INDEPENDENT SETS V.1.2

1. Caso di studio : Grafo $P_1^{(1)} \times P_1 1^{(1)}$

Definition 1.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

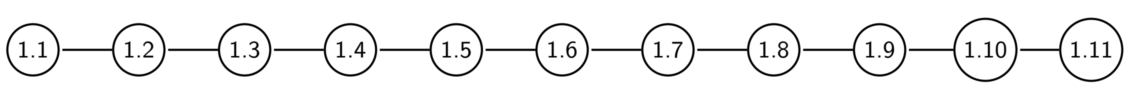
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 1.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (1;2), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1), (1;3), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;2), (1;4), \\ (1;4) \longrightarrow & (1;3), (1;5), \\ (1;5) \longrightarrow & (1;4), (1;6), \\ (1;6) \longrightarrow & (1;5), (1;7), \\ (1;7) \longrightarrow & (1;6), (1;8), \\ (1;8) \longrightarrow & (1;7), (1;9), \\ (1;9) \longrightarrow & (1;8), (1;10), \\ (1;10) \longrightarrow & (1;9), (1;11), \\ (1;11) \longrightarrow & (1;10), \end{cases}$$



Date: January 14, 2016.
Key words and phrases. sample.tex.

1.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 1.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_1^{(1)} \times P_1 1^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2					
3	1	3	1				
4	1	4	3				
5	1	5	6	1			
6	1	6	10	4			
7	1	7	15	10	1		
8	1	8	21	20	5		
9	1	9	28	35	15	1	
10	1	10	36	56	35	6	
11	1	11	45	84	70	21	1

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AD_n	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60
RS_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
K_n	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

1.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente

e ○ u ●

Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} e \longrightarrow e+u \\ u \longrightarrow e \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	u	e
u	0	1
e	1	1

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-2 - x)}{(-1 + x + x^2)} = 2 + 3x + 5x^2 + 8x^3 + 13x^4 + 21x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([1])

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RS_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

1.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} E(x) = xE(x) + xU(x) + 1 \\ U(x) = xE(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è E. Quindi risolvendo in $E(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

$$E(x) = \frac{(-1 - x)}{(-1 + x + x^2)} = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 13x^5 + O(x^6)$$

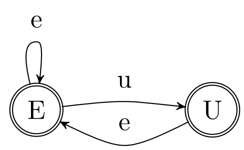
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

[1] Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} E \to eE \mid uU \mid \lambda \\ U \to eE \mid \lambda \end{cases}$$



1.4. **Ricorrenza Lineare.**

In questo caso otteniamo la *ricorrenza locale* dal denominatore della funzione generatrice della somma delle righe:

$$F(x) = \frac{(-2-x)}{(-1+x+x^2)} \ .$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RS_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

$$RS_n = RS_{n-1} + RS_{n-2}$$

schema

1	0
0	1
0	$*$

$$T(n,k) = T(n-1,k) + T(n-2,k-1)$$

1.5. **Antidiagonali.**

sigma =

1	0
0	1
0	$*$

$$H_0 = 1, H_1 = 1 + x$$

$$V_0 = (1-x)^-1$$

1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
1	3	1	0	0	0
1	4	3	0	0	0
1	5	6	1	0	0

2. Caso di studio : Grafo $P_1^{(1)} \times P_1 1^{(2)}$

Definition 2.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

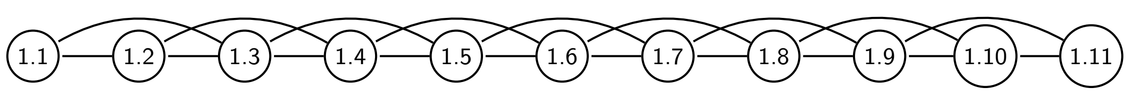
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 2.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (1;2),(1;3), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(1;3),(1;4), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;4),(1;5), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(1;5),(1;6), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(1;6),(1;7), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;4),(1;5),(1;7),(1;8), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;5),(1;6),(1;8),(1;9), \\
(1;8) \longrightarrow & (1;6),(1;7),(1;9),(1;10), \\
(1;9) \longrightarrow & (1;7),(1;8),(1;10),(1;11), \\
(1;10) \longrightarrow & (1;8),(1;9),(1;11), \\
(1;11) \longrightarrow & (1;9),(1;10),
\end{cases}$$



2.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 2.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_1^{(1)} \times P_1 1^{(2)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2			
3	1	3			
4	1	4	1		
5	1	5	3		
6	1	6	6		
7	1	7	10	1	
8	1	8	15	4	
9	1	9	21	10	
10	1	10	28	20	1
11	1	11	36	35	5

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AD_n	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36
RS_n	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88
K_n	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

2.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente

e ○ u ●

Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} ee \longrightarrow\ e+u \\ eu \longrightarrow\ e \\ ue \longrightarrow\ e \end{cases}$$

Riscriviamo lo schema con stringhe tutte di lunghezza h (la potenza del cammino orizzontale):

$$\begin{cases} ee \longrightarrow\ ee+eu \\ eu \longrightarrow\ ue \\ ue \longrightarrow\ ee \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	eu	ee	ue
eu	0	0	1
ee	1	1	0
ue	0	1	0

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-3 - x - 2x^2)}{(-1 + x + x^3)} = 3 + 4x + 6x^2 + 9x^3 + 13x^4 + 19x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([2])

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RS_n	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

2.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} EE(x) = xEE(x) + xEU(x) + 1 \\ EU(x) = xUE(x) + 1 \\ UE(x) = xEE(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è EE. Quindi risolvendo in $EE(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

$$EE(x) = \frac{(-1 - x - x^2)}{(-1 + x + x^3)} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 6x^4 + 9x^5 + O(x^6)$$

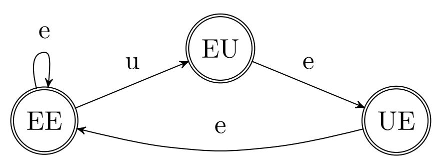
[2] Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} EE \to eEE \mid uEU \mid \lambda \\ EU \to eUE \mid \lambda \\ UE \to eEE \mid \lambda \end{cases}$$



2.4. **Ricorrenza Lineare.**

In questo caso otteniamo la *ricorrenza locale* dal denominatore della funzione generatrice della somma delle righe:

$$F(x) = \frac{(-3 - x - 2x^2)}{(-1 + x + x^3)} \ .$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RS_n	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88

$$RS_n = RS_{n-1} + RS_{n-2} + RS_{n-3}$$

schema

1	0
0	0
0	1
0	$*$

$$T(n, k) = T(n-1, k) + T(n-3, k-1)$$

2.5. **Antidiagonali.**

$$sigma = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$$

$$H_0 = 1, H_1 = 1 + x, H_2 = 1 + 2x$$

$$V_0 = (1 - x)^-1$$

1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
1	3	0	0	0	0
1	4	1	0	0	0
1	5	3	0	0	0

3. Caso di studio : Grafo $P_1^{(1)} \times P_1 1^{(e3)}$

Definition 3.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

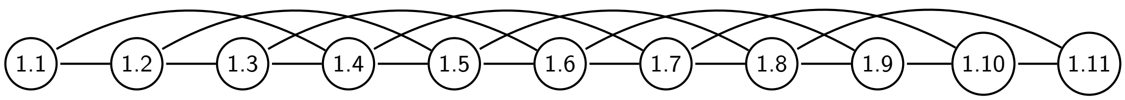
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 3.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i, j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow\ (1;2),(1;4), \\ (1;2) \longrightarrow\ (1;1),(1;3),(1;5), \\ (1;3) \longrightarrow\ (1;2),(1;4),(1;6), \\ (1;4) \longrightarrow\ (1;1),(1;3),(1;5),(1;7), \\ (1;5) \longrightarrow\ (1;2),(1;4),(1;6),(1;8), \\ (1;6) \longrightarrow\ (1;3),(1;5),(1;7),(1;9), \\ (1;7) \longrightarrow\ (1;4),(1;6),(1;8),(1;10), \\ (1;8) \longrightarrow\ (1;5),(1;7),(1;9),(1;11), \\ (1;9) \longrightarrow\ (1;6),(1;8),(1;10), \\ (1;10) \longrightarrow\ (1;7),(1;9),(1;11), \\ (1;11) \longrightarrow\ (1;8),(1;10), \end{cases}$$



3.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 3.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_1^{(1)} \times P_1 1^{(e3)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2					
3	1	3	1				
4	1	4	2				
5	1	5	4	1			
6	1	6	7	2			
7	1	7	11	5	1		
8	1	8	16	10	2		
9	1	9	22	18	6	1	
10	1	10	29	30	13	2	
11	1	11	37	47	26	7	1

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AD_n	1	1	2	3	4	6	8	11	16	22	31	44
RS_n	1	2	3	5	7	11	16	25	37	57	85	130
K_n	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

3.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente

e ○ u ●

Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} eee \longrightarrow \ e+u \\ ueu \longrightarrow \ e \\ uee \longrightarrow \ e \\ eue \longrightarrow \ e+u \\ eeu \longrightarrow \ e \end{cases}$$

Riscriviamo lo schema con stringhe tutte di lunghezza h (la potenza del cammino orizzontale):

$$\begin{cases} eee \longrightarrow \ eee+eeu \\ ueu \longrightarrow \ eue \\ uee \longrightarrow \ eee \\ eue \longrightarrow \ uee+ueu \\ eeu \longrightarrow \ eue \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	ueu	uee	eue	eeu	eee
ueu	0	0	1	0	0
uee	0	0	0	0	1
eue	1	1	0	0	0
eeu	0	0	1	0	0
eee	0	0	0	1	1

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-5 - 2x + x^2 - 3x^3)}{(-1 + x + x^2 - x^3 + x^4)} = 5 + 7x + 11x^2 + 16x^3 + 25x^4 + 37x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([3])

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RS_n	1	2	3	5	7	11	16	25	37	57	85	130

[3] Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

3.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} EEE(x) = xEEE(x) + xEEU(x) + 1 \\ UEU(x) = xEUE(x) + 1 \\ UEE(x) = xEEE(x) + 1 \\ EUE(x) = xUEE(x) + xUEU(x) + 1 \\ EEU(x) = xEUE(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è EEE. Quindi risolvendo in $EEE(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

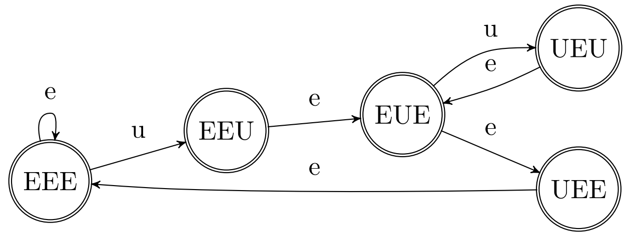
$$EEE(x) = \frac{(-1 - x - x^3)}{(-1 + x + x^2 - x^3 + x^4)} = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 11x^5 + O(x^6)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	2	3	5	7	11	16	25	37	57

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} EEE \to eEEE \mid uEEU \mid \lambda \\ UEU \to eEUE \mid \lambda \\ UEE \to eEEE \mid \lambda \\ EUE \to eUEE \mid uUEU \mid \lambda \\ EEU \to eEUE \mid \lambda \end{cases}$$



3.4. **Ricorrenza Lineare.**

In questo caso otteniamo la *ricorrenza locale* dal denominatore della funzione generatrice della somma delle righe:

$$F(x) = \frac{(-5 - 2x + x^2 - 3x^3)}{(-1 + x + x^2 - x^3 + x^4)} \ .$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RS_n	1	2	3	5	7	11	16	25	37	57	85	130

$$RS_n = RS_{n-1} + RS_{n-2} + RS_{n-3} + RS_{n-4}$$

$$\text{schema} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$$

$$T(n,k) = T(n-1,k) + T(n-2,k-1) - T(n-3,k-1) + T(n-4,k-1)$$

3.5. **Antidiagonali.**

$$sigma = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$$

$$H_0 = 1, H_1 = 1 + x, H_2 = 1 + 2x, H_3 = 1 + 3x + x^2$$

$$V_0 = (1 - x)^{-}1$$

1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
1	3	1	0	0	0
1	4	2	0	0	0
1	5	4	1	0	0

4. Caso di studio : Grafo $P_1^{(1)} \times P_1 1^{(3)}$

Definition 4.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

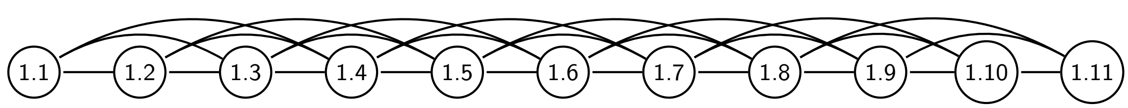
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 4.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(1;4), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1),(1;3),(1;4),(1;5), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;4),(1;5),(1;6), \\ (1;4) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;3),(1;5),(1;6),(1;7), \\ (1;5) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(1;4),(1;6),(1;7),(1;8), \\ (1;6) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(1;5),(1;7),(1;8),(1;9), \\ (1;7) \longrightarrow & (1;4),(1;5),(1;6),(1;8),(1;9),(1;10), \\ (1;8) \longrightarrow & (1;5),(1;6),(1;7),(1;9),(1;10),(1;11), \\ (1;9) \longrightarrow & (1;6),(1;7),(1;8),(1;10),(1;11), \\ (1;10) \longrightarrow & (1;7),(1;8),(1;9),(1;11), \\ (1;11) \longrightarrow & (1;8),(1;9),(1;10), \end{cases}$$



4.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 4.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_1^{(1)} \times P_1 1^{(3)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	2		
3	1	3		
4	1	4		
5	1	5	1	
6	1	6	3	
7	1	7	6	
8	1	8	10	
9	1	9	15	1
10	1	10	21	4
11	1	11	28	10

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AD_n	1	1	2	3	4	5	6	8	11	15	20	26
RS_n	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50
K_n	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

4.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente

e ○ u ●

Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} eee \longrightarrow \; e+u \\ uee \longrightarrow \; e \\ eue \longrightarrow \; e \\ eeu \longrightarrow \; e \end{cases}$$

Riscriviamo lo schema con stringhe tutte di lunghezza h (la potenza del cammino orizzontale):

$$\begin{cases} eee \longrightarrow \; eee+eeu \\ uee \longrightarrow \; eee \\ eue \longrightarrow \; uee \\ eeu \longrightarrow \; eue \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	uee	eue	eeu	eee
uee	0	0	0	1
eue	1	0	0	0
eeu	0	1	0	0
eee	0	0	1	1

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-4 - x - 2x^2 - 3x^3)}{(-1 + x + x^4)} = 4 + 5x + 7x^2 + 10x^3 + 14x^4 + 19x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([4])

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RS_n	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

4.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} EEE(x) = xEEE(x) + xEEU(x) + 1 \\ UEE(x) = xEEE(x) + 1 \\ EUE(x) = xUEE(x) + 1 \\ EEU(x) = xEUE(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è EEE. Quindi risolvendo in $EEE(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

[4]Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

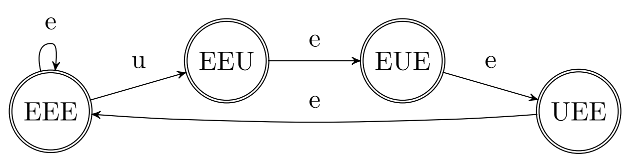
$$EEE(x) = \frac{-(((1+x)(1+x^2))}{(-1+x+x^4))} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 7x^5 + O(x^6)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} EEE \to eEEE \mid uEEU \mid \lambda \\ UEE \to eEEE \mid \lambda \\ EUE \to eUEE \mid \lambda \\ EEU \to eEUE \mid \lambda \end{cases}$$



4.4. **Ricorrenza Lineare.**

In questo caso otteniamo la *ricorrenza locale* dal denominatore della funzione generatrice della somma delle righe:

$$F(x) = \frac{(-4 - x - 2x^2 - 3x^3)}{(-1+x+x^4)} \ .$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RS_n	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50

$$RS_n = RS_{n-1} + RS_{n-2} + RS_{n-3} + RS_{n-4}$$

schema

1	0
0	0
0	0
0	1
0	*

$$T(n,k) = T(n-1,k) + T(n-4,k-1)$$

4.5. **Antidiagonali.**

$$sigma = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$$

$$H_0 = 1, H_1 = 1 + x, H_2 = 1 + 2x, H_3 = 1 + 3x$$

$$V_0 = (1 - x)^-1$$

1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
1	3	0	0	0	0
1	4	0	0	0	0
1	5	1	0	0	0

5. Caso di studio : Grafo $P_1^{(1)} \times H_1 1^{(1)}$

Definition 5.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

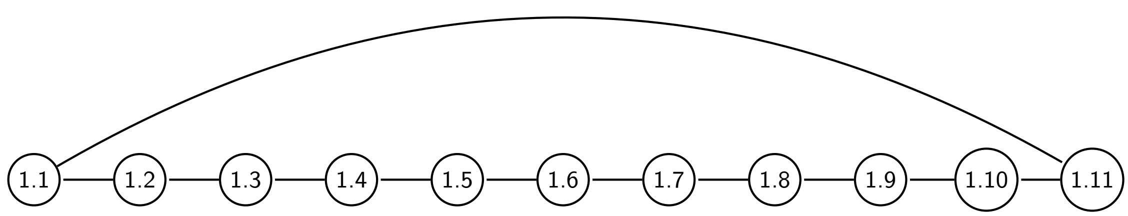
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 5.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i, j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

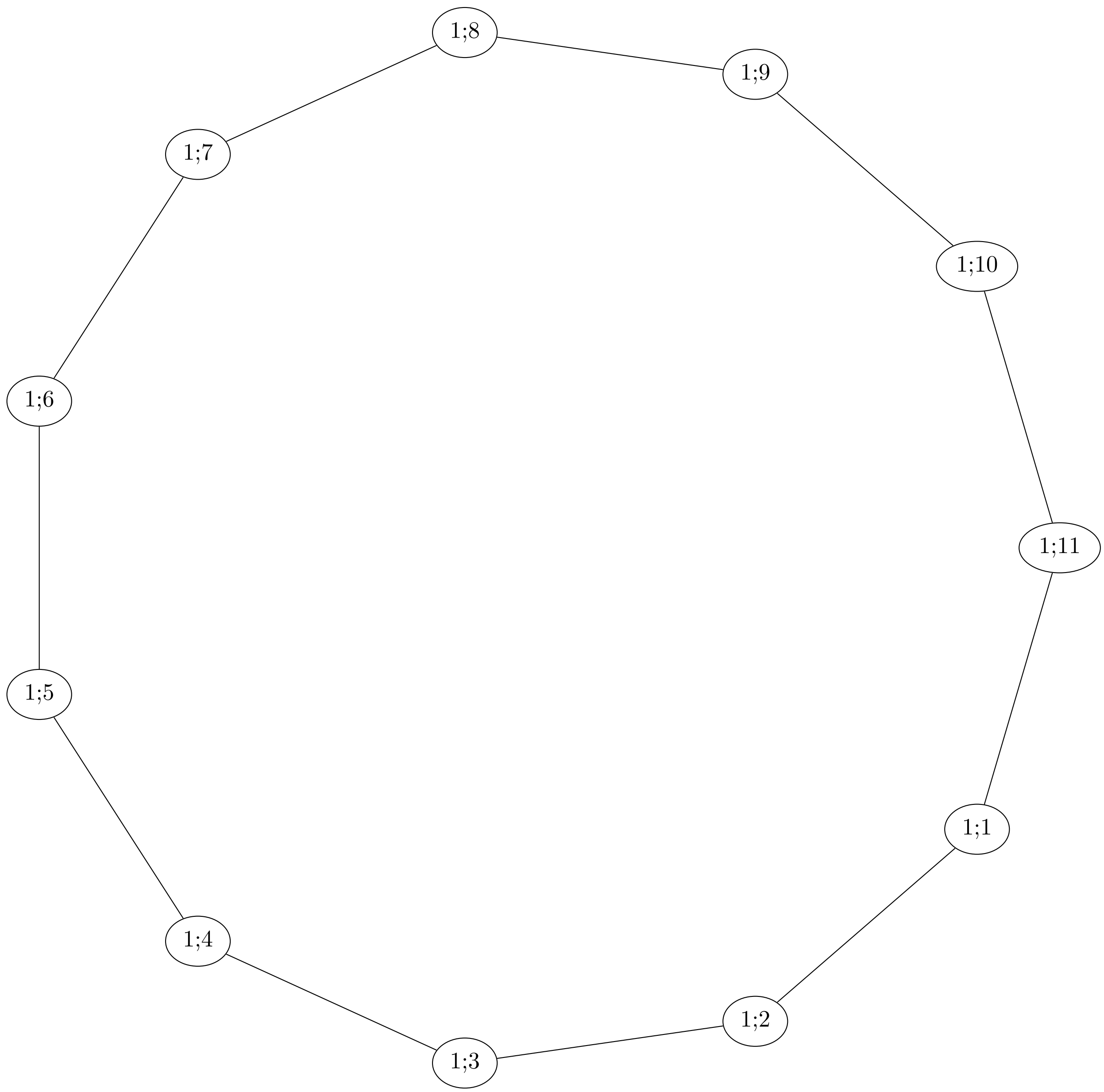
$$a(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow \ (1;2),(1;11), \\ (1;2) \longrightarrow \ (1;1),(1;3), \\ (1;3) \longrightarrow \ (1;2),(1;4), \\ (1;4) \longrightarrow \ (1;3),(1;5), \\ (1;5) \longrightarrow \ (1;4),(1;6), \\ (1;6) \longrightarrow \ (1;5),(1;7), \\ (1;7) \longrightarrow \ (1;6),(1;8), \\ (1;8) \longrightarrow \ (1;7),(1;9), \\ (1;9) \longrightarrow \ (1;8),(1;10), \\ (1;10) \longrightarrow \ (1;9),(1;11), \\ (1;11) \longrightarrow \ (1;1),(1;10), \end{cases}$$



In forma circolare diventa:



Con le famiglie di grafi H vogliamo indicare dei circuiti che hanno le potenze orizzontali *limitate* al valore di n, quindi l'unico arco che fa da circuito è quello tra il primo nodo e l'ultimo.

