{x-7} < 0$ Numeratore e denominatore si pongono sempre >0

$N>0: \; 3x-1>0$ $\quad D>0: \; x-7>0$

$3x>1$ $\quad x>7$

$x>1/3$



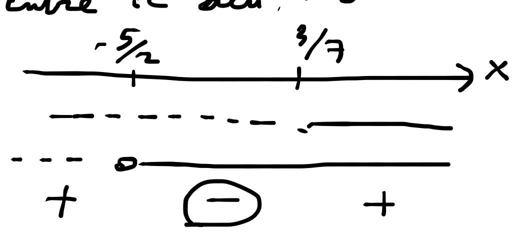
$\frac{1}{3}<x<7$ oppure $S=\left(\frac{1}{3}; 7\right)$

$\frac{7x-3}{2x+5} \leq 0$ Il num si pone ≥ 0 mentre il den. >0

$N\geq 0: \; 7x-3\geq 0$ $\quad D>0: \; 2x+5>0$

$7x\geq 3$ $\quad 2x>-5$

$x\geq 3/7$ $\quad x>-\frac{5}{2}$



$S=\left(-\frac{5}{2}; \frac{3}{7}\right]$

$-\frac{5}{2}<x\leq\frac{3}{7}$

Sistema Lineare - 2×2 (Equazioni × Incognite)

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = 4 - 2x \\ x = 9 - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = 9 - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2(9 - 3y) - 4 \\ x = 9 - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} y = 18 - 6y - 4 \\ x = 9 - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} 7y = 14 \\ x = 9 - 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 9 - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 9 - (3 \cdot 2) \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4x - y}{6} + \frac{x}{4} = 1 \\ x + 2y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{8x - 2y + 3x - 12}{12} = 0 \\ x = -2y + 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 11x - 2y - 12 = 0 \\ x = -2y + 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 11(-2y + 12) - 2y - 12 = 0 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -22 + 132 - 2y - 12 = 0 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} -24y + 120 = 0 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} -\underset{2}{\cancel{24}}\,y = -\overset{10}{\cancel{120}} \\ \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{10}{2} = 5 \\ x = -10 + 12 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

Il sistema lineare rappresenta il punto in cui le 2 rette si incontrano

$$\frac{1+x}{2x+4} - \frac{1}{x^2+2x} + \frac{x+1}{2x} = 1$$

$$\frac{1}{2x+4} - \frac{1}{x^2+2x} + \frac{x+1}{2x} - 1 = 0$$

$$x^2+2x = x(x+2)$$

$$2x+4 = 2(x+2)$$

$$\frac{x(1+x) - 2 + (x+1)(x+2) - 2x(x+2)}{2x(x+2)}$$

C.A. $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$x \neq 0$

$$x + x^2 - 2 + x^2 + 2x + x + 2 - 2x^2 - 4x = 0$$

$0 = 0$ Indeterminata $\forall x \neq 0, -2$

Equazione di II grado

$$\frac{1}{x+2} - \frac{2+x}{4x-8} = \frac{10+3x}{4-x^2}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{2+x}{4(x-2)} = \frac{10+3x}{(2+x)(2-x)}$$

$$\frac{4(x-2)-(x+2)(x+2)}{4(x+2)(x-2)} = \frac{4(-10-3x)}{4(x+2)(x-2)}$$ $\longrightarrow$ cambio il segno al numeratore per ottenere il m.c.m $(x-2)$

C.A $x \neq 2$
$x \neq -2$

$$\cancel{4x}-8-x^2-\cancel{4x}-4 = -40-12x$$

$$-x^2-12+40+12x=0$$

$$x^2-12x-28=0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144+112}}{2} \quad \begin{cases} 14 \\ -2 \end{cases}$$ (non accettabile)

$$\frac{3}{x^2-1} + \frac{3}{x^2-x-2} = \frac{1}{x^2-3x+2}$$

$x^2-1 = (x+1)(x-1)$
$x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$
$x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$

Scomposizione del denominatore per trovare il m.c.m che è:
$(x+1)(x-1)(x-2)$

C.A: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$
$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$$\frac{3(x-2)+3(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$3x-6+3x-3-x+1$
$5x-8=0$
$5x=8 \Rightarrow x = 8/5$

Sistema Lineare 3 equaz 3 incognite

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=6 \\ x-y+2z=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1-y-z \\ 2(1-y-z)+y-z=6 \\ (1-y-z)-y+2z=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-y-z \\ 2-2y-2z+y-z=6 \\ 1-2y+z=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} -y-3z=4 \\ z=2y-6 \end{cases}$$

Adesso che conosciamo z sostituisco nelle seconda equaz

$$\begin{cases} -y-6y+18=4 \end{cases} \begin{cases} -7y=-14 \end{cases} \Rightarrow y=2$$

$$\begin{cases} \\ z=2y-6 \Rightarrow z=4-6=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-y-z \Rightarrow x=1-2-(-2) \\ \Rightarrow x=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-2 \end{cases}$$

Graficamente abbiamo 3 dimensioni
La soluzione corrisponde all'intersezione di 3 piani
Troviamo i punti che hanno in comune i 3 piani.

4 Equazioni 4 incognite

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y-z-t=4 \\ z+t-x=0 \\ t+x-y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y+z \\ \\ z+t-(-y+z)=0 \Rightarrow \cancel{z}+t+y-\cancel{z}=0 \\ y=-t \\ (-y)+(-y+z)-y+1=0 \\ -y-y+z-y+1=0 \\ -3y+z+1=0 \\ z=3y-1 \end{cases}$$

$$y-z-t=4$$
$$y-(3y-1)+y-4=0$$
$$y-3y+1+y-4=0$$
$$-y-3=0$$
$$-y=3 \Rightarrow y=-3$$

$$y=z+t+4$$
$$y=3y-1-y+4$$
$$y=2y+3$$
$$-y=3$$
$$\underline{y=-3}$$

$$z=3y-1=3\cdot(-3)-1$$
$$\underline{z=-10}$$

$$x=-y+z$$
$$x=3-10$$
$$\underline{x=-7}$$

$$y-z-t=4$$
$$-t=4-y+z$$
$$t=-4+y-z=-4-3+10=3$$

Esercizio

$$\begin{cases} y-2x=0 \\ 2x^2-y^2+3x=3(y-9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x \\ 2x^2-4x^2+3x=6x-27 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2x \\ -2x^2-3x+27=0 \\ 2x^2+3x-27=0 \end{cases}$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{225}}{4} \begin{cases} \frac{12}{4}=3 \\ -\frac{18}{4}=-\frac{9}{2} \end{cases}$$

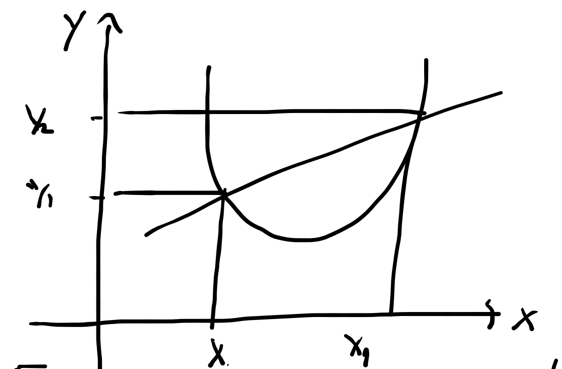
$y_{1,2}=?$

$y_1=2x_1=2\cdot 3=6$

$y_2=2x_2=2\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)=-9$

$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-\frac{9}{2} \\ y_2=-9 \end{cases}$$

$P_1(3;6)$ $P_2\left(-\frac{9}{2};-9\right)$



Esempio NON realistico!

Per vedere se i risultati che ho calcolato sono giusti, li sostituisco all'espressione data.

Esercizio

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x^2-(y^2+16)=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-y+8 \\ x^2-y^2-16=16 \end{cases}$$

$(-y+8)^2-y^2-16=16$

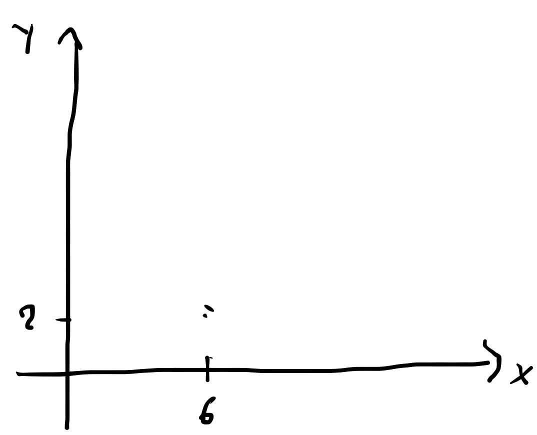
$(-y+8)^2-y^2=32$

$\cancel{y^2}+64-16y-\cancel{y^2}=32$

$\frac{-16y}{-16}=\frac{-32}{-16} \Rightarrow \underline{y=2}$

$x=-y+8 \Rightarrow x=-2+8=6$

$\underline{x=6}$



Disequazione di 2° grado intere

$ax^2+bx+c>0 \quad a,b,c \in \mathbb{R}$

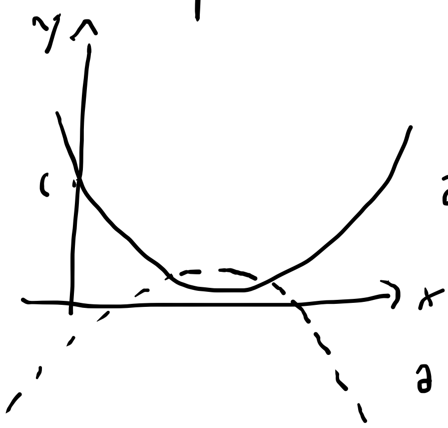
$a \neq 0$ si considera l'equazione associata

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2-4ac$$

1° CASO $\Delta > 0$

$\exists$ due radici reali e distinte. Se a è positivo e anche il segno $>$ (concorde) si considera i valori esterni. Alternativa: considero la funzione $y(x) = ax^2+bx+c$ cioè la parabola



$a>0$ Concavità verso l'alto

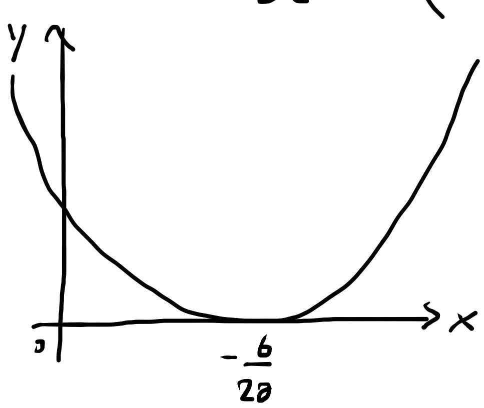
$x<x_1 \vee x>x_2$

$a<0$

$x_1<x<x_2$

2° CASO $\Delta = 0$

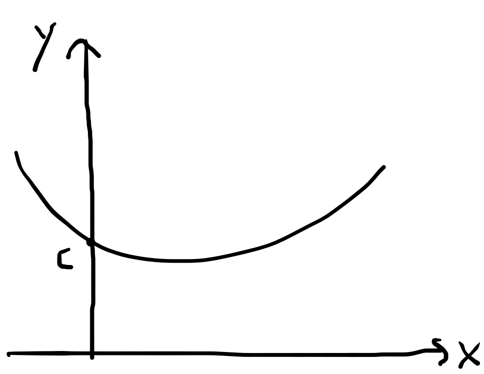
$x_1 \equiv x_2 = -\frac{b}{2a} \qquad \left(x_{1,2} = \frac{-b \pm \cancel{\sqrt{b^2-4ac}}}{2a} \right)$



$$\left.\begin{array}{ll} >0 & \forall x \neq -\frac{b}{2a} \\ \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ <0 & \nexists \text{ soluz} \\ \leq 0 & x = -\frac{b}{2a} \end{array}\right\} a>0$$

3 CASO $\Delta < 0$ $\nexists$ soluzione dell'equazione associata

Tocca l'asse delle ordinate ma non tocca l'asse x



$$a>0 \left\{\begin{array}{ll} >0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ <0 & \nexists \text{ soluz.} \\ \leq 0 & \end{array}\right.$$

La parabola è sempre in alto

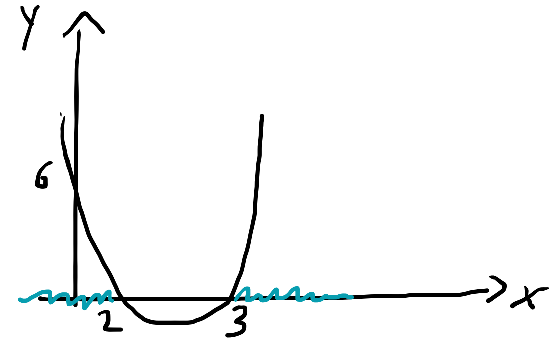
Esercizi:

$x^2 - 5x + 6 > 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$ (valori esterni)

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

$x < 2 \vee x > 3$

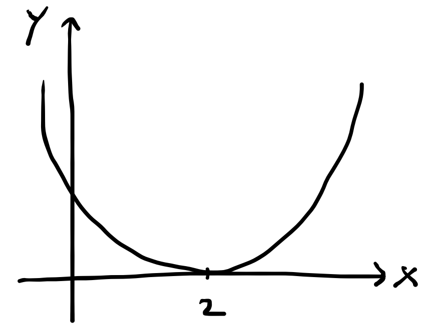


$x^2 - 4x + 4 > 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0$

$\forall x \neq 2$

$x_{1,2} = \frac{4}{2} = 2$



$x^2 - 5x + 7 > 0$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 28}}{2}$

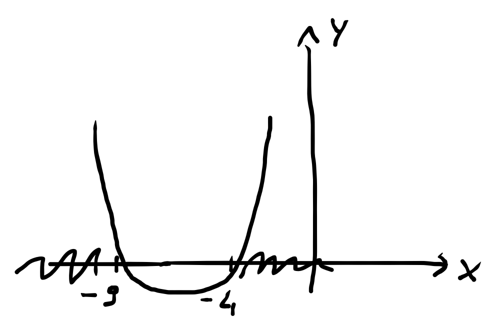
$\Delta = -3$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 13x + 36 \leq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 169 - 144 = 25$

$x_{1,2} = \frac{-13 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -9 \end{cases}$



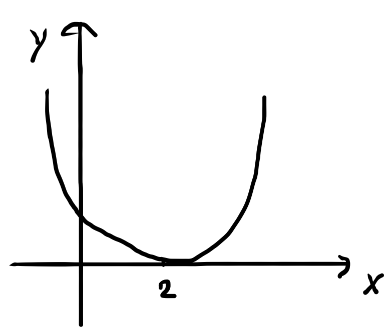
$x^2 - 4x + 4 > 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$

$\forall x \neq -\frac{b}{2a}$

$\forall x \neq 2$



$x^2 - 5x + 7 > 0$

$\Delta = 25 - 28$

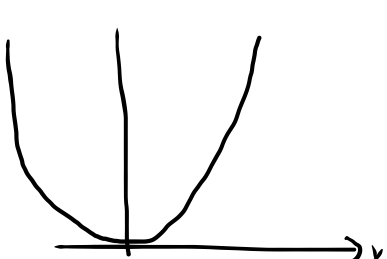
$\Delta < 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$-x^2 < 0$

$x^2 > 0$

$\forall x \neq 0$

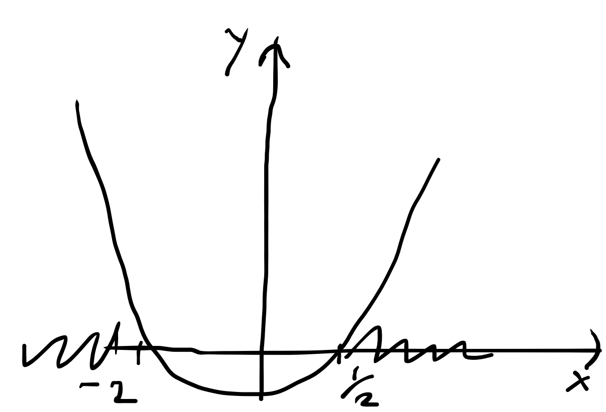


$2x^2 + 3x - 2 \geq 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} -2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

$x < -2 \vee x > \frac{1}{2}$



$x^2-7x\geq 0$

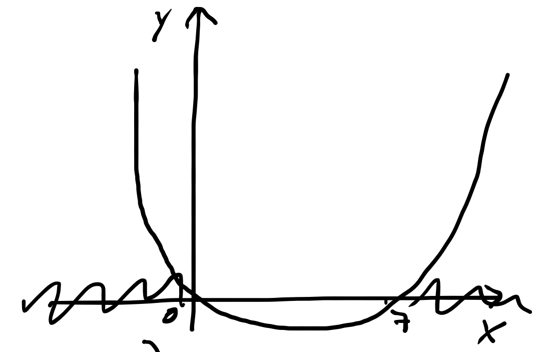
equazione associata è $x^2-7x=0$

$x(x-7)=0$

$x_1=0$

$x_2=7$

(valori esterni) $x\leq 0 \vee x\geq 7$



$S=(-\infty;0]\cup[7;+\infty)$

$-x^2-3>0$

$x^2+3<0$

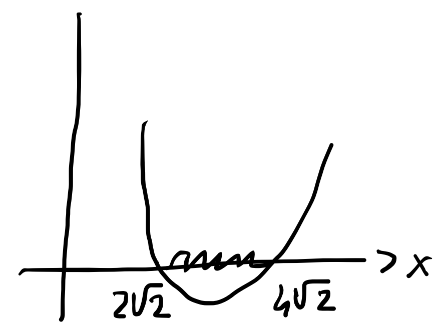
$\nexists$ soluzioni

equazione associata è $x^2+3=0$

$x^2-6\sqrt{2}\,x+16<0$

$\Delta=72-64=8$

$x_{1,2}=\frac{6\sqrt{2}\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{6\sqrt{2}\pm2\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}\pm\sqrt{2}$ $\begin{cases}4\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{cases}$



valori interni

$2\sqrt{2}<x<4\sqrt{2}$

$S=(2\sqrt{2};4\sqrt{2})$

$4x(x-2)<11+(x-4)^2$

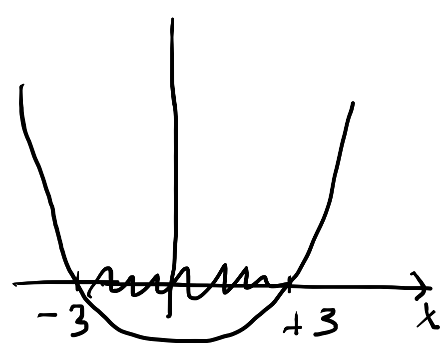
$4x^2-\cancel{8x}<11+x^2+16-\cancel{8x}$

$3x^2-27<0$

equaz. associata $3x^2-27=0$

$x^2-9=0$

$x^2=9$ $\quad x=\pm3$



$2x^2+16x+32>0$

$x^2+8x+16>0$

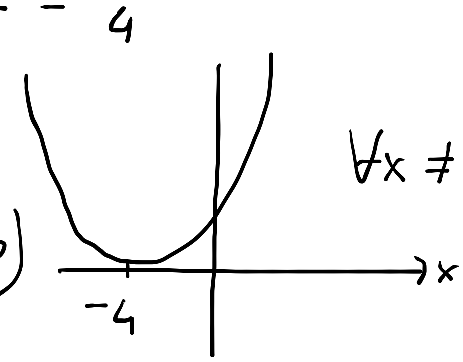
Se b è pari si usa la formula ridotta $\left(-\frac{b}{2}\right)^2-ac=\frac{\Delta}{4}$

$\left(-\frac{8}{2}\right)^2-16=\frac{\Delta}{4}$

$16-16=0$

$x_{1,2}=-4$

$S=(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty)$

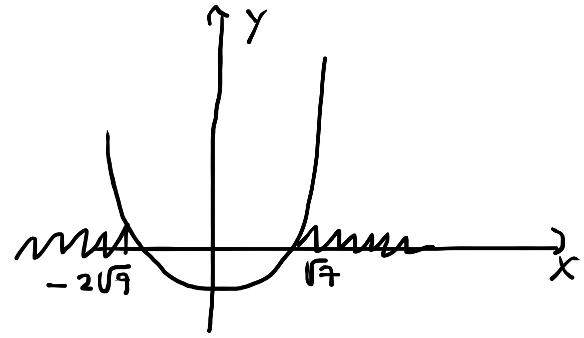


$\forall x\neq -4$

$x^2+\sqrt{7}x-14\geq 0$

$\Delta = 7+56=63$

$x_{1,2}=\frac{-\sqrt{7}\pm\sqrt{63}}{2}=\frac{-\sqrt{7}\pm 3\sqrt{7}}{2}$ $\begin{cases}\frac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}\\ -\frac{4\sqrt{7}}{2}=-2\sqrt{7}\end{cases}$



valori esterni $x\leq -2\sqrt{7} \vee x\geq\sqrt{7}$

$S(-\infty;-2\sqrt{7}) \cup [\sqrt{7};+\infty)$

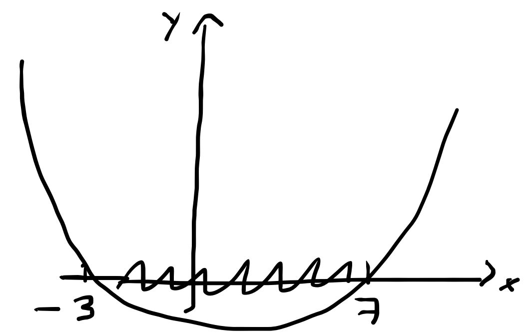
$4x+21-x^2>0$

$-x^2+4x+21>0$

$x^2-4x-21<0$

$\Delta = 16+84=100$

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{4\pm10}{2}$ $\begin{cases}7\\ -3\end{cases}$



$-3<x<7$

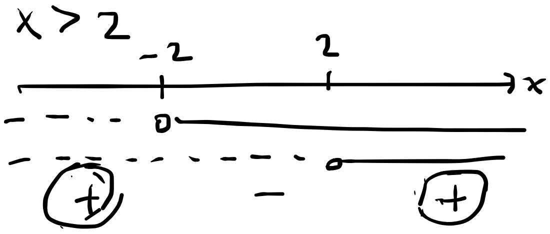
$S(3;7)$

$x^2-4>0$

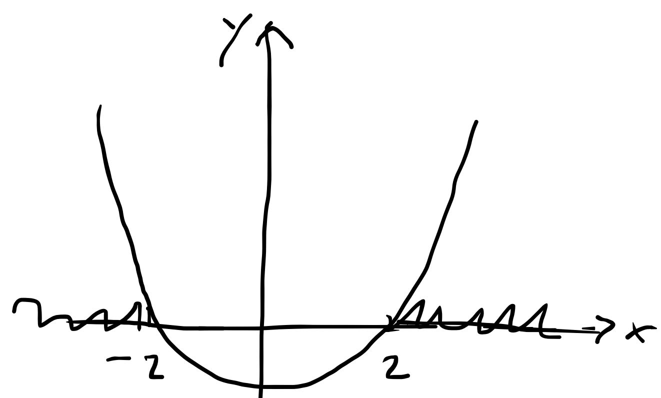
$(x+2)(x-2)>0$

$x>-2$

$x>2$



$x<-2 \vee x>2$



$S=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$

$4x-x^2>0$

$-x^2+4x>0$

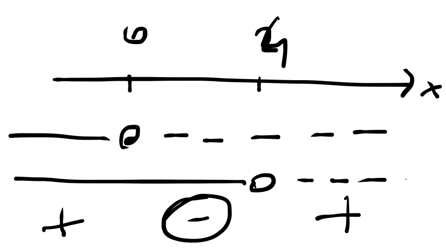
$x^2-4x<0$

$x(x-4)<0$

$x<0$

$x-4<0$

$x<4$



$0<x<4$ $S=(0;4)$

Disequazioni fratte di 2° grado

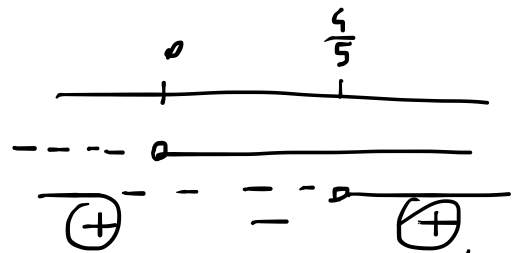
$$\frac{5x^2-4x}{x^2-6x+9}>0$$

$N>0$: $5x^2-4x>0$

$x(5x-4)>0$

$x>0$

$5x-4>0 \Rightarrow x>\frac{4}{5}$



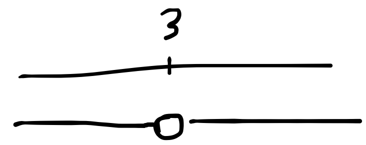
$x<0 \cup x>\frac{4}{5}$

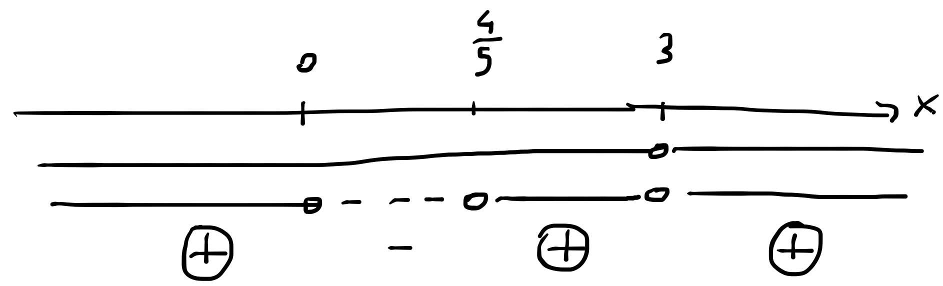
$D>0$: $x^2-6x+9>0$

$(x-3)(x-3)>0$

$(x-3)^2>0$

C.A. $\forall x \neq 3$





$x<0 \vee \frac{4}{5}<x<3 \vee x>3$

$S=(-\infty;0)\cup\left(\frac{4}{5};3\right)\cup(3;+\infty)$

$$\frac{x^2+10x-56}{x^2-2x-48}>0$$

$N>0$: $x^2+10x-56>0$

equaz. associata $x^2+10x-56=0$

$$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{100+224}}{2}=\frac{-10\pm18}{2} \begin{matrix} -14 \\ 4 \end{matrix}$$

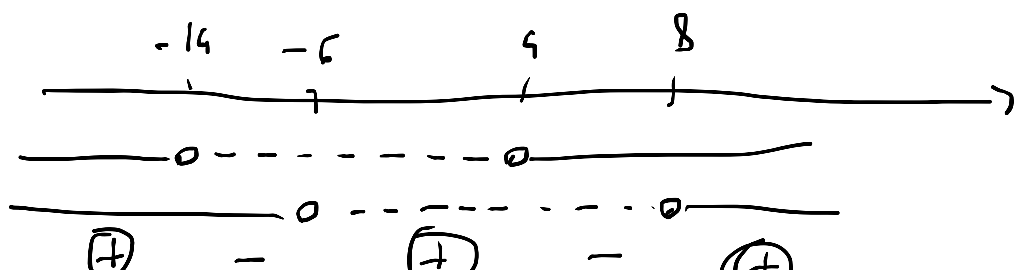
$x<-14 \vee x>4$

$D>0$: $x^2-2x-48>0$

eq. ass. $x^2-2x-48=0$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+192}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{196}}{2}= \begin{matrix} -6 \\ 8 \end{matrix}$$

$x<-6 \vee x>8$



$x<-14 \vee -6<x<4 \vee x>8$

Esercizio

$$\frac{x^2-4}{3x} - \frac{1}{x} \le \frac{1}{2} - \frac{2}{x}$$

$$\frac{2x^2-8-6}{2(3x)} \le \frac{3x-12}{2(3x)}$$

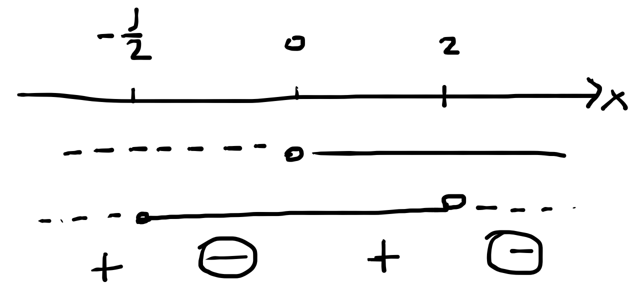
$$2x^2-3x-2 \le 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} \le x \le 2$$

$D>0:$ $6x>0$

$x>0$



$2 \le x < 0 \quad \vee \quad 2 < x$

$$\frac{3}{x^2-5x+6} + \frac{4-x}{3-x} > \frac{6-x}{2-x}$$

$$\frac{3}{(x-3)(x-2)} - \frac{4-x}{(x-3)} > -\frac{6-x}{(x-2)}$$

$$\frac{3-(x-2)(4-x)+(x-3)(6-x)}{\cancel{(x-3)(x-2)}} > 0$$

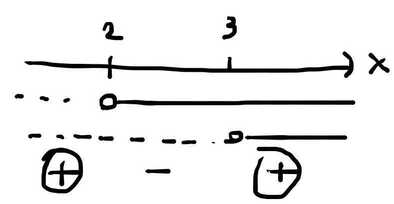
$$3-4x+8+x^2-2x+6x-18-x^2+3x>0$$

$N>0:$ $3x-7>0$

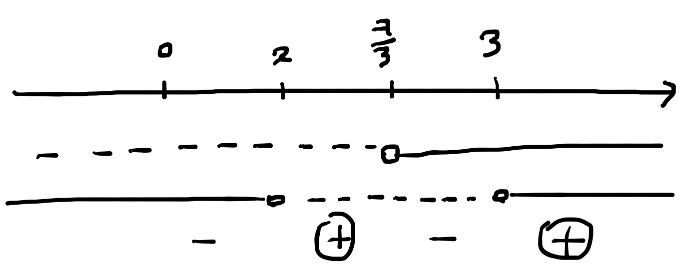
$x>\frac{7}{3}$

$D>0:$ $x>2$

$x>3$



$x<2 \vee x>3$



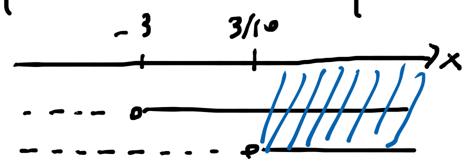
$2<x<\frac{7}{3} \vee x>3$

$S=\left(2;\frac{7}{3}\right) \cup (3;+\infty)$

Sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - x < 1 \\ 1 - 2x > 4(1-3x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1-2x-2}{2} < 0 \\ 1-2x-4+12x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x-3 < 0 \\ 10-3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+3 > 0 \\ 10x-3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -3 \\ x > \frac{3}{10} \end{cases}$$



Risolvere l'intersezione delle due disequazioni, si trovano le soluzioni comuni. Non consideriamo i + o i −, ma solo la parte con la linea continua per tutti e due i valori.

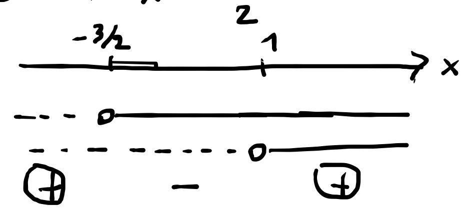
$S = \left(\frac{3}{10}; +\infty\right)$ oppure $x > \frac{3}{10}$

Esercizio

$$\begin{cases} ① \ \frac{x-1}{2x+3} > 0 \\ ② \ \frac{2x-5}{x+6} \leq 0 \end{cases}$$

① $N > 0: \ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$

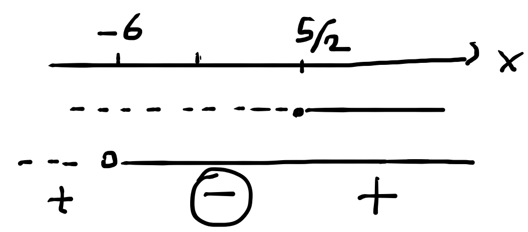
$D > 0: \ x > -\frac{3}{2}$



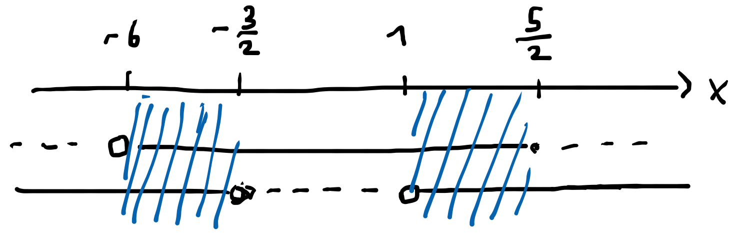
$x < -\frac{3}{2} \ \vee \ x > 1$

② $N \geq 0: \ x \geq \frac{5}{2}$

$D > 0: \ x > -6$



$-6 < x \leq \frac{5}{2}$



$-6 < x < -\frac{3}{2} \ \vee \ 1 < x \leq \frac{5}{2}$

Esercizio

$$\begin{cases} ① \ \frac{3x+7}{x+1} < \frac{3x-7}{x-1} \\ ② \ 3(x-1)^2 \leq 25 - x \end{cases}$$

① $\frac{(x-1)(3x+7) - (3x-7)(x+1)}{(x+1)(x-1)} < 0$

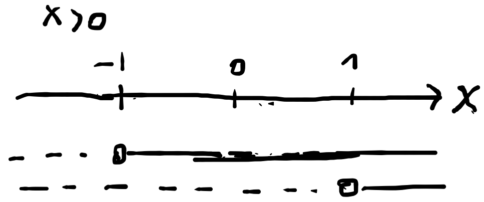
$$\frac{8x}{(x+1)(x-1)} < 0$$

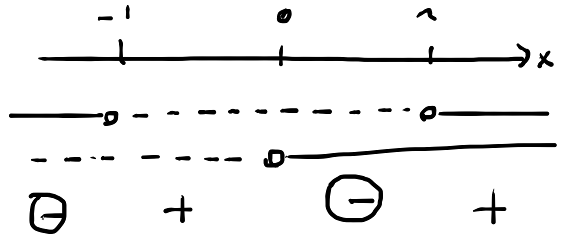
$N > 0: \ 8x > 0 \Rightarrow x > 0$

$D > 0: \ x > 1$

$x > -1$

$x < -1 \ \vee \ x > 1$





$x < -1 \lor 0 < x < 1$

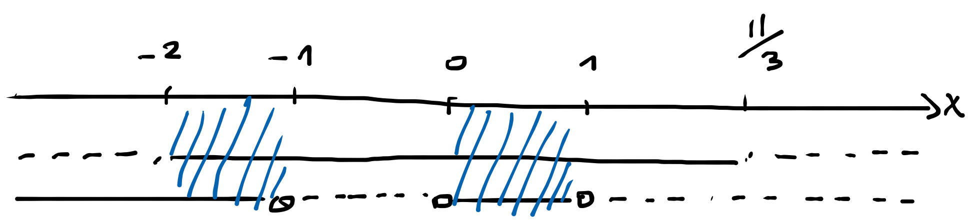
(2) $3x^2 - 6x + 3 \leq 25 - x$

$3x^2 - 5x - 22 \leq 0$

equaz. associata $3x^2 - 5x - 22 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 264}}{6} = \frac{5 \mp \sqrt{289}}{6} = \frac{5 \mp 17}{6} \quad \begin{cases} \frac{\cancel{22}}{\cancel{6}} = \frac{11}{3} \\ -\frac{\cancel{12}}{\cancel{6}} = -2 \end{cases}$$

(valori interni) $-2 \leq x \leq \frac{11}{3}$



$-2 \leq x < -1 \lor 0 < x < 1$

$S = [-2; -1) \cup (0; 1)$

Esercizio

$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{2x+1}{2x-1} \geq \dfrac{x-2}{x+2} \\ (2) \quad \dfrac{x+7}{x^2-9} < 0 \end{cases}$$

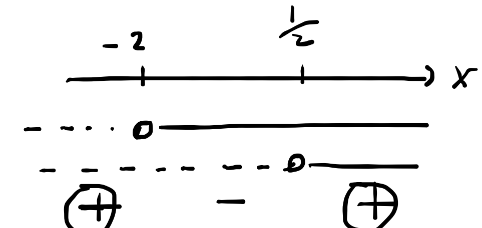
(1) $\dfrac{(2x+1)(x+2) - (x-2)(2x-1)}{(2x-1)(x+2)} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{10x}{(2x-1)(x+2)} \geq 0$

$N \geq 0$: $10x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

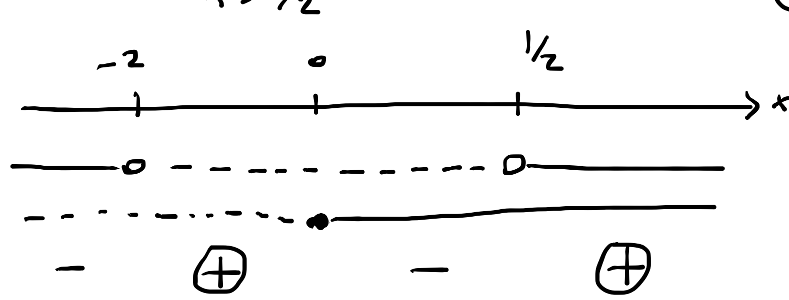
$D > 0$: $(2x-1) > 0$ $\quad (x+2) > 0$

$2x > 1 \quad x > -2$

$x > 1/2$



$x < -2 \lor x > 1/2$



$\boxed{-2 < x \leq 0 \lor x > \frac{1}{2}}$

(2) $\dfrac{x+7}{x^2-9} < 0$

$N > 0$: $x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7$

$D > 0$: $x^2 - 9 > 0$

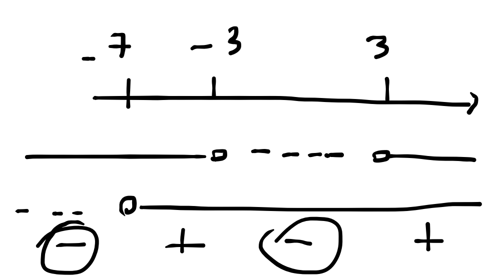
equaz. ass.

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

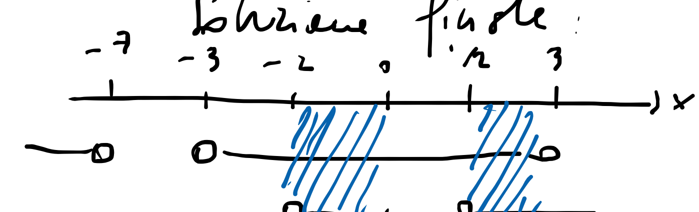
$x = \pm 9$

valori esterni $x < -3 \lor x > 3$



$\boxed{x < -7 \lor -3 < x < 3}$

Soluzione finale:



$-2 < x \leq 0 \lor \frac{1}{2} < x < 3$

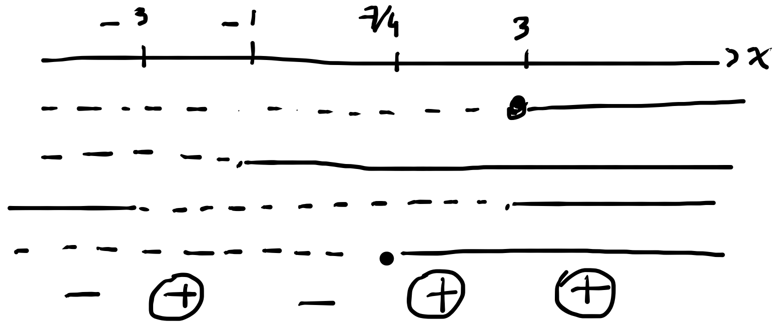
$S = (-2; 0] \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right)$

Fattorizzate

$(x-3)(x+1)(x^2-9)(4x-7) \geq 0$ → se fosse stato $\leq$ si mettevano tutte cmq $\geq$

$x-3 \geq 0 \qquad x+1 \geq 0 \qquad x^2-9 \geq 0 \qquad 4x-7 \geq 0$

$x \geq 3 \qquad x \geq -1 \qquad x \leq -3 \vee x \geq 3 \qquad x \geq 7/4$



$-3 \leq x \leq -1 \ \vee \ x \geq \frac{7}{4}$

$S = [-3;-1] \cup [\frac{7}{4}; +\infty)$

Equazioni di grado superiore al 2°

equazioni di 4° grado → 4 soluzioni al massimo

(casi particolari: potrebbe avere 2 soluz. coincidenti)

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$ → $x = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ → 1 ; 2

Le tre soluzioni sono

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

$x_3 = 2$

$x^5 - 16x = 0$

$x(x^4 - 16) = 0$

$x(x^2+4)(x^2-4) = 0$

$x = 0$

$x_{1,2} = \pm 2$ (2 soluzioni coincidenti)

altro metodo:

$x^4 - 16 = 0$

$x^4 = 16$

$x^4 = 2^4$

$x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$

Equazione Biquadratica (potenze di grado pari)

$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ questa è di 4° grado

$x^2 = t$

$t^2 - 6t + 8 = 0$ → Forma fissa

$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$ → $4 = t_1$; $2 = t_2$

$x^2 = 4 \qquad x = \pm 2$

$x^2 = 2 \qquad x = \pm\sqrt{2}$

$9x^4 - 10x^2 + 1 = 0 \qquad (x^2 = t)$

$9t^2 - 10t + 1 = 0$

$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{18} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{18} = \frac{10 \pm 8}{18}$ → $t_1 = 1$; $t_2 = \frac{1}{9}$

$x^2 = \frac{1}{9} \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{9}} = \pm\frac{1}{3}$

$x^2 = 1 \qquad x = \pm 1$

Equazioni Trinomie

Il primo monomio è di grado pari, il monomio successivo è pari alla metà del primo monomio

$x^6+9x^3+8=0 \qquad (t=x^3)$

$t^2+9t+8=0$

$t_{1,2} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81-32}}{2} \begin{cases} -8 \\ -1 \end{cases}$

$x^3=-8 \qquad x=\sqrt[3]{-2^3}=-2$

$x^3=-1 \qquad x=-1$

$x^{10}-2x^5+1=0 \qquad (t=x^5)$

$t^2-2t+1=0 \qquad$ NB: $(t-1)^2=0$ quadrato di binomio

$t_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$

$x^5=1 \Rightarrow x=1$

Esercizio

$\dfrac{1}{x^2-2} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$

C.A. $x^2 \neq 2 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$

$x^2 \neq 0$

$\dfrac{4x^2+4(x^2-2)-3x^2(x^2-2)}{4x^2(x^2-2)} = 0$

$4x^2+4x^2-8-3x^4+6x^2=0$

$14x^2-3x^4-8=0$

$3x^4-14x+8=0$

$(t=x^2)$

$3t^2-14t+8=0$

$t_{1,2} = \dfrac{14 \pm \sqrt{196-146}}{6} = \dfrac{14 \pm 10}{6} \begin{cases} t_1=4 \\ t_2=\frac{2}{3} \end{cases}$

$x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

La Ridotta

$\longrightarrow \boxed{\begin{matrix} ax^2+\underline{\underline{b}}x+c=0 \\ (\text{se } b \text{ è pari}) \end{matrix}}$

$\begin{cases} 3x^2-2x-3>0 \\ 11x > \frac{16}{5} \end{cases}$

$x_{1,2} = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$

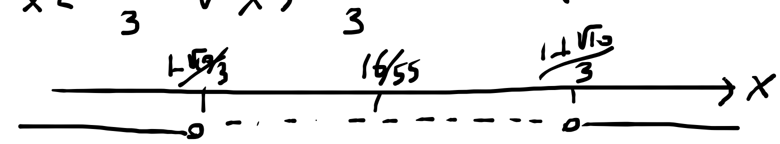
$3x^2-2x-3>0$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{10}}{3} \begin{cases} x_1 = \frac{1-\sqrt{10}}{3} \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{10}}{3} \end{cases}$

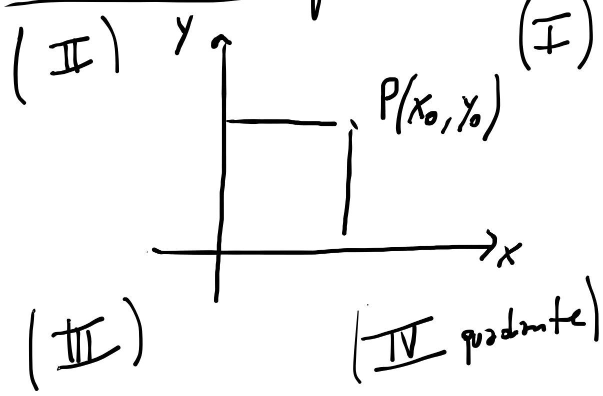
VAL. ESTERNI $\quad x < \dfrac{1-\sqrt{10}}{3} \lor x > \dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

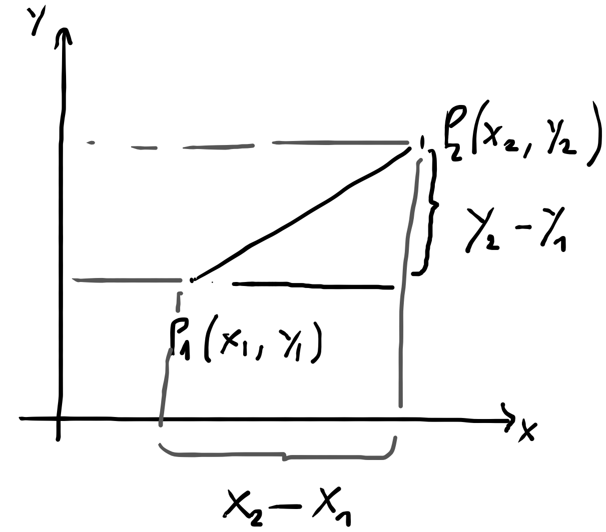
$S = \left(\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}, +\infty\right)$

$11x > \dfrac{16}{5} \Rightarrow x > \dfrac{16}{55}$



Distanza tra 2 punti





$$d(P_1; P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$$

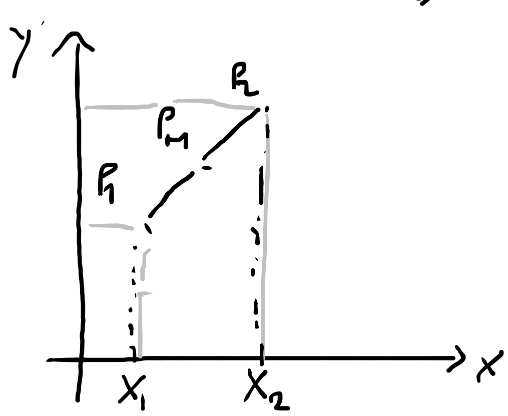
$P_1(1; -3) \quad P_2(5; -7)$

$$d(P_1; P_2) = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$$

$P_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) \quad P_2\left(3; -\frac{1}{5}\right)$

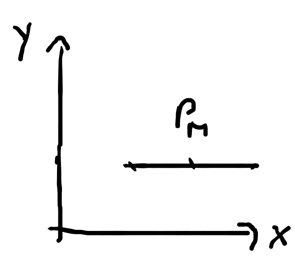
$$d(P_1; P_2) = \sqrt{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{4}{225}} = \sqrt{\frac{5641}{30}}$$

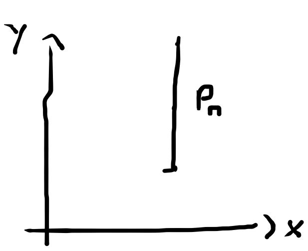
Punto medio di un segmento



$$d(P_1; P_M) = d(P_2; P_M)$$

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$





$d(P_1; P_2) = |x_2 - x_1|$ (valore assoluto) $\qquad d(P_1; P_2) = |y_2 - y_1|$

$P_1\left(-3; \frac{1}{2}\right), \quad P_2(2; -5)$

$$x_M = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2} \qquad y_M = \frac{\frac{1}{2} - 5}{2} = \frac{-\frac{9}{2}}{2} = -\frac{9}{4} \qquad P_M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$$

La retta

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$ forma cartesiana implicita

$a, b, c \in \mathbb{R}$

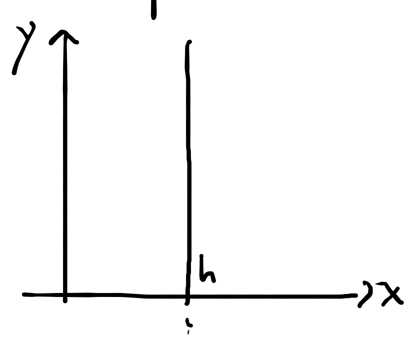
se $c = 0$, $ax + by = 0$

retta passante per l'origine

se $b = 0$, $ax + c = 0$

$x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = h$

retta parallela all'asse y



se $a = 0$, $by + c = 0$

$y = -\frac{c}{b} \Rightarrow y = k$

retta parallela all'asse x

$x = 0$ equaz. asse y
$y = 0$ equaz. asse x
} rette del piano cartesiano

$$\boxed{y = mx + q}$$ forma esplicita

$-\frac{a}{b} = m$

$-\frac{c}{b} = q$

$ax + by + c = 0$

$by = -ax - c$

$b \neq 0 \qquad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

$y = mx + q$

Rette parallele (hanno stesso coefficiente angolare)

$r_1 \quad ax + by + c = 0$

$r_2 \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

$r_1 // r_2$ se $m_{r_1} = m_{r_2}$

$r_1 \perp r_2$ se $m_{r_1} \cdot m_{r_2} = -1$

$m_{r_2} = -\dfrac{1}{m_{r_1}}$ (antireciproca)

$r \quad 2x - 3y + 5 = 0$ $\qquad m_r = \dfrac{2}{3}$ $\qquad \boxed{m = -\dfrac{a}{b}}$

$s \quad 4x - 6y - 7 = 0$ $\qquad m_s = \dfrac{-4}{-6} = \dfrac{2}{3}$

$r//s$? sì, perché hanno lo stesso coeff angolare

$r \quad 3x - 5y - 9 = 0$ $\qquad m_r = \dfrac{3}{5}$

$s \quad 7x + 3y - 9 = 0$ $\qquad m_s = -\dfrac{7}{3}$ $\qquad r//s$? No

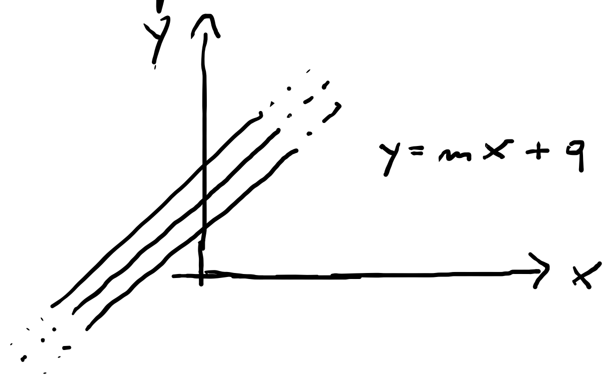
Se $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \Rightarrow$ rette coincidenti, le due rette sono sovrapposte

Se $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2} \Rightarrow$ rette parallele distinte

Se $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \Rightarrow$ rette incidenti
(non si tiene conto di c)

Fascio di rette

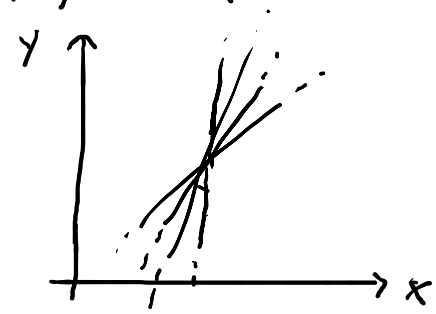
Fascio improprio di rette: rette tutte parallele, tutte hanno lo stesso coeff. angolare



$y = mx + q$

Fascio proprio di rette:

$$y - y_0 = m(x - x_0), \quad m \in \mathbb{R}$$



Coeff. Angolare di una retta passante per 2 punti

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad P_1(x_1; y_1) \quad P_2(x_2; y_2)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\begin{aligned} y - y_2 &= m(x - x_2) \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \end{aligned} \quad \downarrow \text{ sottrazione}$$

$$-y_2 + y_1 = -mx_2 + mx_1$$

$$y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

se $x_2 \neq x_1$ quindi: $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

Equazione di una retta passante per 2 punti

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$P_1(x_1;y_1)$
$P_2(x_2;y_2)$

Det l'equazione della retta passante per $P_1(-5,2)$ e $P_2(3,-6)$

$$\frac{y-2}{-6-2}=\frac{x+5}{3+5}$$

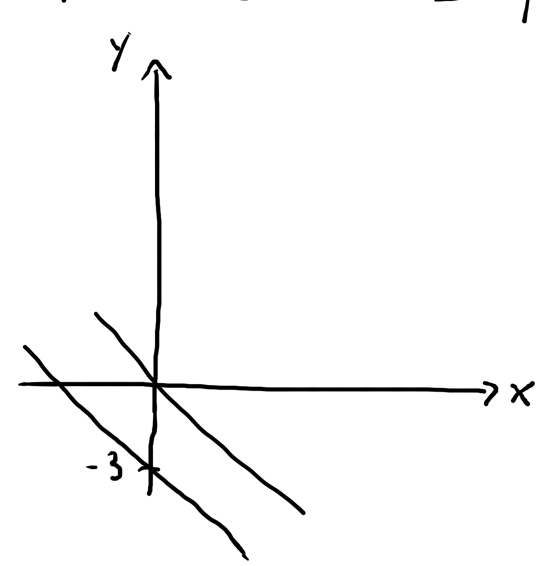
$$\frac{y-2}{-8}=\frac{x+5}{8}$$

$$-y+2=x+5$$

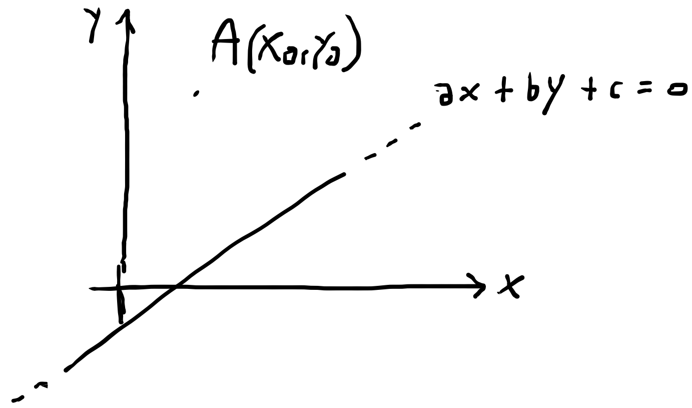
$$-y-x-3=0$$

$$y=-x-3$$

-1 bisettrice del II e IV quadrante



Distanza di un punto da una retta



$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Esempio

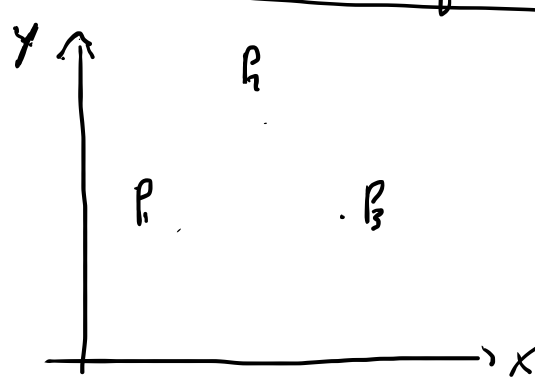
$P(-1;2)$

$r \quad 5x - 7y + 2 = 0$

$$d(P,r) = \frac{|5\cdot(-1) + 2\cdot(-7) + 2|}{\sqrt{25+49}} = \frac{|-17|}{\sqrt{74}} =$$

$$\frac{|-17|}{\sqrt{74}} \cdot \frac{\sqrt{74}}{\sqrt{74}} = \frac{17\sqrt{74}}{\sqrt{74}}$$

Allineamento di 3 punti



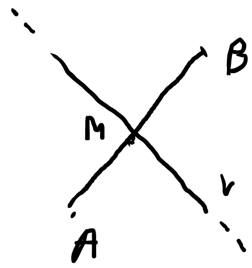
La retta non esiste perché i 3 punti non sono allineati (può esistere però una sola circonferenza oppure una parabola).

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \Longrightarrow \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

Al posto di x e y sostituisco le coordinate del 3° punto. Se è vero che è uguale, esiste la retta passante per tutti e 3 i punti.

2 modi per trovare la retta che passa per il punto medio

$A(-1;2)$ $B(5;7)$



$M\left(2;\frac{9}{2}\right)$

$$m_{ab} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-2}{5+1} = \frac{5}{6}$$

$$m_r = -\frac{6}{5}$$

$$y - y_M = m_r(x - x_M)$$

$$y - \frac{9}{2} = -\frac{6}{5}(x-2)$$

$$10y - 45 = -12x + 24$$

equaz. retta

$$12x + 10y - 69 = 0$$

Altro modo:

$P(x,y)$

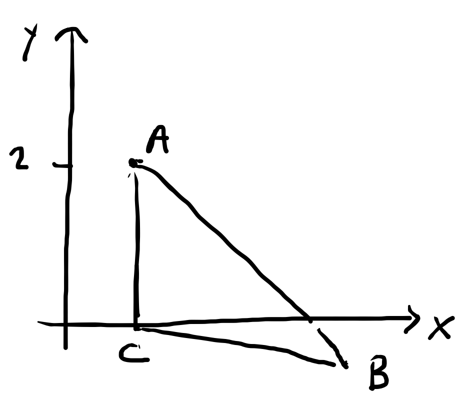
$d(P,A) = d(P,B)$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-7)^2}$$

$$x^2 + 1 + 2x + y^2 + 4 - 4y = x^2 + 25 - 10x + y^2 + 49 - 14y$$

$$12x + 10y - 69 = 0$$

Esercizio Area di un triangolo



$A(1;2)$, $B(3,-1)$, $C(1;0)$

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{perimetro} = 2P = \sqrt{13} + \sqrt{5} + 2$$

Trovare l'equazione della retta passante per il punto $(-2;5)$ e // alla retta $x+2y-1=0$ e det. la distanza tra le due rette

$y - y_A = m(x - x_A)$

$2y = -x + 1$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$m = -\frac{1}{2}$

$y - 5 = -\frac{1}{2}(x+2)$

$y = -\frac{1}{2}x + 4$ equaz. della retta parallela e passante per A

$r: \quad x + 2y - 1 = 0$

$d(A; r) = \frac{|-2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$

Esercizio

Determinare il valore del parametro k in modo che la retta $(k-1)x + y + k - 2 = 0$

A- risulti // all'asse y

B- risulti // all'asse x

C- passi per l'origine degli assi

D- passi per il punto $A(1;2)$

E- non passi per il punto $B(-2;3)$

F- passi per $C(-1;3)$

G- passi per $E(-1;1)$

A) $(k-1)x + y + k - 2 = 0 \qquad (x=0)$

$kx - x + k + 0 - 2 = 0$

$x(k-1) + k - 2 = 0$

$x = \frac{2-k}{k-1}$

B) $\cancel{(k-1)x} + y + k - 2 = 0 \qquad (y=0)$

$y = 2 - k$

$k = 2 - y$

c) passi per l'origine degli assi

$x=0$, $y=0$ $\qquad P(0,0)$

$$(k-1)x+y+k-2=0$$
$$0+0+k=2$$
$$k=2$$

D) $A(1;2)$

sostituisco $(k-1)1+2+k-2=0$

$$k-1+2+k-2=0$$
$$2k=1$$
$$k=\frac{1}{2}$$

E) $(k-1)\cdot(-2)+3+k-2\neq 0$

$$-2k+2+3+k-2\neq 0$$
$$k\neq 3$$

F) $(k-1)(-1)+3+k-2=0$

$2=0$ imp. $\Rightarrow$ non passa per il punto $C(-1;3)$

G) $(k-1)(-1)+1+k-2=0$

$$-k+1+1+k=0$$

$0=0$ $\quad \forall k\in\mathbb{R}$ per tutti i valori di k la retta passa per il punto.