5.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 5.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_1^{(1)} \times H_1 1^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2				
3	1	3				
4	1	4	2			
5	1	5	5			
6	1	6	9	2		
7	1	7	14	7		
8	1	8	20	16	2	
9	1	9	27	30	9	
10	1	10	35	50	25	2
11	1	11	44	77	55	11

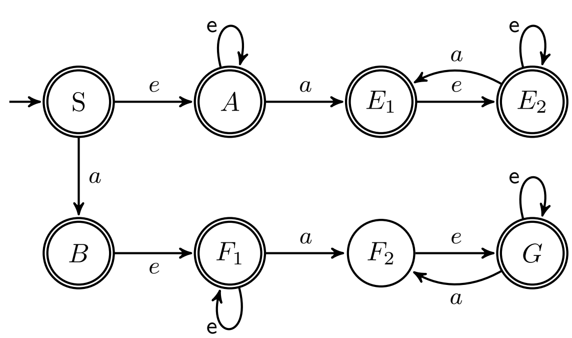
Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AD_n	1	1	2	3	4	5	8	12	17	25	37	54
RS_n	1	2	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199
K_n	0	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

5.2. **Automa.**
Questo è l'automa che riconosce (tutte e sole) le stringhe che corrispondono agli insiemi indipendenti di $C_n^{(1)}$:



Il sistema lineare diventa:

```
eqs = {
s==t*a+t*b+1,
a == t*a+t*e1+1,
e1 == t*e2+1,
e2 == t*e1+t*e2+1,
b == t*f1+1,
f1 == t*f1+t*f2+1,
f2 == t*g,
g == t*f2+t*g+1
}
```

$$F(t) = \frac{-1 - t + t^3}{-1 + t + t^2}$$

$$1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 7t^4 + 11t^5 + 18t^6 + 29t^7 + 47t^8 + 76t^9 + O[t]^{10}$$

6. Caso di studio : Grafo $P_1^{(1)} \times H_1 1^{(2)}$

Definition 6.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

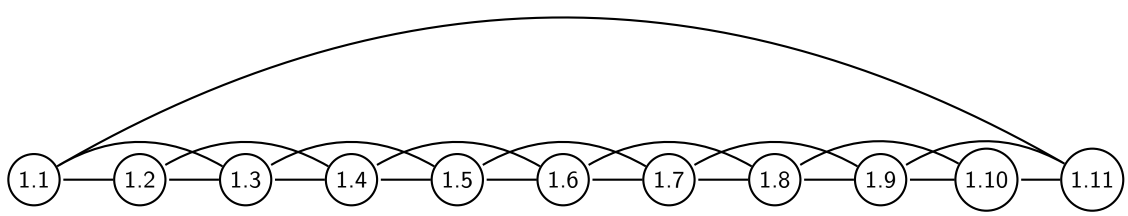
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 6.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

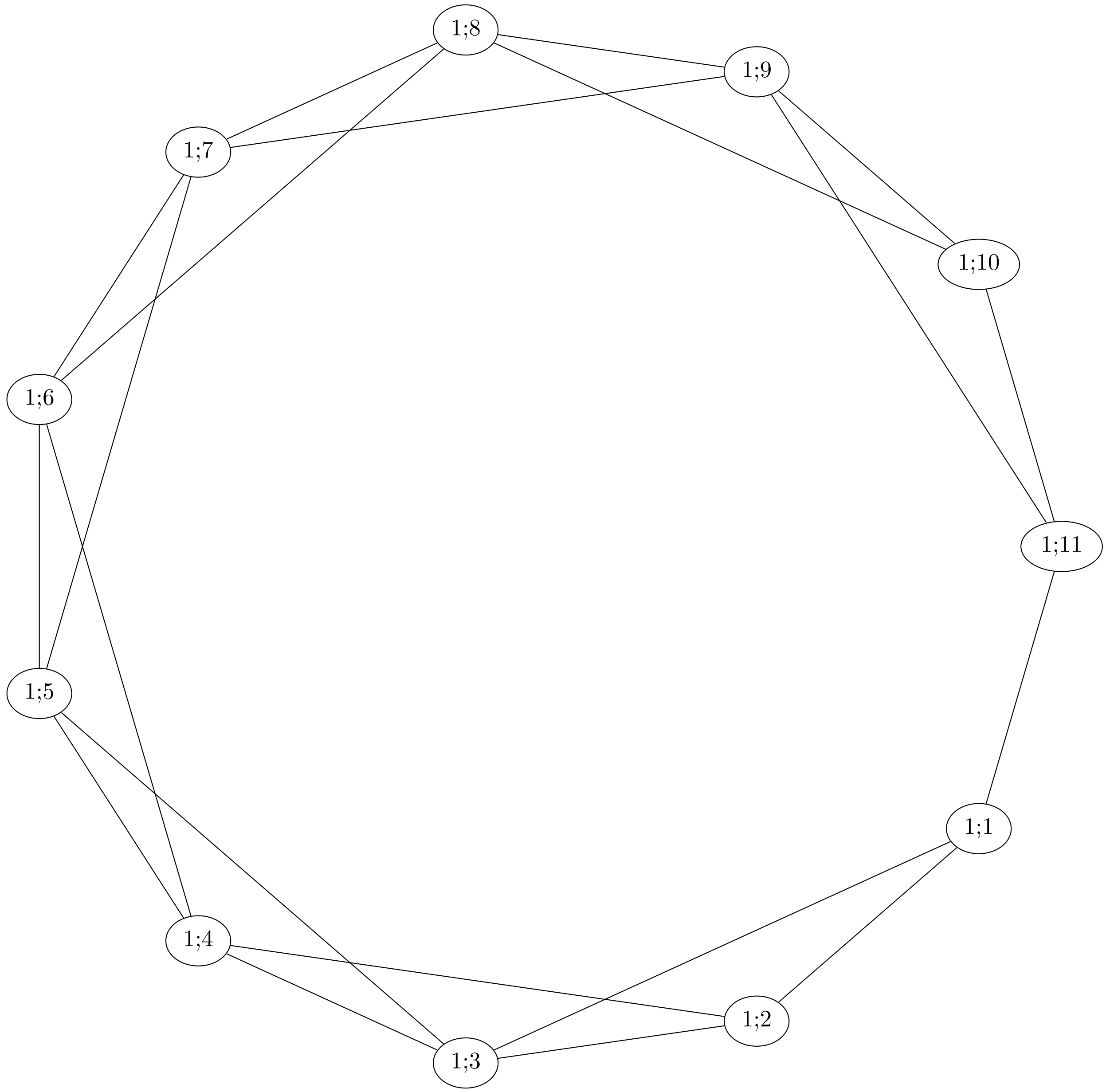
$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$
\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow \ (1;2),(1;3),(1;11), \\
(1;2) \longrightarrow \ (1;1),(1;3),(1;4), \\
(1;3) \longrightarrow \ (1;1),(1;2),(1;4),(1;5), \\
(1;4) \longrightarrow \ (1;2),(1;3),(1;5),(1;6), \\
(1;5) \longrightarrow \ (1;3),(1;4),(1;6),(1;7), \\
(1;6) \longrightarrow \ (1;4),(1;5),(1;7),(1;8), \\
(1;7) \longrightarrow \ (1;5),(1;6),(1;8),(1;9), \\
(1;8) \longrightarrow \ (1;6),(1;7),(1;9),(1;10), \\
(1;9) \longrightarrow \ (1;7),(1;8),(1;10),(1;11), \\
(1;10) \longrightarrow \ (1;8),(1;9),(1;11), \\
(1;11) \longrightarrow \ (1;1),(1;9),(1;10),
\end{cases}
$$



In forma circolare diventa:



Con le famiglie di grafi H vogliamo indicare dei circuiti che hanno le potenze orizzontali *limitate* al valore di n, quindi l'unico arco che fa da circuito è quello tra il primo nodo e l'ultimo.

6.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 6.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_1^{(1)} \times H_1 1^{(2)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2			
3	1	3			
4	1	4			
5	1	5	2		
6	1	6	5		
7	1	7	9		
8	1	8	14	2	
9	1	9	20	7	
10	1	10	27	16	
11	1	11	35	30	2

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

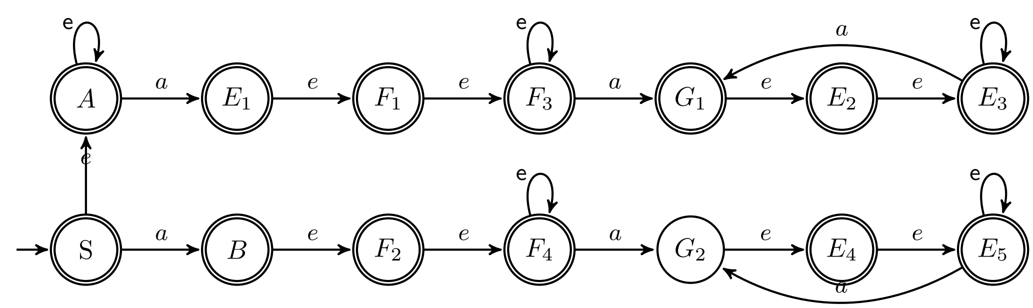
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AD_n	1	1	2	3	4	5	6	9	13	18	24	33
RS_n	1	2	3	4	5	8	12	17	25	37	54	79
K_n	0	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

6.2. **Automa.**

Ed ecco l'automa che riconosce (tutte e sole) le stringhe che corrispondono agli insiemi indipendenti di H_2:



Il sistema lineare diventa:

$\mathbf{eqs} = \{$
$\boldsymbol{s == t * a + t * b + 1,}$

$\boldsymbol{a == t * a + t * \mathrm{e1} + 1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{e1} == t * \mathrm{f1} + 1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{f1} == t * \mathrm{f3} + 1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{f3} == t * \mathrm{f3} + t * \mathrm{g1} + 1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{g1} == t * \mathrm{e2} + 1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{e2} == t * \mathrm{e3} + 1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{e3} == t * \mathrm{e3} + t * \mathrm{g1} + 1,}$
$\boldsymbol{b == t * \mathrm{f2} + 1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{f2} == t * \mathrm{f4} + 1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{f4} == t * \mathrm{f4} + t * \mathrm{g2} + 1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{g2} == t * \mathrm{e4},}$
$\boldsymbol{\mathrm{e4} == t * \mathrm{e5} + 1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{e5} == t * \mathrm{e5} + t * \mathrm{g2} + 1}$
$\boldsymbol{\}}$

$$F(t) = \frac{-1 - t - t^2 + t^4}{-1 + t + t^3}$$

$$1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 + 8t^5 + 12t^6 + 17t^7 + 25t^8 + 37t^9 + O[t]^{10}$$

7. Caso di studio : Grafo $P_1^{(1)} \times H_1 1^{(e3)}$

Definition 7.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

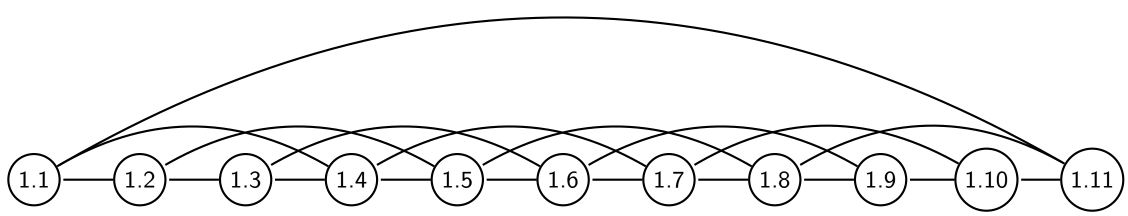
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 7.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

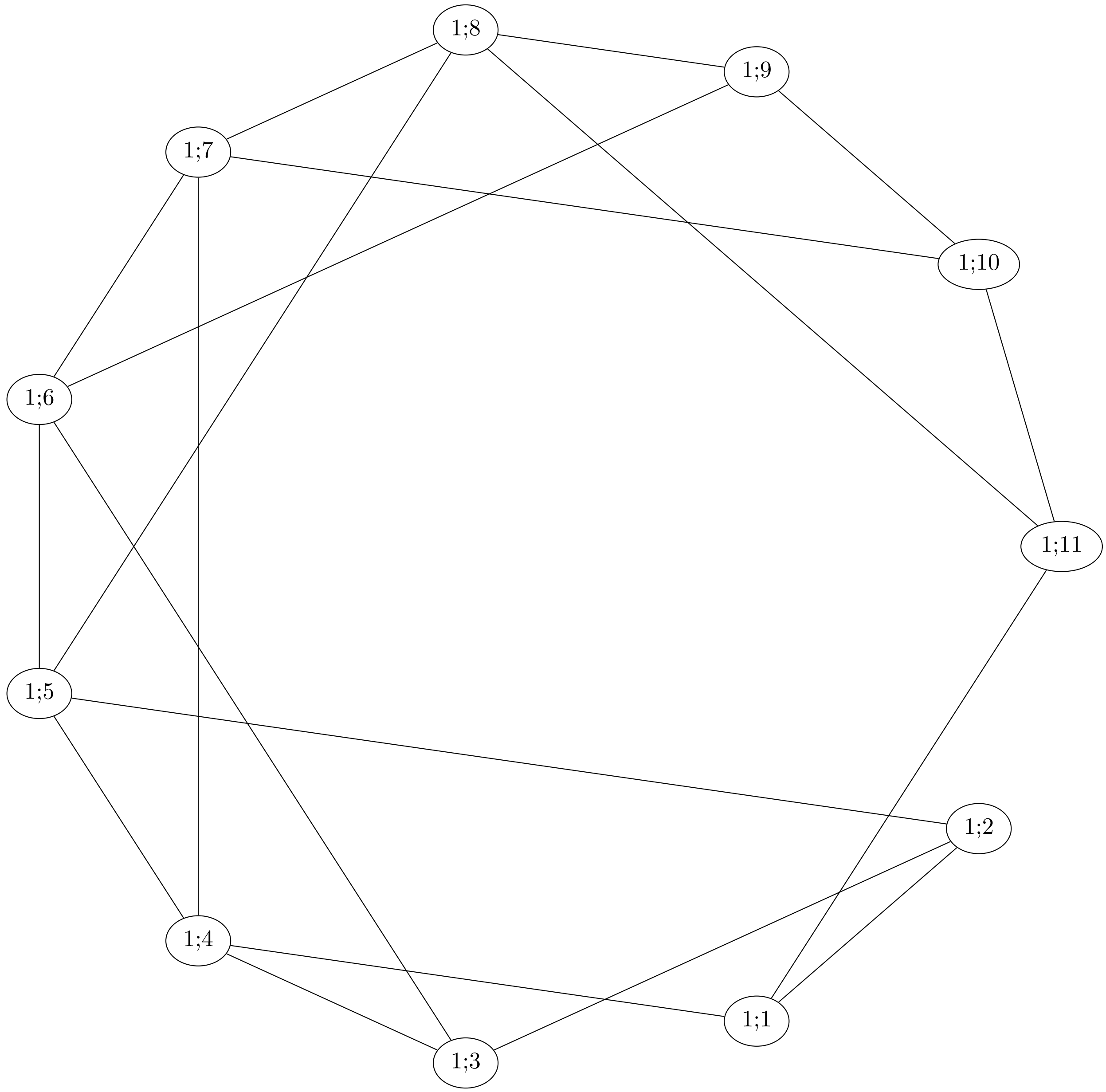
$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$
\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow \ (1;2),(1;4),(1;11),\\
(1;2) \longrightarrow \ (1;1),(1;3),(1;5),\\
(1;3) \longrightarrow \ (1;2),(1;4),(1;6),\\
(1;4) \longrightarrow \ (1;1),(1;3),(1;5),(1;7),\\
(1;5) \longrightarrow \ (1;2),(1;4),(1;6),(1;8),\\
(1;6) \longrightarrow \ (1;3),(1;5),(1;7),(1;9),\\
(1;7) \longrightarrow \ (1;4),(1;6),(1;8),(1;10),\\
(1;8) \longrightarrow \ (1;5),(1;7),(1;9),(1;11),\\
(1;9) \longrightarrow \ (1;6),(1;8),(1;10),\\
(1;10) \longrightarrow \ (1;7),(1;9),(1;11),\\
(1;11) \longrightarrow \ (1;1),(1;8),(1;10),
\end{cases}
$$



In forma circolare diventa:



Con le famiglie di grafi H vogliamo indicare dei circuiti che hanno le potenze orizzontali *limitate* al valore di n, quindi l'unico arco che fa da circuito è quello tra il primo nodo e l'ultimo.

7.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 7.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_1^{(1)} \times H_1 1^{(e3)}$.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2				
3	1	3				
4	1	4	2			
5	1	5	3			
6	1	6	6	2		
7	1	7	10	3		
8	1	8	15	8	2	
9	1	9	21	15	3	
10	1	10	28	26	10	2
11	1	11	36	42	20	3

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AD_n	1	1	2	3	4	5	8	10	14	21	28	40
RS_n	1	2	3	4	7	9	15	21	34	49	77	113
K_n	0	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

7.2. **Automa.**

Il sistema lineare diventa:

8. Caso di studio : Grafo $P_1^{(1)} \times H_1 1^{(3)}$

Definition 8.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V,E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

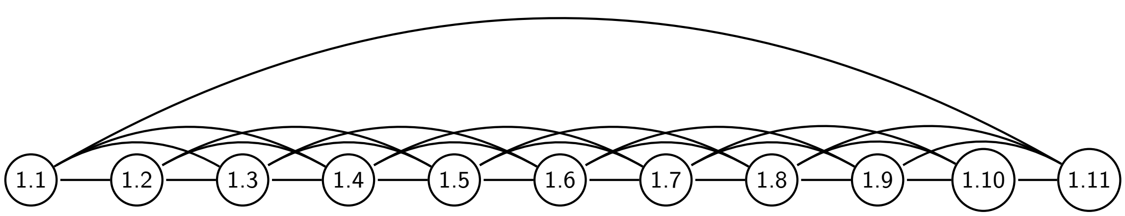
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 8.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

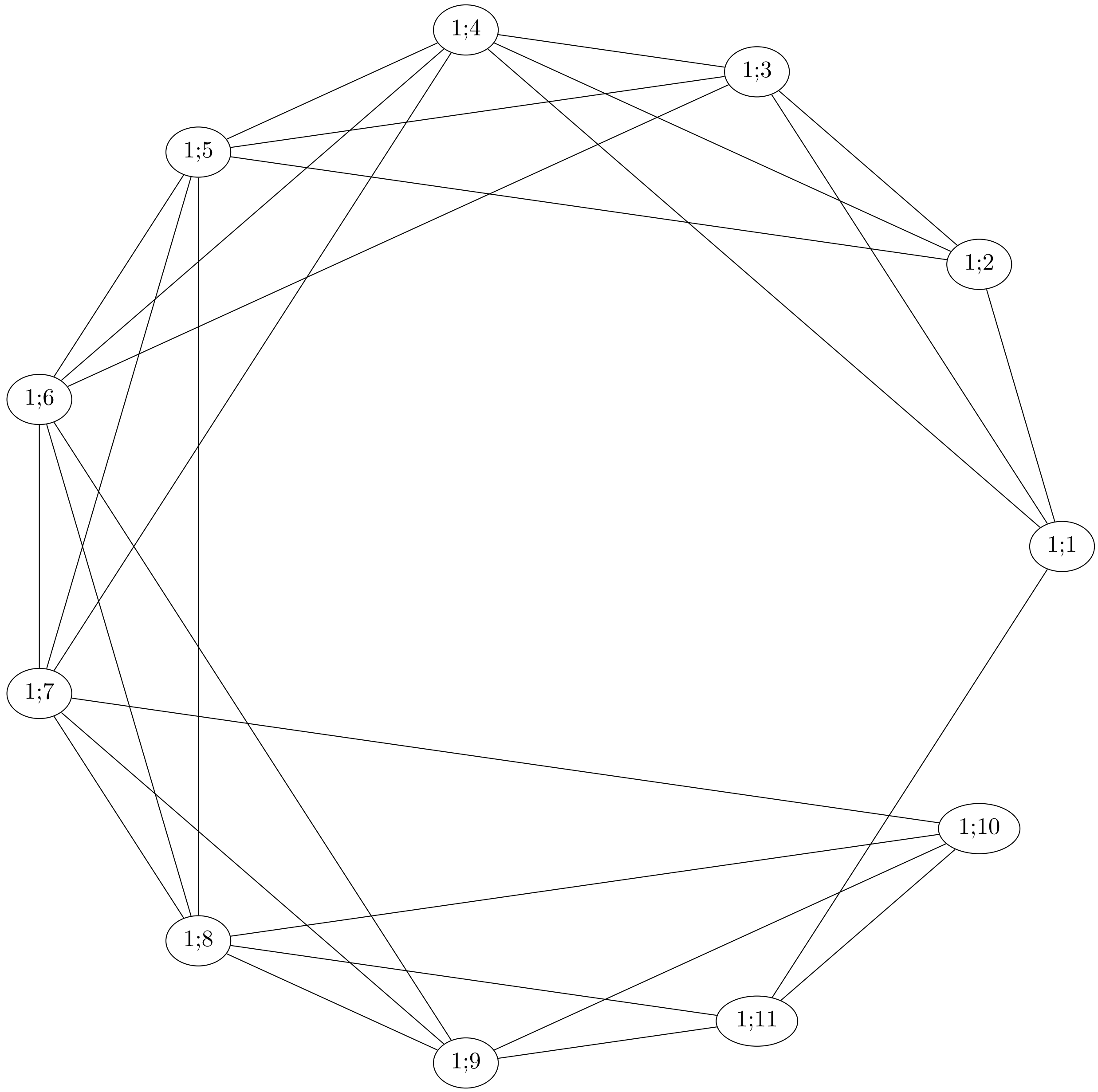
$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow \ (1;2),(1;3),(1;4),(1;11), \\ (1;2) \longrightarrow \ (1;1),(1;3),(1;4),(1;5), \\ (1;3) \longrightarrow \ (1;1),(1;2),(1;4),(1;5),(1;6), \\ (1;4) \longrightarrow \ (1;1),(1;2),(1;3),(1;5),(1;6),(1;7), \\ (1;5) \longrightarrow \ (1;2),(1;3),(1;4),(1;6),(1;7),(1;8), \\ (1;6) \longrightarrow \ (1;3),(1;4),(1;5),(1;7),(1;8),(1;9), \\ (1;7) \longrightarrow \ (1;4),(1;5),(1;6),(1;8),(1;9),(1;10), \\ (1;8) \longrightarrow \ (1;5),(1;6),(1;7),(1;9),(1;10),(1;11), \\ (1;9) \longrightarrow \ (1;6),(1;7),(1;8),(1;10),(1;11), \\ (1;10) \longrightarrow \ (1;7),(1;8),(1;9),(1;11), \\ (1;11) \longrightarrow \ (1;1),(1;8),(1;9),(1;10), \end{cases}$$



In forma circolare diventa:



Con le famiglie di grafi H vogliamo indicare dei circuiti che hanno le potenze orizzontali *limitate* al valore di n, quindi l'unico arco che fa da circuito è quello tra il primo nodo e l'ultimo.