Esercizio

Per il punto $A(-5;3)$ condurre $\perp$ alla retta $r: 2x+y=5$. Trovare le coordinate del piede della perpendicolare.

$m_r = -2 \qquad \left[m = -\frac{a}{b}\right]$

$m_{r\perp} = \frac{1}{2}$ (Antireciproca)

$y - y_A = m_{r\perp}(x - x_A)$

$y - 3 = \frac{1}{2}(x+5)$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + 5$

$y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2}$ FORMA ESPLICITA

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2} \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2} \\ 2x + \frac{x}{2} + \frac{11}{2} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-\frac{1}{5}}{2} + \frac{11}{2} = -\frac{1}{10} + \frac{11}{2} = \frac{-1+55}{10} = \frac{27}{5} \\ 4x + x + 11 = 10 \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Esercizio

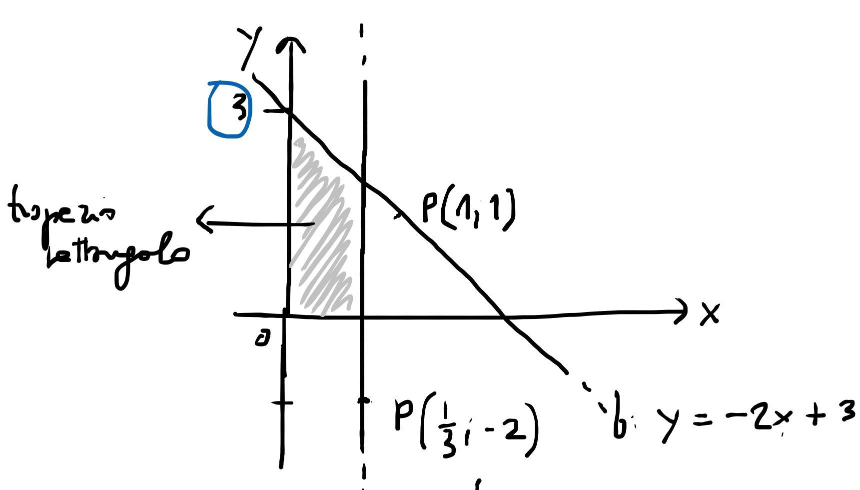
Equazione retta passante per $P\left(\frac{1}{3}; -2\right)$

a // asse y

b passante per $P(1;1)$

$m_b = -2$

Rappresentare graficamente le 2 rette e calcolare S dell'area del trapezio rettangolo che tali rette determinano con i 2 assi cartesiani



$x = \frac{1}{3}$

a: $x - \frac{1}{3} = 0$ la prima retta

$y - y_b = m_b(x - x_b)$

$y - 1 = -2(x-1)$

$y = 1 - 2x + 2$

$y = -2x + 3$ Seconda retta

$h = \frac{1}{3}$

$B_{maggiore} = 3$

$b_{min} = \frac{7}{3}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \Rightarrow -\frac{2}{3} + 3 = \frac{-2+9}{3} = \frac{7}{3} \end{cases}$$

formula dell'Area

$\left[S = \frac{(B+b)\,h}{2}\right] = \frac{\left(3+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}}{2} = \frac{8}{9}$

Esercizio

Determinare m in modo che la retta di equaz. $(m-2)x + 2my + m - 1 = 0$

1- passi per $P(1;2)$

2- sia // all'asse y o all'asse x

3- formi un angolo di 45° o 135° con l'asse x

4- Sia $\perp$ alla retta $y = 4x$

1) $(m-2)1 + 2m\,2 + m - 1 = 0$

$m - 2 + 4m + m - 1 = 0$

$6m = 3$

$m = \frac{1}{2}$

2) Se $m=0$ ottengo la retta parallela all'asse x e y

$-2x - 1 = 0$

$-2x = 1$

$x = -\frac{1}{2}$

$m = 2$

$(0)x\,4y + 2 - 1 = 0$

$4y = -\frac{1}{4}$

3) $m = 1 \Rightarrow 45$

$m = -1 \Rightarrow 135°$

coeff ang $\left[m = -\frac{a}{b}\right]$

$\overbrace{m-2}^{a} + \overbrace{2m}^{b} + \overbrace{m-1}^{c} = 0$

$-\frac{a}{b} = -\frac{(m-2)}{2m} = 1 \Rightarrow \frac{-m+2-2m}{2m} = 0$

$-3m + 2 = 0$

$-3m = -2$

$m = \frac{2}{3}$

$-\frac{(m-2)}{2m} = -1 \Rightarrow \frac{m+2+2m}{2m} = 0$

$m = -2$

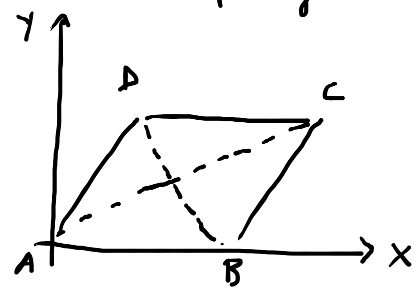
4) $y = \underline{4}x$ antireciproco $-\frac{1}{4}$

$-\frac{(m-2)}{2m} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-4m+8+2m}{8m} = 0 \Rightarrow -2m = -8$

$m = 4$

Esercizio

Verificare che il quadrilatero avente per vertici i punti $A(1;0)$ $B(6;0)$ $C(9;4)$ $D(4;4)$ è un rombo (diagonali $\perp$)



$$\left[m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right]$$

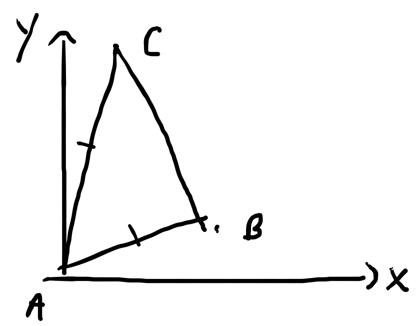
$$m_{BD} = \frac{0-4}{6-4} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$m_{AC} = \frac{4-0}{9-1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

SI E' UN ROMBO

Esercizio

$A(0;0)$ $B(3;1)$ $C(2;4)$



Δ_{ABC} ?

baricentro, incontro dei 3 punti medi

$$P_{M_{AB}} \left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2} \right)$$

$$P_{M_{AC}} = (1;2)$$

$P_{M_{AC},B}$

$$\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-3}{1-3}$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

$P_{M_{AB},C}$

$$\frac{y-\frac{1}{2}}{4-\frac{1}{2}} = \frac{x-\frac{3}{2}}{2-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$y - \frac{1}{2} = 7x - \frac{21}{2}$$

$$y = 7x - 10$$

$$-\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = 7x - 10$$

$$-x + 5 = 14x - 20$$

$$-15x = -25$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$\boxed{G\left(\frac{5}{3} ; \frac{5}{3}\right)}$$

$$y = 7x - 10$$

$$y = 7 \cdot \frac{5}{3} - 10$$

$$y = \frac{35}{3} - 10 = \frac{5}{3}$$

Esercizio

Equazione fascio improprio di rette // alla retta di equazione $y = \sqrt{3}x$

$m = \sqrt{3}$ $\quad\quad y = \sqrt{3}\,x + q \;,\; q \in \mathbb{R}$

Non è fissato ma può variare per infiniti valori

Esercizio

Trovare le coordinate della proiezione del punto $P(-3;4)$ sulla retta $2x - 3y = 8$

$-3y = 8$ (per $x=0$)

$y = -\frac{8}{3}$

x	y
0	-8/3
4	0

$m = -\frac{a}{b} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

$m = -\frac{1}{m} = -\frac{3}{2}$

$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$

$y - 4 = -\frac{3}{2}(x+3)$

$y - 4 = -\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

$\begin{cases} y-4 = -\frac{3}{2}x - \frac{9}{2} \\ 2x - 3y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ y = -\frac{8}{3} + \frac{2x}{3} \end{cases}$

$-\frac{8}{3} + \frac{2}{3}x - 4 = -\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

$\frac{-16 + 4x - 24}{\cancel{6}} = \frac{-9x - 27}{\cancel{6}}$

$4x + 9x - 16 - 24 + 27 = 0$

$13x = 13$

$x = 1$

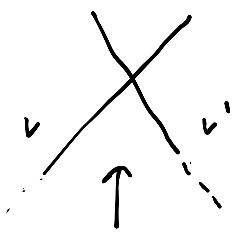
$y = -\frac{8}{3} + \frac{2}{3} \cdot (1)$

$y = -2$

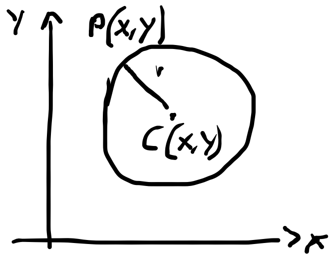
$\boxed{P_2(1;-2)}$

Coniche: circonferenza

Si può immaginare come l'intersezione tra un cono e un piano



questo è un cono

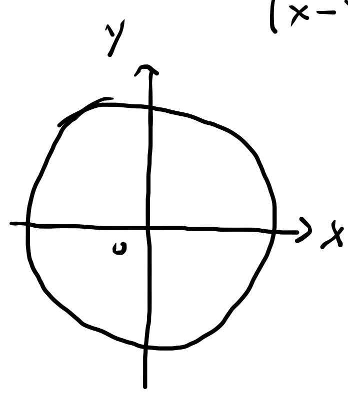


Circonferenza: luogo geometrico di tutti i punti equidistanti da un punto fisso detto centro.

$d(P,C)=r$: La distanza dal centro a qualunque altro punto della circonferenza è il raggio

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$$

per arrivare a scrivere l'equaz. della circonf.



$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

$$(x^2+y^2=r^2)$$

$$x^2+x_0^2-2xx_0+y^2+y_0^2-2yy_0=r^2$$

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-r^2=0$$

$$\alpha=-2x_0 \qquad \beta=-2y_0 \qquad \gamma=x_0^2+y_0^2-r^2$$

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$$ Equaz. circ.

$\alpha=-2x_0 \Rightarrow x_0=-\dfrac{\alpha}{2}$

$\beta=-2y_0 \Rightarrow y_0=\dfrac{-\beta}{2}$

$\gamma=x_0^2+y_0^2+r^2$

$r^2=x_0^2+y_0^2-\gamma$

$r=\sqrt{x_0^2+y_0^2-\gamma}$

$=\sqrt{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(-\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$

$=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma}$

$=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}{4}}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}}{2}$

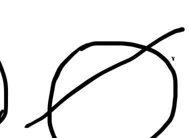
Formula per trovare il centro:

$$\boxed{C\left(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2}\right)}$$

La distanza del punto e la retta è maggiore del raggio

ESTERNA

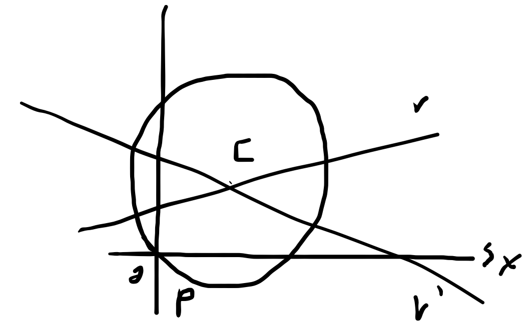
TANGENTE



SECANTE

Esercizio

Scrivere l'eq. della circonf. passante per l'origine e il centro per il punto di intersezione delle rette $2x-y-1=0$, $x+y-5=0$



$$\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10-2y-y-1=0 \\ x=5-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3y=-9 \\ x=5-y \end{cases} \quad \begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases} \qquad P(0,0) \quad C(2,3)$$

$$d=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

$$d(P,C)=r=\sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=13$$

$$x^2-4x+4+y^2-6y+9-13=0$$

$$x^2+y^2-4x-6y=0$$

equaz. circonf. noti centro e raggio

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Esercizio

Det. le tangenti alla circonferenza $x^2+y^2-x+3y=0$ parallele alla retta $y=3x$

$$\begin{cases} y=3x+q \rightarrow \text{fascio improprio di rette} \\ x^2+y^2-x+3y=0 \\ x^2+(9x^2+q^2+6xq)+8x+3q=0 \end{cases}$$

$$10x^2+q^2+6xq+8x+3q=0$$

$$\underbrace{10x^2}_{a}+\underbrace{6xq+8x}_{b}+\underbrace{q^2+3q}_{c}=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

poiché le rette sono // impongo $\Delta=0$

$$(6q+8)^2-4\cdot10(q^2+3q)=0$$

$$36q^2+64+96q-40q^2-120q=0$$

$$-4q^2-24q+64=0$$

$$q^2+6q-16=0$$

$$q_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{1} \begin{array}{l} 2 \\ -8 \end{array}$$

$$y=3x+2 \qquad y=3x-8$$

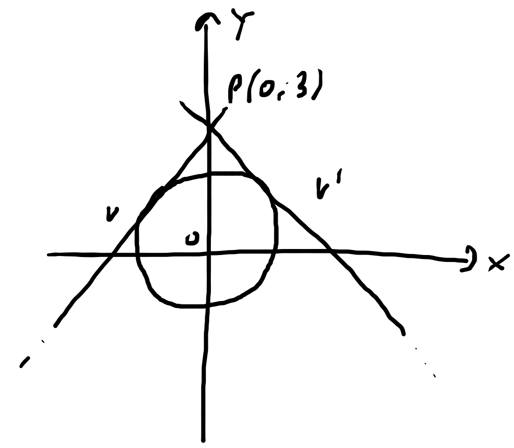
Esercizio

Dal $P(0;3)$ condurre le tangenti alla circonferenza di centro nell'origine e $r=2$

$P \rightarrow$ centro del fascio proprio

$y = mx + q$

$x^2 + y^2 = 4$ equaz circonf



$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 3 = m(x - 0)$

$y - 3 = mx$

$y = mx + 3$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = mx + 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (mx+3)^2 = 4$$

$$x^2 + m^2x^2 + 9 + 6mx = 4$$

$$\underbrace{x^2(1+m^2)}_{a} + \underbrace{6mx}_{b} + \underbrace{5}_{c} = 0$$

$\Delta = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36m^2 - 20(1+m^2) = 0$$

$$36m^2 - 20 - 20m^2 = 0$$

$$16m^2 = 20$$

$$m^2 = \frac{\cancel{20}}{\cancel{16}} = \frac{5}{4}$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x + 3$

$y = -\frac{\sqrt{5}}{2} + 3$

Esercizio

Scrivere l'equazione della circonferenza passante per $A(2;3)$ $B(4;1)$ $C(2;-1)$ (perché la circonf esista i tre punti non devono essere allineati)

$$\boxed{\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}} \Rightarrow \frac{-1-3}{1-3}=\frac{2-2}{4-2} \Rightarrow \frac{-4}{-2}=\frac{0}{2} \Rightarrow 2=0$$

uguaglianza falsa

Allora la circonferenza esiste (ed è unica)

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

$$\begin{cases} 4+9+2\alpha+3\beta+\gamma=0 \\ 16+1+4\alpha+\beta+\gamma=0 \\ 4+1+2\alpha-\beta+\gamma=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4+9+2\alpha+3\beta-5-2\alpha+\beta=0 \\ 17+4\alpha+\beta-2\alpha+\beta-5=0 \\ \gamma=-5-2\alpha+\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta=-2 \\ 12+2\alpha+2\beta=0 \\ \gamma=-5-2\alpha+\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-2 \\ \alpha=-4 \\ \gamma=1 \end{cases}$$

$$x^2+y^2-4x-2y+1=0$$ Equaz. Circonf.

Esercizio

Scrivere l'equazione della circonf. di centro $A(2;3)$ e passante per $B(-1;6)$

$$r=d(A;B)=\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2}$$
$$=\sqrt{(-1-2)^2+(6-3)^2}$$
$$=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

equaz. circonf. noti centro e raggio

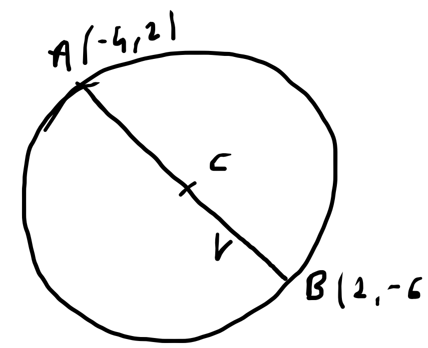
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$
$$(x-2)+(y-3)^2=(3\sqrt{2})^2$$
$$x^2+4-4x+y^2+9-6y=18$$
$$x^2+y^2-4x-6y-5=0$$

Esercizio

$A(-4;2)$ $B(2;-6)$ sono gli estremi del diametro di una circonferenza. Scrivere l'equazione della circonf.

$$r = \sqrt{(2+4)^2+(-6-2)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

$$\frac{10}{2} = 5 = r$$



$$P_{m_{AB},x} = \frac{-4+2}{2} = -1$$

$$P_{m_{AB},y} = \frac{2-6}{2} = -2$$

$$P_{m_{AB}} = (-1;2) \quad \text{centro}$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 4 = 25$$
$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 20 = 0$$

Intersezione circonferenza

Det. i punti di intersezione tra le circonferenze di equazione

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x-6y+20=0 \\ 2x^2+2y^2-11x+3y=0 \end{cases}$$

moltiplico per 2 la prima...

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-16x-12y+40=0 \\ 2x^2+2y^2-11x+3y=0 \end{cases}$$

....e sottraggo la seconda equaz.

$$-5x-15y+40=0$$
$$-x-3y+8=0$$
$$x+3y-8=0$$
$$x=-3y+8$$

ora sostituisco la x

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x-6y+20=0 \\ x=-3y+8 \end{cases}$$

$$(-3y+8)+y^2-8(-3y+8)-6y+20=0$$
$$9y^2+64-48y+y^2+24y-64-6y+20=0$$
$$10y^2-30y+20=0$$
$$y^2-3y+2=0 \qquad y_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm1}{2} \begin{cases} 2 = y_1 \\ 1 = y_2 \end{cases}$$

$$\left\{ x = 8-3y \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 5 \end{cases} \right.$$

$P_1(2;2)$ $P_2(5;1)$

Esercizio

Scrivere l'equazione della circonf. passante per i punti $A(5;3)$ $B(3;5)$ $C(1;-1)$

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

$$\begin{cases} 34+5(-2+\beta-\gamma)+\beta 3+\gamma=0 \\ 34+3(-2+\beta-\gamma)+\beta 5+\gamma=0 \\ \alpha=-2+\beta-\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} 34+\alpha 5+\beta 3+\gamma=0 \\ 34+\alpha 3+\beta 5+\gamma=0 \\ \alpha=-2+\beta-\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6+2\beta-\gamma=0 \\ 14+4\beta-\gamma=0 \\ \alpha=-2+\beta-\gamma \end{cases}$$

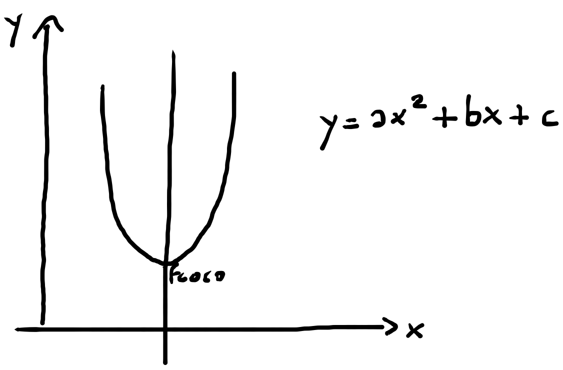
$$\begin{cases} \gamma=6+2\beta \Rightarrow \gamma=-2 \\ 14+4\beta-6-2\beta=0 \Rightarrow \beta=-4 \\ \alpha=-4 \end{cases}$$

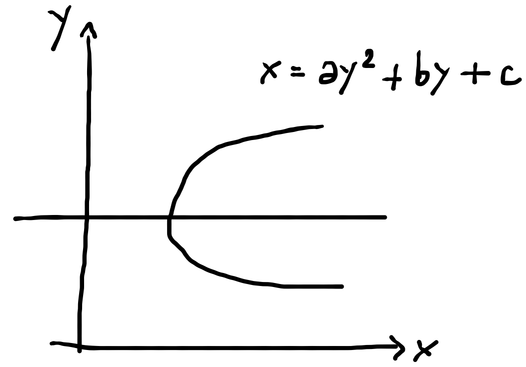
$$x^2+y^2-4x-4y-2=0$$

PARABOLA

Scrivere l'equaz del luogo dei punti di un piano equidistanti dalla retta $y+6=0$ e dal punto $A(-1;-5)$

A è detto "fuoco"





$P(x;y)$

$d(P;A) = d(P;\text{direttrice})$

distanza fra due punti = distanza fra punto e retta

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+5)^2} = \frac{|0\,x+1\,y+6|}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

$$(x+1)^2+(y+5)^2 = (y+6)^2$$

$$x^2+1+2x+y^2+10y+25 = y^2+36+12y$$

$$-2y = -x^2-2x+10$$

$$y = \frac{1}{2}x^2+x-5$$

Procedimento inverso:

- data l'equazione della parabola trarre: vertice, fuoco, asse simmetria, direttrice

$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ $\quad \Delta = b^2-4ac = 1+10 = 11$

$V\left(-1;-\frac{11}{2}\right)$

$F\left(-\frac{b}{2a};\frac{1-\Delta}{4a}\right)$

$F\left(-1;-\frac{10}{2}\right)$ cioè $F(-1;-5)$

asse simmetria:

$$x = -\frac{b}{2a} = -1$$

direttrice:

$$y = \frac{-1+\Delta}{4a} = \frac{-1+11}{2} = 5$$

Esercizio

Trovare l'equazione della parabola con asse di simmetria // asse x, passante per il punto $A(1;3)$ e vertice $V(2;4)$

$y = ax^2 + bx + c$ (equaz.)

$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 4 \\ 3 = a+b+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = 4a \\ -\frac{b^2-4ac}{4a} = 4 \\ a = b+c-3 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4a \\ \frac{-16a^2-4ac}{4a} = 4 \\ a = b+c-3 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4a \\ \frac{-4a(4a-c)}{4a} = 4 \\ 3 = a+b+c \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4a \\ -4a+c = 4 \\ 3 = a+b+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ c = 4a+4 \\ a = -3-4a+4a+4 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4a \\ c = 4a+4 \\ a = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 4 \\ c = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{y = -x^2 + 4x}$$

Esercizio

Det. le intersezioni delle 2 parabole:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{16}x^2 + 5 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 6 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{16}x^2 + 5 = \frac{1}{2}x^2 - 6$$

$$\frac{-3x^2+80}{16} = \frac{8x^2-96}{16}$$

$$-17x^2 = -176$$

$$x = \pm 4$$

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{16}(4)^2 + 5 \\ y = \frac{1}{2}(-4)^2 - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ (y = 2 \text{ non necessario}) \end{cases}$$

$P_1(4;2) \quad P_2(-4;2)$

Esercizio

Det. il valore di h, nella retta $y=3x+h$, affinché risulti tangente alla parabola $y=x^2-6$

($y=mx+q$ fascio improprio)

$$\begin{cases} y=3x+h \\ y=x^2-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+h=x^2-6 \\ x^2-3x-h-6=0 \end{cases}$$

$\Delta=0$

$b^2-4ac=0$

$9-4(-h-6)=0$

$9+4h+24=0$

$4h=-33$

$h=-\frac{33}{4}$

Esercizio

Det. K nell'equazione $y=x^2-3+K$ perché risulti tang alla retta $y+2x=1$

$$\begin{cases} y=x^2-3+K \\ y=-2x+1 \end{cases}$$

$\Delta=0$

$b^2-4ac=0$

$x^2-3+K=-2x+1$

$x^2+2x+K-4=0$

$4-4(K-4)=0$

$4-4K+16=0$

$-4K=-20$

$K=5$

Esercizio

Determinare la parabola di equaz $y = x^2 - 4$. Det la misura del segmento che essa stacca sulla retta di equazione $y = 5$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$x^2 - 4 = 5$$
$$x^2 = +9$$
$$x = \pm 3$$
$$P_1(3;5) \quad P_2(-3;5)$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(6)^2 + 0} = \sqrt{36} = 6$$

Esercizio

Det. le equazioni delle tang alla parabola di equazione $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$ uscenti dal punto $A(1;1)$

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$
$$(y - 1) = m(x - 1)$$
$$y - 1 = mx - m$$

$$y = mx - m + 1$$

$$mx - m + 1 = -\frac{1}{4}x^2 + x$$
$$\frac{1}{4}x^2 - x + mx - m + 1 = 0$$
$$\frac{1}{4}x^2 - x(1 - m) - m + 1 = 0$$

$$\Delta = 0$$
$$(-m + 1)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)(-m + 1)$$
$$m^2 - m = 0$$
$$m(m - 1) = 0$$
$$m = 0, \quad m = 1$$

$y = 1$ sono le due equaz.
$y = x$

Ellisse

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Formula normale (ha centro nell'origine)

Eccentricità: quanto è schiacciata rispetto a una circonferenza

Per ricavare y ...

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$y = \pm\sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$$

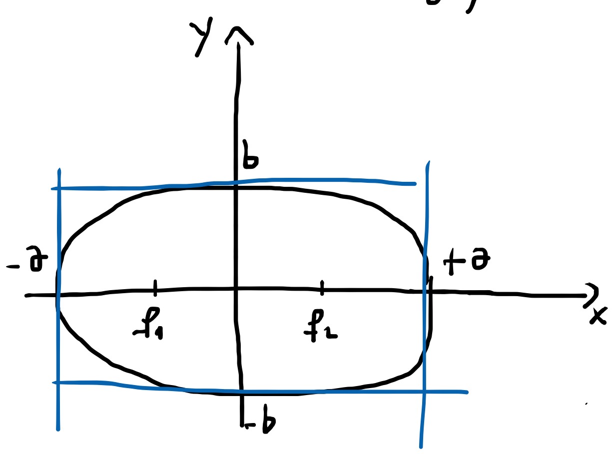
C.A $1 - \frac{x^2}{a^2} > 0$

$$-\frac{x^2}{a^2} \geq -1$$

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1$$

$$x^2 \leq a^2$$

$$-a \leq x \leq a$$



Esercizio

Det. le intersezioni dell'ellisse $3x^2 + 5y^2 = 57$ con la retta $2y + 3x = 0$

$$\frac{5y^2}{57} + \frac{3x^2}{57} = 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{57}{3}} + \dfrac{y^2}{\frac{57}{5}} = 1 \\ 2y + 3x = 0 \Rightarrow 2y = -3x \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{\frac{57}{3}} + \frac{\left(-\frac{3}{2}x\right)^2}{\frac{57}{5}} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{57}{3}} + \frac{\frac{9}{4}x^2}{\frac{57}{5}} = 1$$

$$\frac{3x^2}{57} + \frac{5\left(\frac{9}{4}x^2\right)}{57} = 1 \Rightarrow 3x^2 + \frac{45}{4}x^2 = 57 \Rightarrow 12x^2 + 45x^2 = 228$$

$$57x^2 = 228$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{3}{2}(2) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{3}{2}(-2) = 3 \end{cases}$$

Esercizio

Det. l'equazione dell'ellisse che abbia $A(5)$ e $B(3)$ come semiassi. Det. i fuochi e la distanza focale

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ equaz. ellisse

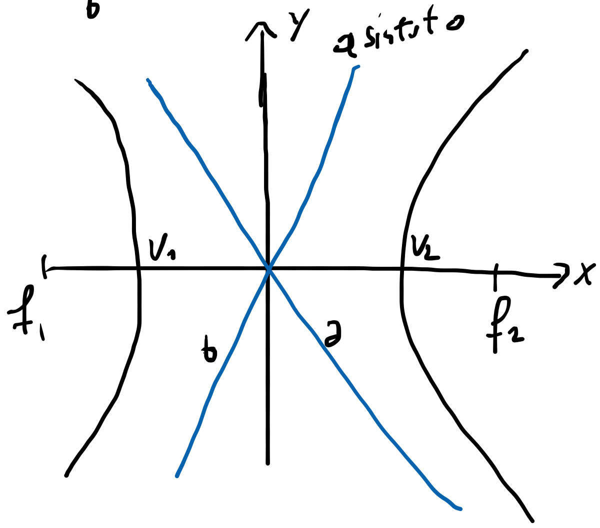
$c=\sqrt{a^2-b^2}=4$

i fuochi sono $f_1(-4;0)$ ed $f_2(4;0)$

la distanza focale è 8 cioè $2c=8$

Iperbole

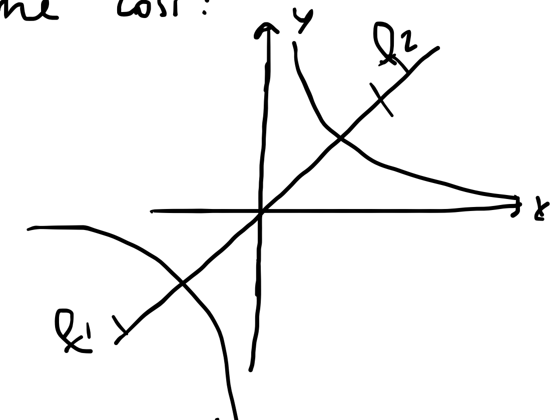
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



a = semiasse trasverso

b = semiasse non trasverso

Attraverso una rotazione di 45° posso vederla anche così:

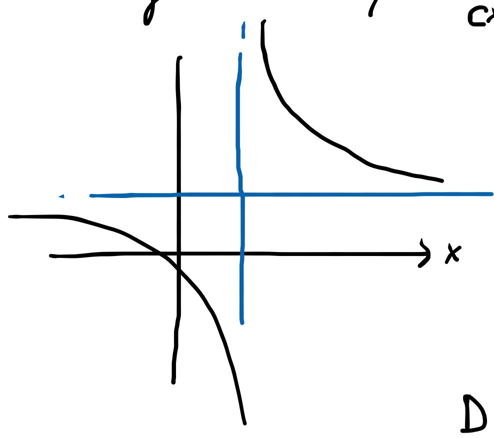


$x \cdot y = k$

In questo caso gli asintoti sono gli assi cartesiani

Gli asintoti hanno equazione $y = \pm \frac{b}{a} x$

Funzione omografica $y = \frac{ax+b}{cx+d}$



$y = \frac{a}{c}$

$x \neq -\frac{d}{c}$

$D = \left(-\infty; -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$

Esercizio

Det. le equazioni degli asintoti dell'iperbole di equazione $3x^2 - 4y^2 = 48$

$y = mx$

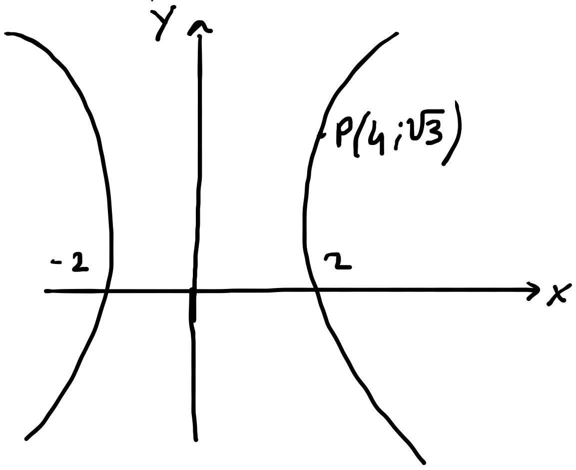
$$\frac{3x^2}{48} - \frac{4y^2}{48} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1 \qquad a^2 = 16 \qquad b^2 = 12$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{12}}{4} x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

Esercizio

Det. l'equazione dell'iperbole sapendo che ha il semiasse trasverso (a) di misura 2 e passa per il punto $P(4;\sqrt{3})$



$a=2$

$$\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{4^2}{2^2}-\frac{3}{b^2}=1$$

$$4-\frac{3}{b^2}=1 \Rightarrow \quad 4b^2-3=b^2$$

$$3b^2=3$$

$$b=\pm 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1} \quad \text{forma normale}$$

Esercizio

Det. le coordinate degli eventuali punti comuni alla retta e all'iperbole di equazione rispettivamente $x-y-1=0$, $9x^2-25y^2=225$

$$\begin{cases} x=y+1 \\ \dfrac{9x^2}{225}-\dfrac{25y^2}{225}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=y+1 \\ \dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{(y+1)^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$$

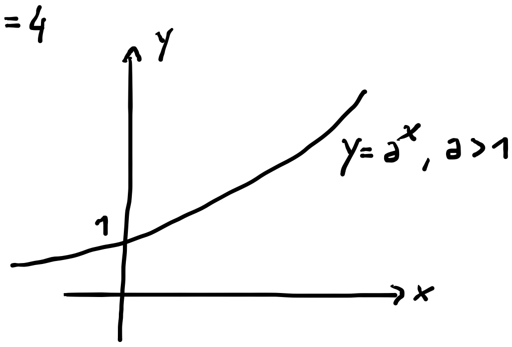
La retta data è un iperbole quindi no soluzione.