8.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 8.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_1^{(1)} \times H_1 1^{(3)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	2		
3	1	3		
4	1	4		
5	1	5		
6	1	6	2	
7	1	7	5	
8	1	8	9	
9	1	9	14	
10	1	10	20	2
11	1	11	27	7

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AD_n	1	1	2	3	4	5	6	7	10	14	19	25
RS_n	1	2	3	4	5	6	9	13	18	24	33	46
K_n	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

8.2. **Automa.**

Il sistema lineare diventa:

9. Caso di studio : Grafo $P_1^{(1)} \times C_1 1^{(1)}$

Definition 9.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

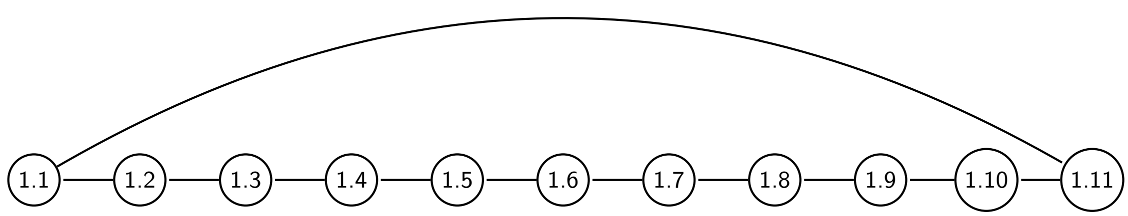
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 9.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

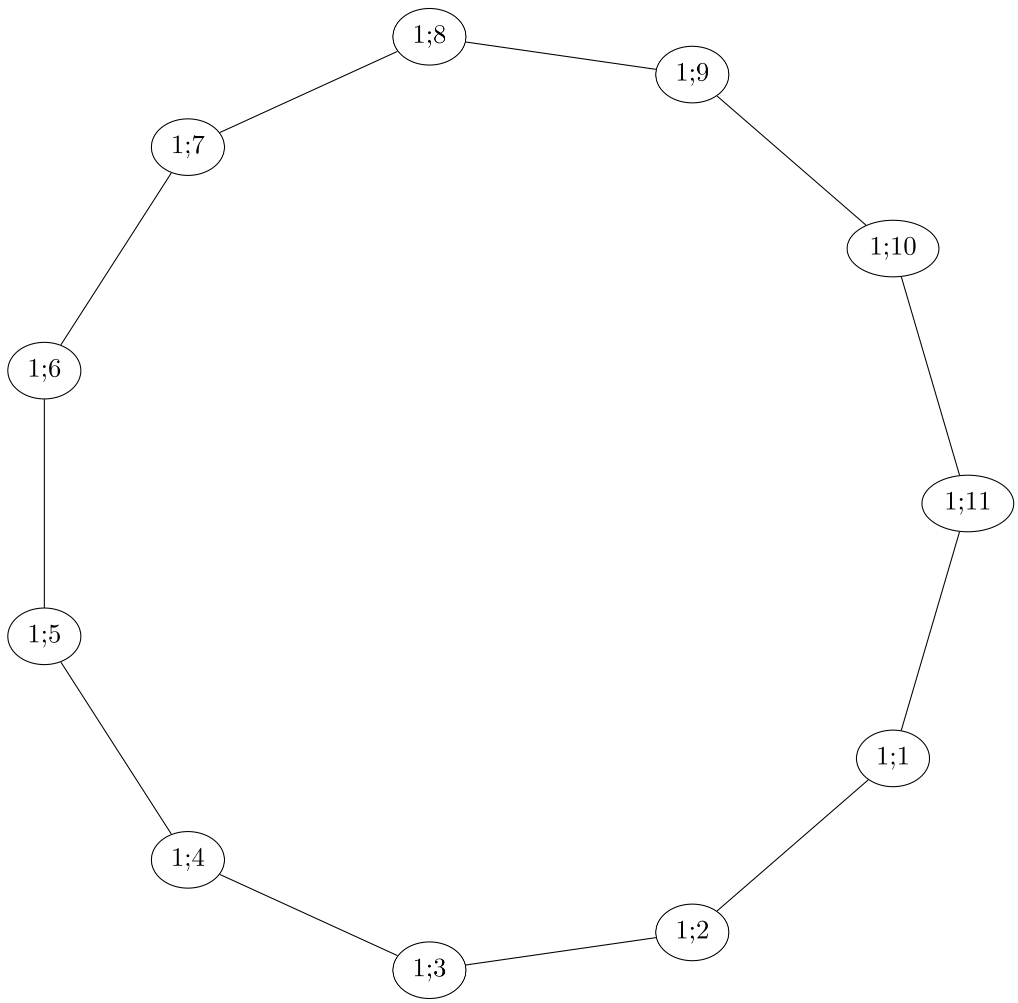
$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow \ (1;2), (1;11), \\ (1;2) \longrightarrow \ (1;1), (1;3), \\ (1;3) \longrightarrow \ (1;2), (1;4), \\ (1;4) \longrightarrow \ (1;3), (1;5), \\ (1;5) \longrightarrow \ (1;4), (1;6), \\ (1;6) \longrightarrow \ (1;5), (1;7), \\ (1;7) \longrightarrow \ (1;6), (1;8), \\ (1;8) \longrightarrow \ (1;7), (1;9), \\ (1;9) \longrightarrow \ (1;8), (1;10), \\ (1;10) \longrightarrow \ (1;9), (1;11), \\ (1;11) \longrightarrow \ (1;1), (1;10), \end{cases}$$



In forma circolare diventa:



Con le famiglie di grafi C vogliamo indicare dei circuiti *veri e propri* in cui, oltre all'arco che collega il primo nodo con l'ultimo, abbiamo anche archi delle potenze dei cammini orizzontali che possono collegarsi ai nodi precedenti rispetto ai nodi dai quali partono.

9.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 9.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_1^{(1)} \times C_1 1^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2				
3	1	3				
4	1	4	2			
5	1	5	5			
6	1	6	9	2		
7	1	7	14	7		
8	1	8	20	16	2	
9	1	9	27	30	9	
10	1	10	35	50	25	2
11	1	11	44	77	55	11

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

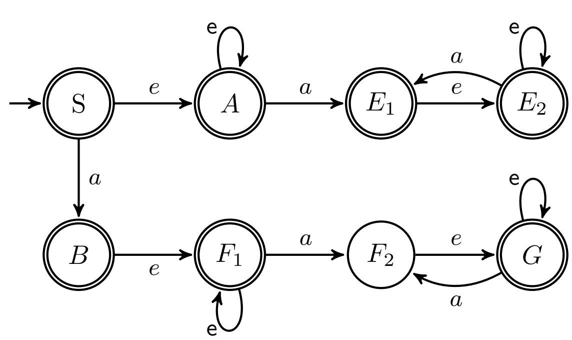
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AD_n	1	1	2	3	4	5	8	12	17	25	37	54
RS_n	1	2	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199
K_n	0	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

9.2. **Automa.**

Questo è l'automa che riconosce (tutte e sole) le stringhe che corrispondono agli insiemi indipendenti di $C_n^{(1)}$:



Il sistema lineare diventa:

eqs = {
$\boldsymbol{s{=}{=}t*a+t*b+1,}$
$\boldsymbol{a==t*a+t*\mathrm{e1}+1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{e1}==t*\mathrm{e2}+1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{e2}==t*\mathrm{e1}+t*\mathrm{e2}+1,}$

$\boldsymbol{b == t * \mathrm{f1} + 1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{f1} == t * \mathrm{f1} + t * \mathrm{f2} + 1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{f2} == t * g,}$
$\boldsymbol{g == t * \mathrm{f2} + t * g + 1}$
$\boldsymbol{\}}$

$$F(t) = \frac{-1 - t + t^3}{-1 + t + t^2}$$

$$1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 7t^4 + 11t^5 + 18t^6 + 29t^7 + 47t^8 + 76t^9 + O[t]^{10}$$

10. Caso di studio : Grafo $P_1^{(1)} \times C_1 1^{(2)}$

Definition 10.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

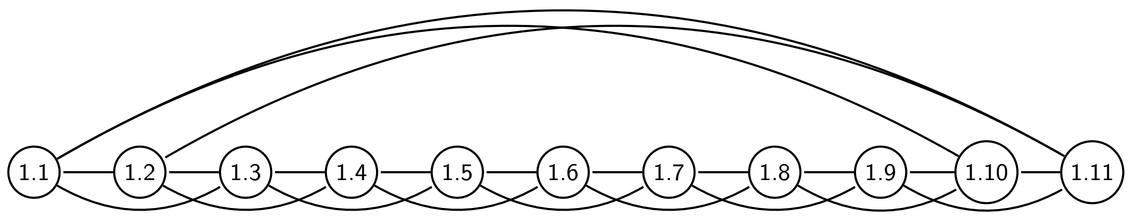
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 10.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

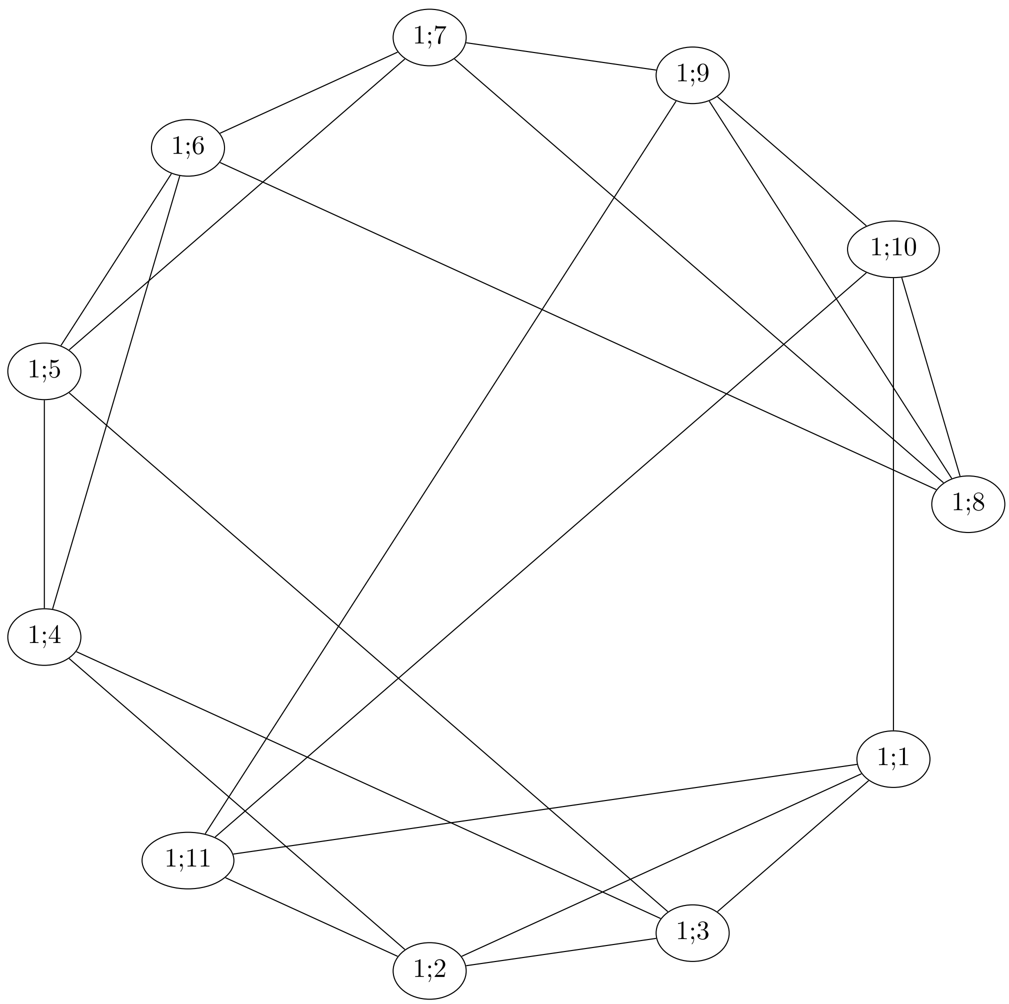
$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(1;10),(1;11), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1),(1;3),(1;4),(1;11), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;4),(1;5), \\ (1;4) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(1;5),(1;6), \\ (1;5) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(1;6),(1;7), \\ (1;6) \longrightarrow & (1;4),(1;5),(1;7),(1;8), \\ (1;7) \longrightarrow & (1;5),(1;6),(1;8),(1;9), \\ (1;8) \longrightarrow & (1;6),(1;7),(1;9),(1;10), \\ (1;9) \longrightarrow & (1;7),(1;8),(1;10),(1;11), \\ (1;10) \longrightarrow & (1;1),(1;8),(1;9),(1;11), \\ (1;11) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;9),(1;10), \end{cases}$$



In forma circolare diventa:



Con le famiglie di grafi C vogliamo indicare dei circuiti *veri e propri* in cui, oltre all'arco che collega il primo nodo con l'ultimo, abbiamo anche archi delle potenze dei cammini orizzontali che possono collegarsi ai nodi precedenti rispetto ai nodi dai quali partono.

10.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 10.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_1^{(1)} \times C_1 1^{(2)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	2		
3	1	3		
4	1	4		
5	1	5		
6	1	6	3	
7	1	7	7	
8	1	8	12	
9	1	9	18	3
10	1	10	25	10
11	1	11	33	22

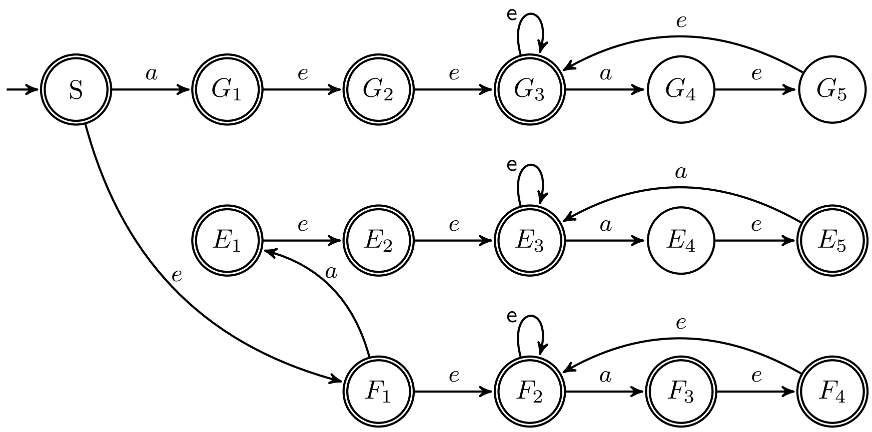
Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AD_n	1	1	2	3	4	5	6	7	11	16	22	29
RS_n	1	2	3	4	5	6	10	15	21	31	46	67
K_n	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

10.2. **Automa.**
L'automa che riconosce (tutte e sole) le stringhe che corrispondono agli insiemi indipendenti di $C_n^{(2)}$ diventa:



Il sistema lineare diventa:

eqs = {
***s*==*t* ∗ f1 + *t* ∗ g1 + 1,**
f1 == *t* ∗ f2 + *t* ∗ e1 + 1,
f2 == *t* ∗ f2 + *t* ∗ f3 + 1,
f3 == *t* ∗ f4 + 1,
f4 == *t* ∗ f2 + 1,
e1 == *t* ∗ e2 + 1,
e2 == *t* ∗ e3 + 1,
e3 == *t* ∗ e3 + *t* ∗ e4 + 1,
e4 == *t* ∗ e5,
e5 == *t* ∗ e3 + 1,
g1 == *t* ∗ g2 + 1,
g2 == *t* ∗ g3 + 1,
g3 == *t* ∗ g3 + *t* ∗ g4 + 1,
g4 == *t* ∗ g5,
g5 == *t* ∗ g3
}

$$F(t) = \frac{-1 - t - t^2 + t^4 + 2t^5}{-1 + t + t^3}$$

$$1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 + 6t^5 + 10t^6 + 15t^7 + 21t^8 + 31t^9 + O[t]^{10}$$

11. Caso di studio : Grafo $P_1^{(1)} \times C_11^{(e3)}$

Definition 11.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

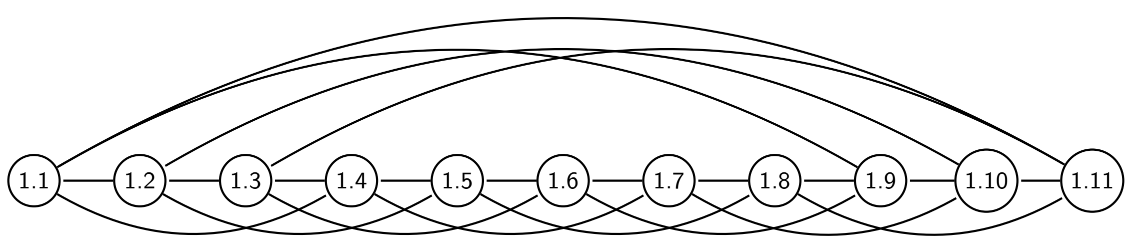
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 11.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

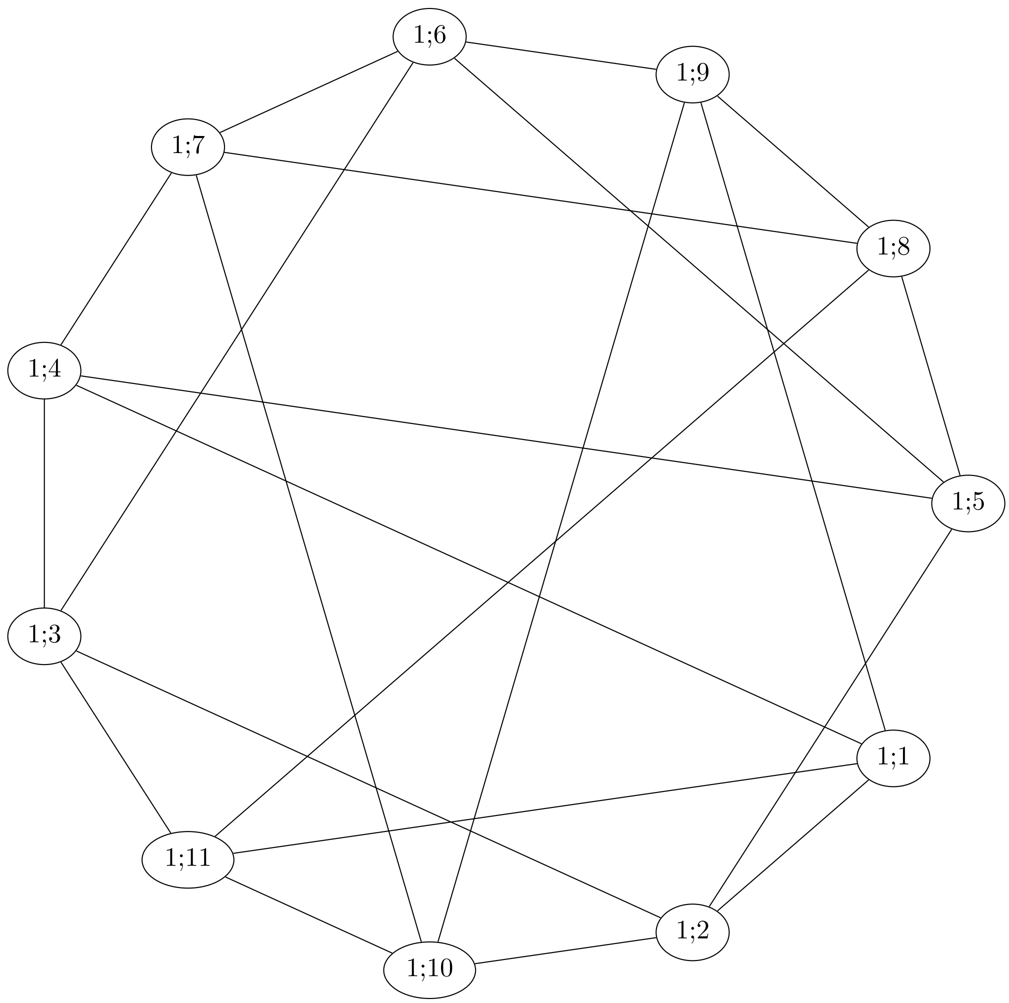
$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow \ (1;2), (1;4), (1;9), (1;11), \\ (1;2) \longrightarrow \ (1;1), (1;3), (1;5), (1;10), \\ (1;3) \longrightarrow \ (1;2), (1;4), (1;6), (1;11), \\ (1;4) \longrightarrow \ (1;1), (1;3), (1;5), (1;7), \\ (1;5) \longrightarrow \ (1;2), (1;4), (1;6), (1;8), \\ (1;6) \longrightarrow \ (1;3), (1;5), (1;7), (1;9), \\ (1;7) \longrightarrow \ (1;4), (1;6), (1;8), (1;10), \\ (1;8) \longrightarrow \ (1;5), (1;7), (1;9), (1;11), \\ (1;9) \longrightarrow \ (1;1), (1;6), (1;8), (1;10), \\ (1;10) \longrightarrow \ (1;2), (1;7), (1;9), (1;11), \\ (1;11) \longrightarrow \ (1;1), (1;3), (1;8), (1;10), \end{cases}$$



In forma circolare diventa:



Con le famiglie di grafi C vogliamo indicare dei circuiti *veri e propri* in cui, oltre all'arco che collega il primo nodo con l'ultimo, abbiamo anche archi delle potenze dei cammini orizzontali che possono collegarsi ai nodi precedenti rispetto ai nodi dai quali partono.

11.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 11.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_1^{(1)} \times C_1 1^{(e3)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2				
3	1	3				
4	1	4	2			
5	1	5				
6	1	6	6	2		
7	1	7	7			
8	1	8	12	8	2	
9	1	9	18	9		
10	1	10	25	20	10	2
11	1	11	33	33	11	

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

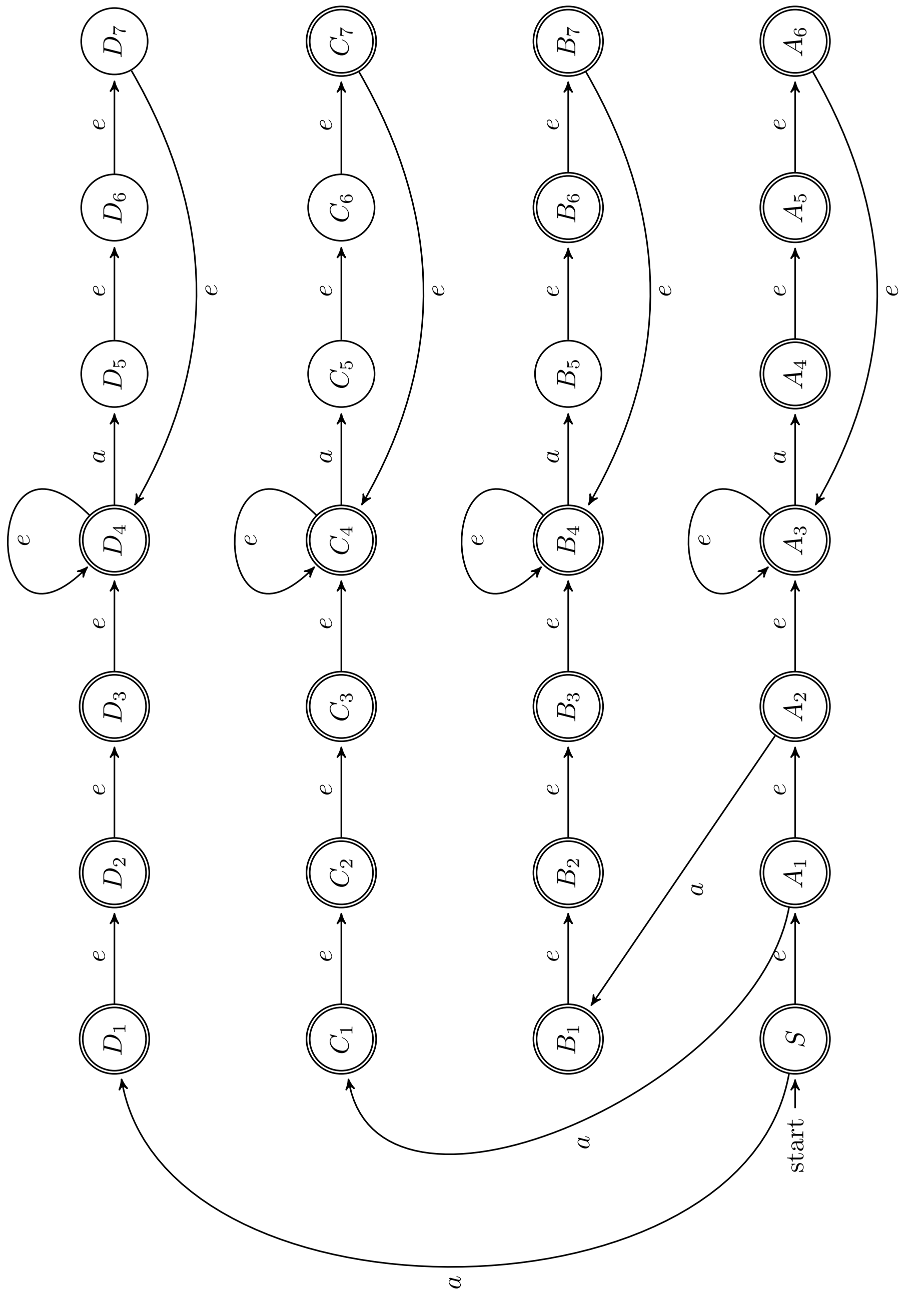
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AD_n	1	1	2	3	4	5	8	7	14	18	22	37
RS_n	1	2	3	4	7	6	15	15	31	37	68	89
K_n	0	1	1	1	2	1	3	2	4	3	5	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

11.2. **Automa.**

L'automa che riconosce (tutte e sole) le stringhe che corrispondono agli insiemi indipendenti di $C_n^{(3)}$ diventa:


start
S
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
B_1
B_2
B_3
B_4
B_5
B_6
B_7
C_1
C_2
C_3
C_4
C_5
C_6
C_7
D_1
D_2
D_3
D_4
D_5
D_6
D_7
a
e

Il sistema lineare diventa:

12. Caso di studio : Grafo $P_1^{(1)} \times C_1 1^{(3)}$

Definition 12.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

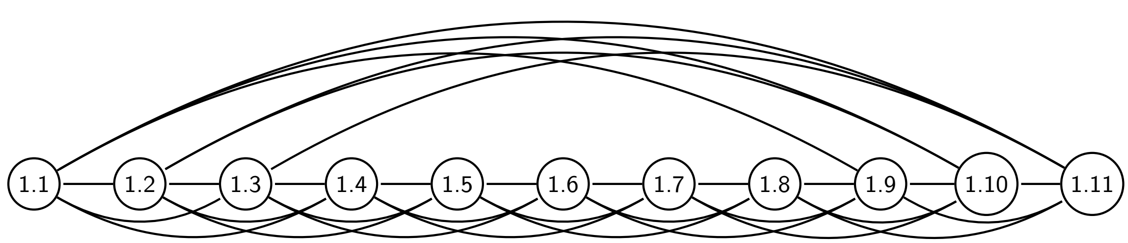
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 12.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

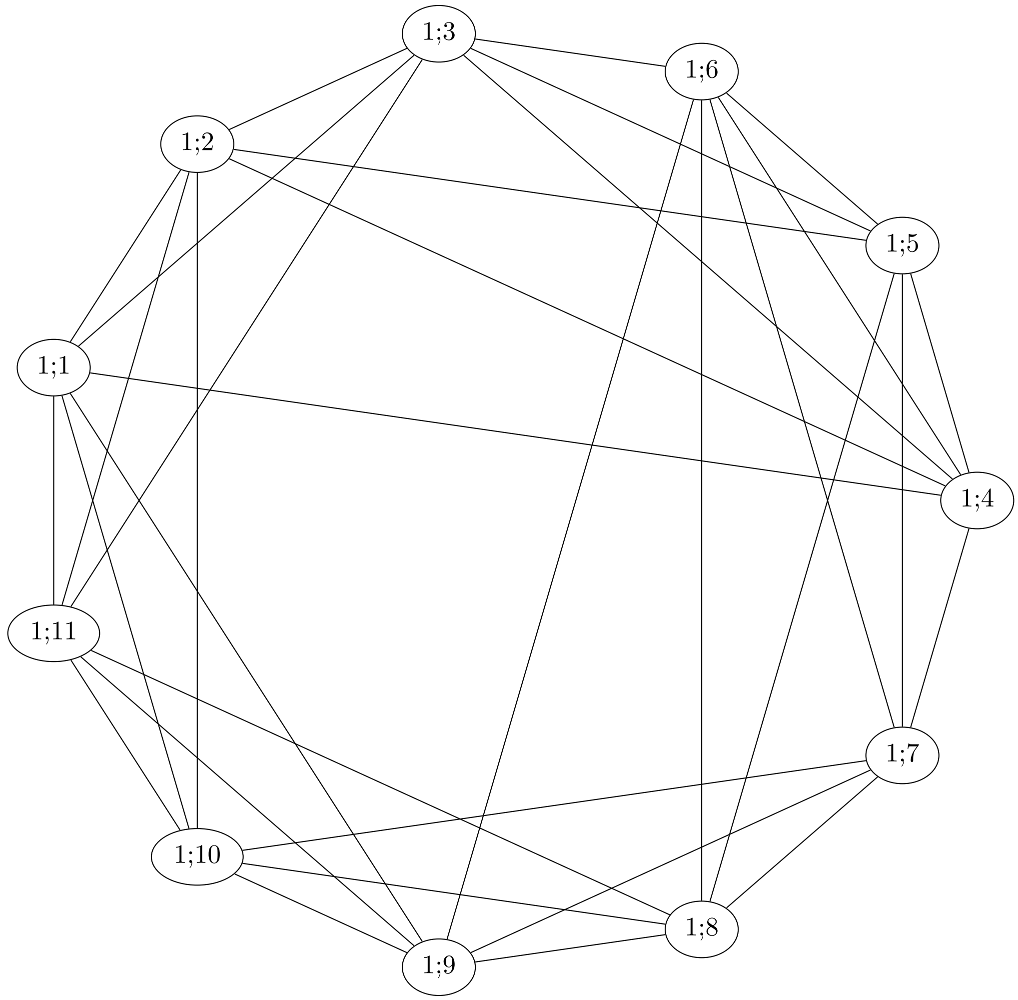
$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (1;2), (1;3), (1;4), (1;9), (1;10), (1;11), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1), (1;3), (1;4), (1;5), (1;10), (1;11), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;1), (1;2), (1;4), (1;5), (1;6), (1;11), \\ (1;4) \longrightarrow & (1;1), (1;2), (1;3), (1;5), (1;6), (1;7), \\ (1;5) \longrightarrow & (1;2), (1;3), (1;4), (1;6), (1;7), (1;8), \\ (1;6) \longrightarrow & (1;3), (1;4), (1;5), (1;7), (1;8), (1;9), \\ (1;7) \longrightarrow & (1;4), (1;5), (1;6), (1;8), (1;9), (1;10), \\ (1;8) \longrightarrow & (1;5), (1;6), (1;7), (1;9), (1;10), (1;11), \\ (1;9) \longrightarrow & (1;1), (1;6), (1;7), (1;8), (1;10), (1;11), \\ (1;10) \longrightarrow & (1;1), (1;2), (1;7), (1;8), (1;9), (1;11), \\ (1;11) \longrightarrow & (1;1), (1;2), (1;3), (1;8), (1;9), (1;10), \end{cases}$$



In forma circolare diventa:



Con le famiglie di grafi C vogliamo indicare dei circuiti *veri e propri* in cui, oltre all'arco che collega il primo nodo con l'ultimo, abbiamo anche archi delle potenze dei cammini orizzontali che possono collegarsi ai nodi precedenti rispetto ai nodi dai quali partono.

12.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 12.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_1^{(1)} \times C_1 1^{(3)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2
0	1		
1	1	1	
2	1	2	
3	1	3	
4	1	4	
5	1	5	
6	1	6	
7	1	7	
8	1	8	4
9	1	9	9
10	1	10	15
11	1	11	22

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

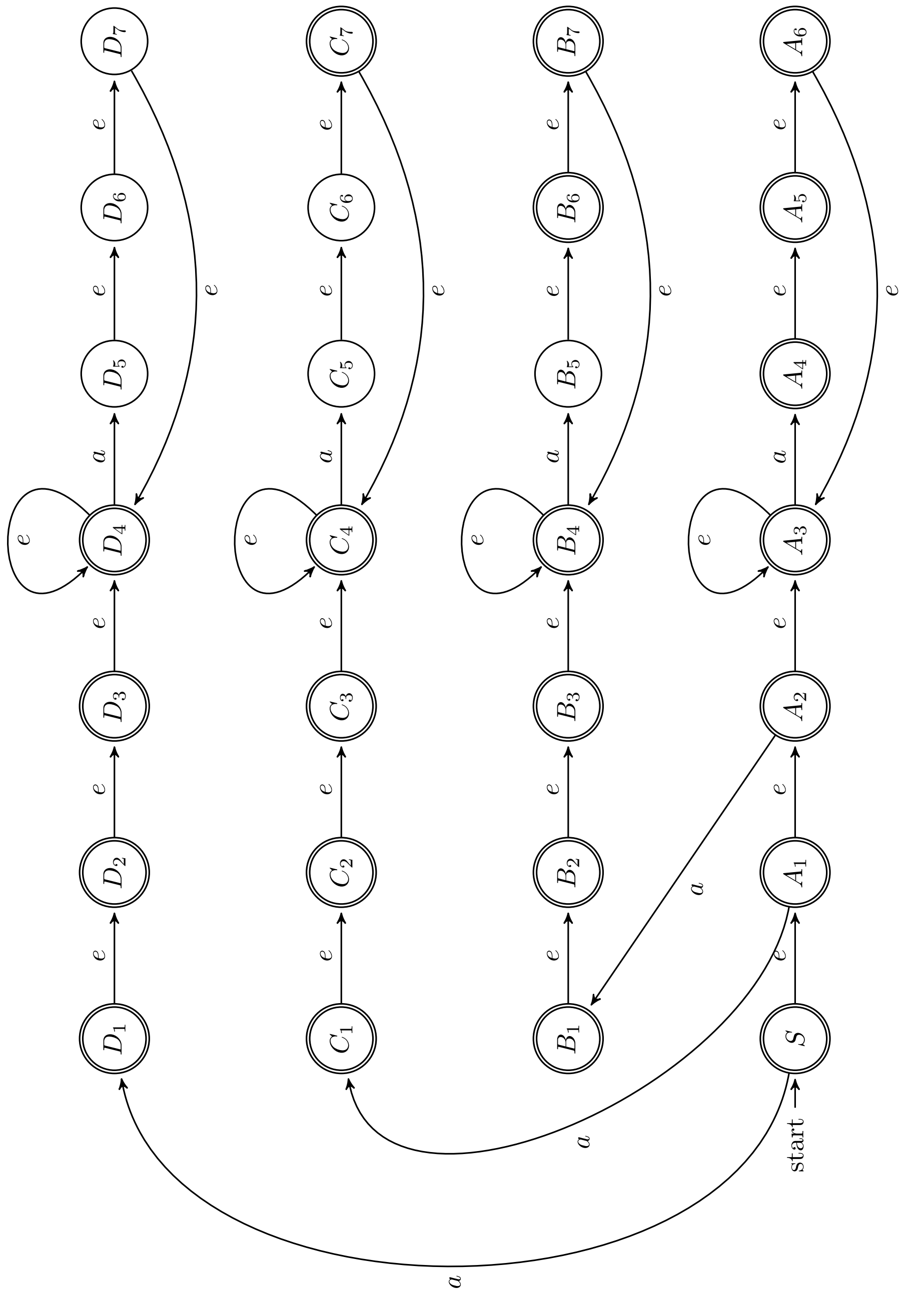
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AD_n	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	14	20
RS_n	1	2	3	4	5	6	7	8	13	19	26	34
K_n	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

12.2. **Automa.**

L'automa che riconosce (tutte e sole) le stringhe che corrispondono agli insiemi indipendenti di $C_n^{(3)}$ diventa:



start
S
A1
A2
A3
A4
A5
A6
B1
B2
B3
B4
B5
B6
B7
C1
C2
C3
C4
C5
C6
C7
D1
D2
D3
D4
D5
D6
D7
a
e

Il sistema lineare diventa:

13. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times P_7^{(1)}$

Definition 13.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

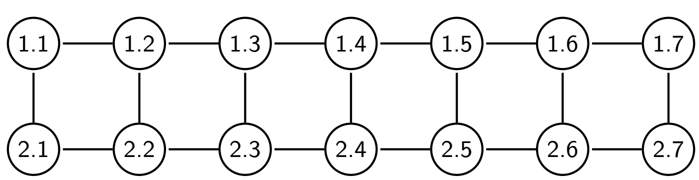
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 13.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \dots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1), (1;2), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1), (2;2), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1), (2;2), (1;3), \\
(2;2) \longrightarrow & (2;1), (1;2), (2;3), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;2), (2;3), (1;4), \\
(2;3) \longrightarrow & (2;2), (1;3), (2;4), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;3), (2;4), (1;5), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;3), (1;4), (2;5), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;4), (2;5), (1;6), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;4), (1;5), (2;6), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;5), (2;6), (1;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (2;5), (1;6), (2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;6), (2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;6), (1;7),
\end{cases}$$



13.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 13.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times P_7^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	2						
2	1	4	2					
3	1	6	8	2				
4	1	8	18	12	2			
5	1	10	32	38	16	2		
6	1	12	50	88	66	20	2	
7	1	14	72	170	192	102	24	2

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

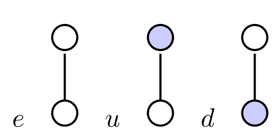
n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	9	17	31	57
RS_n	1	3	7	17	41	99	239	577
K_n	0	1	2	3	4	5	6	7

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

13.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} e \longrightarrow e+u+d \\ d \longrightarrow e+u \\ u \longrightarrow e+d \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	d	u	e
d	0	1	1
u	1	0	1
e	1	1	1

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-3 - x)}{(-1 + 2x + x^2)} = 3 + 7x + 17x^2 + 41x^3 + 99x^4 + 239x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([5])

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	7	17	41	99	239	577

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

13.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} E(x) = xE(x) + xU(x) + xD(x) + 1 \\ D(x) = xE(x) + xU(x) + 1 \\ U(x) = xE(x) + xD(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è E. Quindi risolvendo in $E(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

$$E(x) = \frac{(-1 - x)}{(-1 + 2x + x^2)} = 1 + 3x + 7x^2 + 17x^3 + 41x^4 + 99x^5 + O(x^6)$$

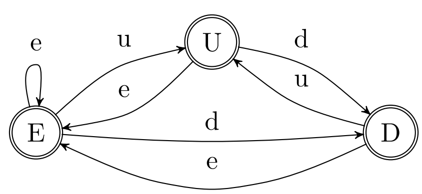
[5] Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} E \to eE \mid uU \mid dD \mid \lambda \\ D \to eE \mid uU \mid \lambda \\ U \to eE \mid dD \mid \lambda \end{cases}$$



13.4. **Ricorrenza Lineare.**

In questo caso otteniamo la *ricorrenza locale* dal denominatore della funzione generatrice della somma delle righe:

$$F(x) = \frac{(-3-x)}{(-1+2x+x^2)} .$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	7	17	41	99	239	577

$$RS_n = 2RS_{n-1} + RS_{n-2}$$

$$\text{schema} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$$

$$T(n,k) = T(n-1,k) + T(n-1,k-1) + T(n-2,k-1)$$

13.5. **Antidiagonali.**

$$sigma = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$$

$$H_0 = 1, H_1 = 1 + 2x$$

$$V_0 = (1 - x)^-1$$

1	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
1	4	2	0	0	0
1	6	8	2	0	0
1	8	18	12	2	0
1	10	32	38	16	2

14. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times P_7^{(2)}$

Definition 14.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

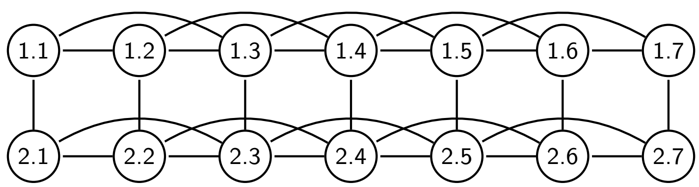
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 14.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i, j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$
\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(2;3), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(1;3),(1;4), \\
(2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;3),(2;4), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;3),(1;4),(1;5), \\
(2;3) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(1;3),(2;4),(2;5), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(2;4),(1;5),(1;6), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;2),(2;3),(1;4),(2;5),(2;6), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(2;5),(1;6),(1;7), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;3),(2;4),(1;5),(2;6),(2;7), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;4),(1;5),(2;6),(1;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (2;4),(2;5),(1;6),(2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;5),(1;6),(2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;5),(2;6),(1;7),
\end{cases}
$$



14.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 14.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times P_7^{(2)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	2				
2	1	4	2			
3	1	6	6			
4	1	8	14	4		
5	1	10	26	18	2	
6	1	12	42	48	14	
7	1	14	62	102	56	6

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

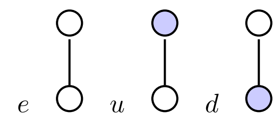
n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	9	15	25	43
RS_n	1	3	7	13	27	57	117	241
K_n	0	1	2	2	3	4	4	5

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

14.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} ee \longrightarrow\ e+u+d \\ ud \longrightarrow\ e \\ ed \longrightarrow\ e+u \\ de \longrightarrow\ e+u \\ du \longrightarrow\ e \\ eu \longrightarrow\ e+d \\ ue \longrightarrow\ e+d \end{cases}$$