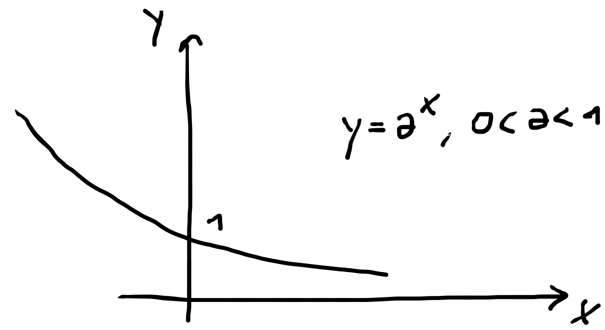
Equazione Esponenziale

$3^x = 81$

$3^x = 3^4$

$x = 4$





$y = a^x \quad , a > 0 \, , a \neq 1$

perché si pone $a > 0$?

$(-2)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \quad \nexists$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

$(-2)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^2} = \sqrt[4]{4}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{81}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

$x = 4$

$\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1} = \frac{125}{64}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$

$\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$

$x - 1 = -3$

$x = -2$

$2^x + 1 = 0$

$2^x = -1$

$a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

quindi $\nexists$ soluz.

$3^x = \frac{1}{27}$

$3^x = 3^{-3}$ l'esponente può essere negativo

$x = -3$

$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 = \frac{8}{27}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

$(16^x)^{2x-1} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^2$

$(2^{4x})^{2x-1} = \left[2^2\right]^2$

$2^{8x^2-4x} = 2^4$

$8x^2 - 4x = 4$

$8x^2 - 4x - 4 = 0$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$

$\frac{3^{x^2+5}}{27^{2x}} = \frac{1}{3^{x+1}}$

$\frac{3^{x^2+5}}{3^{6x}} = \frac{1}{3^{x+1}}$

$x^2 + 5 - 6x = -x - 1$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-3)(x-2) = 0$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$

$$3^{x-2} \cdot 5^{x-2} = 1$$

$$15^{x-2} = 1$$

$$x = 2$$

$$6^{x-3} \cdot 2^{x-3} = 1$$

$$12^{x-3} = 1$$

$$x = 3$$

$$\sqrt[1+x]{2^{3x}} = \sqrt[x]{2^{x+2}} \cdot \sqrt[2x]{2^{x-2}} \qquad \left[\, 2^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{2^m} \,\right]$$

CE

$x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$x \neq 0$

$$2^{\frac{3x}{1+x}} = 2^{\frac{x+2}{x}} \cdot 2^{\frac{x-2}{2x}}$$

$$\frac{6x^2}{2x(x+1)} = \frac{(2x+4)(x+1) + (x-2)(x+1)}{2x(x+1)}$$

$$6x^2 = 2x + 2x^2 + 4 + 4x + x + x^2 - 2 - 2x$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{3} \quad \nexists \end{cases}$$

l'indice della radice non può essere negativo

Esercizio

$$3^{x+1} - \frac{3^x}{9} + 3^x = 35$$

$$3^x \cdot 3 - 3^{x-2} + 3^x = 35$$

$$(3^x = y)$$

$$3y - y \cdot 3^{-2} + y = 35$$

$$3y - \frac{y}{9} + y = 35$$

$$4y - \frac{y}{9} = 35$$

$$\frac{36y - y}{9} = \frac{315}{9}$$

$$35y = 315$$

$$y = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

Esercizio

$$3^{2x} - 3^x - 6 = 0$$

$$(3^x = y)$$

$$y^2 - y - 6 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \quad y_1 = 3, \quad y_2 = -2$$

$$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$3^x = -2 \Rightarrow \nexists$ soluz.

Esercizio

$$2^{2x-1} + 2^{2x+1} = 4^x + 6$$

$$2^{2x} \cdot 2^{-1} + 2^{2x} \cdot 2^1 = 2^{2x} + 6$$

$$(2^x = t)$$

$$\frac{t^2}{2} + 2t = t^2 + 6$$

$$t^2 + 4t^2 = 2t^2 + 12$$

$$3t^2 = 12$$

$$t^2 = 4$$

$$t = 2$$

$$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$2^x = -2 \Rightarrow \nexists$ IMP.

Logaritmi

$$2^{x+1} = 5^{1-x}$$

$$\log_2 (x+1) = \log_5 (1-x)$$

$$(x+1)\log 2 = (1-x)\log 5$$

$$x\log 2 + \log 2 = \log 5 - x\log 5$$

$$x\log 2 + x\log 5 = \log 5 - \log 2$$

$$x(\log 2 + \log 5) = \log 5 - \log 2$$

$$\boxed{x\log 10} = \log\frac{5}{2} \qquad [\log_a a = 1]$$

$$x = \log\frac{5}{2}$$

Esercizio

$$\frac{2^x \cdot 5^{x+1}}{5} = \frac{1}{3^x}$$

$$\frac{2^x \cdot 5^x \cancel{5}}{\cancel{5}} = 3^{-x}$$

$$\log(2^x \cdot 5^x) = \log 3^{-x}$$

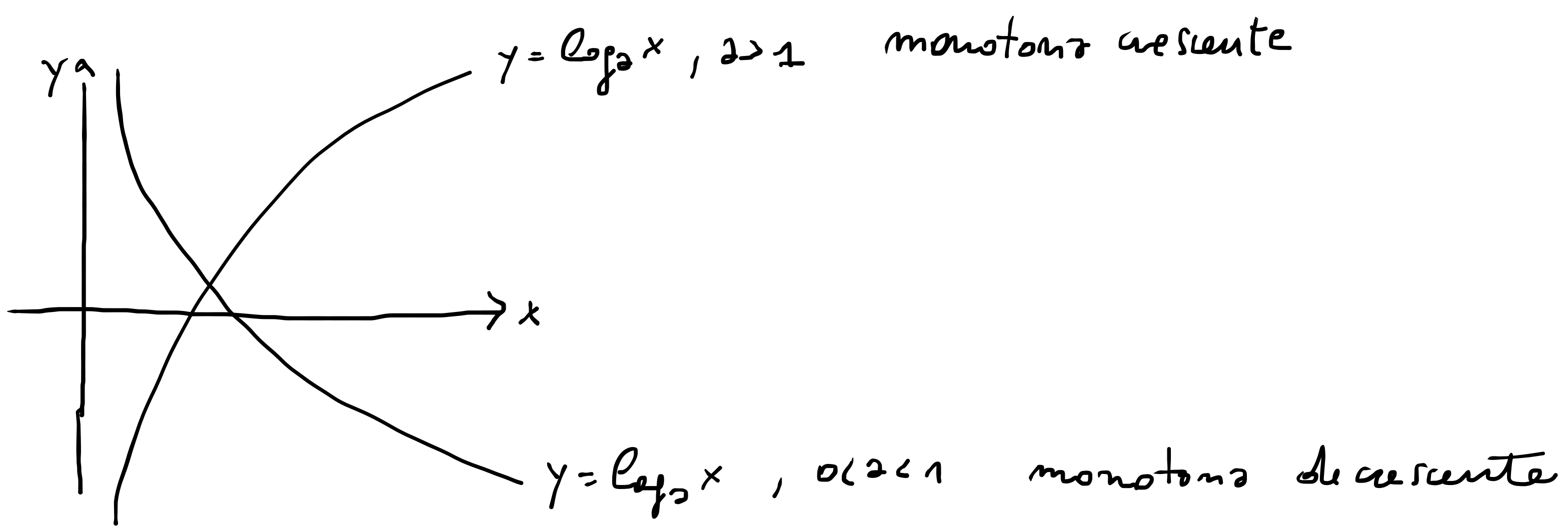
$$\log 10^x = \log 3^{-x}$$

$$x\log 10 = -x\log 3$$

$$x(\log 10 + \log 3) = 0 \qquad [\log a + \log b = \log(a \cdot b)]$$

$$x\log 30 = 0$$

$$x = 0$$



Esercizio

$$\frac{2^x \cdot 15}{2^3+1} = 40 \cdot 3^{x-4}$$

$$\frac{2^x \cdot 15}{9} = \frac{40 \cdot 3^x}{81} \quad (3^{-4})$$

$$\frac{9(2^x) \cdot 15}{81} = \frac{40(3^x)}{81}$$

$$\frac{2^x \cdot 135}{81} = \frac{40(3^x)}{81}$$

$$2^x \cdot 27 = 8 \cdot 3^x$$ (ho diviso per 5)

$$\log(2^x \cdot 27) = \log(8 \cdot 3^x)$$

$$\log 2^x + \log 27 = \log 8 + \log 3^x$$

$$x(\log 2 - \log 3) = \log 8 - \log 27$$

$$x \log \frac{2}{3} = \log \frac{8}{27}$$

$$x \log \frac{2}{3} = \log\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$x \log \frac{2}{3} = 3 \log \frac{2}{3}$$

$$x = 3$$

Equazioni Logaritmiche

$\log_{\frac{3}{4}} x = 1 \Rightarrow \log_{\frac{3}{4}} x = \log_{\frac{3}{4}} \frac{3}{4}$ C.A. $x>0$

$x = \frac{3}{4}$

Esercizio

$2\log_{\frac{2}{3}}(x-1) = -2$

C.A. $x-1>0$

$x>1$

$\log_{\frac{2}{3}}(x-1)^2 = -2 \cdot 1$

$\log_{\frac{2}{3}}(x-1)^2 = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

$(x-1)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

$x^2 - 2x + 1 - \frac{9}{4} = 0$

$4x^2 - 8x - 5 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{4}$ — $\frac{5}{2}$; $-\frac{3}{2}$ NON ACCETTABILE

formula ridotta: $x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$

Esercizio

$\log_3(3x-4) = 2$

$\log_3(3x-4) = 2\log_3 3$

$\log_3(3x-4) = \log_3 3^2$

CE: $3x-4>0$

$x > \frac{4}{3}$

$3x-4 = 9$

$3x = 13$

$x = \frac{13}{3}$ ACCETTABILE

Esercizio

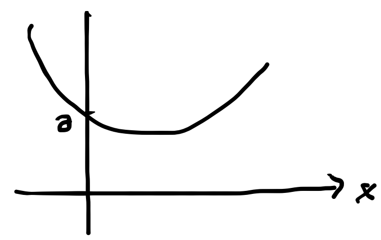
$$\log_{\frac{4}{3}}(x^2-x+1)=-1$$

C.A. $x^2-x+1>0$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}$ $\quad \Delta=-3$

$\Delta<0$ $\nexists$ soluz.

$\forall x\in\mathbb{R}$



$$\log_{\frac{4}{3}}(x^2-x+1)=\log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$$

$x^2-x+1=\frac{3}{4}$

$4x^2-4x+4-3=0$

$4x^2-4x+1=0$

ridotta: $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{4}=\frac{2\pm0}{4}=\frac{1}{2}$ accettabile

Esercizio

$$\log_3|3-2x|=2$$

C.A. $3-2x\neq0$

$-2x\neq-3$

$x\neq\frac{3}{2}$

$\log_3|3-2x|=\log_3(3)^2$

$|3-2x|=9$

1° CASO: $3-2x>0$

$3-2x=9$

$x_1=\frac{9-3}{-2}=-3$ ACC.

2° CASO $3-2x<0$

$-3+2x=9$

$2x=9+3$

$x=6$ ACC.

Modulo (definizione)

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } \geq 0 \\ -x \text{ se } x<0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ se } f(x)<0 \end{cases}$$

Altro modo per risolvere l'esercizio precedente

$$|9-2x| = 9$$

$$|9-2x|^2 = 9^2$$ si può elevare perché entrambi i membri sono sicuramente positivi

$$(3-2x)^2 = 81$$

$$9+4x^2-12x-81=0$$

$$4x^2-12x-72=0$$

$$2x^2-6x-36=0$$

$$x^2-3-18=0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2} \begin{cases} 6 \text{ ACC.} \\ -3 \text{ ACC.} \end{cases}$$

Esercizio

$$\log_{10}(x+1) = 2\log 2 \qquad CA: \; x+1>0 \quad x>-1$$

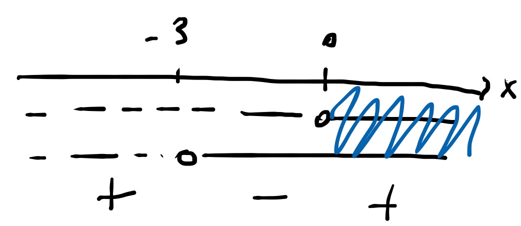
$$x+1=4$$

$$x=3 \quad \text{ACC.}$$

Esercizio

$$\log_{10} x + \log_{10}(x+3) = 1$$

$$CA \begin{cases} x>0 \\ x+3>0 \Rightarrow x>-3 \end{cases}$$



$\boxed{x>0}$

$$\log_{10} x + \log_{10}(x+3) = \log_{10} 10$$

$$\log_{10}(x(x+3)) = \log_{10} 10$$

$$x^2+3x=10$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \begin{cases} -5 \text{ NON ACC.} \\ \underline{\underline{2 \text{ ACC.}}} \end{cases}$$

Esercizio

$4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$

$2^{2x} + 2^x \cdot 2 - 3 = 0$

$(2^x = t)$

$t^2 + 2t - 3 = 0$

LA RIDOTTA

$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$

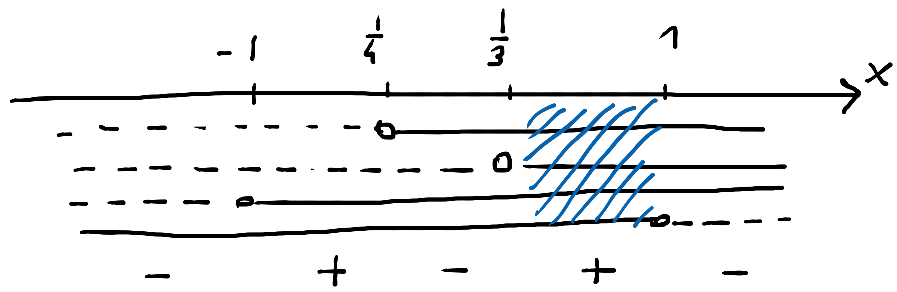
$2^x = -3^1 \Rightarrow x = 1 \; \nexists$

$2^x = 1^0 \Rightarrow x = 0$ ACC.

Esercizio

$\log(4x-1) - \log(3x-1) = \log(1+x) - \log(1-x)$

C.A. $\begin{cases} 4x-1>0 \\ 3x-1>0 \\ 1+x>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>\frac{1}{4} \\ x>\frac{1}{3} \\ x>-1 \\ x<1 \end{cases}$



$\frac{1}{3} < x < 1$

$\log(4x-1) + \log(1-x) = \log(1+x) + \log(3x-1)$

$\log[(4x-1)(1-x)] = \log[(1+x)(3x-1)]$

$4x - 4x^2 - 1 + x = 3x - 1 + 3x^2 - x$

$-7x^2 + 3x = 0$

$x(-7x+3) = 0$

$x = 0$ NON ACC.

$-7x + 3 = 0$

$-7x = -3$

$x = 3/7$ ACC

Esercizio

$$3\log_2^2 x + 5\log_2 x - 2 = 0$$

CA : $x > 0$

$$\log_2 x = t$$

$$3t^2 + 5t - 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25+24}}{6}$$

$\frac{2}{3}$ ACC.

$\frac{-14}{6} = -\frac{7}{3}$ NON ACC.

Disequazioni Esponenziali

$$2^x > 128$$
$$2^x > 2^7$$
$$x > 7$$

$$3^x > \frac{1}{9}$$
$$3^x > 3^{-2}$$
$$x > -2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{8}{27}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$\frac{2}{3}$ è più piccolo di 1 quindi cambio il verso

$$x > 3$$

Infatti

monotona decrescente

$0 < a < 1$

Esercizio

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x - \frac{4}{9} < 0$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^2 < 0$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} < 0$$

$$x + 2 < 0$$
$$x < -2$$

Esercizio

$$3^{1-4x} > 9^{x+1}$$

$$1 - 4x > 2(x+1)$$
$$1 - 4x > 2x + 2$$
$$-6x > 1$$
$$\Rightarrow x < -\frac{1}{6}$$

Esercizio

$\sqrt{2^x} \geq 8 \sqrt[3]{4^{x-1}}$

$2^{\frac{x}{2}} \geq 2^3 \cdot 4^{\frac{x-1}{3}}$

$2^{\frac{x}{2}} \geq 2^3 \cdot 2^{\frac{2(x-1)}{3}}$

$\frac{x}{2} \geq 3 + \frac{2x-2}{3}$

$\frac{3x}{\cancel{6}} \geq \frac{18+4x-4}{\cancel{6}}$

$-x \geq 14$

$x \leq -14$

Esercizio

$2^{\frac{2x+4}{x}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

$2^{\frac{2x+4}{x}} < \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2}$

$2^{\frac{2x+4}{x}} < 2^4$

$\frac{2x+4}{x} < 4$

$\frac{2x+4}{x} - 4 < 0$

$\frac{2x+4-4x}{x} < 0$

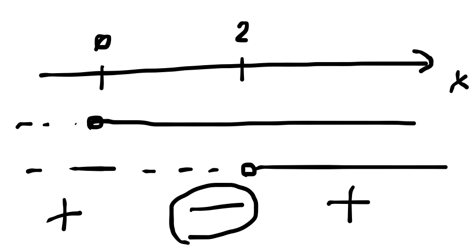
D: $x > 0$

N: $-2x + 4 < 0$

$-2x < -4$

$2x > 4$

$x > 2$



$0 < x < 2$

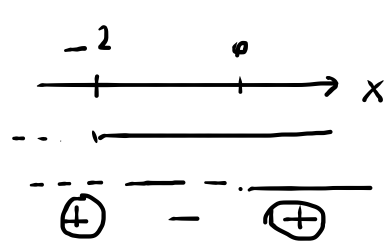
Esercizio

$3^{x^2+2x} \geq 1$

$x^2 + 2x \geq 0$

$x(x+2) \geq 0$

$x \geq -2$ $x \geq 0$



valori esterni

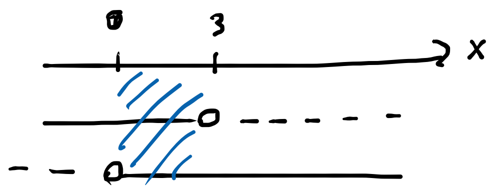
$x \geq -2 \vee x \geq 0$

Disequazioni Logaritmiche

$\log_2 3 > \log_2 x$

C.E. $x > 0$

$3 > x$



$0 < x < 3$

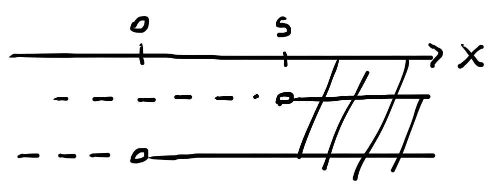
Esercizio

$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 5$

N.B. la base e' minore di 1 (anche con le esponenziali)

C.E $x > 0$

$x > 5$



$x > 5$

C.E $\log(x) > 0$

$\sqrt{} \longrightarrow \geq 0$ a nominatore

> 0 a denominatore

espressione a denom. $\neq 0$

equazioni fratte $\rightarrow$ C.E.

disequaz. fratte $\rightarrow$ No C.E

C.E. $3x + 5 > 0$

$3x > -5$

$x > -\frac{5}{3}$

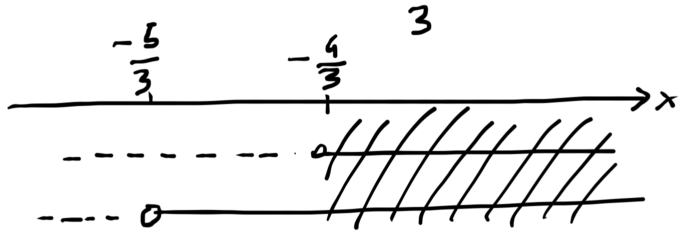
$\log_{\frac{1}{2}} (3x + 5) < 0$

$\log_{\frac{1}{2}} (3x + 5) < \log_{\frac{1}{2}} 1$

$3x + 5 > 1$

$3x > -4$

$x > -\frac{4}{3}$



$x > -\frac{4}{3}$

Esercizio

$\log_3\left(\log_3(2x-5)\right)<0$

Le C.E. sono multiple, perché log di log

$\log_3\left(\log_3(2x-5)\right)<\log_3 1$

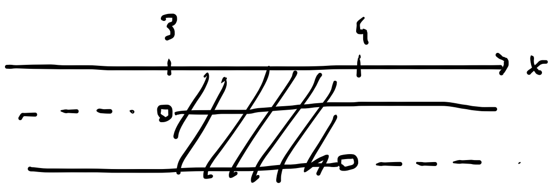
$\log_3(2x-5)<1$

$\log_3(2x-5)<\log_3 3$

$2x-5<3$

$2x<8$

$x<4$



$3<x<4$

C.E. $2x-5>0$

$2x>5$

$x>\frac{5}{2}$

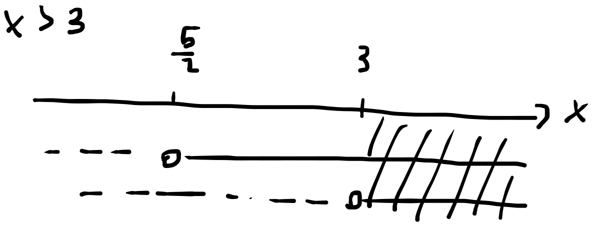
$\log_3(2x-5)>0$

$\log_3(2x-5)>\log_3 1$

$2x-5>1$

$2x>6$

$x>3$



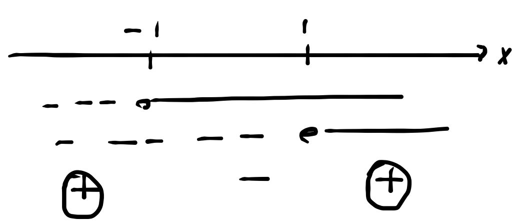
$x>3$

Esercizio

$\log_{\frac{2}{5}}\frac{x+1}{x-1}\geq 0$

C.E. $x+1>0 \Rightarrow x>-1$

$x-1>0 \Rightarrow x>1$



$-1<x<1$

$\log_{\frac{2}{5}}\frac{x+1}{x-1}\geq\log_{\frac{2}{5}}1$

$\frac{x+1}{x-1}\leq 1$

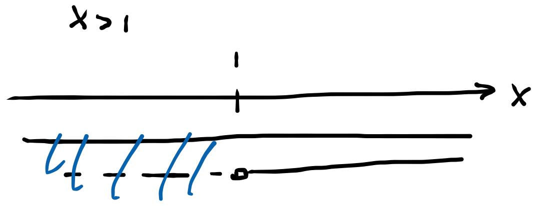
$\frac{x+1}{x-1}\leq\frac{x-1}{x-1}$

$\frac{2}{x-1}\leq 0$

N: $2>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

D: $x-1>0$

$x>1$



$\boxed{x\leq 1}$

Esercizio

$\log_2(1-x^2)-1<0$

C.E. $-x^2+1>0$

$-x^2>-1$

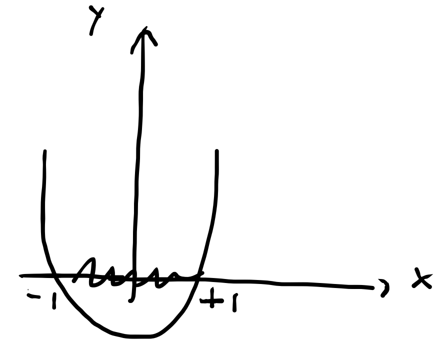
$x^2<1$

equaz. ass.

$x^2=1$

$x=\pm 1$

val. interni



$-1<x<1$

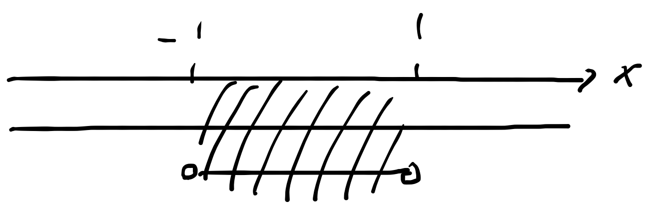
$\log_2(1-x^2)<1$

$\log_2(1-x^2)<\log_2 2$

$1-x^2<2$

$-x^2<1$

$x^2>-1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$\boxed{-1<x<1}$

Esercizio

$\log_5^2 x+\log_5 x-2>0$

CE: $x>0$

$\log_5^2 x+\log_5 x>2$

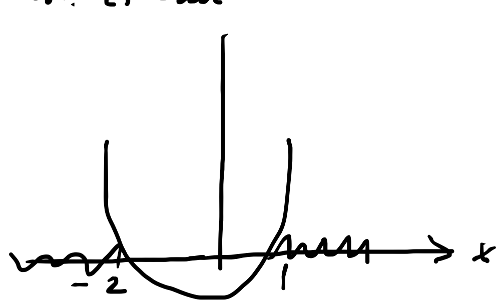
$\log_5 x=t$

$t^2+t-2>0$

equaz. ass. $t^2+t-2=0$

$t_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm3}{2}$ $\begin{array}{l} -2 \\ 1 \end{array}$

val. esterni



$t<-2 \ \vee \ t>1$

$\log_5 x<-2 \ \vee \ \log_5 x>1$

$\log_5 x < -2$

$\log_5 x < -2 \log_5 5$

$\log_5 x < \log_5 5^{-2}$

$\log_5 x < \log_5 \frac{1}{5^2}$

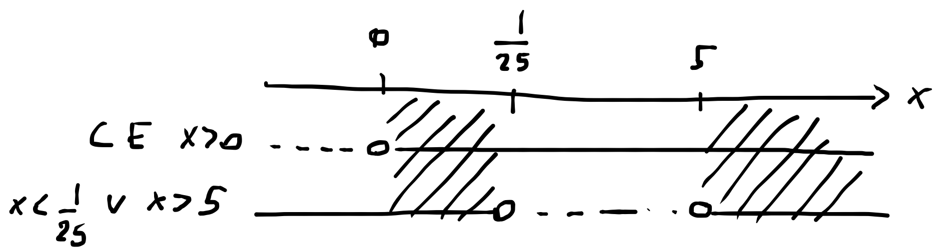
$\log_5 x < \log_5 \frac{1}{25}$

$x < \frac{1}{25}$

$\log_5 x > 1$

$\log_5 x > \log_5 5$

$x > 5$



$0 < x < \frac{1}{25} \lor x > 5$

Ripasso disequazione logaritmica

$\log_{\frac{1}{2}}(3x+5) > 1$

L'argomento del logaritmo non può essere ≥ 0

$\log_a a = 1$

CE

$3x+5 > 0$

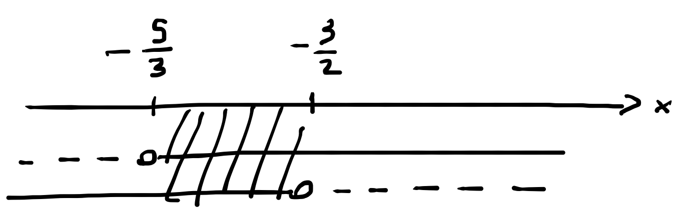
$x > -\frac{5}{3}$

$\log_{\frac{1}{2}}(3x+5) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$

$3x+5 < \frac{1}{2}$ Ho cambiato il segno perché $\frac{1}{2}$ è compreso tra 0 e 1

$6x+10 < 1$

$x < -\frac{3}{2}$



$-\frac{5}{3} < x < -\frac{3}{2}$

Esercizio

$$\log_2(1-x^2)-1<0$$

C.E: $1-x^2>0$

$-x^2>-1$

$x^2<1$

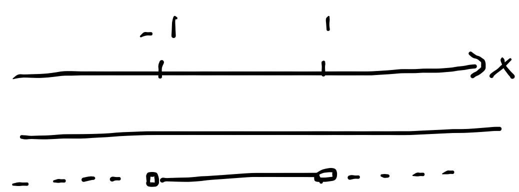
$-1<x<1$

$$\log_2(1-x^2)-\log_2 2<0$$

$$(1-x^2)-2<0$$

$$-x^2<1$$

$$\forall x\in\mathbb{R}$$



$S\,(-1,1)$

Correzione Verifica

a) $3\left[\frac{x+5}{2} - 2(x-1)\right] - 8 \leq \frac{5-9x}{2}$

$3\left[\frac{x+5}{2} - 2x + 2\right] - 8 - \frac{5-9x}{2} \leq 0$

$3\left(\frac{x+5-4x+4}{2}\right) - 8 - \frac{5-9x}{2} \leq 0$

$\frac{3x+15-12x+12}{2} - 8 - \frac{5-9x}{2} \leq 0$

$\frac{-9x+27}{2} - 8 - \frac{5-9x}{2} \leq 0$

$\frac{\cancel{-9x}+27-16-5+\cancel{9x}}{\cancel{2}} \leq 0$

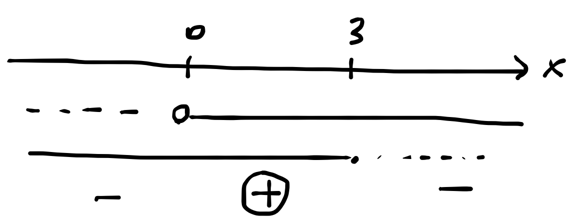
$6 \leq 0$ $\quad\quad$ $\nexists$ soluz.

b) $\frac{3-x}{x} \geq 0$

$N>0: \; 3-x \geq 0$ $\quad\quad$ $D>0: \; x>0$

$-x \geq -3$

$x \leq 3$



$0 < x \leq 3$

c)
$-5x^2 + 4x < 0$

$5x^2 - 4x > 0$

equaz. ass $5x^2 - 4x = 0$

$x(5x-4) = 0$

$x = 0$

$x = \frac{4}{5}$ $\quad$ val. esterni

$x < 0 \;\cup\; x > \frac{4}{5}$

d) $3x^2-7>0$

equaz ass. $3x^2-7=0$

$x^2=\frac{7}{3}$

$x=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$ val. esterni

$x<-\sqrt{\frac{7}{3}} \ \vee \ x>\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$

$x<-\frac{\sqrt{21}}{3} \ \vee \ x>\frac{\sqrt{21}}{3}$

e)
$$\begin{cases}\frac{3}{4}x+1<\frac{5}{2}\\ 2(x+5)<3(1+x)\end{cases}$$

$2x+10<3+3x$

$2x-3x+10-3<0$

$-x+7<0$

$-x<-7$

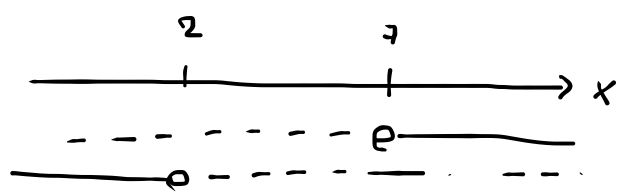
$x>7$

$\frac{3}{4}x+1<\frac{5}{2}$

$\frac{3x+4}{\cancel{4}}<\frac{10}{\cancel{4}}$

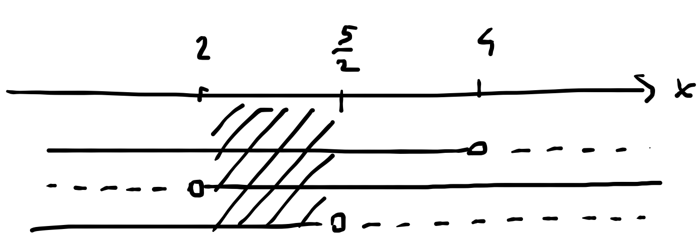
$3x<6$

$x<2$



$S=\emptyset$

f)
$$\begin{cases}3x-1<4+x\\ x-2>0\\ 2x-1<x+3\end{cases} \qquad \begin{cases}2x<5 \Rightarrow x<\frac{5}{2}\\ x>2\\ x<4\end{cases}$$



$2<x<\frac{5}{2}$

g) $\begin{cases} 5x^2-4x \le 0 \\ 2x^2+5x-3 \le 0 \end{cases}$

$5x^2-4x=0$ (equaz. ass.)

$x(5x-4)=0$

$x=0$

$x=\frac{4}{5}$

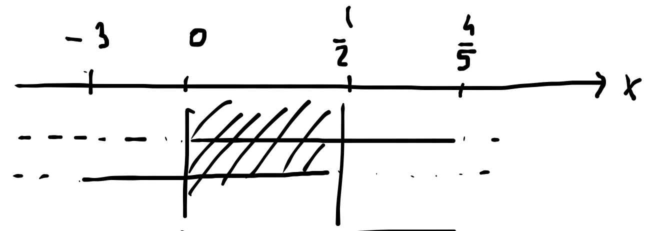
valori interni

$0 \le x \le \frac{4}{5}$

$2x^2+5x-3=0$ (equaz. ass.)

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{-12}{4} = -3 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

(val. interni) $-3 \le x \le \frac{1}{2}$



$\boxed{0 \le x \le \frac{1}{2}}$

$S = \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$

h) $\begin{cases} x^2-4 \ge 0 \\ \frac{2x-1}{x-2} \ge 0 \end{cases}$

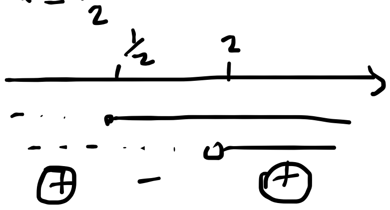
$x^2-4=0$

$x^2=4$

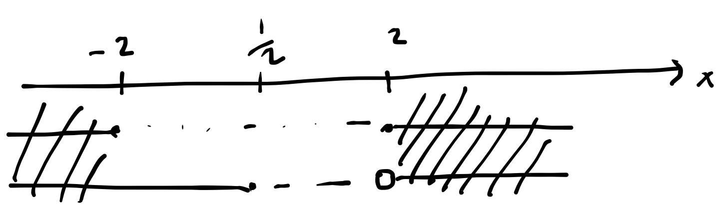
(val. esterni) $x \le -2 \vee x \ge 2$

$2x-1 \ge 0$ $\qquad$ $x-2>0$

$x \ge \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x>2$



$x \le \frac{1}{2} \vee x>2$



$\boxed{x \le -2 \vee x>2}$

c) $x^8 - 21x^4 + 80 = 0$

$(x^4 = t)$

$t^2 - 21t + 80 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 320}}{2} = \frac{21 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{21 \pm 11}{2} = \begin{cases} 16 = t_1 \\ 5 = t_2 \end{cases}$$

$x^4 = 16$

$x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2$

$x^4 = 5$

$x = \pm \sqrt[4]{5} = \pm 5^{\frac{1}{4}}$

e) $9x^4 - 19x^2 + 2 = 0$

$(x^2 = t)$

$9t^2 - 19t + 2 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 72}}{18} = \frac{19 \pm \sqrt{289}}{18} = \frac{19 \pm 17}{18} \begin{cases} \frac{1}{9} \\ 2 \end{cases}$$

m) $\begin{cases} 3x - y - z = 8 \\ x + y = 1 \\ 2y - z = -1 \end{cases}$

$x = 1 - y$

sostituisco nella prima eq.

$3(1-y) - y - z = 8$

$3 - 3y - y - z = 8$

$-4y - z = 5$

$-z = 5 + 4y$

$z = -5 - 4y$ sostituisco nella terza

$2y + 5 + 4y = -1$

$6y = -6$

$\underline{y = -1}$

$\underline{x = 1 - (-1) = 2}$

$\underline{z = -5 - 4(-1) = -1}$

o) $\dfrac{x-2}{x+3} + \dfrac{x+2}{2-x} = \dfrac{10}{x^2+x-5}$

$x^2+x-5=0$

$(x+3)(x-2)$

$$\frac{\qquad}{(x+3)(x-2)} = \frac{\qquad}{(x+3)(x-2)}$$

CE: $x+3 \neq 0$

$x \neq -3$

$x+2 \neq 0$

$x \neq -2$

$$\frac{(x-2)^2-(x+2)(x+3)-10}{\cancel{(x+3)(x-2)}} = 0$$

$x^2-4x+4+x^2+2x+3x+6-10=0$

$2x^2+x=0$

$x(2x+1)=0$

$x=0$

$x=-\frac{1}{2}$ ACCETTABILI

p) $7^{-x+2} = 3^{x+1}$

$\log 7^{-x+2} = \log 3^{x+1}$ $\quad [\log_{10} a^b = b\log_{10} a]$

L'esponente diventa fattore

$(-x+2)\log 7 = (x+1)\log 3$

$-x\log 7 + 2\log 7 = x\log 3 + \log 3$

$-x\log 7 - x\log 3 = -2\log 7 + \log 3$

$x(\log 7 + \log 3) = \log 49 - \log 3$

$x\log 21 = \log \frac{49}{3}$

$$x = \frac{\log \frac{49}{3}}{\log 21}$$

q) $5^{2x} + 5^x - 7 = 0$

$(5^x = t)$

$t^2 + t - 7 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+28}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$5^x = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}$ imp $\nexists$

$5^x = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}$

$\log_5 5^x = \log_5 \left(\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right)$ $\qquad (\log_a a = 1)$

$x \log_5 5 = \log_5 \left(\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$x = \log_5 \left(\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right)$

r) $\log_5(x^2-4) - \log_5(x+2) = 2$

CE: $x^2 - 4 > 0$

$x^2 = 4$

val. esterni $x < -2 \vee x > 2$

$\log_5 \left(\frac{x^2-4}{x+2}\right) = \log_5 5^2$ $\qquad (\log_5 5^2 = 2 \log_5 5)$

$\frac{x^2-4}{x+2} = 25$

$\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = 25$

$x = 27$ ACC.

s) $\sqrt{2^x} \geq 8 \sqrt[3]{4^{x-1}}$

$2^{\frac{x}{2}} \geq 8 \cdot 4^{\frac{x-1}{3}}$

$2^{\frac{x}{2}} \geq 2^3 \cdot 2^{2\left(\frac{x-1}{3}\right)}$

$\frac{x}{2} \geq 3 + \frac{2x-2}{3}$

$\frac{3x}{\cancel{6}} \geq \frac{18 + 4x - 4}{\cancel{6}}$ $\rightarrow$

$3x \geq 14 + 4x$

$-x \geq 14$

$x \leq -14$

Esercizio

$\log_{\frac{1}{2}}(3x+5) > 1$

C.E: $3x+5>0$

$3x>-5$

$x>-\frac{5}{3}$

$\log_{\frac{1}{2}}(3x+5) > \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

$3x+5>\frac{1}{2}$

$6x+10>1$

$6x>-9$

$x>-\cancel{\frac{9}{6}}$

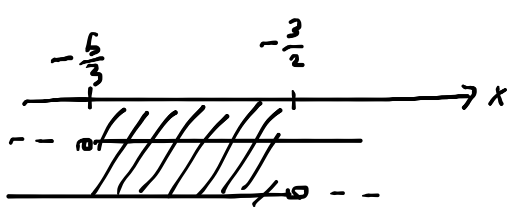
$x>-\frac{3}{2}$

$\uparrow$

No

La base è compresa tra 0 e 1
quindi devo cambiare il segno

$x<-\frac{3}{2}$



$-\frac{5}{3}<x<-\frac{5}{2}$

$S=\left(-\frac{5}{3};-\frac{5}{2}\right)$

Equazioni esponenziali e logaritmiche

$$\frac{1}{7^x+1} + \frac{7^x}{49^x-1} = \frac{2\cdot 7^x - 1}{7^x - 1}$$

C.A.

$7^x - 1 \neq 0$ $\qquad$ $7^x + 1 \neq 0$

$7^x \neq 1$ $\qquad$ $7^x \neq -1$

$7^x \neq 7^0$ $\qquad$ $x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x \neq 0$

$$\frac{1}{7^x+1} + \frac{7^x}{(7^x-1)(7^x+1)} = \frac{2\cdot 7^x - 1}{7^x - 1}$$

$$\frac{(7^x-1) + 7^x}{(7^x+1)\cancel{(7^x-1)}} = \frac{(2\cdot 7^x - 1)(7^x+1)}{(7^x+1)\cancel{(7^x-1)}}$$

$$\cancel{2\cdot 7^x} \cancel{-1} = 2\cdot 7^{2x} + \cancel{2\cdot 7^x} - 7^x \cancel{-1}$$

$$0 = 2\cdot 7^{2x} - 7^x$$

$$\cancel{7^x}(2\cdot 7^x - 1) = 0$$

$$2\cdot 7^x = 1$$

$$7^x = \frac{1}{2}$$

$$7^x = 2^{-1}$$

$$\log 7^x = \log 2^{-1}$$

$$x \log 7 = -\log 2$$

$$x = -\frac{\log 2}{\log 7}$$

Esercizio

$$1+9^{x-1} = \frac{8}{3} + 3^{x-1} - 3^{x-2}$$

$$1+3^{2(x-1)} = \frac{8}{3} + 3^{x} \cdot \frac{1}{3} - 3^{x} \cdot \frac{1}{9}$$

$$1 + 3^{2x} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{3} + 3^{x} \cdot \frac{1}{3} - 3^{x} \cdot \frac{1}{9}$$

($3^{x} = t$, cambio di variabile)

$$1+\frac{t^2}{9} = \frac{8}{3} + \frac{t}{3} - \frac{t}{9}$$

$$\frac{9+t^2}{\cancel{9}} = \frac{24+3t-t}{\cancel{9}}$$

$$t^2 - 2t - 15 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{matrix} 5 \\ -3 \end{matrix}$$

$$3^{x} = 5$$

$$\log 3^{x} = \log 5$$

$$x \log 3 = \log 5$$

$$x = \frac{\log 5}{\log 3}$$

$$3^{x} = -3$$

imp.

Equazioni e Disequazioni Modulari

Modulari = significa con i valori assoluti

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases} \qquad |f(x)| = \begin{cases} f(x) & se\ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & se\ f(x) < 0 \end{cases}$$

Distinguere i 2 sottocasi e vedere se le soluzioni sono compatibili

Esercizio

$|2x-6| = 0$ poiché c'è 0 è sicuramente accettabile

$2x-6=0$

$2x=6$

$x=3$

Esercizio

$|1-3x| = -5$

$\nexists$ soluzioni

Esercizio

$|1-3x| = 8$

se $1-3x \geq 0$ avremo $1-3x=8$

$-3x \geq -1$ $\qquad -3x = 7$

$3x \leq \frac{1}{3}$ $\qquad x = -\frac{7}{3}$ e siccome è $\leq \frac{1}{3}$ allora è accettabile

se $1-3x<0$ avremo $-1+3x=8$

$-3x<-1$ $\qquad 3x=9$

$3x>1$ $\qquad x=3$ accettabile perché maggiore di $\frac{1}{3}$

$x > \frac{1}{3}$

Esercizio

$|x^2-5x| = 6$

se $x^2-5x \geq 0$ avremo $x^2-5x=6$

$x(x-5) \geq 0$ $\qquad x^2-5x-6=0$

$x=0\ ,\ x=5$ $\qquad (x-6)(x+1)=0$

val. esterni $\qquad x=6$

$x \leq 0 \vee x \geq 5$ $\qquad x=-1$ ACC.

se $x^2-5x<0$ avremo: $-x^2+5x=6$

$x(x-5)<0$ $\qquad -x^2+5x-6=0$

$0<x<5$ $\qquad x^2-5x+6=0$

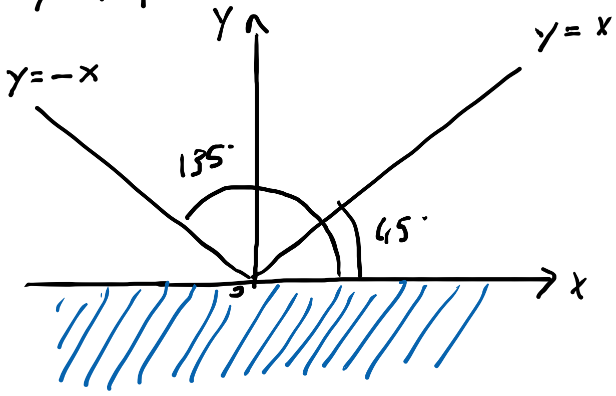
$(x-3)(x-2)=0$

$x=3$

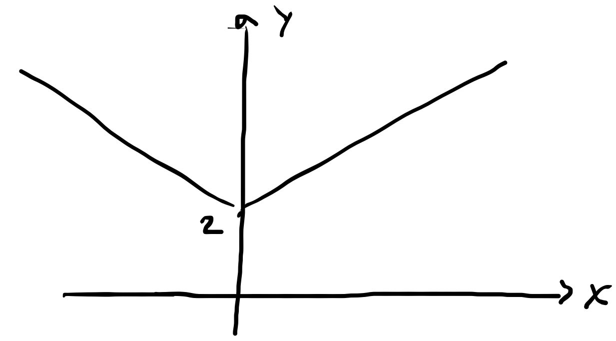
$x=2$ ACC.

(insieme di accettabilità)

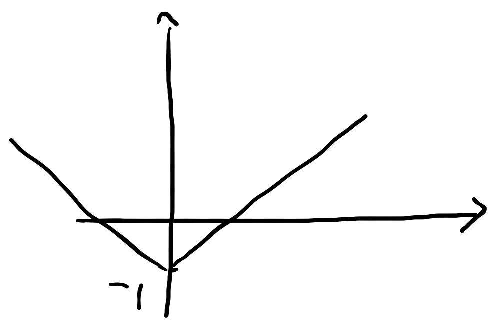
$y = |x|$



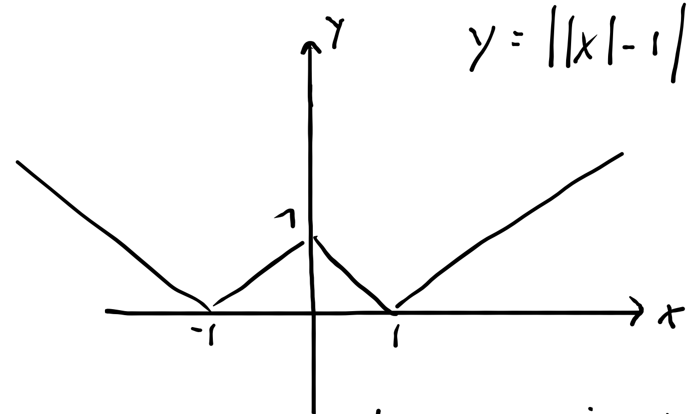
$y = |x| + 2$



$y = |x| - 1$

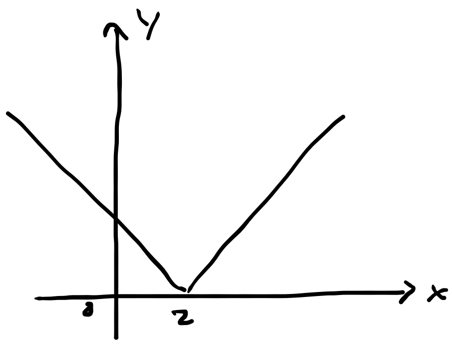


$y = ||x| - 1|$

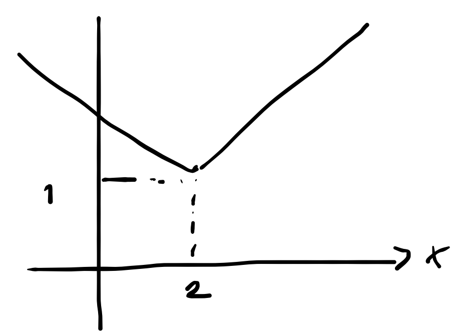


risolvere queste equazioni significa trovare dove queste rette incontrano l'asse x

$y = |x - 2|$

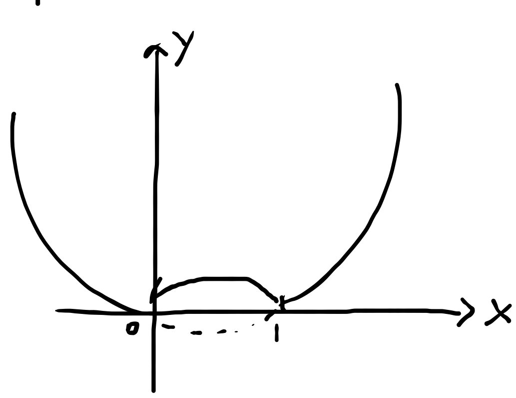


$y = |x - 2| + 1$

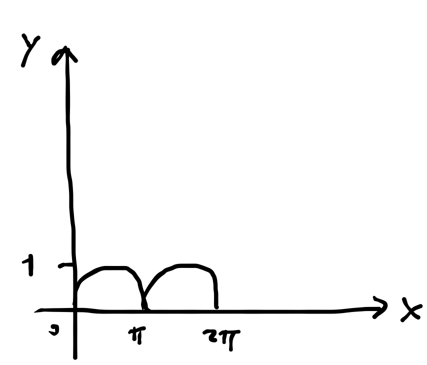


se il valore è dentro il modulo si sposta orizzontalmente, se è fuori si sposta verticalmente

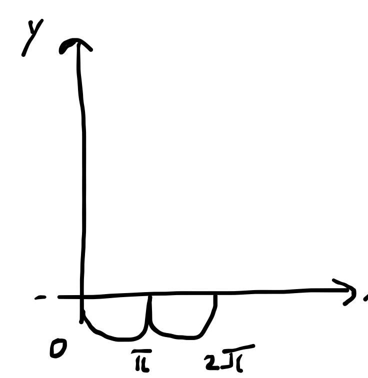
$y = |x^2 - x|$



$y = |\operatorname{sen} x|$



$y = -|\operatorname{sen} x|$



3/11/06

Disequazioni Modulari

$$|f(x)| < k \quad , \quad |f(x)| > k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

Esempio

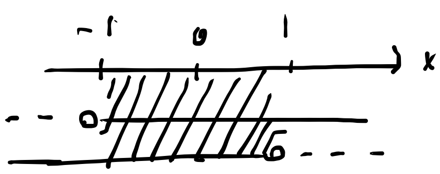
$|x| < 1$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

se $x \geq 0$ allora $x < 1$

se $x < 0$ allora $-x < 1$

$x > -1$



$-1 < x < 1$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| < k \iff -k < f(x) < k$$

$$\begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}$$

In questo modo considero tutti e due i casi

Esercizio

$|x^2 - 4x| < 3$

$$\begin{cases} x^2 - 4x < 3 \\ x^2 - 4x > -3 \end{cases}$$

1) $x^2 - 4x - 3 < 0$

equaz. associata $x^2 - 4x - 3 = 0$

uso la ridotta (b è pari) : $\dfrac{2 \pm \sqrt{4+3}}{1} = 2 \pm \sqrt{7}$

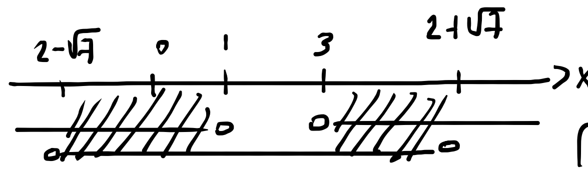
$2 - \sqrt{7} < x < 2 + \sqrt{7}$

2) $x^2 - 4x + 3 > 0$

equaz. ass $x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-3}}{1} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$x < 1 \lor x > 3$



$$\boxed{2 - \sqrt{7} < x < 1 \lor 3 < x < 2 + \sqrt{7}}$$

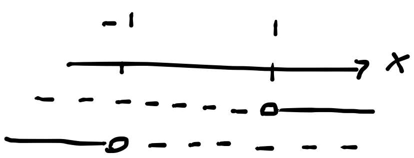
Esempio

$|f(x)| > k$

$|x| > 1$

se $x \geq 0$: $x > 1$

se $x < 0$: $-x > 1 \Rightarrow x < -1$



$$|f(x)| > k \iff f(x) > k \ \vee \ f(x) < -k$$

Esercizio

$|1 + 2x| > 5$

$1+2x > 5$ $\qquad$ $1+2x < -5$

$2x > 4$ $\qquad$ $2x < -6$

$x > 2$ $\qquad$ $x < -3$

$$x < -3 \ \vee \ x > 2$$

(confrontare con l'esercizio di prima in cui $|f(x)| < k$)

Esercizio

$|x^2 - 1| = |3 - x^2|$

$+ \ +$ $\rightarrow$ $x^2 - 1 = 3 - x^2$

$\cancel{- \ -}$

$+ \ -$ $\rightarrow$ $x^2 - 1 = -3 + x^2$

$\cancel{- \ +}$

$x^2 - 1 = 3 - x^2$ $\qquad$ $\cancel{x^2} - 1 = -3 + \cancel{x^2}$

$2x^2 = 4$ $\qquad$ $-1 = -3$ IMP.

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

Esercizio

$|1-5x| = 7$

se $1-5x \geq 0$ allora $1-5x = 7$

$-5x \geq -1$ $\quad -5x = 6$

$x \leq \frac{1}{5}$ $\quad x = -\frac{6}{5}$ ACC.

se $1-5x < 0$ allora $-1+5x = 7$

$-5x < -1$ $\quad 5x = 8$

$5x > 1$ $\quad x = \frac{8}{5}$ ACC.

$x > \frac{1}{5}$

Esercizio

$$\frac{1}{|3x+4|} < \frac{1}{4}$$

C.E. $3x+4 \neq 0$

$x \neq \frac{-4}{3}$

$|3x+4| > 4$

$$\begin{cases} f(x) > k \\ f(x) < -k \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+4 > 4 \\ 3x+4 < -4 \end{cases}$$

$3x+4 > 4$ $\quad 3x+4 < -4$

$x > 0$ $\quad x < -\frac{8}{3}$

$$\boxed{x < -\frac{8}{3} \vee x > 0}$$

Esercizio

$$\left|\frac{2}{x+5}\right| + 3 > 0$$

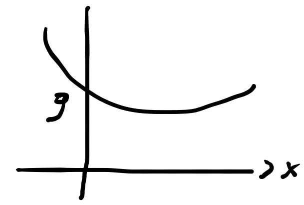
CE $x \neq -5$

$$\left|\frac{2}{x+5}\right| > -3 \qquad \forall x \neq -5$$

Esercizio

$\frac{3}{|9-x^2|} \geq \frac{1}{6}$

C.E.
$x \neq \pm 3$



$\frac{|9-x^2|}{3} \leq 6$

moltiplico per 3

$|9-x^2| \leq 18$

$\begin{cases} 9-x^2 \leq 18 \\ 9-x^2 \geq -18 \end{cases}$ $\begin{cases} -x^2-9 \leq 0 \\ -x^2+27 \geq 0 \end{cases}$

1) $x^2-9 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

la prima è verificata sempre

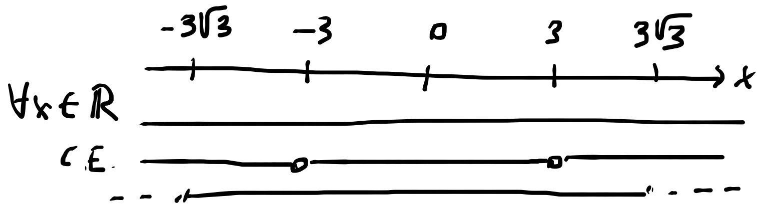
$x^2-27 \leq 0$

$x^2 = 27$

$x = \pm\sqrt{27}$

$x = \pm 3\sqrt{3}$

$-3\sqrt{3} \leq x \leq 3\sqrt{3}$



$S = [-3\sqrt{3}; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; 3\sqrt{3}]$

$-3\sqrt{3} \leq x < -3 \quad \vee \quad -3 < x < 3 \quad \vee \quad 3 < x \leq 3\sqrt{3}$

Esercizio

$\left|1 + \frac{2-x}{x}\right| > 2$

C.E. $x \neq 0$
(si fa il m.c.m dentro il modulo)

$\left|\frac{x+2-x}{x}\right| > 2$

$\left|\frac{2}{x}\right| > 2$

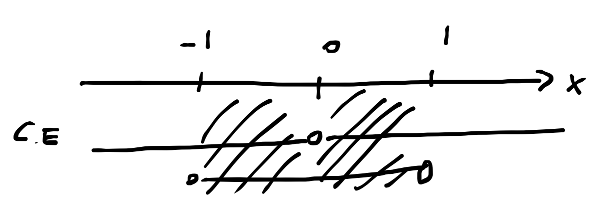
$\left|\frac{x}{2}\right| < \frac{1}{2}$

$|x| < 1$

$|f(x)| < K$ $\begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$

$x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$
$-x < 1 \Rightarrow x > -1$
$\Rightarrow -1 < x < 0$



$-1 < x < 0 \quad \vee \quad 0 < x < 1$

$S = (-1; 0) \cup (0; 1)$

Esercizio

$|3+2x|>5$

se $3+2x\geq 0$ allora $3+2x>5$

$2x\geq -3$ $2x>2$

$x\geq -\frac{3}{2}$ $x>1$

acc.

se $3+2x<0$ allora $-3-2x>5$

$2x<-3$ $-2x>8$

$x<-\frac{3}{2}$ $x<-4$ ACC

Esercizio

$|5x-2|>3$

$5x-2\geq 0$: $5x-2>3$

$x\geq \frac{2}{5}$ $x>1$

$5x-2<0$ $-5x+2>3$

$x<\frac{2}{5}$ $x<-\frac{1}{5}$

$x>1 \lor x<-\frac{1}{5}$

Esercizio

$|1-7x|<2$

$$\begin{cases} 1-7x<2 \\ 1-7x>-2 \end{cases} \quad \begin{cases} -7x<1 \\ -7x>-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-\frac{1}{2} \\ x<\frac{3}{7} \end{cases} \qquad -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{7}$$

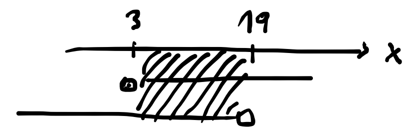
Disequazioni Irrazionali

$\sqrt{x-3} < 4$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 & \text{C.A.} \\ x-3 < 4^2 & \text{elevo al quadrato} \end{cases}$$

se fosse stato $\sqrt[3]{x-3}$ la C.A. non dovevo metterla

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x < 19 \end{cases}$$



$3 \leq x < 19$

$S = [3; 19)$

Posso elevare al quadrato quando ho funzioni positive (è sempre vero)

$\sqrt{x^2-2x} > -3$

C.E. $x^2 - 2x \geq 0$

$x^2 - 2x = 0$ (equaz. ass.)