Riscriviamo lo schema con stringhe tutte di lunghezza h (la potenza del cammino orizzontale):

$$\begin{cases} ee \longrightarrow\ ee+eu+ed \\ ud \longrightarrow\ de \\ ed \longrightarrow\ de+du \\ de \longrightarrow\ ee+eu \\ du \longrightarrow\ ue \\ eu \longrightarrow\ ue+ud \\ ue \longrightarrow\ ee+ed \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I-xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	ud	ed	de	du	eu	ee	ue
ud	0	0	1	0	0	0	0
ed	0	0	1	1	0	0	0
de	0	0	0	0	1	1	0
du	0	0	0	0	0	0	1
eu	1	0	0	0	0	0	1
ee	0	1	0	0	1	1	0
ue	0	1	0	0	0	1	0

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-7-6x-7x^2-3x^3)}{(-1+x+x^2+2x^3+x^4)} = 7+13x+27x^2+57x^3+117x^4+241x^5+O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([6])

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	7	13	27	57	117	241

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

14.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} EE(x) = xEE(x) + xEU(x) + xED(x) + 1 \\ UD(x) = xDE(x) + 1 \\ ED(x) = xDE(x) + xDU(x) + 1 \\ DE(x) = xEE(x) + xEU(x) + 1 \\ DU(x) = xUE(x) + 1 \\ EU(x) = xUE(x) + xUD(x) + 1 \\ UE(x) = xEE(x) + xED(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è EE. Quindi risolvendo in $EE(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

$$EE(x) = \frac{(-1-2x-3x^2-x^3)}{(-1+x+x^2+2x^3+x^4)} = 1+3x+7x^2+13x^3+27x^4+57x^5+O(x^6)$$

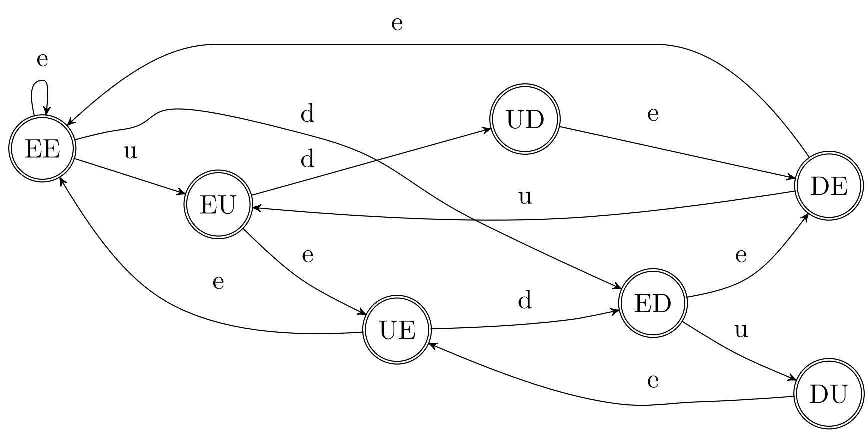
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	7	13	27	57	117	241	499	1031

[6] Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} EE \to eEE \mid uEU \mid dED \mid \lambda \\ UD \to eDE \mid \lambda \\ ED \to eDE \mid uDU \mid \lambda \\ DE \to eEE \mid uEU \mid \lambda \\ DU \to eUE \mid \lambda \\ EU \to eUE \mid dUD \mid \lambda \\ UE \to eEE \mid dED \mid \lambda \end{cases}$$



14.4. **Ricorrenza Lineare.**

In questo caso otteniamo la *ricorrenza locale* dal denominatore della funzione generatrice della somma delle righe:

$$F(x) = \frac{(-7-6x-7x^2-3x^3)}{(-1+x+x^2+2x^3+x^4)} \ .$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	7	13	27	57	117	241

$$RS_n = RS_{n-1} + RS_{n-2} + 2RS_{n-3} + RS_{n-4}$$

schema

1	0	0
1	1	0
0	1	0
0	0	1
0	0	$*$

$$T(n,k) = T(n-1,k)+T(n-2,k-1)+T(n-3,k-1)+T(n-3,k-2)+T(n-4,k-2)$$

14.5. **Antidiagonali.**

$sigma =$

1	0	0
1	1	0
0	1	0
0	0	1
0	0	$*$

$$H_0 = 1, H_1 = 1 + 2x, H_2 = 1 + 4x + 2x^2, H_3 = 1 + 6x + 6x^2$$

$$V_0 = (1-x)^-1, V_1 = \frac{2 * x}{(1-x)^2}$$

1	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
1	4	2	0	0	0
1	6	6	0	0	0
1	8	14	4	0	0
1	10	26	18	2	0

15. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times P_7^{(3)}$

Definition 15.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

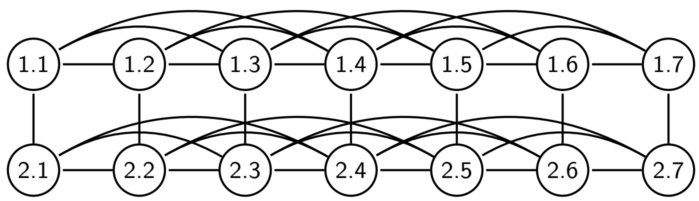
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 15.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(1;4), \\ (2;1) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(2;3),(2;4), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(1;3),(1;4),(1;5), \\ (2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;3),(2;4),(2;5), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;3),(1;4),(1;5),(1;6), \\ (2;3) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(1;3),(2;4),(2;5),(2;6), \\ (1;4) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;3),(2;4),(1;5),(1;6),(1;7), \\ (2;4) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(2;3),(1;4),(2;5),(2;6),(2;7), \\ (1;5) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(1;4),(2;5),(1;6),(1;7), \\ (2;5) \longrightarrow & (2;2),(2;3),(2;4),(1;5),(2;6),(2;7), \\ (1;6) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(1;5),(2;6),(1;7), \\ (2;6) \longrightarrow & (2;3),(2;4),(2;5),(1;6),(2;7), \\ (1;7) \longrightarrow & (1;4),(1;5),(1;6),(2;7), \\ (2;7) \longrightarrow & (2;4),(2;5),(2;6),(1;7), \end{cases}$$



15.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 15.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times P_7^{(3)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4	2		
3	1	6	6		
4	1	8	12		
5	1	10	22	6	
6	1	12	36	24	2
7	1	14	54	60	14

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

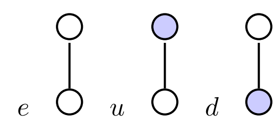
n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	9	15	23	35
RS_n	1	3	7	13	21	39	75	143
K_n	0	1	2	2	2	3	4	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

15.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m, n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} eee \longrightarrow & e+u+d \\ dee \longrightarrow & e+u \\ eue \longrightarrow & e+d \\ eud \longrightarrow & e \\ eeu \longrightarrow & e+d \\ edu \longrightarrow & e \\ due \longrightarrow & e \\ uee \longrightarrow & e+d \\ ued \longrightarrow & e \\ ude \longrightarrow & e \\ deu \longrightarrow & e \\ eed \longrightarrow & e+u \\ ede \longrightarrow & e+u \end{cases}$$

Riscriviamo lo schema con stringhe tutte di lunghezza h (la potenza del cammino orizzontale):

$$\begin{cases} eee \longrightarrow & eee+eeu+eed \\ dee \longrightarrow & eee+eeu \\ eue \longrightarrow & uee+ued \\ eud \longrightarrow & ude \\ eeu \longrightarrow & eue+eud \\ edu \longrightarrow & due \\ due \longrightarrow & uee \\ uee \longrightarrow & eee+eed \\ ued \longrightarrow & ede \\ ude \longrightarrow & dee \\ deu \longrightarrow & eue \\ eed \longrightarrow & ede+edu \\ ede \longrightarrow & dee+deu \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	dee	eue	eud	eeu	edu	due	uee	ued	ude	deu	eed	ede	eee
dee	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
eue	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
eud	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
eeu	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
edu	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
due	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
uee	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
ued	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
ude	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
deu	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
eed	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
ede	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
eee	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(13 + 8x + 5x^2 + 15x^3 + 3x^4 - 10x^5 - 7x^6)}{(1 - x - x^2 - 2x^4 - x^5 + x^6 + x^7)} = 13+21x+39x^2+75x^3+143x^4+263x^5+O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([7])

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	7	13	21	39	75	143

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

15.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

[7] Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

$$\begin{cases} EEE(x) = xEEE(x) + xEEU(x) + xEED(x) + 1 \\ DEE(x) = xEEE(x) + xEEU(x) + 1 \\ EUE(x) = xUEE(x) + xUED(x) + 1 \\ EUD(x) = xUDE(x) + 1 \\ EEU(x) = xEUE(x) + xEUD(x) + 1 \\ EDU(x) = xDUE(x) + 1 \\ DUE(x) = xUEE(x) + 1 \\ UEE(x) = xEEE(x) + xEED(x) + 1 \\ UED(x) = xEDE(x) + 1 \\ UDE(x) = xDEE(x) + 1 \\ DEU(x) = xEUE(x) + 1 \\ EED(x) = xEDE(x) + xEDU(x) + 1 \\ EDE(x) = xDEE(x) + xDEU(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è EEE. Quindi risolvendo in $EEE(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

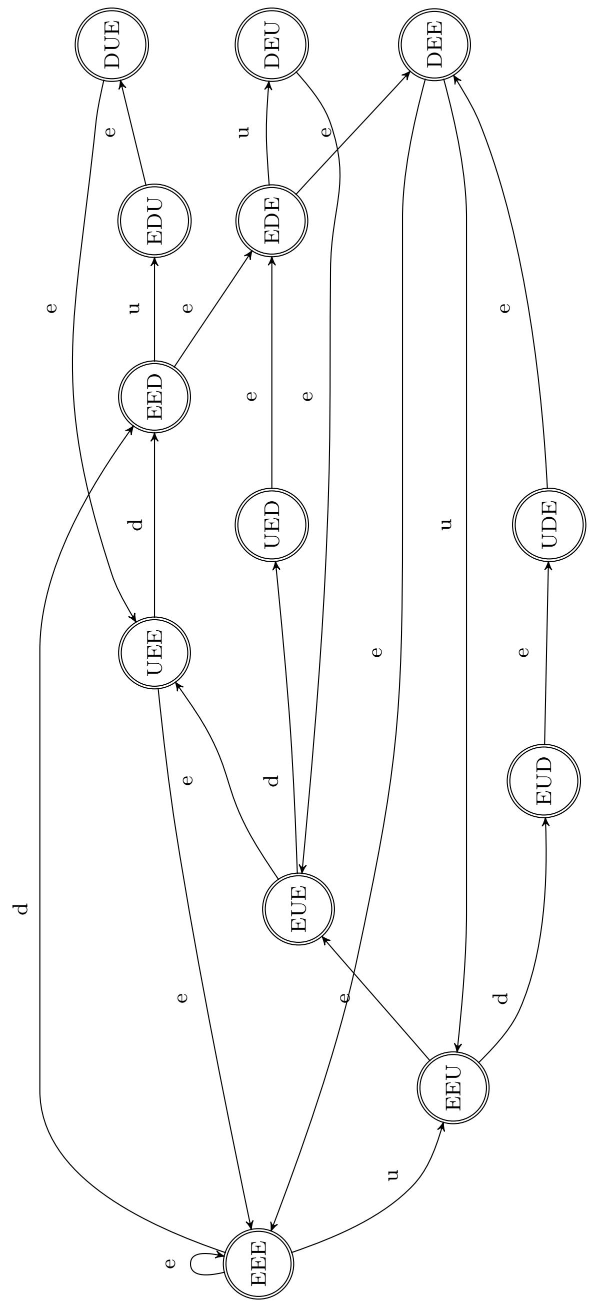
$$EEE(x) = \frac{(1 + 2x + 3x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5 - x^6)}{((1 + x)(1 - 2x + x^2 - x^3 - x^4 + x^6))} = 1+3x+7x^2+13x^3+21x^4+39x^5+O(x^6)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	7	13	21	39	75	143	263	485

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} EEE \to eEEE \mid uEEU \mid dEED \mid \lambda \\ DEE \to eEEE \mid uEEU \mid \lambda \\ EUE \to eUEE \mid dUED \mid \lambda \\ EUD \to eUDE \mid \lambda \\ EEU \to eEUE \mid dEUD \mid \lambda \\ EDU \to eDUE \mid \lambda \\ DUE \to eUEE \mid \lambda \\ UEE \to eEEE \mid dEED \mid \lambda \\ UED \to eEDE \mid \lambda \\ UDE \to eDEE \mid \lambda \\ DEU \to eEUE \mid \lambda \\ EED \to eEDE \mid uEDU \mid \lambda \\ EDE \to eDEE \mid uDEU \mid \lambda \end{cases}$$


DUE
DEU
DEE
EDU
EDE
EED
UED
UDE
UEE
EUD
EUE
EEU
EEE

16. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times Z_7^{(1)}$

Definition 16.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

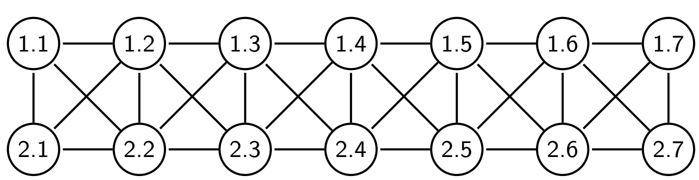
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 16.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;2), \\ (2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3),(2;3), \\ (2;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(1;2),(1;3),(2;3), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;2),(2;2),(2;3),(1;4),(2;4), \\ (2;3) \longrightarrow & (1;2),(2;2),(1;3),(1;4),(2;4), \\ (1;4) \longrightarrow & (1;3),(2;3),(2;4),(1;5),(2;5), \\ (2;4) \longrightarrow & (1;3),(2;3),(1;4),(1;5),(2;5), \\ (1;5) \longrightarrow & (1;4),(2;4),(2;5),(1;6),(2;6), \\ (2;5) \longrightarrow & (1;4),(2;4),(1;5),(1;6),(2;6), \\ (1;6) \longrightarrow & (1;5),(2;5),(2;6),(1;7),(2;7), \\ (2;6) \longrightarrow & (1;5),(2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\ (1;7) \longrightarrow & (1;6),(2;6),(2;7), \\ (2;7) \longrightarrow & (1;6),(2;6),(1;7), \end{cases}$$



16.1. Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.

Definition 16.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times Z_7^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4			
3	1	6	4		
4	1	8	12		
5	1	10	24	8	
6	1	12	40	32	
7	1	14	60	80	16

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

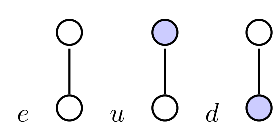
n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	7	13	23	37
RS_n	1	3	5	11	21	43	85	171
K_n	0	1	1	2	2	3	3	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

16.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} e \longrightarrow & e+u+d \\ d \longrightarrow & e \\ u \longrightarrow & e \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	d	u	e
d	0	0	1
u	0	0	1
e	1	1	1

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-3-2x)}{(-1+x+2x^2)} = 3 + 5x + 11x^2 + 21x^3 + 43x^4 + 85x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([8])

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	5	11	21	43	85	171

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

16.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} E(x) = xE(x) + xU(x) + xD(x) + 1 \\ D(x) = xE(x) + 1 \\ U(x) = xE(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è E. Quindi risolvendo in $E(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

$$E(x) = \frac{(-1-2x)}{(-1+x+2x^2)} = 1 + 3x + 5x^2 + 11x^3 + 21x^4 + 43x^5 + O(x^6)$$

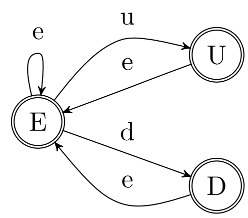
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

[8]Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

$$\begin{cases} E \to eE \mid uU \mid dD \mid \lambda \\ D \to eE \mid \lambda \\ U \to eE \mid \lambda \end{cases}$$



16.4. **Ricorrenza Lineare.**

In questo caso otteniamo la *ricorrenza locale* dal denominatore della funzione generatrice della somma delle righe:

$$F(x) = \frac{(-3-2x)}{(-1+x+2x^2)}\ .$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	5	11	21	43	85	171

$$RS_n = RS_{n-1} + 2RS_{n-2}$$

schema

2	0
0	1
0	$*$

$$T(n,k) = T(n-1,k) + 2T(n-2,k-1)$$

16.5. **Antidiagonali.**

sigma =

2	0
0	1
0	$*$

$$H_0 = 1, H_1 = 1 + 2x$$

$$V_0 = (1-x)^{-}1$$

1	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
1	4	0	0	0	0
1	6	4	0	0	0
1	8	12	0	0	0
1	10	24	8	0	0

17. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times Z_7^{(2)}$

Definition 17.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

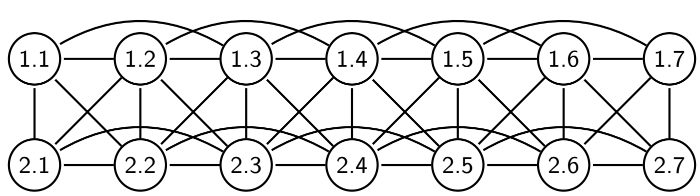
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 17.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;2),(1;3), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3),(2;3),(1;4), \\
(2;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(1;2),(1;3),(2;3),(2;4), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(1;4),(2;4),(1;5), \\
(2;3) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;2),(1;3),(1;4),(2;4),(2;5), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(1;5),(2;5),(1;6), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;2),(1;3),(2;3),(1;4),(1;5),(2;5),(2;6), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(2;4),(2;5),(1;6),(2;6),(1;7), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;3),(1;4),(2;4),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;4),(1;5),(2;5),(2;6),(1;7),(2;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (2;4),(1;5),(2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;5),(1;6),(2;6),(1;7),
\end{cases}$$



17.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 17.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times Z_7^{(2)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4			
3	1	6	2		
4	1	8	8		
5	1	10	18	2	
6	1	12	32	12	
7	1	14	50	38	2

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

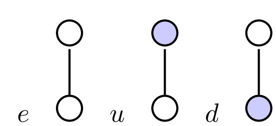
n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	7	11	19	31
RS_n	1	3	5	9	17	31	57	105
K_n	0	1	1	2	2	3	3	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

17.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} ee \longrightarrow \; e+u+d \\ ed \longrightarrow \; e \\ de \longrightarrow \; e+u \\ eu \longrightarrow \; e \\ ue \longrightarrow \; e+d \end{cases}$$

Riscriviamo lo schema con stringhe tutte di lunghezza h (la potenza del cammino orizzontale):

$$\begin{cases} ee \longrightarrow & ee + eu + ed \\ ed \longrightarrow & de \\ de \longrightarrow & ee + eu \\ eu \longrightarrow & ue \\ ue \longrightarrow & ee + ed \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	ed	de	eu	ee	ue
ed	0	1	0	0	0
de	0	0	1	1	0
eu	0	0	0	0	1
ee	1	0	1	1	0
ue	1	0	0	1	0

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-5 - 4x - 3x^2)}{(-1 + x + x^2 + x^3)} = 5 + 9x + 17x^2 + 31x^3 + 57x^4 + 105x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([9])

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	5	9	17	31	57	105

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

17.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

[9]Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

$$\begin{cases} EE(x) = xEE(x) + xEU(x) + xED(x) + 1 \\ ED(x) = xDE(x) + 1 \\ DE(x) = xEE(x) + xEU(x) + 1 \\ EU(x) = xUE(x) + 1 \\ UE(x) = xEE(x) + xED(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è EE. Quindi risolvendo in $EE(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

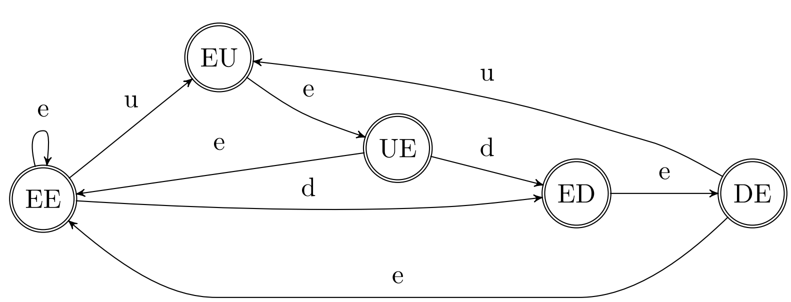
$$EE(x) = \frac{-((1+x)^2}{(-1+x+x^2+x^3))} = 1 + 3x + 5x^2 + 9x^3 + 17x^4 + 31x^5 + O(x^6)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	5	9	17	31	57	105	193	355

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} EE \to eEE \mid uEU \mid dED \mid \lambda \\ ED \to eDE \mid \lambda \\ DE \to eEE \mid uEU \mid \lambda \\ EU \to eUE \mid \lambda \\ UE \to eEE \mid dED \mid \lambda \end{cases}$$



17.4. **Ricorrenza Lineare.**

In questo caso otteniamo la *ricorrenza locale* dal denominatore della funzione generatrice della somma delle righe:

$$F(x) = \frac{(-5-4x-3x^2)}{(-1+x+x^2+x^3)}\ .$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	5	9	17	31	57	105

$$RS_n = RS_{n-1} + RS_{n-2} + RS_{n-3}$$

$$\text{schema}\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$$

$$T(n,k) = T(n-1,k) + T(n-2,k-1) + T(n-3,k-1)$$

17.5. **Antidiagonali.**

$$sigma = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$$

$$H_0 = 1, H_1 = 1+2x, H_2 = 1+4x$$

$$V_0 = (1-x)^-1$$

1	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
1	4	0	0	0	0
1	6	2	0	0	0
1	8	8	0	0	0
1	10	18	2	0	0

18. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times Z_7^{(e3)}$

Definition 18.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

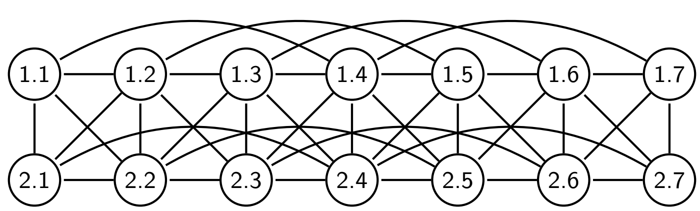
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 18.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;2),(1;4), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;4), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3),(2;3),(1;5), \\
(2;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(1;2),(1;3),(2;3),(2;5), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;2),(2;2),(2;3),(1;4),(2;4),(1;6), \\
(2;3) \longrightarrow & (1;2),(2;2),(1;3),(1;4),(2;4),(2;6), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;1),(1;3),(2;3),(2;4),(1;5),(2;5),(1;7), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;1),(1;3),(2;3),(1;4),(1;5),(2;5),(2;7), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;2),(1;4),(2;4),(2;5),(1;6),(2;6), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;2),(1;4),(2;4),(1;5),(1;6),(2;6), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;3),(1;5),(2;5),(2;6),(1;7),(2;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (2;3),(1;5),(2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;4),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;4),(1;6),(2;6),(1;7),
\end{cases}$$



18.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 18.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times Z_7^{(e3)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4			
3	1	6	4		
4	1	8	10		
5	1	10	20	8	
6	1	12	34	24	
7	1	14	52	58	16

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

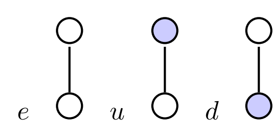
n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	7	13	21	33
RS_n	1	3	5	11	19	39	71	141
K_n	0	1	1	2	2	3	3	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

18.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} eee \longrightarrow \ e+u+d \\ ded \longrightarrow \ e \\ ueu \longrightarrow \ e \\ dee \longrightarrow \ e+u \\ uee \longrightarrow \ e+d \\ deu \longrightarrow \ e \\ ued \longrightarrow \ e \\ eue \longrightarrow \ e+u+d \\ ede \longrightarrow \ e+u+d \\ eed \longrightarrow \ e \\ eeu \longrightarrow \ e \end{cases}$$

Riscriviamo lo schema con stringhe tutte di lunghezza h (la potenza del cammino orizzontale):

$$
\begin{cases}
eee \longrightarrow \; eee + eeu + eed \\
ueu \longrightarrow \; eue \\
ded \longrightarrow \; ede \\
uee \longrightarrow \; eee + eed \\
dee \longrightarrow \; eee + eeu \\
ued \longrightarrow \; ede \\
deu \longrightarrow \; eue \\
eue \longrightarrow \; uee + ueu + ued \\
eeu \longrightarrow \; eue \\
eed \longrightarrow \; ede \\
ede \longrightarrow \; dee + deu + ded
\end{cases}
$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	ueu	ded	uee	dee	ued	deu	eue	eeu	eed	ede	eee
ueu	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
ded	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
uee	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
dee	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
ued	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
deu	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
eue	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
eeu	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
eed	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
ede	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
eee	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-11 - 8x + 2x^2 - 5x^3)}{(-1 + x + 2x^2 - x^3 + x^4)} = 11 + 19x + 39x^2 + 71x^3 + 141x^4 + 263x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([10])

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	5	11	19	39	71	141

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

[10] Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

18.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} EEE(x) = xEEE(x) + xEEU(x) + xEED(x) + 1 \\ UEU(x) = xEUE(x) + 1 \\ DED(x) = xEDE(x) + 1 \\ UEE(x) = xEEE(x) + xEED(x) + 1 \\ DEE(x) = xEEE(x) + xEEU(x) + 1 \\ UED(x) = xEDE(x) + 1 \\ DEU(x) = xEUE(x) + 1 \\ EUE(x) = xUEE(x) + xUEU(x) + xUED(x) + 1 \\ EEU(x) = xEUE(x) + 1 \\ EED(x) = xEDE(x) + 1 \\ EDE(x) = xDEE(x) + xDEU(x) + xDED(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è EEE. Quindi risolvendo in $EEE(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

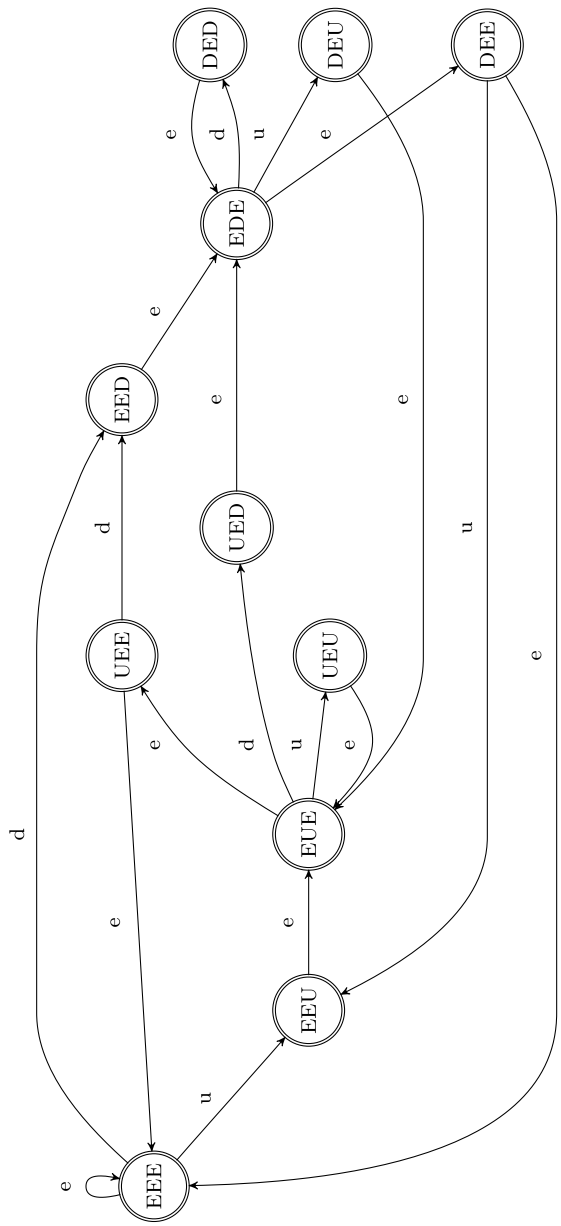
$$EEE(x) = \frac{(-1 - 2x - x^3)}{(-1 + x + 2x^2 - x^3 + x^4)} = 1 + 3x + 5x^2 + 11x^3 + 19x^4 + 39x^5 + O(x^6)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	5	11	19	39	71	141	263	513

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} EEE \to eEEE \mid uEEU \mid dEED \mid \lambda \\ UEU \to eEUE \mid \lambda \\ DED \to eEDE \mid \lambda \\ UEE \to eEEE \mid dEED \mid \lambda \\ DEE \to eEEE \mid uEEU \mid \lambda \\ UED \to eEDE \mid \lambda \\ DEU \to eEUE \mid \lambda \\ EUE \to eUEE \mid uUEU \mid dUED \mid \lambda \\ EEU \to eEUE \mid \lambda \\ EED \to eEDE \mid \lambda \\ EDE \to eDEE \mid uDEU \mid dDED \mid \lambda \end{cases}$$


DED
DEU
DEE
EDE
EED
UED
UEE
UEU
EUE
EEU
EEE

19. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times Z_7^{(3)}$

Definition 19.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

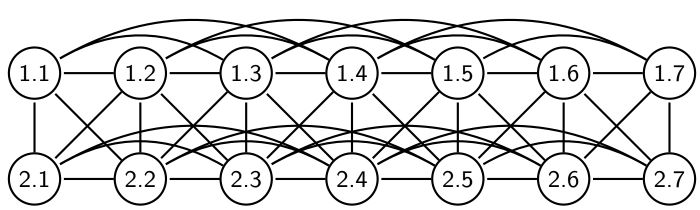
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 19.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;2),(1;3),(1;4), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(2;4), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3),(2;3),(1;4),(1;5), \\
(2;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(2;5), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(1;4),(2;4),(1;5),(1;6), \\
(2;3) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;2),(1;3),(1;4),(2;4),(2;5),(2;6), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(1;5),(2;5),(1;6),(1;7), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(1;3),(2;3),(1;4),(1;5),(2;5),(2;6),(2;7), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(1;4),(2;4),(2;5),(1;6),(2;6),(1;7), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;2),(2;3),(1;4),(2;4),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(1;5),(2;5),(2;6),(1;7),(2;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (2;3),(2;4),(1;5),(2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;4),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;4),(2;5),(1;6),(2;6),(1;7),
\end{cases}$$



19.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 19.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times Z_7^{(3)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4			
3	1	6	2		
4	1	8	6		
5	1	10	14	2	
6	1	12	26	8	
7	1	14	42	24	2

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

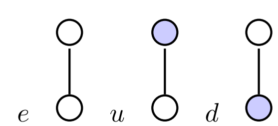
n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	7	11	17	27
RS_n	1	3	5	9	15	27	47	83
K_n	0	1	1	2	2	3	3	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

19.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} eee \longrightarrow \ e+u+d \\ dee \longrightarrow \ e+u \\ uee \longrightarrow \ e+d \\ deu \longrightarrow \ e \\ ued \longrightarrow \ e \\ eue \longrightarrow \ e+d \\ ede \longrightarrow \ e+u \\ eed \longrightarrow \ e \\ eeu \longrightarrow \ e \end{cases}$$

Riscriviamo lo schema con stringhe tutte di lunghezza h (la potenza del cammino orizzontale):

$$\begin{cases} eee \longrightarrow \; eee + eeu + eed \\ uee \longrightarrow \; eee + eed \\ dee \longrightarrow \; eee + eeu \\ ued \longrightarrow \; ede \\ deu \longrightarrow \; eue \\ eue \longrightarrow \; uee + ued \\ eeu \longrightarrow \; eue \\ eed \longrightarrow \; ede \\ ede \longrightarrow \; dee + deu \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	uee	dee	ued	deu	eue	eeu	eed	ede	eee
uee	0	0	0	0	0	0	1	0	1
dee	0	0	0	0	0	1	0	0	1
ued	0	0	0	0	0	0	0	1	0
deu	0	0	0	0	1	0	0	0	0
eue	1	0	1	0	0	0	0	0	0
eeu	0	0	0	0	1	0	0	0	0
eed	0	0	0	0	0	0	0	1	0
ede	0	1	0	1	0	0	0	0	0
eee	0	0	0	0	0	1	1	0	1

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-9 - 6x - 3x^2 - 5x^3)}{(-1 + x + x^2 + x^4)} = 9 + 15x + 27x^2 + 47x^3 + 83x^4 + 145x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([11])

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	5	9	15	27	47	83

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

[11]Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

19.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} EEE(x) = xEEE(x) + xEEU(x) + xEED(x) + 1 \\ UEE(x) = xEEE(x) + xEED(x) + 1 \\ DEE(x) = xEEE(x) + xEEU(x) + 1 \\ UED(x) = xEDE(x) + 1 \\ DEU(x) = xEUE(x) + 1 \\ EUE(x) = xUEE(x) + xUED(x) + 1 \\ EEU(x) = xEUE(x) + 1 \\ EED(x) = xEDE(x) + 1 \\ EDE(x) = xDEE(x) + xDEU(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è EEE. Quindi risolvendo in $EEE(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

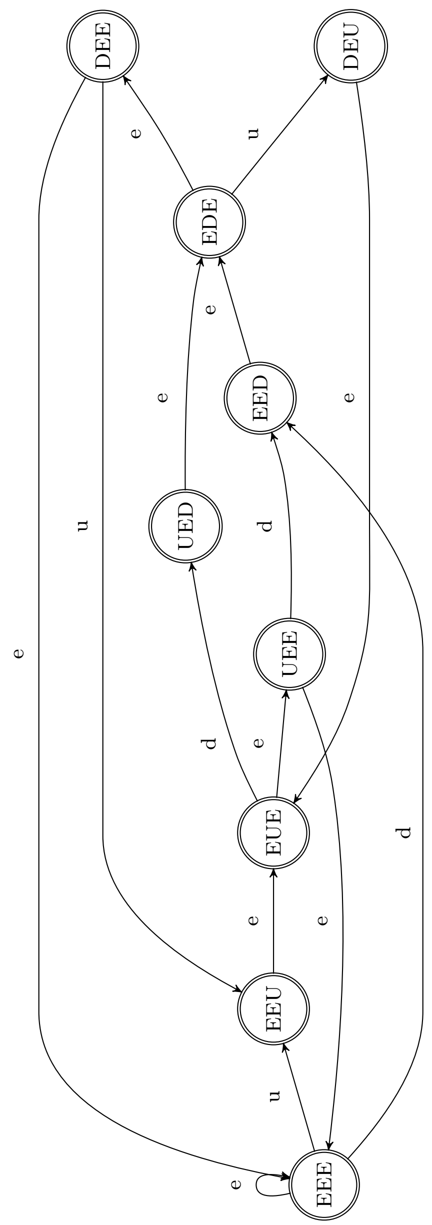
$$EEE(x) = \frac{(-1 - 2x - x^2 - x^3)}{(-1 + x + x^2 + x^4)} = 1 + 3x + 5x^2 + 9x^3 + 15x^4 + 27x^5 + O(x^6)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	5	9	15	27	47	83	145	255

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$
\begin{cases}
EEE \to eEEE \mid uEEU \mid dEED \mid \lambda \\
UEE \to eEEE \mid dEED \mid \lambda \\
DEE \to eEEE \mid uEEU \mid \lambda \\
UED \to eEDE \mid \lambda \\
DEU \to eEUE \mid \lambda \\
EUE \to eUEE \mid dUED \mid \lambda \\
EEU \to eEUE \mid \lambda \\
EED \to eEDE \mid \lambda \\
EDE \to eDEE \mid uDEU \mid \lambda
\end{cases}
$$


DEE
DEU
EDE
EED
UED
UEE
EUE
EEU
EEE

20. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times F_7^{(1)}$

Definition 20.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

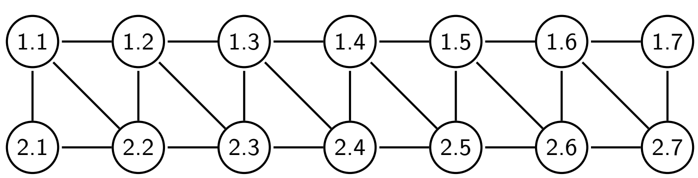
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 20.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \dots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (2;1), (1;2), \\ (2;1) \longrightarrow & (1;1), (1;2), (2;2), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1), (2;1), (2;2), (1;3), \\ (2;2) \longrightarrow & (2;1), (1;2), (1;3), (2;3), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;2), (2;2), (2;3), (1;4), \\ (2;3) \longrightarrow & (2;2), (1;3), (1;4), (2;4), \\ (1;4) \longrightarrow & (1;3), (2;3), (2;4), (1;5), \\ (2;4) \longrightarrow & (2;3), (1;4), (1;5), (2;5), \\ (1;5) \longrightarrow & (1;4), (2;4), (2;5), (1;6), \\ (2;5) \longrightarrow & (2;4), (1;5), (1;6), (2;6), \\ (1;6) \longrightarrow & (1;5), (2;5), (2;6), (1;7), \\ (2;6) \longrightarrow & (2;5), (1;6), (1;7), (2;7), \\ (1;7) \longrightarrow & (1;6), (2;6), (2;7), \\ (2;7) \longrightarrow & (2;6), (1;7), \end{cases}$$



20.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 20.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times F_7^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	2				
2	1	4	1			
3	1	6	6			
4	1	8	15	4		
5	1	10	28	20	1	
6	1	12	45	56	15	
7	1	14	66	120	70	6

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

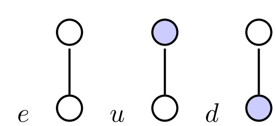
n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	8	15	26	45
RS_n	1	3	6	13	28	60	129	277
K_n	0	1	2	2	3	4	4	5

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

20.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} e \longrightarrow & e+u+d \\ d \longrightarrow & e+u \\ u \longrightarrow & e \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I-xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	d	u	e
d	0	1	1
u	0	0	1
e	1	1	1

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-3 - 3x - x^2)}{(-1 + x + 2x^2 + x^3)} = 3 + 6x + 13x^2 + 28x^3 + 60x^4 + 129x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([12])

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	6	13	28	60	129	277

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

20.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} E(x) = xE(x) + xU(x) + xD(x) + 1 \\ D(x) = xE(x) + xU(x) + 1 \\ U(x) = xE(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è E. Quindi risolvendo in $E(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

$$E(x) = \frac{-((1 + x)^2}{(-1 + x + 2x^2 + x^3))} = 1 + 3x + 6x^2 + 13x^3 + 28x^4 + 60x^5 + O(x^6)$$

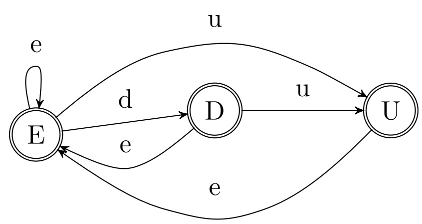
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	6	13	28	60	129	277	595	1278

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

[12] Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

$$\begin{cases} E \to eE \mid uU \mid dD \mid \lambda \\ D \to eE \mid uU \mid \lambda \\ U \to eE \mid \lambda \end{cases}$$



20.4. **Ricorrenza Lineare.**

In questo caso otteniamo la *ricorrenza locale* dal denominatore della funzione generatrice della somma delle righe:

$$F(x) = \frac{(-3 - 3x - x^2)}{(-1 + x + 2x^2 + x^3)} \ .$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	6	13	28	60	129	277

$$RS_n = RS_{n-1} + 2RS_{n-2} + RS_{n-3}$$

schema

1	0	0
0	2	0
0	0	1
0	0	$*$

$$T(n,k) = T(n-1,k) + 2T(n-2,k-1) + T(n-3,k-2)$$

20.5. **Antidiagonali.**

$sigma =$

1	0	0
0	2	0
0	0	1
0	0	$*$

$$H_0 = 1, H_1 = 1 + 2x, H_2 = 1 + 4x + x^2$$

$$V_0 = (1 - x)^-1, V_1 = \frac{2 * x}{(1 - x)^2}$$

1	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
1	4	1	0	0	0
1	6	6	0	0	0
1	8	15	4	0	0
1	10	28	20	1	0

21. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times F_7^{(2)}$

Definition 21.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

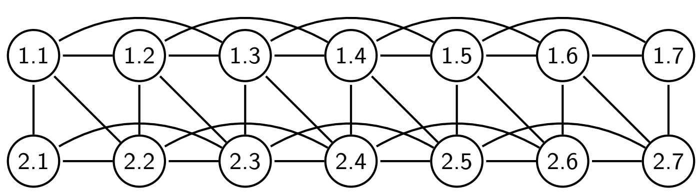
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 21.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3),(1;4), \\
(2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(2;3),(2;4), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(1;4),(1;5), \\
(2;3) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(1;3),(1;4),(2;4),(2;5), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(1;5),(1;6), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;2),(2;3),(1;4),(1;5),(2;5),(2;6), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(2;4),(2;5),(1;6),(1;7), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;3),(2;4),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;4),(1;5),(2;5),(2;6),(1;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (2;4),(2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;5),(2;6),(1;7),
\end{cases}$$



21.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 21.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times F_7^{(2)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	2				
2	1	4	1			
3	1	6	4			
4	1	8	11	2		
5	1	10	22	10	1	
6	1	12	37	30	6	
7	1	14	56	70	26	2

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

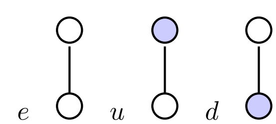
n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	8	13	22	37
RS_n	1	3	6	11	22	44	86	169
K_n	0	1	2	2	3	4	4	5

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

21.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} ee \longrightarrow \ e+u+d \\ ed \longrightarrow \ e+u \\ de \longrightarrow \ e+u \\ du \longrightarrow \ e \\ eu \longrightarrow \ e \\ ue \longrightarrow \ e+d \end{cases}$$

Riscriviamo lo schema con stringhe tutte di lunghezza h (la potenza del cammino orizzontale):

$$\begin{cases} ee \longrightarrow & ee + eu + ed \\ ed \longrightarrow & de + du \\ de \longrightarrow & ee + eu \\ du \longrightarrow & ue \\ eu \longrightarrow & ue \\ ue \longrightarrow & ee + ed \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	ed	de	du	eu	ee	ue
ed	0	1	1	0	0	0
de	0	0	0	1	1	0
du	0	0	0	0	0	1
eu	0	0	0	0	0	1
ee	1	0	0	1	1	0
ue	1	0	0	0	1	0

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-6 - 5x - 11x^2 - 4x^3 - 3x^4)}{(-1 + x + 3x^3 + x^4 + x^5)} = 6+11x+22x^2+44x^3+86x^4+169x^5+O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([13])

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	6	11	22	44	86	169

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

21.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

[13]Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

$$\begin{cases} EE(x) = xEE(x) + xEU(x) + xED(x) + 1 \\ ED(x) = xDE(x) + xDU(x) + 1 \\ DE(x) = xEE(x) + xEU(x) + 1 \\ DU(x) = xUE(x) + 1 \\ EU(x) = xUE(x) + 1 \\ UE(x) = xEE(x) + xED(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è EE. Quindi risolvendo in $EE(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

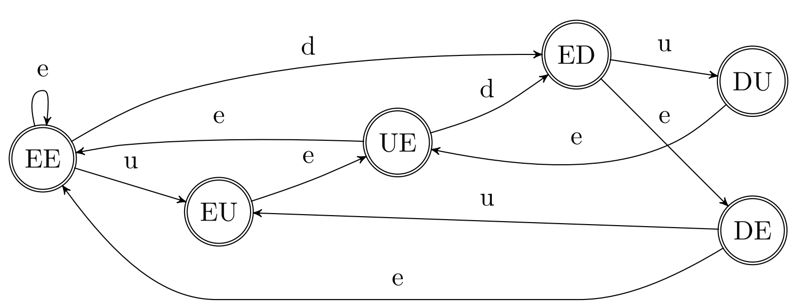
$$EE(x) = \frac{-((1+x+x^2)^2}{(-1+x+3x^3+x^4+x^5))} = 1 + 3x + 6x^2 + 11x^3 + 22x^4 + 44x^5 + O(x^6)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	6	11	22	44	86	169	334	658

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} EE \to eEE \mid uEU \mid dED \mid \lambda \\ ED \to eDE \mid uDU \mid \lambda \\ DE \to eEE \mid uEU \mid \lambda \\ DU \to eUE \mid \lambda \\ EU \to eUE \mid \lambda \\ UE \to eEE \mid dED \mid \lambda \end{cases}$$



22. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times F_7^{(e3)}$

Definition 22.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

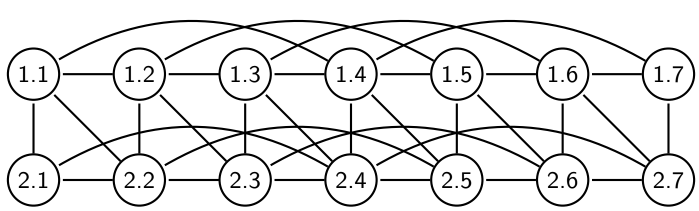
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 22.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1), (1;2), (1;4), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1), (1;2), (2;2), (2;4), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1), (2;1), (2;2), (1;3), (1;5), \\
(2;2) \longrightarrow & (2;1), (1;2), (1;3), (2;3), (2;5), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;2), (2;2), (2;3), (1;4), (1;6), \\
(2;3) \longrightarrow & (2;2), (1;3), (1;4), (2;4), (2;6), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;1), (1;3), (2;3), (2;4), (1;5), (1;7), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;1), (2;3), (1;4), (1;5), (2;5), (2;7), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;2), (1;4), (2;4), (2;5), (1;6), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;2), (2;4), (1;5), (1;6), (2;6), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;3), (1;5), (2;5), (2;6), (1;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (2;3), (2;5), (1;6), (1;7), (2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;4), (1;6), (2;6), (2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;4), (2;6), (1;7),
\end{cases}$$



22.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 22.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times F_7^{(e3)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4	1		
3	1	6	6		
4	1	8	13	2	
5	1	10	24	14	
6	1	12	39	38	6
7	1	14	58	84	37

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

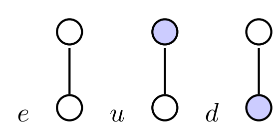
n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	8	15	24	39
RS_n	1	3	6	13	24	49	96	194
K_n	0	1	2	2	3	3	4	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

22.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$
\begin{cases}
eee \longrightarrow \ e+u+d \\
ueu \longrightarrow \ e \\
ded \longrightarrow \ e+u \\
dee \longrightarrow \ e+u \\
eue \longrightarrow \ e+u+d \\
eeu \longrightarrow \ e \\
edu \longrightarrow \ e \\
due \longrightarrow \ e+u \\
uee \longrightarrow \ e+d \\
ued \longrightarrow \ e \\
deu \longrightarrow \ e \\
eed \longrightarrow \ e+u \\
ede \longrightarrow \ e+u+d
\end{cases}
$$

Riscriviamo lo schema con stringhe tutte di lunghezza h (la potenza del cammino orizzontale):

$$
\begin{cases}
eee \longrightarrow \ eee+eeu+eed \\
ueu \longrightarrow \ eue \\
ded \longrightarrow \ ede+edu \\
dee \longrightarrow \ eee+eeu \\
eue \longrightarrow \ uee+ueu+ued \\
eeu \longrightarrow \ eue \\
edu \longrightarrow \ due \\
due \longrightarrow \ uee+ueu \\
uee \longrightarrow \ eee+eed \\
ued \longrightarrow \ ede \\
deu \longrightarrow \ eue \\
eed \longrightarrow \ ede+edu \\
ede \longrightarrow \ dee+deu+ded
\end{cases}
$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I-xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	ueu	ded	dee	eue	eeu	edu	due	uee	ued	deu	eed	ede	eee
ueu	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ded	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
dee	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
eue	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
eeu	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
edu	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
due	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
uee	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
ued	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
deu	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
eed	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
ede	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
eee	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(13 + 11x - x^2 + 25x^3 + 9x^4 - 2x^5 + 6x^6 - 10x^7 + 3x^8 - 6x^9)}{(1 - x - 2x^2 + 2x^3 - 3x^4 - 2x^5 + x^6 - 2x^7 + 2x^8 - x^9 + x^10)} = 13{+}24x{+}49x^2{+}96x^3{+}194x^4{+}384x^5{+}$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([14])

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	6	13	24	49	96	194

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

22.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

[14] Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

$$\begin{cases} EEE(x) = xEEE(x) + xEEU(x) + xEED(x) + 1 \\ UEU(x) = xEUE(x) + 1 \\ DED(x) = xEDE(x) + xEDU(x) + 1 \\ DEE(x) = xEEE(x) + xEEU(x) + 1 \\ EUE(x) = xUEE(x) + xUEU(x) + xUED(x) + 1 \\ EEU(x) = xEUE(x) + 1 \\ EDU(x) = xDUE(x) + 1 \\ DUE(x) = xUEE(x) + xUEU(x) + 1 \\ UEE(x) = xEEE(x) + xEED(x) + 1 \\ UED(x) = xEDE(x) + 1 \\ DEU(x) = xEUE(x) + 1 \\ EED(x) = xEDE(x) + xEDU(x) + 1 \\ EDE(x) = xDEE(x) + xDEU(x) + xDED(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è EEE. Quindi risolvendo in $EEE(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

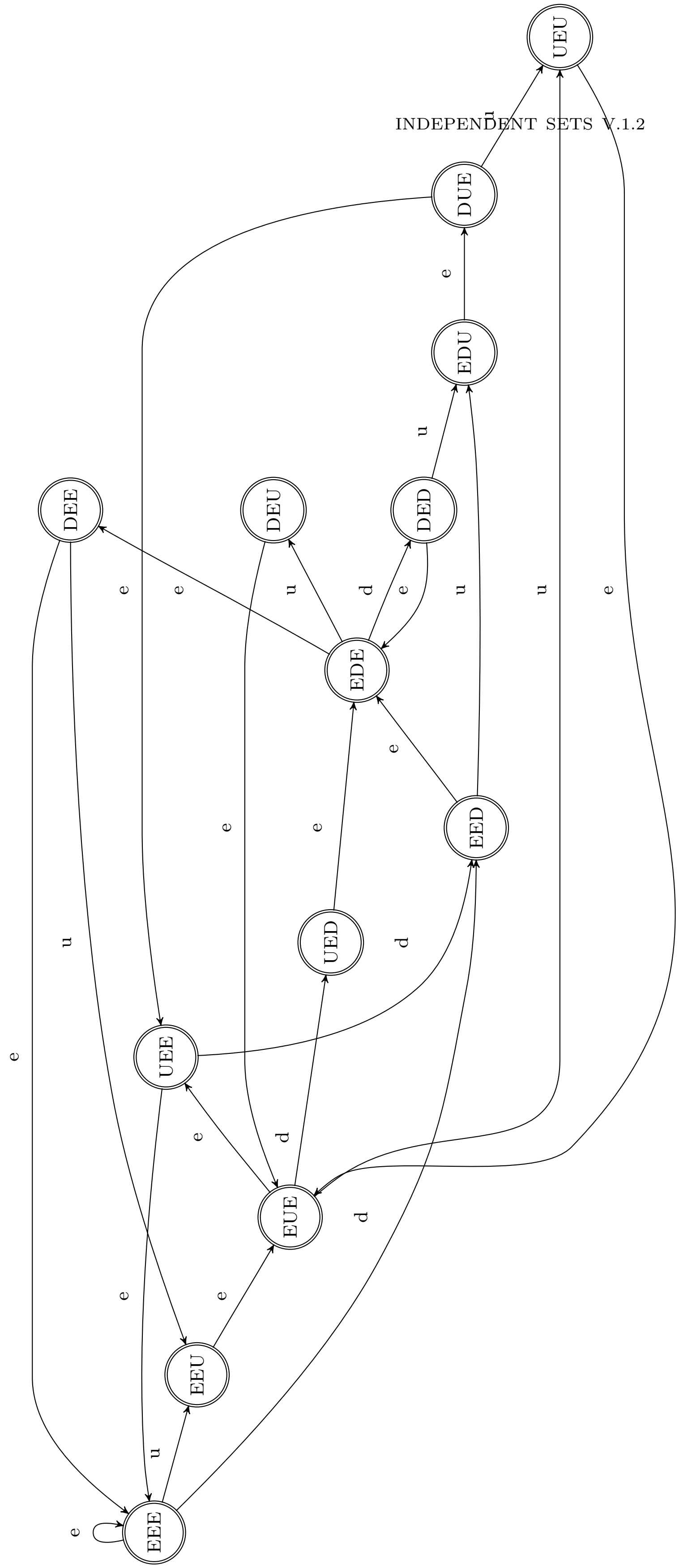
$$EEE(x) = \frac{-(((1+x^2)(-1-2x-x^3-2x^4+x^5+x^7))}{(1-x-2x^2+2x^3-3x^4-2x^5+x^6-2x^7+2x^8-x^9+x^10))} = 1{+}3x{+}6x^2{+}13x^3{+}24x^4{+}49x^5{+}O($$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	6	13	24	49	96	194	384	768

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} EEE \to eEEE \mid uEEU \mid dEED \mid \lambda \\ UEU \to eEUE \mid \lambda \\ DED \to eEDE \mid uEDU \mid \lambda \\ DEE \to eEEE \mid uEEU \mid \lambda \\ EUE \to eUEE \mid uUEU \mid dUED \mid \lambda \\ EEU \to eEUE \mid \lambda \\ EDU \to eDUE \mid \lambda \\ DUE \to eUEE \mid uUEU \mid \lambda \\ UEE \to eEEE \mid dEED \mid \lambda \\ UED \to eEDE \mid \lambda \\ DEU \to eEUE \mid \lambda \\ EED \to eEDE \mid uEDU \mid \lambda \\ EDE \to eDEE \mid uDEU \mid dDED \mid \lambda \end{cases}$$


UEU
DUE
EDU
DEE
DEU
DED
EDE
EED
UED
UEE
EUE
EEU
EEE

23. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times F_7^{(3)}$

Definition 23.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

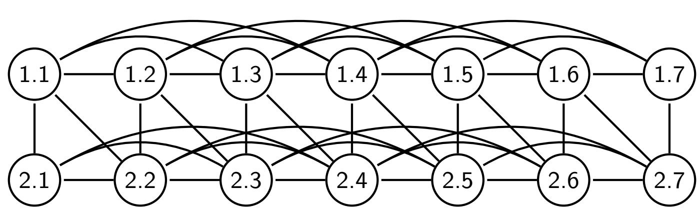
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 23.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(1;4), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(2;4), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3),(1;4),(1;5), \\
(2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(2;5), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(1;4),(1;5),(1;6), \\
(2;3) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(1;3),(1;4),(2;4),(2;5),(2;6), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(1;5),(1;6),(1;7), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(2;3),(1;4),(1;5),(2;5),(2;6),(2;7), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(1;4),(2;4),(2;5),(1;6),(1;7), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;2),(2;3),(2;4),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(1;5),(2;5),(2;6),(1;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (2;3),(2;4),(2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;4),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;4),(2;5),(2;6),(1;7),
\end{cases}$$



23.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 23.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times F_7^{(3)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4	1		
3	1	6	4		
4	1	8	9		
5	1	10	18	4	
6	1	12	31	16	1
7	1	14	48	42	7

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

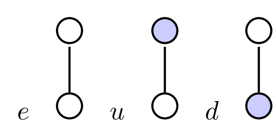
n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	8	13	20	31
RS_n	1	3	6	11	18	33	61	112
K_n	0	1	2	2	2	3	4	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

23.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} eee \longrightarrow\ e+u+d \\ dee \longrightarrow\ e+u \\ uee \longrightarrow\ e+d \\ deu \longrightarrow\ e \\ ued \longrightarrow\ e \\ eue \longrightarrow\ e+d \\ ede \longrightarrow\ e+u \\ eed \longrightarrow\ e+u \\ eeu \longrightarrow\ e \\ edu \longrightarrow\ e \\ due \longrightarrow\ e \end{cases}$$

Riscriviamo lo schema con stringhe tutte di lunghezza h (la potenza del cammino orizzontale):

$$\begin{cases} eee \longrightarrow \; eee+eeu+eed \\ uee \longrightarrow \; eee+eed \\ dee \longrightarrow \; eee+eeu \\ ued \longrightarrow \; ede \\ deu \longrightarrow \; eue \\ eue \longrightarrow \; uee+ued \\ eeu \longrightarrow \; eue \\ eed \longrightarrow \; ede+edu \\ ede \longrightarrow \; dee+deu \\ edu \longrightarrow \; due \\ due \longrightarrow \; uee \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I-xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	uee	dee	ued	deu	eue	eeu	eed	ede	eee	edu	due
uee	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
dee	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
ued	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
deu	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
eue	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
eeu	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
eed	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
ede	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
eee	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
edu	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
due	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

La funzione generatrice è

$$F(x)=\frac{(11-4x+19x^2+9x^3-2x^4+8x^5-7x^6-3x^7-6x^8)}{(1-2x+2x^2-2x^3-2x^4+x^5-2x^6+x^7+x^9)}=11+18x+33x^2+61x^3+112x^4+201x^5+O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([15])

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	6	11	18	33	61	112

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

[15] Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

23.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} EEE(x) = xEEE(x) + xEEU(x) + xEED(x) + 1 \\ UEE(x) = xEEE(x) + xEED(x) + 1 \\ DEE(x) = xEEE(x) + xEEU(x) + 1 \\ UED(x) = xEDE(x) + 1 \\ DEU(x) = xEUE(x) + 1 \\ EUE(x) = xUEE(x) + xUED(x) + 1 \\ EEU(x) = xEUE(x) + 1 \\ EED(x) = xEDE(x) + xEDU(x) + 1 \\ EDE(x) = xDEE(x) + xDEU(x) + 1 \\ EDU(x) = xDUE(x) + 1 \\ DUE(x) = xUEE(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è EEE. Quindi risolvendo in $EEE(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

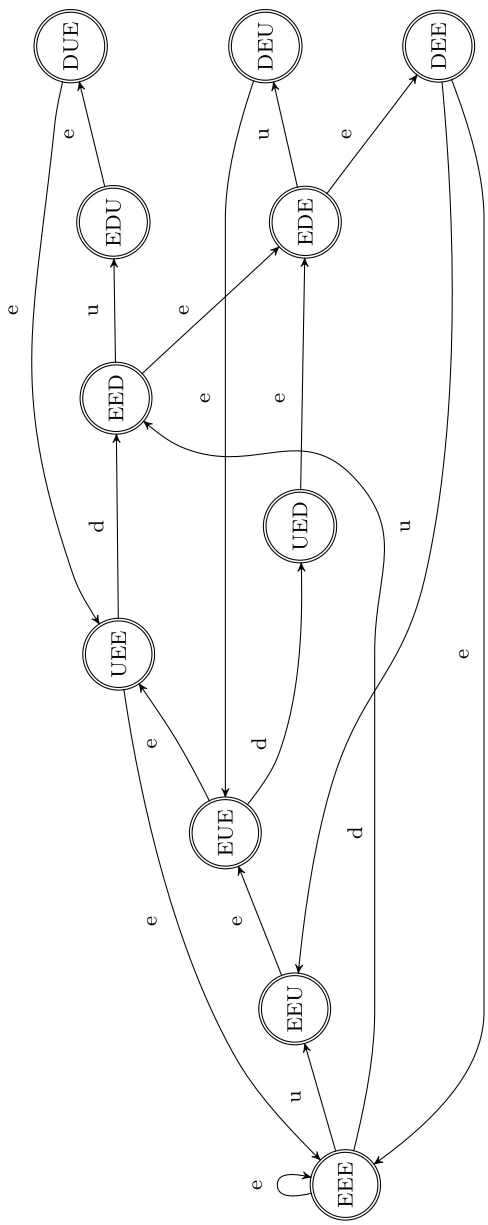
$$EEE(x) = \frac{(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^5 - 2x^6 - x^7 - x^8)}{(1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 - 2x^4 + x^5 - 2x^6 + x^7 + x^9)} = 1+3x+6x^2+11x^3+18x^4+33x^5+O(x^6)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	6	11	18	33	61	112	201	363

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} EEE \to eEEE \mid uEEU \mid dEED \mid \lambda \\ UEE \to eEEE \mid dEED \mid \lambda \\ DEE \to eEEE \mid uEEU \mid \lambda \\ UED \to eEDE \mid \lambda \\ DEU \to eEUE \mid \lambda \\ EUE \to eUEE \mid dUED \mid \lambda \\ EEU \to eEUE \mid \lambda \\ EED \to eEDE \mid uEDU \mid \lambda \\ EDE \to eDEE \mid uDEU \mid \lambda \\ EDU \to eDUE \mid \lambda \\ DUE \to eUEE \mid \lambda \end{cases}$$


DUE
DEU
DEE
EDU
EDE
EED
UED
UEE
EUE
EEU
EEE

24. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times H_7^{(1)}$

Definition 24.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

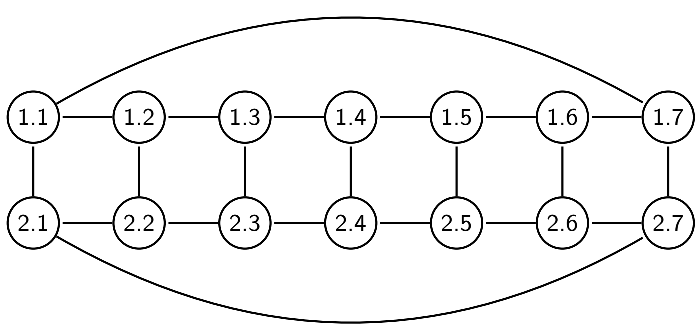
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 24.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (2;1), (1;2), (1;7), \\ (2;1) \longrightarrow & (1;1), (2;2), (2;7), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1), (2;2), (1;3), \\ (2;2) \longrightarrow & (2;1), (1;2), (2;3), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;2), (2;3), (1;4), \\ (2;3) \longrightarrow & (2;2), (1;3), (2;4), \\ (1;4) \longrightarrow & (1;3), (2;4), (1;5), \\ (2;4) \longrightarrow & (2;3), (1;4), (2;5), \\ (1;5) \longrightarrow & (1;4), (2;5), (1;6), \\ (2;5) \longrightarrow & (2;4), (1;5), (2;6), \\ (1;6) \longrightarrow & (1;5), (2;6), (1;7), \\ (2;6) \longrightarrow & (2;5), (1;6), (2;7), \\ (1;7) \longrightarrow & (1;1), (1;6), (2;7), \\ (2;7) \longrightarrow & (2;1), (2;6), (1;7), \end{cases}$$



Con le famiglie di grafi H vogliamo indicare dei circuiti che hanno le potenze orizzontali *limitate* al valore di n, quindi l'unico arco che fa da circuito è quello tra il primo nodo e l'ultimo.

24.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 24.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times H_7^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	2					
2	1	4	2				
3	1	6	6				
4	1	8	16	8	2		
5	1	10	30	30	10		
6	1	12	48	76	48	12	2
7	1	14	70	154	154	70	14

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	9	15	27	51
RS_n	1	3	7	13	35	81	199	477
K_n	0	1	2	2	4	4	6	6

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

25. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times H_7^{(2)}$

Definition 25.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V,E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

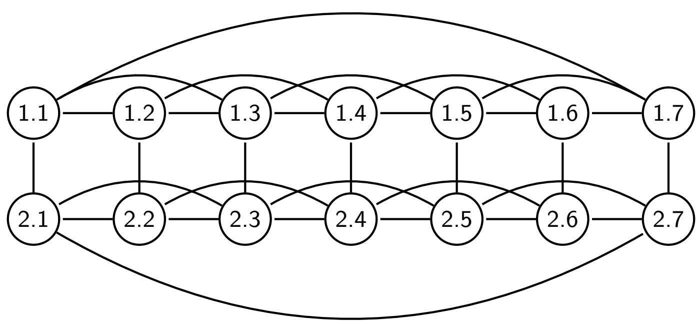
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 25.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(1;7), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(2;3),(2;7), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(1;3),(1;4), \\
(2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;3),(2;4), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;3),(1;4),(1;5), \\
(2;3) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(1;3),(2;4),(2;5), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(2;4),(1;5),(1;6), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;2),(2;3),(1;4),(2;5),(2;6), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(2;5),(1;6),(1;7), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;3),(2;4),(1;5),(2;6),(2;7), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;4),(1;5),(2;6),(1;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (2;4),(2;5),(1;6),(2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;1),(1;5),(1;6),(2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;1),(2;5),(2;6),(1;7),
\end{cases}$$



Con le famiglie di grafi H vogliamo indicare dei circuiti che hanno le potenze orizzontali *limitate* al valore di n, quindi l'unico arco che fa da circuito è quello tra il primo nodo e l'ultimo.