$x(x-2) = 0$

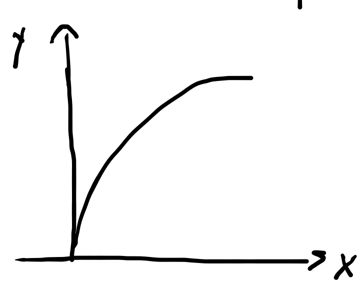
$x = 0 \; ; \; x = 2$

$x \leq 0 \vee x \geq 2$

Il primo membro è sempre maggiore del secondo

$S = (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$

La funzione radice quadrata:



$\sqrt{x^2-4} < -3$

C.A. $x^2 - 4 \geq 0$

$x^2 = 4$

$x_{1,2} = \pm 2$

$x \leq -2 \vee x \geq 2$

Anche in questo caso, non posso elevare alla seconda. Il primo membro che è sempre positivo, non può essere minore di -3, quindi è imp.

$\nexists$ soluzioni

$S = \emptyset$

Esercizio

$\sqrt{x^2+x+25}<4$

$$\begin{cases} x^2+x+25 \geq 0 \\ x^2+x+25 < 16 \end{cases}$$

C.A.

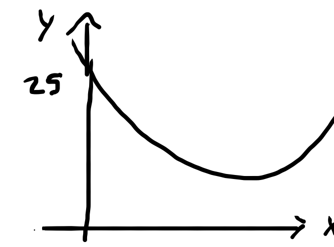
$x^2+x+25 \geq 0$

$x^2+x+25=0$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-100}}{2}$

$\Delta<0$ quindi IMP!

La parabola non interseca l'asse x



$\forall x \in \mathbb{R}$

La disequazione è sempre vera

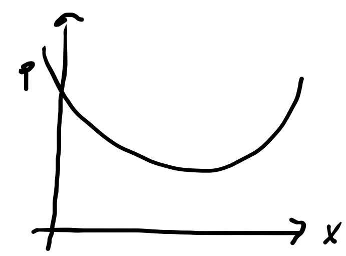
$x^2+x+25-16=0 \Rightarrow x^2+x+9=0$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-36}$

$\Delta<0$

L'equazione associata è impossibile

La disequazione ci dà come risultato $S=\emptyset$ IMP.

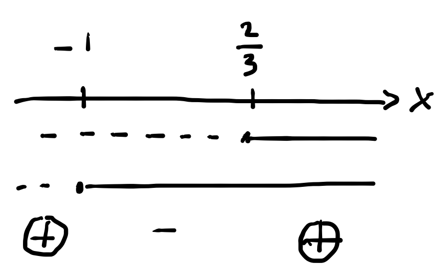


Esercizio

$\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+1} > 0$

$3x-2 \geq 0$ $\qquad$ $x+1 \geq 0$

$x \geq \frac{2}{3}$ $\qquad$ $x \geq -1$



$x \leq -1 \lor x \geq \frac{2}{3}$

(si isolano i radicali)

$\sqrt{3x-2} > \sqrt{x+1}$

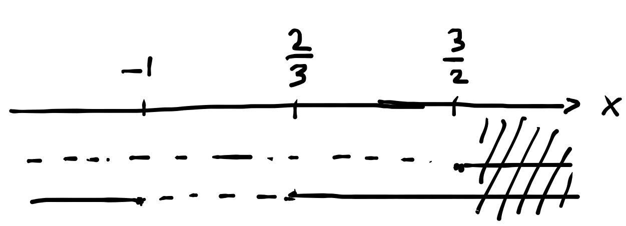
(adesso posso elevare al quadrato)

$3x-2 > x+1$

$2x > 3$

$x > \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 3x-2 > x+1 \end{cases}$$



$x > \frac{3}{2}$

$S = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

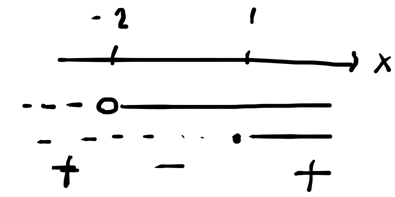
Esercizio

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} > 2$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} \ge 0 \\ \dfrac{x-1}{x+2} > 4 \end{cases}$$

$x-1 \ge 0 \Rightarrow x \ge 1$

$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$



$x \le 2 \vee x \ge 1$

N.B. basta svolgere la seconda disequaz perché >4 e perché il primo membro è uguale (e più vincolante)

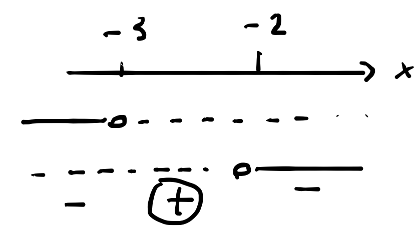
$$\frac{x-1}{x+2} - 4 > 0$$

$$\frac{x-1-4x-8}{x+2} > 0$$

$$\frac{-3x-9}{x+2} > 0$$

$x < -3$

$x > -2$



$-3 < x < -2$

$S = (-3; -2)$

Esercizio

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} < 1$$

C.A. $\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \ge 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} < 1 \end{cases} \Rightarrow$

N:

$x^2 = 1$

$x_{1,2} = \pm 1$

$x \le -1 \vee x \ge 1$

D:

$x^2 + 1 > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$

sempre vera!

Quindi le soluzioni sono:

$x \le -1 \vee x \ge 1$

$\Downarrow$

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} - 1 < 0$$

$$\frac{x^2-1-x^2-1}{x^2+1} < 0$$

$$\frac{-2}{x^2+1} < 0$$

$$\frac{2}{x^2+1} > 0$$

N: $\forall x \in \mathbb{R}$

D: $x^2+1>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Quindi la soluzione dell'esercizio è $S = [-\infty; -1] \cup [1; +\infty]$

Disequazioni irrazionali

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \longrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \longrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Esempio

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} < 5 - x$$

$$\begin{array}{l} 1) \\ 2) \\ 3) \end{array} \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 5 - x > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < (5-x)^2 \end{cases}$$

1) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

equaz. ass. $x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-3)(x-1) = 0$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

valori esterni $x \leq 1 \vee x \geq 3$

2) $5 - x > 0$

$-x > -5$

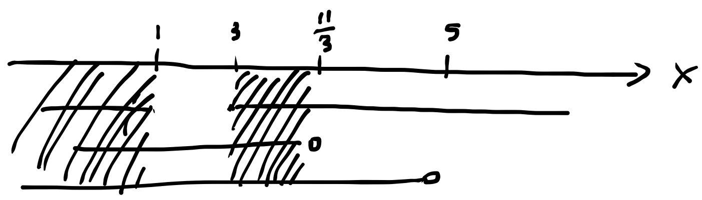
$x < 5$

3) $x^2 - 4x + 3 < (5-x)^2$

$x^2 - 4x + 3 < x^2 - 10x + 25$

$6x < 22$

$x < \frac{11}{3}$



$x \leq 1 \vee 3 \leq x < \frac{11}{3}$

$$S = (-\infty; 1) \cup \left[3; \frac{11}{3}\right)$$

Esercizio

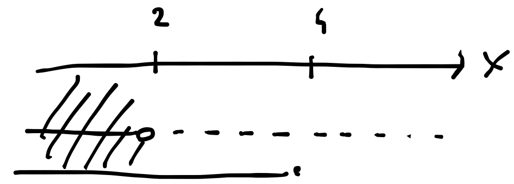
$\sqrt{4-x} > x-2$

$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-x > (x-2)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2 < 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases}$

$x < 2$

$-x \geq -4$

$x \leq 4$



$\boxed{x < 2}$

$x \geq 2$

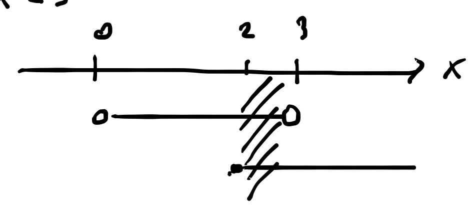
$\cancel{4}-x > x^2+\cancel{4}-4x$

$-x^2+3x > 0$

$x^2-3x < 0$

$x(x-3) = 0$

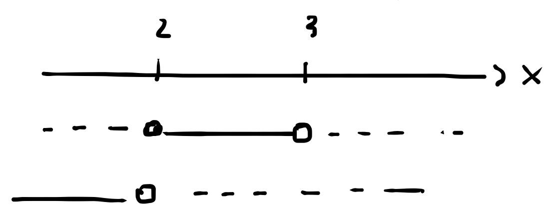
$0 < x < 3$



$\boxed{2 \leq x < 3}$

Soluzione Finale

$x < 3$



Esercizio

$\sqrt{2x+7} \leq x+1$

$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+7 \geq 0 & (1) \\ x+1 \geq 1 & (2) \\ 2x+7 \leq x^2+2x+1 & (3) \end{cases}$

1) $2x \geq -7$

$x \geq -\frac{7}{2}$

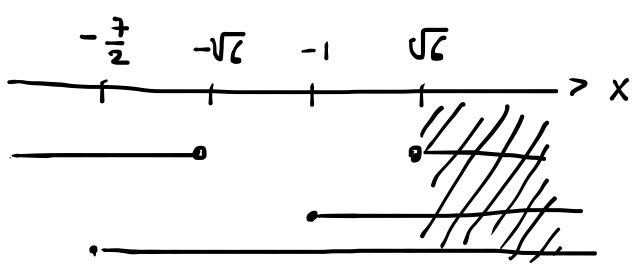
2) $x \geq -1$

3) $-x^2 \leq -6$

$x^2 \geq 6$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$

$x \leq -\sqrt{6} \vee x \geq \sqrt{6}$



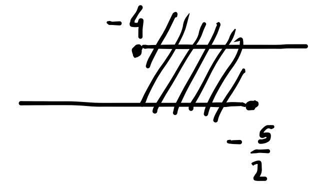
$x \geq \sqrt{6}$

Esercizio

$\sqrt{x^2-4} > x+4$

$\begin{cases} x+4 \ge 0 \\ x^2-4 > (x+4)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -4 \\ x^2-4 > x^2+8x+16 \end{cases}$

$-8x < 20 \Rightarrow x < -\frac{5}{2}$



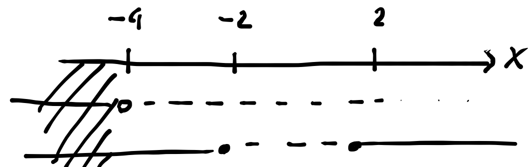
$\boxed{-4 \le x \le -\frac{5}{2}}$

$\vee$

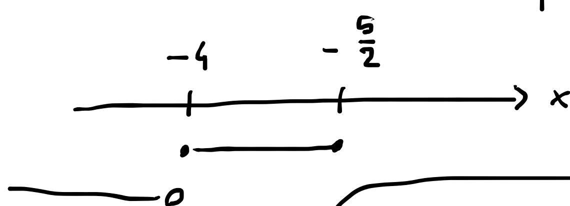
$\begin{cases} x+4 < 0 \\ x^2-4 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -4 \\ x^2 \ge 4 \end{cases}$

$x^2 = 4$

$x \le -2 \vee x \ge 2$



$\boxed{x < -4}$



$\boxed{\text{Soluzione: } x < -\frac{5}{2}}$

Disequazione Irrazionale Cubica

$\sqrt[3]{x^2-2} < 3$ (basta elevare al cubo entrambi i membri)

$x^2-2 < 3^3$

$x^2-2 < 27$

$x^2 < 29$

$x = \pm\sqrt{29}$

$-\sqrt{29} < x < \sqrt{29}$

Le radici dispari si svolgono tutte in questo modo molto semplice

Equazioni Goniometriche elementari

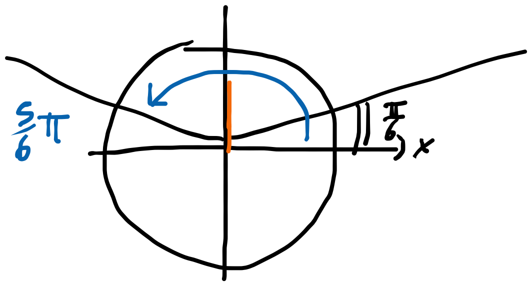
$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{\pi}{6}$

Il seno è l'ordinata

$\mathbb{Z} \rightarrow$ numeri interi

$\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3 \ldots; \pm \infty\}$

Il coseno è l'ascissa



$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

(ragionare in termini di simmetria)

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

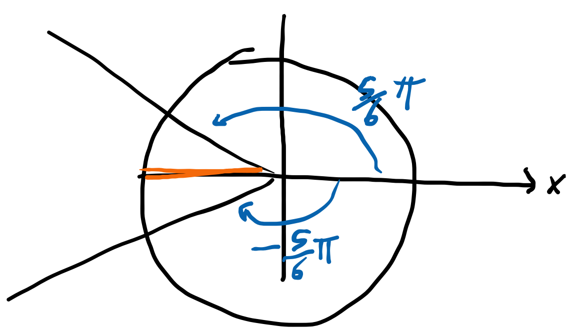
$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

Le soluzioni sono queste due, anche se hanno cmq un periodo costante che può assumere un valore infinito. Le due soluzioni sono quindi infinite.

Esercizio

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (corrisponde a $\frac{5}{6}\pi$)

Il valore assoluto è uguale, ma cambia il segno.

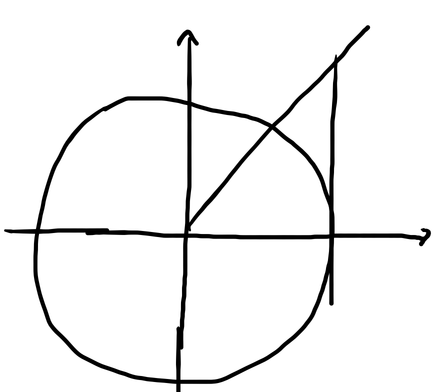


$x = \pm \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Esercizio

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ è il rapporto tra seno e coseno

$\frac{\pi}{3} = 60°$ La tangente ha periodo π



$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \longleftrightarrow 120°$

$x = \frac{2}{3}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Esercizio

$\operatorname{sen} rx = \operatorname{sen} 5x$

$rx = 5x + 2k\pi \quad \vee \quad rx = \pi - 5x + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

O gli angoli sono uguali, oppure supplementari

$rx = 5x + 2k\pi$

$x(r-5) = 2k\pi$

$x = \dfrac{2k\pi}{r-5}$

$rx = \pi - 5x + 2k\pi$

$x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{r+5}$

$5x = \pi - 2x + 2k\pi$

$7x = \pi + 2k\pi$

$x = \dfrac{\pi(2k+1)}{7} \quad , k \in \mathbb{Z}$

Esercizio

$\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 2x$

$5x = 2x + 2k\pi$

$5x - 2x = 2k\pi$

$x(5-2) = 2k\pi$

$3x = 2k\pi$

$x = \frac{2}{3}k\pi \, , \; k \in \mathbb{Z}$ (scrivere sempre la condizione $k \in \mathbb{Z}$)

Esercizio

$\operatorname{sen}(5x - 10°) = \operatorname{sen}(2x + 30°)$

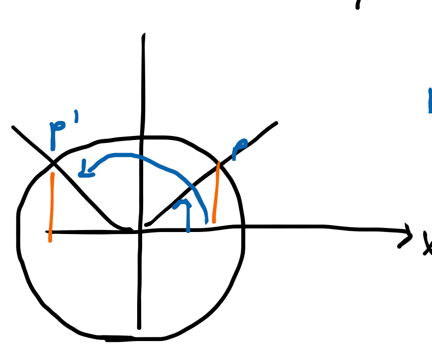
$5x - 10° = 2x + 30° + k\,360°$

$3x = \dfrac{40° + 360°}{3} \quad , k \in \mathbb{Z}$ (primo angolo)

$5x - 10° = 180° - 2x - 30° + k\,360°$

$7x = \dfrac{160° + k360°}{7} \quad , k \in \mathbb{Z}$ (angolo supplementare)

Simmetria rispetto al seno, cioè all'asse y



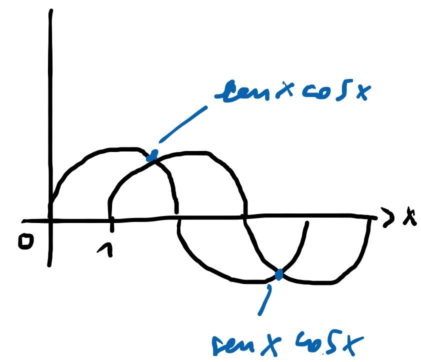
P' e' supplementare a P

Esercizio

$$\operatorname{sen} 7x = \cos 5x$$

$$\operatorname{sen} 7x = \operatorname{sen}(90° - 5x)$$

coseno parte da 1



$$7x = 90° - 5x + k360°$$

$$12x = 90° + k360$$

$$x = \frac{90° + k360°}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

semplificando

$$x = \frac{\cancel{90°}(1+4k)}{\cancel{12}} = \frac{15}{2}(1+4k), \quad k \in \mathbb{Z}$$ (primo angolo)

$$7x = 180° - 90° + 5x + k360$$

$$2x = 90° + k360°$$

$$x = \frac{90° + k360}{2}$$ semplifico: $x = 45° + k180$

$$x = 45(1+4k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left[360° : 2\pi = x_{GRADI} : x_{RADIANTI}\right]$$

Esercizio

$$\cos 7x = \cos 2x$$

$$7x = \pm 2x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1) $x = \frac{2}{5}x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ $(x = k72°)$

2) $x = \frac{2}{9}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ $(x = k40°)$

Esercizio

$$\cos(3x - 20°) = \cos(x + 50°)$$

$$3x - 20° = \pm(x + 50°) + k360°$$

1) $2x = 70° + k360°$

$x = \frac{70° + k360°}{2}$

$x = 35° + k180°$

2) $4x = -30° + k360°$

$x = \frac{-30° + k360°}{4}$

$x = \frac{-15 + k180°}{2}$

Esercizio

$$tg\, 9x = tg\, 5x$$

$$9x = 5x + k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{4} \quad \text{oppure} \quad \frac{k\, 180^\circ}{4} = k\, 45^\circ$$

Esercizio

$$tg(5x + 70^\circ) = tg(40^\circ - 2x)$$

$$5x + 70^\circ = 40^\circ - 2x$$

$$5x + 70^\circ = 40^\circ - 2x + k\, 180^\circ$$

$$7x = -30^\circ + k180^\circ \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{-30^\circ + k180}{7}$$

(22/11/2006)

Esercizio

$$3 \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\frac{3 \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3} \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}$$

$$3 tg\, x = \sqrt{3}$$

$$tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow 30^\circ$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \, , \quad k \in \mathbb{Z}$$

NB, E' possibile dividere per $\cos x$ perché è diverso da zero. Infatti $\cos x = 0$ non è soluz dell' equazione.

Equazioni lineari perché seno e coseno sono di primo grado.

Esercizio

$\cos 2x + 3 \operatorname{sen} x = 2$

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 2$

$(\cos 2x = \cos^2 x$ NB. Il coseno del doppio di un angolo)

(formula di duplicazione: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$)

$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$

$-2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 1 = 0$

$2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

$\operatorname{sen} x = t$

$2t^2 - 3t + 1 = 0$

$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$ $\quad t_1 = \frac{1}{2}$, $\quad t_2 = 1$

Se fosse venuto un valore maggiore di 1 o minore di 1: $\nexists$ imp.

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $\qquad$ $\operatorname{sen} x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}}$$

$\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ sia il primo angolo che quello supplementare

NB. le soluzioni però sono infinite

Esercizio

$$\cos^2\frac{x}{2} + \text{sen}^2 x = 1$$

$$\left[\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right] \longrightarrow$$ formule di bisezione (si cerca di svolgere lasciando inalterata quella più semplice)

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

$$\frac{1+\cos x}{2} + \text{sen}^2 x - 1 = 0$$

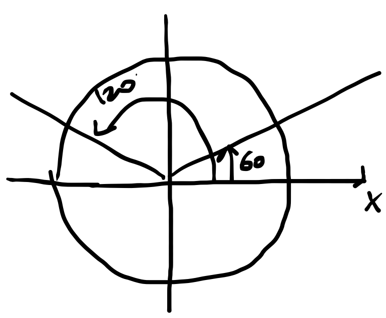
$$\frac{1+\cos x}{2} \cancel{+1} - \cos^2 x \cancel{-1} = 0$$

$$1 + \cos x - 2\cos^2 x = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$(\cos x = t)$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \quad \begin{cases} t_1 = -\frac{1}{2} & \cos x = -\frac{1}{2} \\ t_2 = 1 & \cos x = 1 \end{cases}$$



$\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{\pi}{6} \longleftrightarrow 60$

$180 - 60 = 120$ $\quad \cos x = -\frac{1}{2}$

$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$ calcolo l'angolo supplementare di $\cos x = \frac{1}{2}$

$$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi$$

Esercizio

$\sqrt{3 \operatorname{sen} x} = \sqrt{2} \cos x$

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

C.E. $\operatorname{sen} x \geq 0$

$3 \operatorname{sen} x = 2 \cos^2 x$

$3 \operatorname{sen} x = 2 (1 - \operatorname{sen}^2 x)$

$3 \operatorname{sen} x = 2 - 2 \operatorname{sen}^2 x$

$2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$

$(t = \operatorname{sen} x)$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$ $\begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\operatorname{sen} x = -2$ IMP. (perché è compreso tra -1 e 1)

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \cancel{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

NON ACC.

Esercizio

$\operatorname{sen}^2 x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$

$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2 = 0$

$\operatorname{sen} x = t$

$t^2 - t - 2 = 0$

$(t-2)(t+1) = 0$

$t = 2$, $t = -1$

$\operatorname{sen} x = 2$ IMP

$\operatorname{sen} x = 1$

$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Esercizio

$\operatorname{sen} x - 1 = \cos^2 x$

$\operatorname{sen} x - 1 = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + 2 = 0$

$(\operatorname{sen} x = t)$

$t^2 + t - 2 = 0$

$(t+2)(t-1) = 0$

$t = -2 \longrightarrow \operatorname{sen} x = -2$ IMP.

$t = 1$

$\operatorname{sen} x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

Esercizio

$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg} x} = \frac{4\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}$

C.E. $\left(\begin{array}{l} \operatorname{tg} x \neq 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi , \ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$

$\operatorname{tg} x = t$

$\sqrt{3}t - 4t + \sqrt{3} = 0$

$t_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{16-12}}{2\sqrt{3}} =$

$\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-3+2\sqrt{3}}{6}$

$\frac{-\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-3-2\sqrt{3}}{6}$

Usando la ridotta:

$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \sqrt{3}$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ (ACC.)

$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \longrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ (ACC.)

Funzioni Goniometriche

Per misurare l'ampiezza di un angolo si possono utilizzare 2 unità di misura: il grado e il radiante.

Misura della circonferenza rispetto al raggio

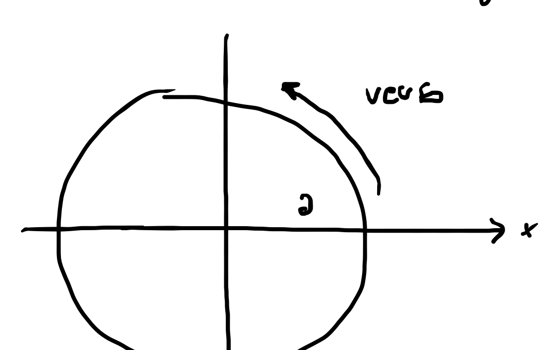
$$\frac{c}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Quindi L'angolo giro, in radianti, misura 2π
L'angolo piatto misura π
L'angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$

$$360^\circ : 2\pi = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{misura in gradi}}}{g} : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{misura in radianti}}}{x}$$

g	0	30	45	60	90	135	180	270	360
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Si dice angolo orientato, un angolo pensato come l'insieme di tutte le sue semirette uscenti dal vertice, che sono state ordinate secondo uno dei due versi possibili.
L'angolo è orientato positivamente quando il lato a ruota in senso antiorario (attorno al vertice). In caso contrario, l'angolo è orientato negativamente.

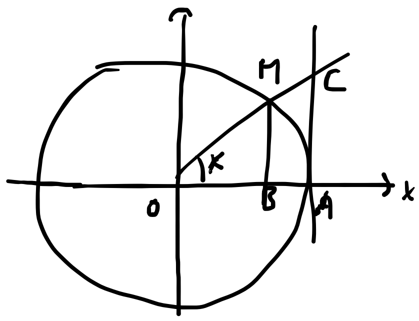


Circonferenza Goniometrica

La circonferenza è orientata quando c'è fissato un verso, da chiamare positivo (verso positivo = verso antiorario).

La circonferenza goniometrica alla quale è associato un sistema di riferimento cartesiano.

Il raggio è l'unità di misura dei segmenti.



Il primo lato coincide con il semiasse positivo delle x (incontra la circonf. nel punto A)
Il secondo lato interseca la circonf. nel punto M. (interseca in C la tangente alla circonf. condotta da A)

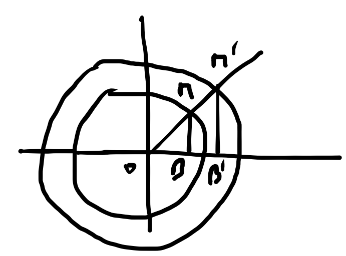
La proiezione ortogonale del punto M sull'asse x è B.

$$\frac{MB}{OM} = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{OB}{OM} = \cos x$$

$$\frac{AC}{OM} = \operatorname{tg} x$$

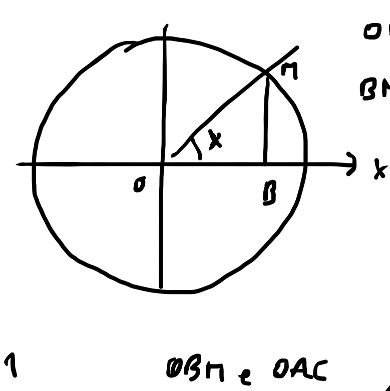
Esprimono misure di segmenti orientati (sono numeri reali relativi) Inoltre non variano al variare del raggio della circonf.



$$\operatorname{sen} x = \frac{MB}{OM} = \frac{M'B'}{OM'}$$

$\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ } sono funzioni dell'angolo
dipendono esclusivamente dall'ampiezza dell'angolo considerato

$\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{tg} = \frac{3}{2}\pi$ NON ESISTONO



$OM = 1$

$BM = \operatorname{sen} x$

$OB = \cos x$

Relazione fondamentale:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

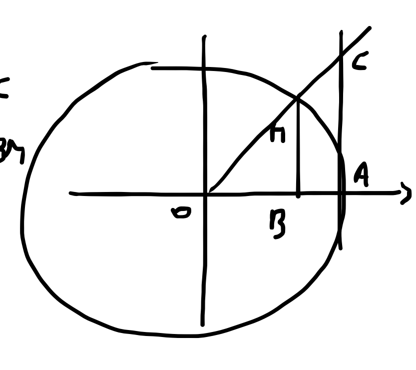
Def. di tangente:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

OBM e OAC

$OA : AC = OB : BM$

$1 : \operatorname{tg} x = \cos x : \operatorname{sen} x$



$\sin 30° = \frac{1}{2}$

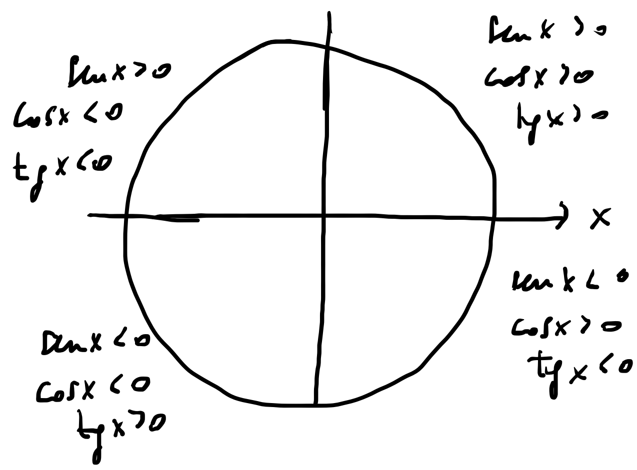
$\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30}{\cos 30°} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (razionalizzando)

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} 60 = \sqrt{3}$



I SEGNI

$\sin 45° = \cos 45$

$\sin^2 45 + \sin^2 45 = 1$

$2 \sin^2 45 = 1$

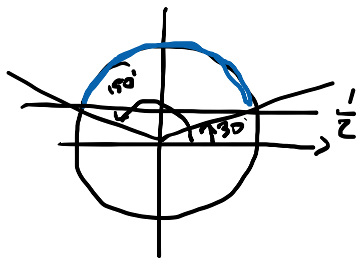
$\sin^2 45 = \frac{1}{2}$

$\sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \operatorname{tg} 45 = 1$

Disequazioni goniometriche

$\text{sen}\, x > \frac{1}{2}$



$\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$?

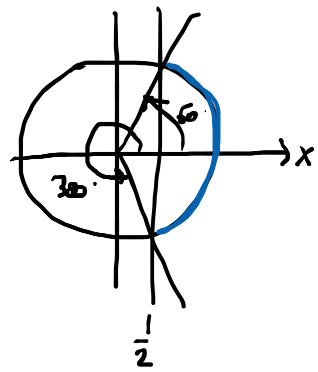
$x = \frac{\pi}{6} \longleftrightarrow 30°$

$x = \frac{5}{6}\pi \longleftrightarrow 150°$

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$

$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \,, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos x > \frac{1}{2}$



$\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{\pi}{3} \longleftrightarrow 60°$

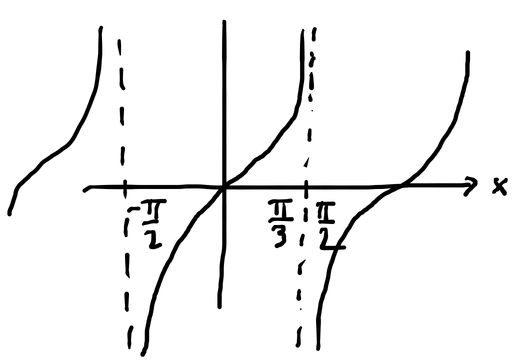
$x = \frac{5}{3}\pi \longleftrightarrow 300°$ (mantenendolo positivo)

$0 \le x < \frac{\pi}{3} \vee \frac{5}{3}\pi < x \le 2\pi$

$2k\pi \le x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{5}{3}\pi + 2k\pi < x \le \underbrace{2\pi + 2k\pi}_{2\pi(1+k)} \,, \quad k \in \mathbb{Z}$

Tangentoide

$\text{tg}\, x \le \sqrt{3}$



$\text{tg}\, x = \sqrt{3}$ $\quad x = \frac{\pi}{3} \longleftrightarrow 60°$

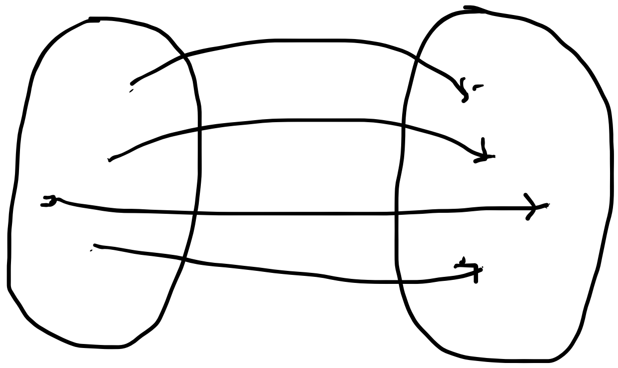
$0 \le x \le \frac{\pi}{3} \vee \frac{\pi}{2} < x \le \pi$

$\left(\text{tg}\, x < \sqrt{3} \quad 0 < x < \frac{\pi}{3} \vee \frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$

$k\pi + 0 \le x \le \frac{\pi}{3} + k\pi \vee \frac{\pi}{2} + k\pi < x \le \pi + k\pi \,, \quad K \in \mathbb{Z}$

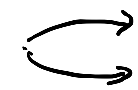
Le Funzioni (di una variabile reale)   1/12/06

Def. Si dice funzione una particolare relazione che associa ad ogni elemento del primo insieme (detto dominio), uno e uno solo elemento del secondo insieme (detto codominio).



A dominio   B Codominio

$f: A \to B$



NO BIFORCAZIONE

$-2 \to 4$
$+2 \to 4$ SÌ L'INVERSO

NON È DETTO CHE TUTTI GLI ELEM. DEL SECONDO INSIEME SIANO RAGGIUNTI.

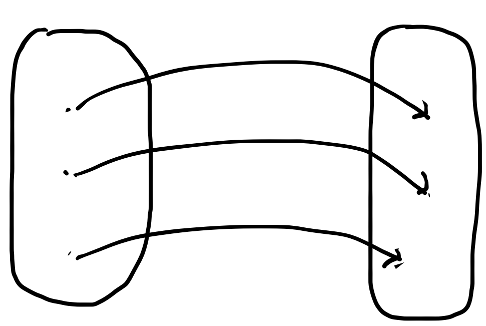
Gli elementi del secondo insieme si chiamano "immagini".

In alcuni libri viene rappresentato l'insieme del codominio come il sottoinsieme dell'immagine della funzione.

$$Im[f] \subseteq B$$

può capitare che il sottoinsieme coincida con l'insieme B

Se $Im[f] = B$ la funzione si dice "suriettiva", tutti gli elementi di B sono stati raggiunti almeno da una freccia.
Se accade che ad elementi distinti del dominio corrispondono elementi distinti del codominio, la funzione si dice "iniettiva".



A   B

FUNZ. INIETTIVA
$\forall x_1, x_2 \in A$
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ES.
$y = f(x) = x^3$
$2 \neq 3 \Rightarrow f(2) = 8$
$f(3) = 27$
$8 \neq 27$

Una funzione che sia iniettiva e suriettiva si dice "biettiva" o "corrispondenza biunivoca" (importanti perché sono invertibili)

Grafico di una funzione

$G = \{ (x,y) \in A \times B \ \text{t.c.} \ y = f(x) \}$

Questa è la definizione del prodotto cartesiano

(x,y) è la coppia ordinata

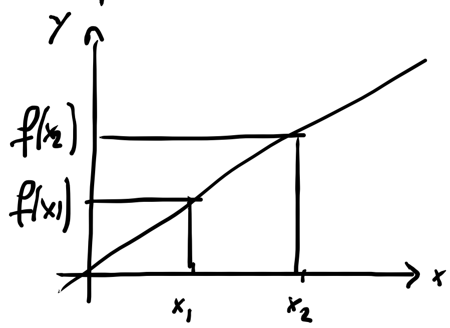
$A \times B$ è l'operaz. di prodotto cartesiano

G è l'insieme delle coppie x, y appartenenti al prodotto cart $(A \times B)$ tale che $y = f(x)$

Monotonia di una funzione

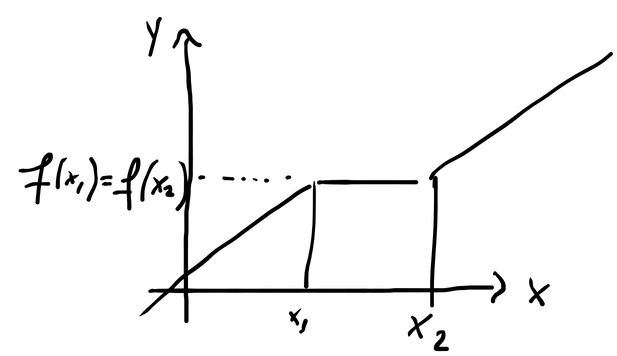
Si dice che $f: A \to B$ è strettamente monotona crescente se $\forall x_1, x_2$ t.c. $x_1 < x_2$ $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Esempio sia $A = B = \mathbb{R}$



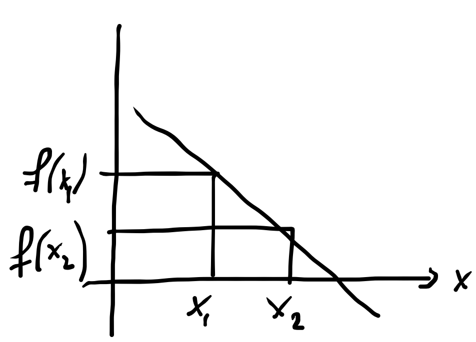
Si dice che $f: A \to B$ è (debolmente) monotona crescente se $\forall x_1, x_2$ t.c. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Esempio sia $A = B = \mathbb{R}$



Si dice che $f: A \to B$ è strettamente monotona decrescente se $\forall x_1, x_2$ t.c. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Esempio: sia $A = B = \mathbb{R}$



Funzioni Pari

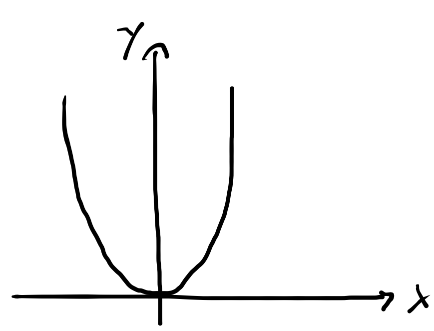
$f: A \to B \qquad x \in A$ t.c. $-x \in A$

Si dice che f è una funz. pari se risulta $f(x) = f(-x) \ \forall x \in A$

Esempio $A = B = \mathbb{R}$

$y = f(x) = x^2$

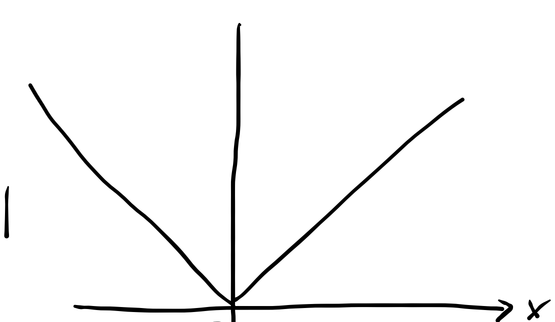
simmetrico rispetto l'asse y



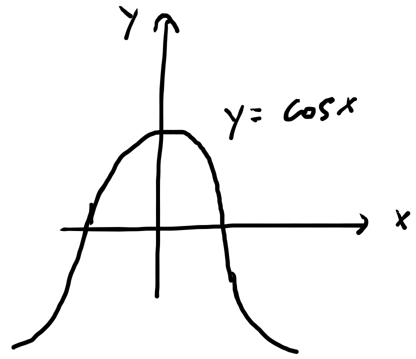
Esempio:

$y = |x|$

$|x| = |-x|$



$\cos(x) = \cos(-x)$



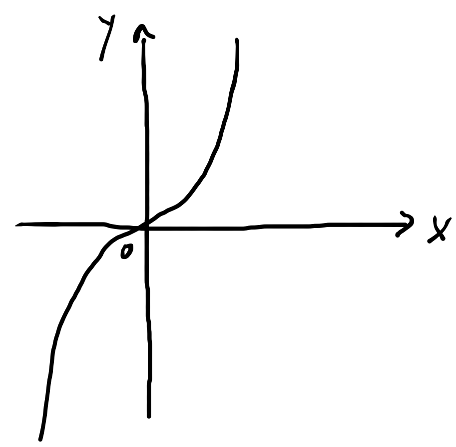
Funzioni Dispari

$f: A \to B \quad x \in A$ t.c. $-x \in A$

Si dice che f è una funz. dispari se risulta $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in A$

Esempio $\quad A = B = \mathbb{R}$

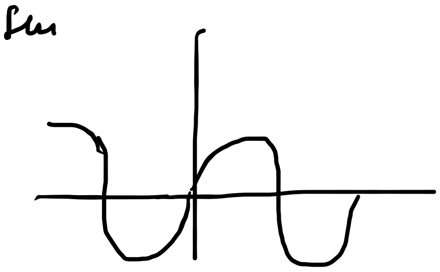
$y = f(x) = x^3$



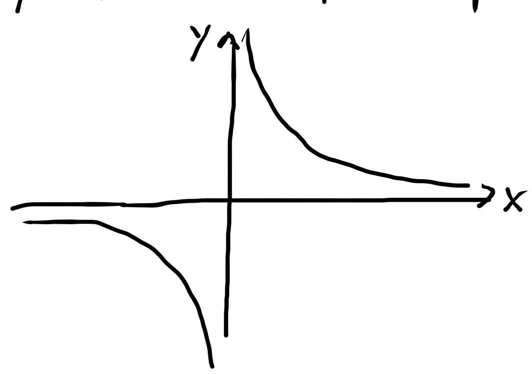
Il grafico risulta simmetrico rispetto l'origine

Esempi ($tg\, x$ e $sen\, x$)

$y = sen$



$y = \frac{1}{x}$ è una funz. dispari



NB
se lo zero appartiene al dominio la funz. passa per l'origine degli assi.

Ipotesi -
Sia f una funz. dispari

Tesi. $A \to B$ t.c. $0 \in A$ allora $f(0) = (0)$

Dim. Siccome $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in A$

se $x = 0 \quad f(0) = -f(-0)$

$f(0) + f(0) = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{2} f(0)}{\cancel{2}} = \frac{0}{2}$

$f(0) = 0$

Esercizio

Verificare che la funz. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad y = f(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ è pari

($e = 2,7182\ldots$ costante di Eulero)

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$y(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = y(x)$$

$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ quindi è pari!

Esercizio

$$y = x^4 - 3x^2 + 1$$

$$f(x) = f(-x)$$

$$y(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = y(x)$$

Quindi è pari $\forall x \in \mathbb{R}$

Esercizio

$y = 5x^3 - 2x$ verificare che è dispari

$y = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = -f(-x)$ è equivalente a

$$f(-x) = -f(x)$$

Si può fare in entrambi i modi

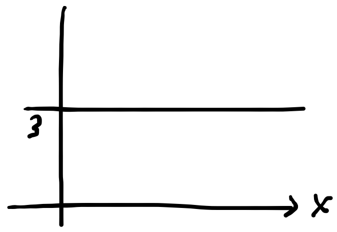
$$f(-x) = 5(-x)^3 - 2(-x) = -5x^3 + 2x = -(5x^3 - 2x) = -f(x)$$

$$-f(-x) = -\left(5(-x)^3 - 2(-x)\right) = -(-5x^3 + 2x) = 5x^3 - 2x$$

6/12/06

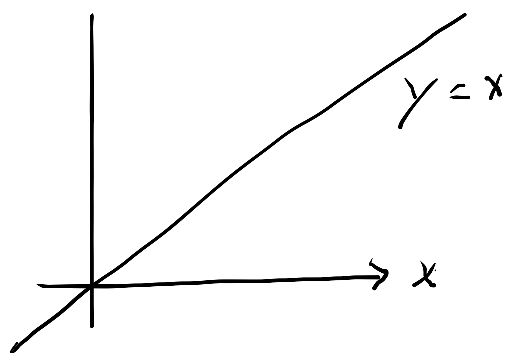
Una funzione $f: A \to B$ si dice costante se $f(A)$ ha un solo elemento

$y = 3$ retta orizzontale



Sia monotona debolmente crescente che decresc.

Una funz. $f: A \to B$ si dice identica se assume ad ogni elem. di A, l'elem. stesso (viene indicata con I_A)



Due funz. $f: A \to B$ e $g: C \to D$ si dicono uguali se $A = C$, $B = D$ e $\forall x \in A$ si ha $f(x) = g(x)$

Se $A \subseteq C$ e $\forall x \in A$ $f(x) = g(x)$ si dice che $f(x)$ è una restrizione di $g(x)$, mentre $g(x)$ è un prolungamento di $f(x)$.

Date due funzioni $g: A \to B$, $f: C \to D$, con $g(A) \subseteq C$, si chiama funzione composta di g ed f la funz. $h: A \to C$ t.c. $h(x) = f(g(x))$ $\forall x \in A$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 + 3$ $\quad$ $g(x) = x - 2$

diversi modi di trovare la funz. composta

$\substack{f(x) \\ g(x)} = f(g(x))$

$x \xrightarrow[g]{} x-2 \xrightarrow[f]{} (x-2)^2 + 3 = x^2 + 4 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 7$

$x \xrightarrow[f]{} x^2+3 \xrightarrow[g]{} x^2 + 3 - 2 = x^2 + 1$

$x \xrightarrow[f]{} x^2+3 \xrightarrow[f]{} (x^2+3)^2 + 3 = x^4 + 6x^2 + 9 + 3 = x^4 + 6x^2 + 12$

$g^2 = g(g(x))$

$g \circ g$

$x \xrightarrow[g]{} x-2 \xrightarrow[g]{} x - 2 - 2 = x - 4$

Funzioni Analitiche

Algebriche
- razionali
- irrazionali

(entrambe possono essere intere o fratte)

Trascendenti
- Esponenziali
- Logaritmiche
- Goniometriche
- Differenziali

Esercizio Trovare il dominio D della funzione $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

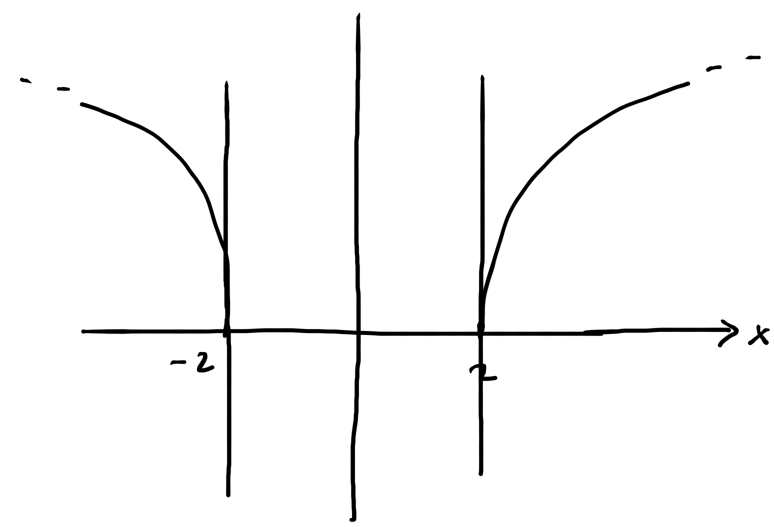
NB. e' una funz composta perchè compare la radice e la x

C.E. $x^2 - 4 \geq 0$

$x = \pm 2$

val. esterni

$x \leq -2 \vee x \geq 2$



Le due linee non sono tratteggiate perchè -2 e 2 sono valori compresi

La funz radice quadrata e' sempre ≥ 0

La funzione e' pari perchè:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4} = f(x)$$

Intersezione con gli assi cartesiani:

siccome $0 \notin D \Rightarrow \nexists$ intersez. con asse y

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{x^2 - 4} \end{cases} \quad \text{IMP!}$$

Intersez. con asse x:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt{x^2 - 4} \end{cases} \quad \text{equaz. irrazionale}$$

$0 = \sqrt{x^2 - 4}$

$0 = x^2 - 4$

$x = \pm 2$

La funzione non e' iniettiva perchè, ad esempio

$$f(-2) = f(2) = 0$$

Una funz. pari non è mai iniettiva!

E' surgettiva? $Im[f] = \mathbb{R}^+ \subset \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{codominio}}$

La funz. non e' surgettiva di conseguenza non è biiettiva.

Esercizio

$y = \frac{x+2}{x-3}$ funz. omografica

dominio $\rightarrow$ C.E

$x - 3 \neq 0$

$x \neq 3$

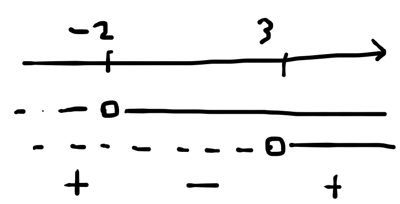
$D = (-\infty ; 3) \cup (3 ; +\infty)$

Segno $\frac{x+2}{x-3} > 0$

$N > 0$ $\quad$ $D > 0$

$x+2 > 0$ $\quad$ $x-3 > 0$

$x > -2$ $\quad$ $x > 3$



$x < -2 \vee x > 3$

ora sappiamo quando la funz. è negativa e quando è positiva

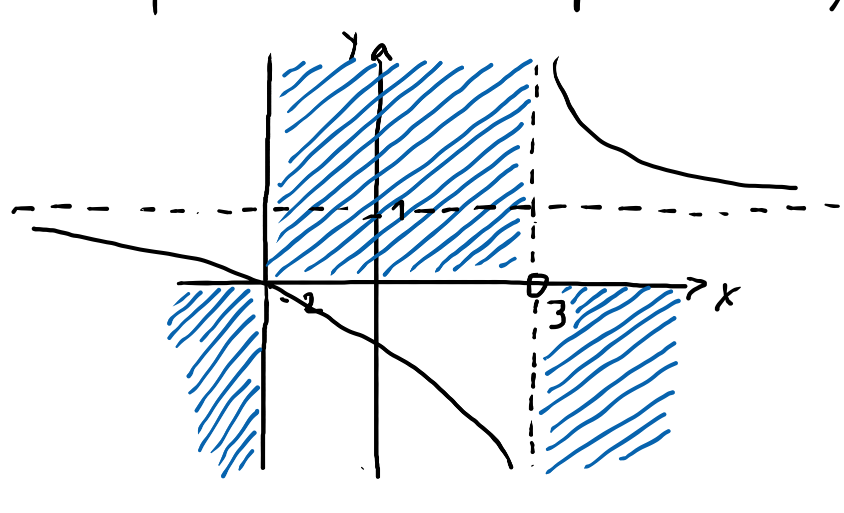
Intersezione con gli assi

Int. con asse y: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x+2}{x-3} \rightarrow y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

Int. con asse x: $\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x+2}{x-3} \rightarrow x+2 = 0 \quad x = -2 \end{cases}$

Ma come è fatta la funzione?

Quando c'è un rapporto fra due polinomi è un iperbole (tranne quando un polinomio è multiplo dell'altro)



(∩∪ flesso: cambio di concavità)

Questa funz. non ha punto di flesso

Esercizio

$y = \log_e(x^2-9)$

Dominio: $x^2-9>0$

$x<-3 \vee x>3$

$D = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

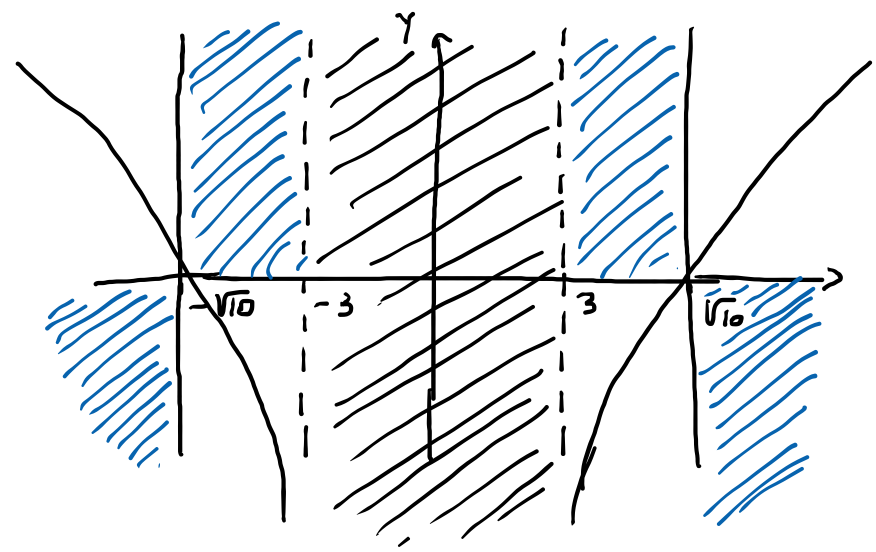
Segno: $\log(x^2-9)>0$

$\log(x^2-9) > \log 1$

$x^2-9>1$

$x^2-10>0$

$x<-\sqrt{10} \vee x>\sqrt{10}$



Intersez. con assi:

$\nexists$ intersez. con asse y perché $0 \notin D$

$\begin{cases} y=0 \\ \log(x^2-9)=0 \end{cases}$

$\log(x^2-9) = \log 1$

$x^2-9=1$

$x = \pm\sqrt{10}$

f è pari perché $y(-x) = \log((-x)^2-9) = \log(x^2-9) = y(x) \quad \forall x \in D$

Esercizio

$f(x) = \dfrac{7x^3-2x}{5x^5-x^3}$ verificare che è pari

$f(-x) = \dfrac{7(-x)^3-2(-x)}{5(-x)^5-(-x)^3} = \dfrac{-7x^3+2x}{-5x^5+x^3} = \dfrac{-(7x^3-2x)}{-(5x^5-x^3)} = \dfrac{7x^3-2x}{5x^5-x^3} = f(x) \quad \forall x \in D$

quindi la funz. è pari.

(Quando la funzione è traslata dall'asse dell'origine non ci si pone nemmeno se è pari o dispari).

Esercizio

Trovare la funzione composta

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 + 2 \qquad g(x) = \frac{x-4}{5}$

$f \circ g\,(x) = \left(\frac{x-4}{5}\right)^3 + 2$

$g \circ f\,(x) = \frac{x^3 - 2}{5}$

$f \circ f\,(x) = (x^3+2)^3 + 2$

$g \circ g\,(x) =$

$$x \xrightarrow[g]{} \frac{x-4}{5} \xrightarrow[g]{} \frac{\frac{x-4}{5} - 4}{5} = \frac{\frac{x-4-20}{5}}{5} = \frac{x-24}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

Esercizio

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2x + 5$

Det l'immagine di 7 e la controimmagine di 8

IMMAGINE: $f(7) = 2 \cdot 7 + 5 = \underline{\underline{19}}$

CONTROIMMAGINE: $f(x) = 8$

$2x + 5 = 8$

$2x = 3$

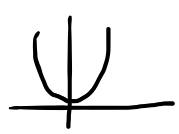
$\underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}$

Esercizio

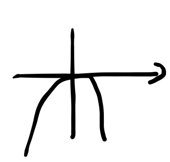
Dire se la seguente legge definisce una funz.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{per } x \geq 0 \\ 2 - x^2 & \text{per } x \leq 0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

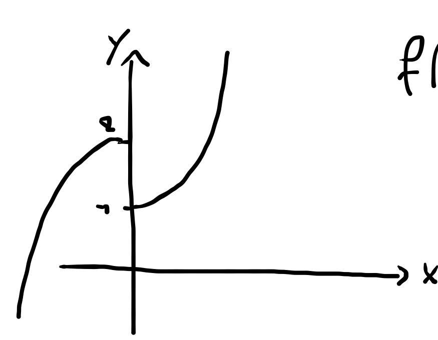
$x^2 + 1$



$-x^2 + 2$



per un valore di x ci sono due valori di y $\Rightarrow$ NON E' UNA FUNZIONE



$f(0) \begin{cases} \nearrow 1 \\ \searrow 2 \end{cases}$

Esercizio

Dire se la seguente legge definisce una funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{per } x \geq 0 \\ 2x-1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$y = 2x+1$

x	y
0	1
1	3

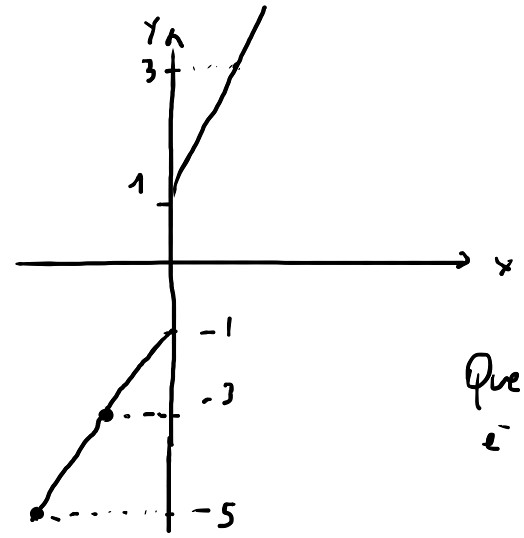
$y = 2x-1$

x	y
-1	-3
-2	-5

L'immagine di 0 è 1

L'immagine di 1 è 3

(0 lo posso considerare perché "per $x \geq 0$")

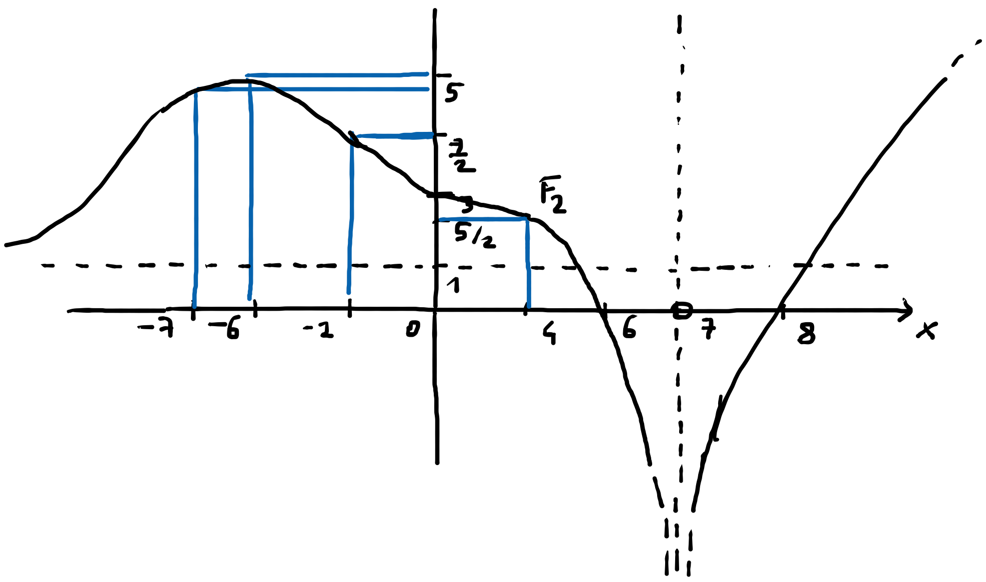


Questa funzione non è Suriettiva

considero valori minori di zero

(zero non compreso perché "$x < 0$")

Esercizio studiamo questa funzione



insieme delle x per cui esiste la f.

1) Dominio $D = (-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$
Codominio $C = (-\infty; +\infty)$

E' suriettiva → si considera l'asse y
Non è iniettiva (ogni valore dovrebbe essere raggiunto una sola volta)
Un buon metodo per verificare se è iniettiva è quello di tracciare una retta orizzontale e vedere se incontra la funzione in un solo punto oppure più di uno.

Quindi la funzione non è Biiettiva
Quindi non è invertibile.
Inoltre la funzione non è limitata.

Segno: (positiva) $P = (-\infty; 6) \cup (8; +\infty)$
$N = (6; 7) \cup (7; 8)$
Gli zeri della funzione sono 6 e 8 (cioè quando la f. interseca l'asse x)

Asintoti: verticale per $x = 7$
orizzontale $y = 1$
(sinistro)

L'asintoto è la retta a cui la f tende ad avvicinarsi sempre di più ma non la tocca mai

Monotonia: L'insieme in cui la f è strettam monotona crescente è $(-\infty; -6) \cup (7; +\infty)$
L'insieme in cui la f è strettam monotona decrescente è $(-6; 7)$

Concavità, convessità, flessi:
La f è convessa ($\cup$) in: $(-\infty; -6) \cup (-2; 4)$
concava in $(-7; -2) \cup (4; 7) \cup (7; \infty)$
3 flessi: $(-7; 4)$, $(-2; \frac{7}{2})$, $(4; \frac{5}{2})$
↳ cambio di concavità

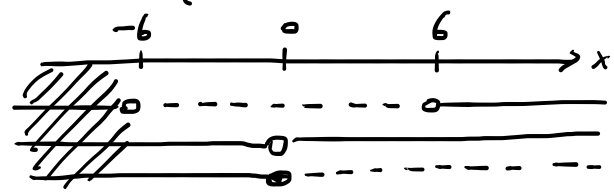
Max, min assoluti e relativi:
∄ max e min assoluti perchè la f non è limitata
∃ max relativo $(-6; 5)$
∄ min relativo

Esercizio

$$y=\frac{\sqrt{1-5^x}}{x^3\sqrt{x^2-36}}$$

Dominio

$$\begin{cases} 1-5^x \geq 0 \\ x^3 \neq 0 \\ x^2-36>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -5^x \geq -1 \Rightarrow 5^x \leq 1 \Rightarrow 5^x \leq 5^0 \Rightarrow x \leq 0 \\ x \neq 0 \\ x<-6 \vee x>6 \end{cases}$$



$x<-6$

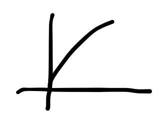
$D=(-\infty;6)$

Segno?

Non ha senso domandarsi se è pari o dispari perché non è simmetrica

$$\frac{\sqrt{1-5^x}}{x^3\sqrt{x^2-36}}>0 \iff x^3>0 \iff x>0$$

$\nexists\, x \in D \Rightarrow$ la F è sempre negativa

(Le due radici sono sempre positive 
Bisogna esaminare se $x^3>0$. Non lo è mai per il dominio $(-\infty,-6)$)

Intersez.: $\nexists$ intersezione con asse y perché $0 \notin D$

intersez. con asse x $\begin{cases} y=0 \\ \dfrac{\sqrt{1-5}}{x^3\sqrt{x^2-36}}=0 \end{cases}$

$1-5^x=0$

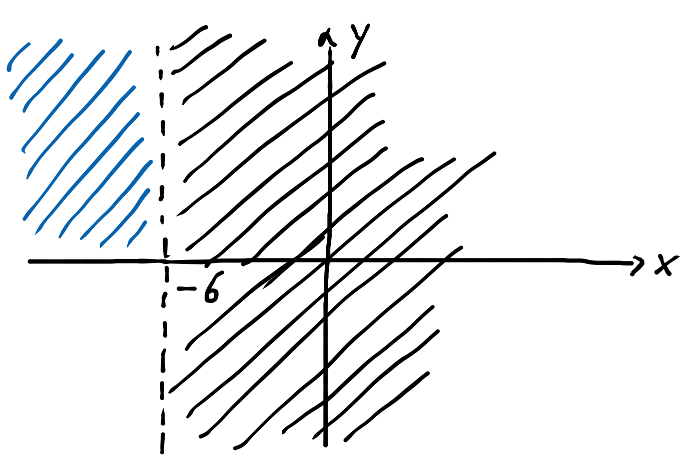
$5^x=1$

$x=0 \notin D$

Quindi $\nexists$ intersez. con asse x

Quando una funzione è zero?

Quando è zero il numeratore quindi pongo $\sqrt{1-5^x}=0$



Esercizio

$$y = \frac{\sqrt{1-7^x}}{\log(x^2-16)}$$

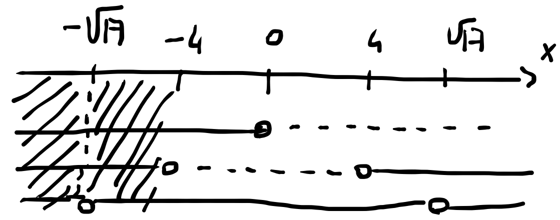
Dominio

$$\begin{cases} 1-7^x \geq 0 \\ x^2-16>0 \\ \log(x^2-16) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -7^x \geq -1 \Rightarrow 7^x \leq 1^0 \Rightarrow x \leq 0 \\ x<-4 \ \vee \ x>4 \\ \log(x^2-16) \neq \log 1 \end{cases}$$

$$x^2-16 \neq 1$$

$$x^2 \neq 17$$

$$x = \pm\sqrt{17}$$



$$D = (-\infty, -\sqrt{17}) \cup (-\sqrt{17}, -4)$$

Segno?

$$y = \frac{\sqrt{1-7^x}}{\log(x^2-16)} > 0 \iff \log(x^2-16)>0$$

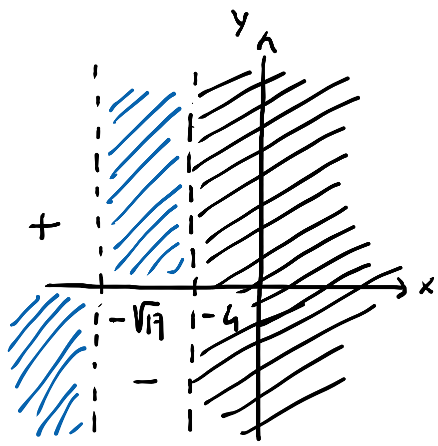
$$\log(x^2-16) > \log 1$$

$$x^2-16>1$$

$$x^2>17$$

$$x<-\sqrt{17} \ \vee x>\sqrt{17} \Rightarrow x<-\sqrt{17}$$

(perchè $x>\sqrt{17}$ non è compreso nel dominio)



Intersez. assi ?

$\nexists$ int con asse y perchè $0 \notin D$

int asse x $\begin{cases} y=0 \\ y = \dfrac{\sqrt{1-7^x}}{\log(x^2-16)} \end{cases} \Rightarrow 0 = \dfrac{\sqrt{1-7^x}}{\log(x^2-16)}$

$$\sqrt{1-7^x} = 0$$

$$1-7^x=0$$

$$7^x = 1^0$$

$x=0 \notin D \Rightarrow \nexists$ int con asse x

Esercizio

$f(x) = 3x^2 + 5x - 1$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

$$V\left(-\frac{b}{2a} ; \frac{-\Delta}{4a}\right) \longrightarrow \underbrace{V\left(-\frac{5}{6} , -\frac{37}{12}\right)}_{\text{il minimo della } f(x)}$$

Esercizio

$y = \log_a x$ sotto quale condizione la funz è crescente e decresc?

CRESC $a > 1$

DECRESC $0 < a < 1$

Esercizio

$$f(x) = \frac{2\cos x + x^2}{tg^2 x + 1}$$

$$f(-x) = \frac{2\cos(-x) + (-x)^2}{tg^2(-x) + 1} = \frac{-2\cos x + x^2}{-tg^2 x + 1} \Longrightarrow \text{PARI}$$

$f(x) = \log_a |x+1|$ né pari né dispari

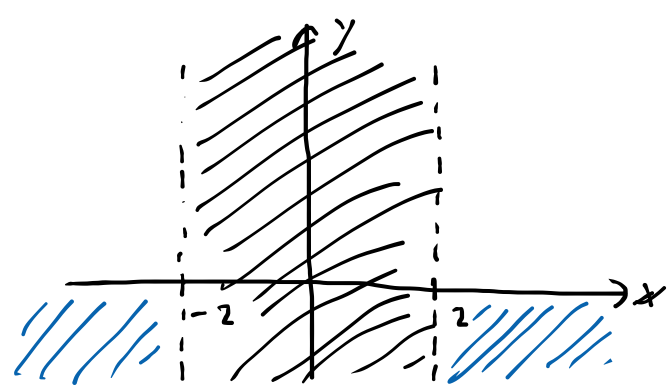
(Il log non è una f simmetrica)

Esercizio

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$

$D = (-\infty ; -2) \cup (2 ; +\infty)$

Segno: $\dfrac{x^2}{x^2+4} > 0$ $\quad x^2 > 0$ $\quad x > 0$

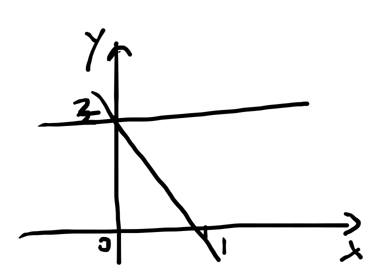


Intersez: $\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{x^2+4} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$ No int con asse x

Esercizio

$f(x) = x^2 - 3x + 2$, $x \in [0,1]$

int y $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ $\quad$ int x $\begin{cases} y = 0 \\ (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$



Esercizio

$y = \frac{2}{x-5}$ $\quad D: x-5 \neq 0$

$x \neq 5$

$\mathbb{R} - \{5\}$

$\forall x \neq 5,\ x \in \mathbb{R}$

$y = \frac{3x-4}{3-x^2}$ $\quad -x^2+3>0$

$x^2-3<0$

$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

$D = (-\sqrt{3};\sqrt{3})$

$y = \frac{x}{x^4+1}$

$x^4+1>0$

$x^4>-1$ IMP. tutto $\mathbb{R}$

$y = \frac{1}{x^4-16}$ $\quad x^4-16 \neq 0$

$x^4 \neq 16$

$x \neq \pm 2$

$y = \frac{x+1}{x^2+|x|}$ $\quad D = \mathbb{R} - \{0\}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ tranne $x=0$

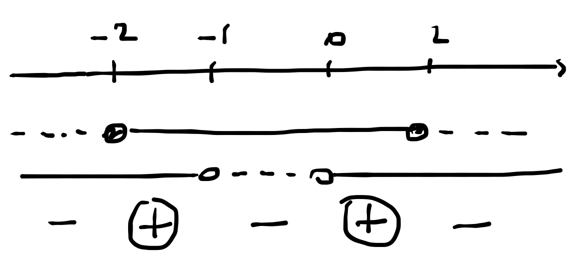
$y = \sqrt{\frac{4-x^2}{x+x^2}}$

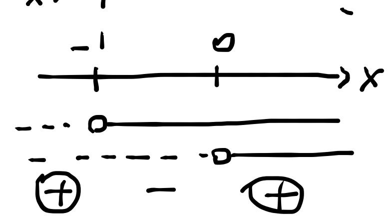
$\frac{4-x^2}{x+x^2} \geq 0$ $\quad -x^2+4 \geq 0$ $\quad x(1+x)>0$

$x^2-4 \leq 0$ $\quad x>0$

$x^2 \leq 4$ $\quad 1+x>0$

$-2 \leq x \leq 2$ $\quad x>-1$





$x<-1 \cup x>0$

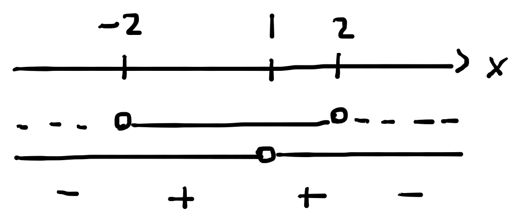
$-2 \leq x < -1 \vee 0 < x \leq 2$

$D = [-2,-1) \cup (0;2]$

Esercizio

$$y = \frac{\ln(4-x^2)}{x-1}$$

$$\begin{cases} 4-x^2>0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} -2<x<2 \\ x\neq 1 \end{array}$$



$-2<x<1 \ \vee \ 1<x<2$

Esercizio

$$y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{\log(x^2-24)}}$$

$\log(x^2-24)>0$

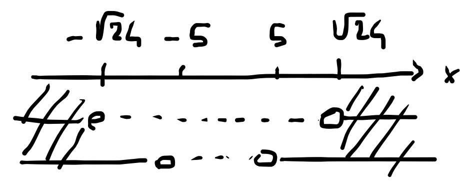
$\log(x^2-24)>\log 1$

$x^2>25$

$x<-5 \vee x>5$

$x^2-24>0$

$x<-\sqrt{24} \ \vee \ x>\sqrt{24}$

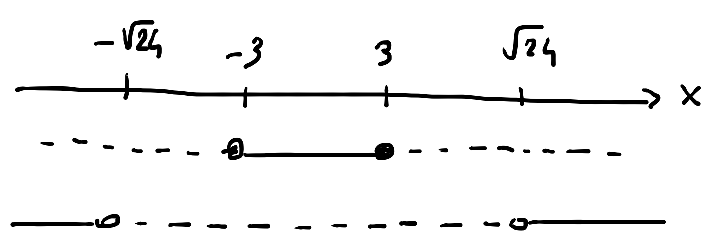


$x<-\sqrt{24} \ \vee \ x>\sqrt{24}$

$9-x^2\geq 0$

$x^2\leq 9$

$-3\leq x\leq 3$



Esercizio

$$f(x) = \frac{\log(x^2-9)}{e^{\frac{1}{x}}} \qquad \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

Dominio: $x^2-9>0$

$x<-3 \lor x>3$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \boxed{x<-3 \lor x>3} \end{cases}$$

$D = (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$

Segno? $\frac{\log(x^2-9)}{e^{\frac{1}{x}}} > 0$

$e^{\frac{1}{x}}$ la funz esponenz è sempre >0

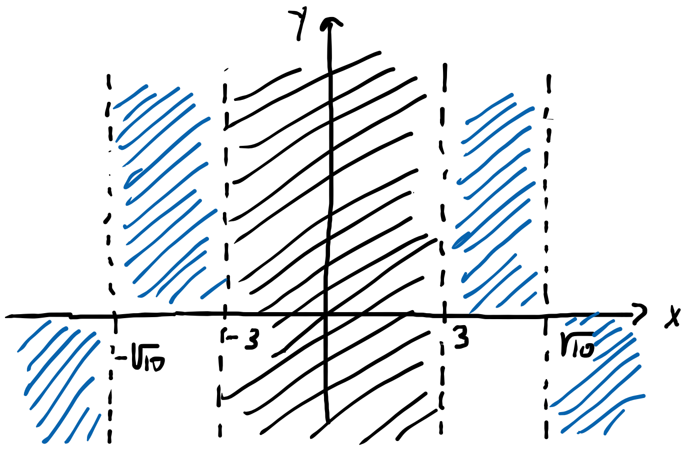
Quindi analizzo solo il numeratore

$\log(x^2-9)>0$

$\log(x^2-9)>\log 1$

$x^2>10$

$x<-\sqrt{10} \lor x>\sqrt{10}$



Intersezioni

$\nexists$ int con asse y perché $0 \notin D$

int asse x $\begin{cases} y=0 \\ \frac{\log(x^2-9)}{e^{\frac{1}{x}}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \log(x^2-9)=0$

$x = \pm\sqrt{10}$

La funzione è pari o dispari?

$\log(x^2-3)$ è pari ma $e^{\frac{1}{x}}$ non è né pari né dispari

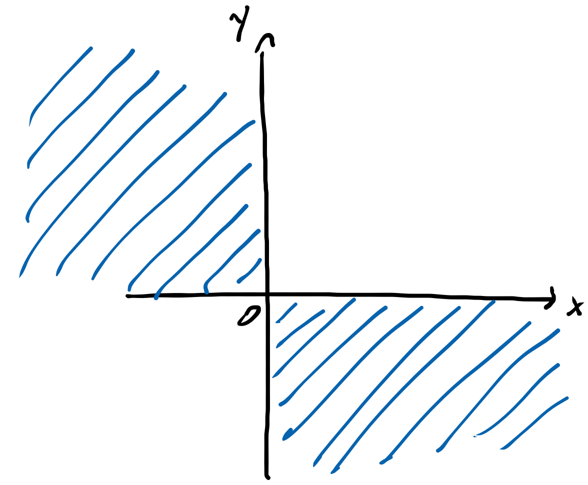
Quindi la funz. non è né pari né dispari.

Esercizio

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

Dominio

$$x^2+1 \neq 0$$
$$x^2 \neq -1$$
$$x \neq \sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R} = (-\infty ; +\infty)$$



Segno? $\quad \frac{x}{x^2+1} > 0$

$$y>0 \Longleftrightarrow x>0$$
$$x^2+1>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Intersezioni?

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ \frac{x}{\cancel{x^2+1}} = 0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

Quindi la funz. passa per l'origine

E' dispari perché

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x+1} = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esercizio

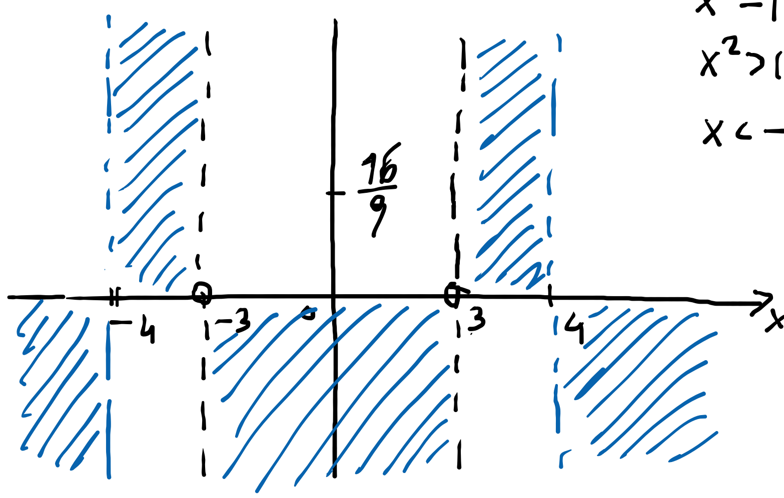
$$y = \frac{x^2-16}{x^2-9}$$

Dominio

$x \neq \pm 3$ $\quad D = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$

Segno?

$$\frac{x^2-16}{x^2-9} > 0$$



$N > 0$

$x^2 - 16 > 0$

$x^2 > 16$

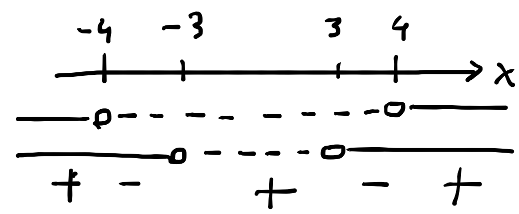
$x < -4 \ \vee \ x > 4$

$D > 0$

$x^2 - 9 > 0$

$x^2 > 9$

$x < -3 \ \vee \ x > 3$



$x < -4 \ \vee -3 < x < 3 \ \vee \ x > 4$

$$y(x) = \frac{x^2-16}{x^2-9}$$

$$y(-x) = \frac{(-x)^2-16}{(-x)^2-9} = y(x) \quad \forall x \in D \qquad \text{è pari}$$

Intersezioni?

asse x $\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x^2-16}{x^2-4} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2-16}{\cancel{x^2-4}} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 4$

asse y $\begin{cases} x = 0 \\ y = +\dfrac{16}{4} \end{cases}$

Esercizio

$$y=\frac{|x|-1}{x+2}$$

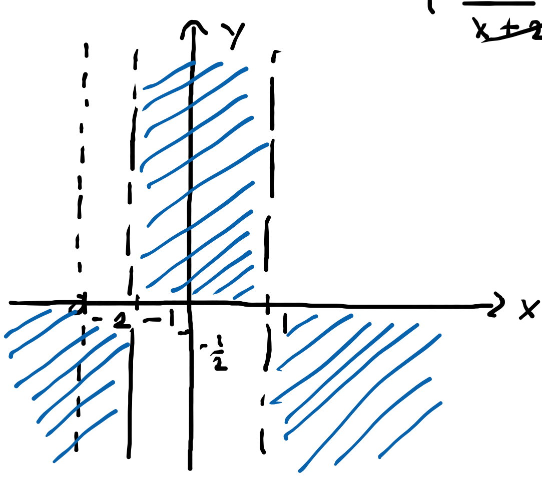
Dominio $\quad x+2\neq 0$

$x\neq -2 \qquad D=(-\infty;-2)\cup(-2;\infty)$

$$y=\frac{|x|-1}{x+2}\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+2} & \text{se } x\geq 0\\[2mm] \dfrac{-x-1}{x+2} & \text{se } x<0\end{cases}$$

Intersezione asse x
$$\begin{cases} y=0\\ \dfrac{x-1}{\cancel{x+2}}=0 \Rightarrow x=1\\ \dfrac{-x-1}{\cancel{x+2}}=0 \Rightarrow -x=1\\ \qquad\qquad x=-1\end{cases}$$

Intersez. asse y
$$\begin{cases} x=0\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}$$



Segno:

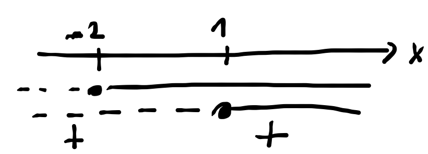
$\dfrac{x-1}{x+2}\geq 0$

N: $x-1\geq 0$

$x\geq 1$

D: $x+2\geq 0$

$x\geq -2$



$x\leq -2 \vee x\geq 1$

$\dfrac{-x-1}{x+2}>0$

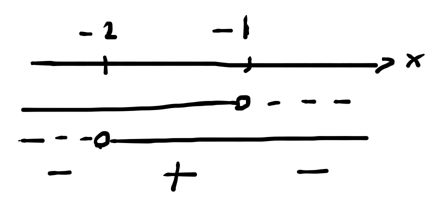
N: $-x-1>0$

$-x>1$

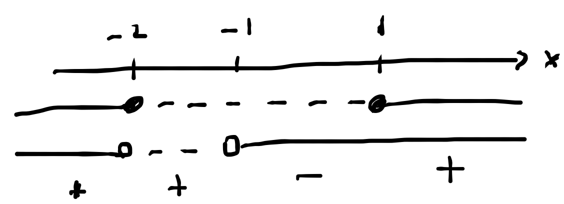
$x<-1$

D: $x+2>0$

$x>-2$



$x<-2 \cup x>-1$



Esercizio

$$y = \frac{|x|-1}{x-2}$$

C.E. $x \neq 2 \Rightarrow D = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$

$$y = \begin{cases} \frac{x-1}{x-2} & \text{se } \boxed{x \geq 0} \\ \frac{-x-1}{x-2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Intersezione asse x
$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x-1}{x-2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{\cancel{x-2}} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ accettabile perché } \boxed{\geq 0}$$

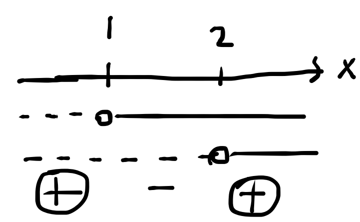
$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{-x-1}{x-2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-x-1}{\cancel{x-2}} = 0 \Rightarrow -x = 1, \quad x = -1$$
(Siamo nel caso "se $x<0$")
Quindi è accettabile

asse y
$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{x-1}{x-2} = y \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$
(Accettabile perché siamo nel caso $x \geq 0$ del modulo)

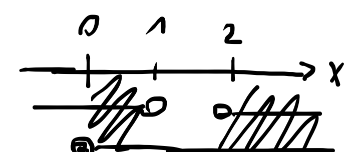
$$\begin{cases} \boxed{x=0} \\ \frac{-x-1}{x-2} = y \end{cases}$$
(NON possiamo perché siamo nel caso $x<0$ del modulo)

Segno
$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-2} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$
N: $x - 1 > 0$, $x > 1$

D: $x - 2 > 0$, $x > 2$



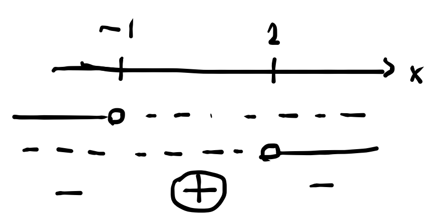
$x<1 \lor x>2$



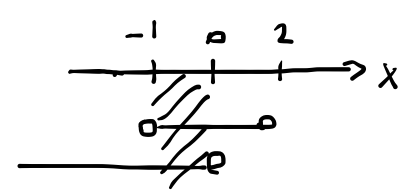
$\boxed{0 \leq x < 1 \lor x > 2}$

$$\begin{cases} \frac{-x-1}{x-2} > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$
N: $-x - 1 > 0$, $-x > 1$, $x < -1$

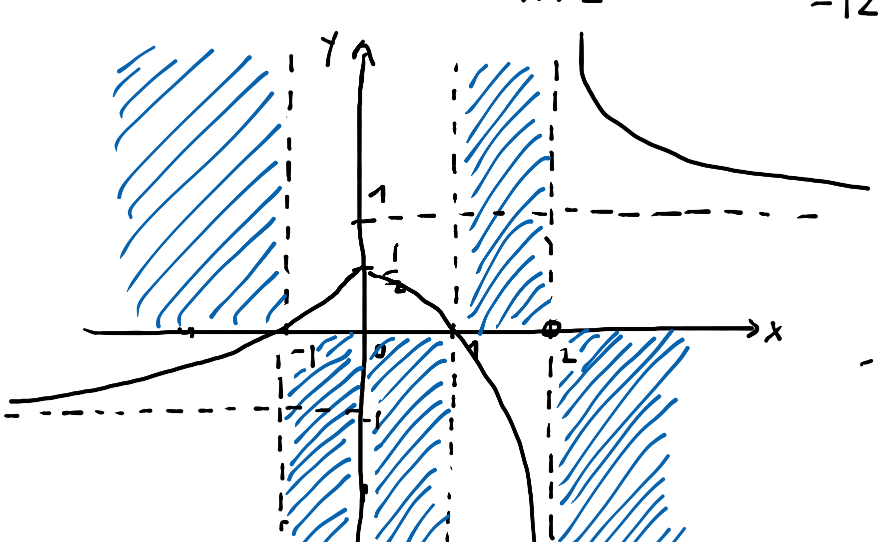
D: $x - 2 > 0$, $x > 2$



$-1 < x < 2$



$\boxed{-1 < x < 0}$



La funzione è illimitata

Non ci sono max e min

La f. è strettam. monot. crescente $(-\infty; 0)$

La f è strettam. monot. decresc. in $(0; 2)$

Non è iniettiva perché la retta orizzontale incontra in due punti la f

Non è suriettiva perché non esistono x nell'intervallo $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

La f non è biettiva e quindi non è invertibile

La f non è né pari né dispari

Esercizio

$y = \frac{2}{x} + 3x - 1$

$y = \frac{2+3x^2-x}{x} = \frac{3x^2-x+2}{x}$

C.E. $x \neq 0 \Rightarrow D = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$

Intersez. asse x $\begin{cases} y = 0 \\ 3x^2 - x + 2 = 0 \end{cases}$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-24}}{6}$ $\Delta < 0$ Eq. Imp

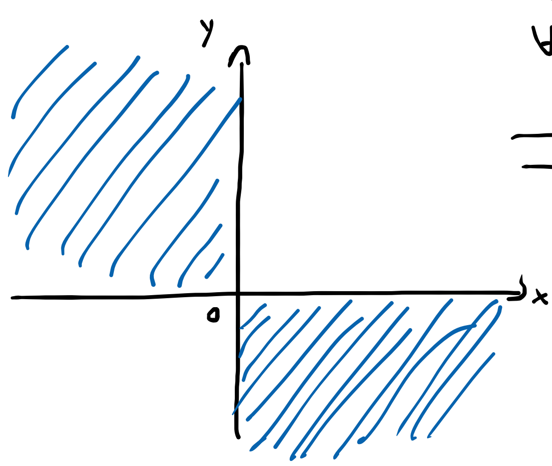
$\nexists$ int. asse x

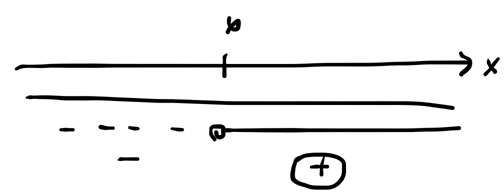
Intersez. asse y $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow \nexists \text{ perché } 0 \notin D \end{cases}$

Segno: $\frac{3x^2-x+2}{x} > 0$

$N > 0$
$3x^2 - x + 2 > 0$
$\forall x \in \mathbb{R}$

$D > 0$
$x > 0$





Esercizio

$f(x) = 3x^2 + 5x - 1$

$a > 0$

$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{5}{6}$

$y = 3 \cdot \frac{25}{36} - \frac{25}{6} - 1 = -\frac{37}{12}$

Esercizio

$f(x) = |x| + 5$

$f(x) = f(-x)$ è pari

$f(x) = \operatorname{sen}|x|$ è pari

$x = -1$

$f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$ $f(-1) = \frac{-3}{1+2} = -\frac{3}{3} = -1$ è dispari

$f(x) = -f(-x)$