25.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 25.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times H_7^{(2)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4	2		
3	1	6	6		
4	1	8	12		
5	1	10	24	12	2
6	1	12	40	40	12
7	1	14	60	90	42

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	9	15	23	37
RS_n	1	3	7	13	21	49	105	207
K_n	0	1	2	2	2	4	4	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

26. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times H_7^{(3)}$

Definition 26.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

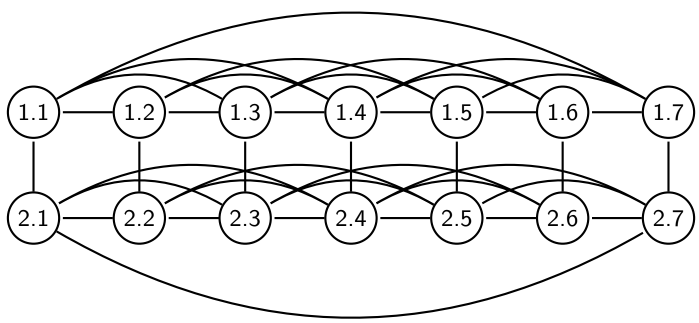
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 26.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$
\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;7),\\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;7),\\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(1;3),(1;4),(1;5),\\
(2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;3),(2;4),(2;5),\\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;3),(1;4),(1;5),(1;6),\\
(2;3) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(1;3),(2;4),(2;5),(2;6),\\
(1;4) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;3),(2;4),(1;5),(1;6),(1;7),\\
(2;4) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(2;3),(1;4),(2;5),(2;6),(2;7),\\
(1;5) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(1;4),(2;5),(1;6),(1;7),\\
(2;5) \longrightarrow & (2;2),(2;3),(2;4),(1;5),(2;6),(2;7),\\
(1;6) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(1;5),(2;6),(1;7),\\
(2;6) \longrightarrow & (2;3),(2;4),(2;5),(1;6),(2;7),\\
(1;7) \longrightarrow & (1;1),(1;4),(1;5),(1;6),(2;7),\\
(2;7) \longrightarrow & (2;1),(2;4),(2;5),(2;6),(1;7),
\end{cases}
$$



Con le famiglie di grafi H vogliamo indicare dei circuiti che hanno le potenze orizzontali *limitate* al valore di n, quindi l'unico arco che fa da circuito è quello tra il primo nodo e l'ultimo.

26.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 26.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times H_7^{(3)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4	2		
3	1	6	6		
4	1	8	12		
5	1	10	20		
6	1	12	34	16	2
7	1	14	52	50	12

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	9	15	23	33
RS_n	1	3	7	13	21	31	65	129
K_n	0	1	2	2	2	2	4	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

27. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times C_7^{(1)}$

Definition 27.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V,E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

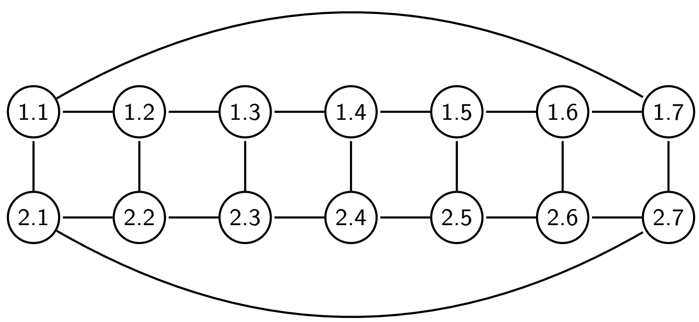
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 27.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;7), \\ (2;1) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(2;7), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(1;3), \\ (2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;3), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;2),(2;3),(1;4), \\ (2;3) \longrightarrow & (2;2),(1;3),(2;4), \\ (1;4) \longrightarrow & (1;3),(2;4),(1;5), \\ (2;4) \longrightarrow & (2;3),(1;4),(2;5), \\ (1;5) \longrightarrow & (1;4),(2;5),(1;6), \\ (2;5) \longrightarrow & (2;4),(1;5),(2;6), \\ (1;6) \longrightarrow & (1;5),(2;6),(1;7), \\ (2;6) \longrightarrow & (2;5),(1;6),(2;7), \\ (1;7) \longrightarrow & (1;1),(1;6),(2;7), \\ (2;7) \longrightarrow & (2;1),(2;6),(1;7), \end{cases}$$



Con le famiglie di grafi C vogliamo indicare dei circuiti *veri e propri* in cui, oltre all'arco che collega il primo nodo con l'ultimo, abbiamo anche archi delle potenze dei cammini orizzontali che possono collegarsi ai nodi precedenti rispetto ai nodi dai quali partono.

27.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 27.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times C_7^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	2					
2	1	4	2				
3	1	6	6				
4	1	8	16	8	2		
5	1	10	30	30	10		
6	1	12	48	76	48	12	2
7	1	14	70	154	154	70	14

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	9	15	27	51
RS_n	1	3	7	13	35	81	199	477
K_n	0	1	2	2	4	4	6	6

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

28. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times C_7^{(2)}$

Definition 28.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

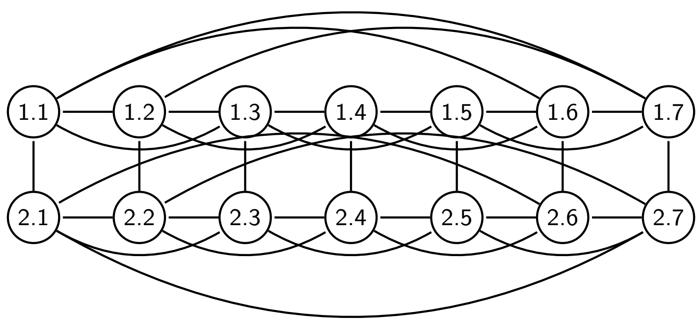
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 28.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(1;6),(1;7),\\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(2;3),(2;6),(2;7),\\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(1;3),(1;4),(1;7),\\
(2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;3),(2;4),(2;7),\\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;3),(1;4),(1;5),\\
(2;3) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(1;3),(2;4),(2;5),\\
(1;4) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(2;4),(1;5),(1;6),\\
(2;4) \longrightarrow & (2;2),(2;3),(1;4),(2;5),(2;6),\\
(1;5) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(2;5),(1;6),(1;7),\\
(2;5) \longrightarrow & (2;3),(2;4),(1;5),(2;6),(2;7),\\
(1;6) \longrightarrow & (1;1),(1;4),(1;5),(2;6),(1;7),\\
(2;6) \longrightarrow & (2;1),(2;4),(2;5),(1;6),(2;7),\\
(1;7) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;5),(1;6),(2;7),\\
(2;7) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(2;5),(2;6),(1;7),
\end{cases}$$



Con le famiglie di grafi C vogliamo indicare dei circuiti *veri e propri* in cui, oltre all'arco che collega il primo nodo con l'ultimo, abbiamo anche archi delle potenze dei cammini orizzontali che possono collegarsi ai nodi precedenti rispetto ai nodi dai quali partono.

28.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 28.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times C_7^{(2)}$

.

Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4	2		
3	1	6	6		
4	1	8	12		
5	1	10	20		
6	1	12	36	24	6
7	1	14	56	70	28

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	9	15	23	33
RS_n	1	3	7	13	21	31	79	169
K_n	0	1	2	2	2	2	4	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

29. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times C_7^{(e3)}$

Definition 29.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

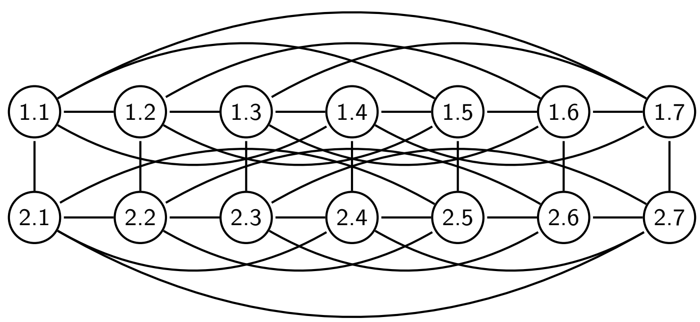
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 29.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;4),(1;5),(1;7), \\ (2;1) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(2;4),(2;5),(2;7), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(1;3),(1;5),(1;6), \\ (2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;3),(2;5),(2;6), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;2),(2;3),(1;4),(1;6),(1;7), \\ (2;3) \longrightarrow & (2;2),(1;3),(2;4),(2;6),(2;7), \\ (1;4) \longrightarrow & (1;1),(1;3),(2;4),(1;5),(1;7), \\ (2;4) \longrightarrow & (2;1),(2;3),(1;4),(2;5),(2;7), \\ (1;5) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;4),(2;5),(1;6), \\ (2;5) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(2;4),(1;5),(2;6), \\ (1;6) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(1;5),(2;6),(1;7), \\ (2;6) \longrightarrow & (2;2),(2;3),(2;5),(1;6),(2;7), \\ (1;7) \longrightarrow & (1;1),(1;3),(1;4),(1;6),(2;7), \\ (2;7) \longrightarrow & (2;1),(2;3),(2;4),(2;6),(1;7), \end{cases}$$



Con le famiglie di grafi C vogliamo indicare dei circuiti *veri e propri* in cui, oltre all'arco che collega il primo nodo con l'ultimo, abbiamo anche archi delle potenze dei cammini orizzontali che possono collegarsi ai nodi precedenti rispetto ai nodi dai quali partono.

29.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 29.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times C_7^{(e3)}$

.

Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	2					
2	1	4	2				
3	1	6	6				
4	1	8	16	8	2		
5	1	10	20				
6	1	12	42	52	30	12	2
7	1	14	56	70	28		

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	9	15	27	41
RS_n	1	3	7	13	35	31	151	169
K_n	0	1	2	2	4	2	6	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

30. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times C_7^{(3)}$

Definition 30.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

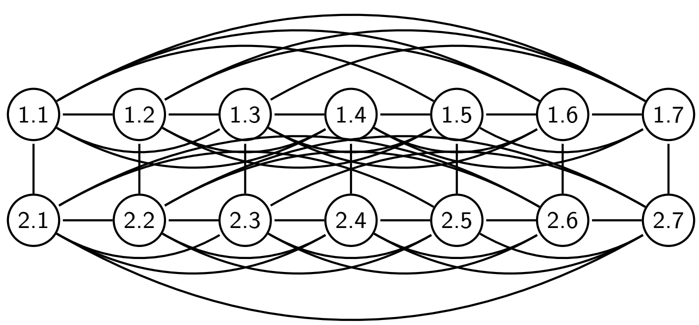
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 30.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
(1;1) & \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),(1;7),\\
(2;1) & \longrightarrow & (1;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6),(2;7),\\
(1;2) & \longrightarrow & (1;1),(2;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),(1;7),\\
(2;2) & \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6),(2;7),\\
(1;3) & \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;3),(1;4),(1;5),(1;6),(1;7),\\
(2;3) & \longrightarrow & (2;1),(2;2),(1;3),(2;4),(2;5),(2;6),(2;7),\\
(1;4) & \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;3),(2;4),(1;5),(1;6),(1;7),\\
(2;4) & \longrightarrow & (2;1),(2;2),(2;3),(1;4),(2;5),(2;6),(2;7),\\
(1;5) & \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(2;5),(1;6),(1;7),\\
(2;5) & \longrightarrow & (2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(1;5),(2;6),(2;7),\\
(1;6) & \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(2;6),(1;7),\\
(2;6) & \longrightarrow & (2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(1;6),(2;7),\\
(1;7) & \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),(2;7),\\
(2;7) & \longrightarrow & (2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6),(1;7),
\end{array}\right.$$



Con le famiglie di grafi C vogliamo indicare dei circuiti *veri e propri* in cui, oltre all'arco che collega il primo nodo con l'ultimo, abbiamo anche archi delle potenze dei cammini orizzontali che possono collegarsi ai nodi precedenti rispetto ai nodi dai quali partono.

30.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 30.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times C_7^{(3)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2
0	1		
1	1	2	
2	1	4	2
3	1	6	6
4	1	8	12
5	1	10	20
6	1	12	30
7	1	14	42

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	9	15	23	33
RS_n	1	3	7	13	21	31	43	57
K_n	0	1	2	2	2	2	2	2

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

31. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times HF_7^{(1)}$

Definition 31.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

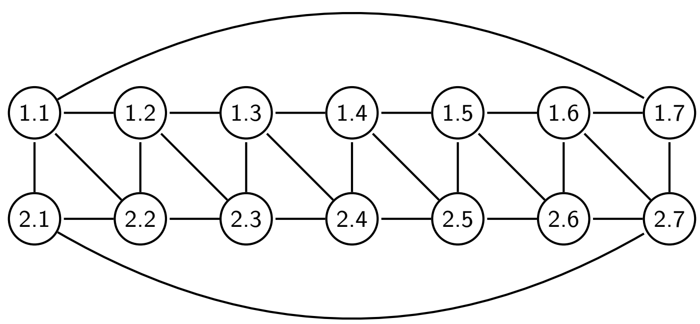
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 31.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \dots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;7), \\ (2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;7), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3), \\ (2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(2;3), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;2),(2;2),(2;3),(1;4), \\ (2;3) \longrightarrow & (2;2),(1;3),(1;4),(2;4), \\ (1;4) \longrightarrow & (1;3),(2;3),(2;4),(1;5), \\ (2;4) \longrightarrow & (2;3),(1;4),(1;5),(2;5), \\ (1;5) \longrightarrow & (1;4),(2;4),(2;5),(1;6), \\ (2;5) \longrightarrow & (2;4),(1;5),(1;6),(2;6), \\ (1;6) \longrightarrow & (1;5),(2;5),(2;6),(1;7), \\ (2;6) \longrightarrow & (2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\ (1;7) \longrightarrow & (1;1),(1;6),(2;6),(2;7), \\ (2;7) \longrightarrow & (2;1),(2;6),(1;7), \end{cases}$$



31.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 31.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times HF_7^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	2				
2	1	4	1			
3	1	6	4			
4	1	8	13	2		
5	1	10	26	14	1	
6	1	12	43	46	9	
7	1	14	64	106	50	4

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	8	13	24	41
RS_n	1	3	6	11	24	52	111	239
K_n	0	1	2	2	3	4	4	5

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

32. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times HF_7^{(2)}$

Definition 32.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

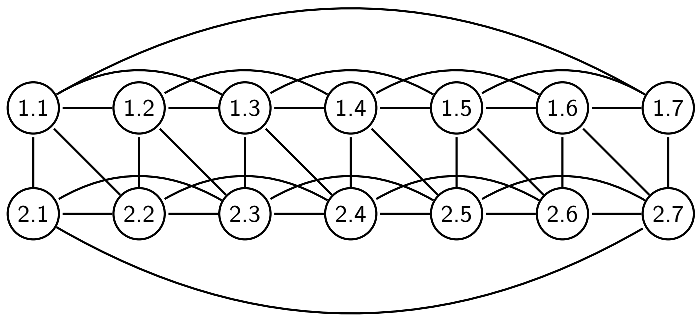
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 32.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i, j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(1;7), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(2;7), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3),(1;4), \\
(2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(2;3),(2;4), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(1;4),(1;5), \\
(2;3) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(1;3),(1;4),(2;4),(2;5), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(1;5),(1;6), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;2),(2;3),(1;4),(1;5),(2;5),(2;6), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(2;4),(2;5),(1;6),(1;7), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;3),(2;4),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;4),(1;5),(2;5),(2;6),(1;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (2;4),(2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;1),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;1),(2;5),(2;6),(1;7),
\end{cases}$$



32.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 32.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times HF_7^{(2)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4	1		
3	1	6	4		
4	1	8	9		
5	1	10	20	6	1
6	1	12	35	24	6
7	1	14	54	60	20

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	8	13	20	33
RS_n	1	3	6	11	18	38	78	149
K_n	0	1	2	2	2	4	4	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

33. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times HZ_7^{(1)}$

Definition 33.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

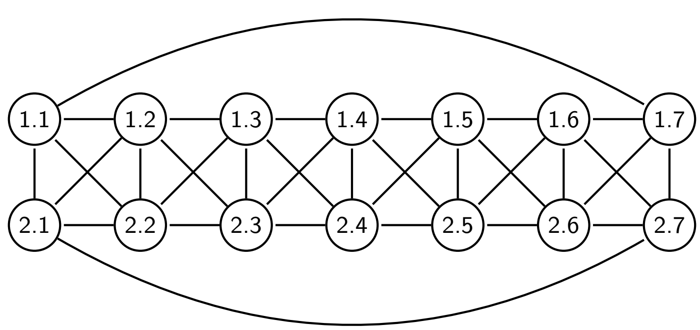
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 33.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i, j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;2),(1;7), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;7), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3),(2;3), \\
(2;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(1;2),(1;3),(2;3), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;2),(2;2),(2;3),(1;4),(2;4), \\
(2;3) \longrightarrow & (1;2),(2;2),(1;3),(1;4),(2;4), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;3),(2;3),(2;4),(1;5),(2;5), \\
(2;4) \longrightarrow & (1;3),(2;3),(1;4),(1;5),(2;5), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;4),(2;4),(2;5),(1;6),(2;6), \\
(2;5) \longrightarrow & (1;4),(2;4),(1;5),(1;6),(2;6), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;5),(2;5),(2;6),(1;7),(2;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (1;5),(2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;1),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;1),(1;6),(2;6),(1;7),
\end{cases}$$



33.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 33.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times HZ_7^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4			
3	1	6	2		
4	1	8	10		
5	1	10	22	4	
6	1	12	38	24	
7	1	14	58	68	8

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	7	11	21	35
RS_n	1	3	5	9	19	37	75	149
K_n	0	1	1	2	2	3	3	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

34. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times HZ_7^{(2)}$

Definition 34.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V,E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

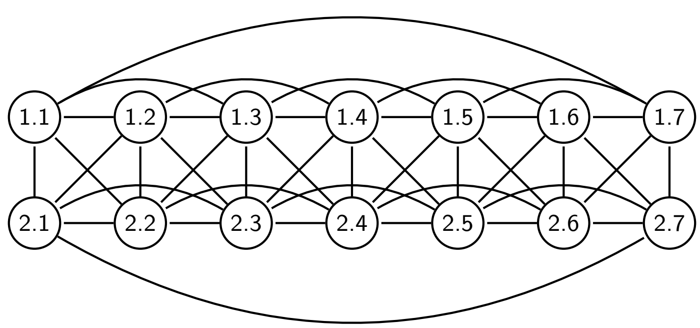
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 34.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;2),(1;3),(1;7), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(2;7), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3),(2;3),(1;4), \\
(2;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(1;2),(1;3),(2;3),(2;4), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(1;4),(2;4),(1;5), \\
(2;3) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;2),(1;3),(1;4),(2;4),(2;5), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(1;5),(2;5),(1;6), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;2),(1;3),(2;3),(1;4),(1;5),(2;5),(2;6), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(2;4),(2;5),(1;6),(2;6),(1;7), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;3),(1;4),(2;4),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;4),(1;5),(2;5),(2;6),(1;7),(2;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (2;4),(1;5),(2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;1),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;1),(2;5),(1;6),(2;6),(1;7),
\end{cases}$$



34.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 34.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times HZ_7^{(2)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4			
3	1	6	2		
4	1	8	6		
5	1	10	16		
6	1	12	30	8	
7	1	14	48	30	2

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	7	11	17	29
RS_n	1	3	5	9	15	27	51	95
K_n	0	1	1	2	2	2	3	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

35. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times CF_7^{(1)}$

Definition 35.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

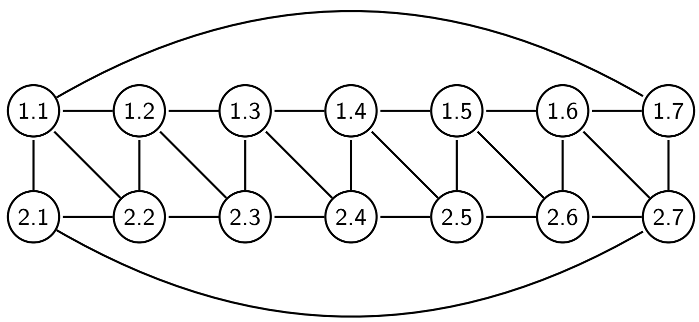
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 35.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;7), \\ (2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;7), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3), \\ (2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(2;3), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;2),(2;2),(2;3),(1;4), \\ (2;3) \longrightarrow & (2;2),(1;3),(1;4),(2;4), \\ (1;4) \longrightarrow & (1;3),(2;3),(2;4),(1;5), \\ (2;4) \longrightarrow & (2;3),(1;4),(1;5),(2;5), \\ (1;5) \longrightarrow & (1;4),(2;4),(2;5),(1;6), \\ (2;5) \longrightarrow & (2;4),(1;5),(1;6),(2;6), \\ (1;6) \longrightarrow & (1;5),(2;5),(2;6),(1;7), \\ (2;6) \longrightarrow & (2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\ (1;7) \longrightarrow & (1;1),(1;6),(2;6),(2;7), \\ (2;7) \longrightarrow & (2;1),(2;6),(1;7), \end{cases}$$



35.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 35.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times CF_7^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	2				
2	1	4	1			
3	1	6	4			
4	1	8	13	2		
5	1	10	26	14	1	
6	1	12	43	46	9	
7	1	14	64	106	50	4

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	8	13	24	41
RS_n	1	3	6	11	24	52	111	239
K_n	0	1	2	2	3	4	4	5

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

36. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times CF_7^{(2)}$

Definition 36.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

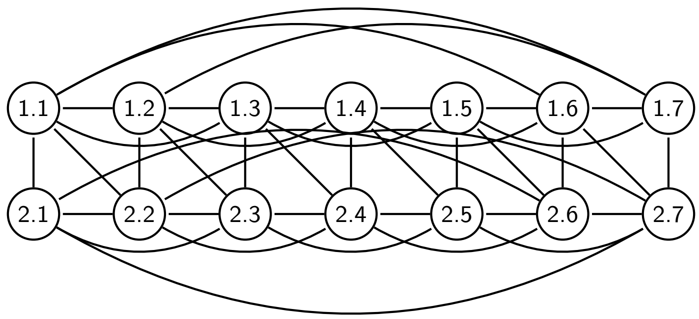
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 36.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(1;6),(1;7), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(2;6),(2;7), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3),(1;4),(1;7), \\
(2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(2;7), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(1;4),(1;5), \\
(2;3) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(1;3),(1;4),(2;4),(2;5), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(1;5),(1;6), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;2),(2;3),(1;4),(1;5),(2;5),(2;6), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(2;4),(2;5),(1;6),(1;7), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;3),(2;4),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;1),(1;4),(1;5),(2;5),(2;6),(1;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (2;1),(2;4),(2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(2;5),(2;6),(1;7),
\end{cases}$$



36.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 36.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times CF_7^{(2)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4	1		
3	1	6	4		
4	1	8	9		
5	1	10	16		
6	1	12	31	14	3
7	1	14	50	46	15

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	8	13	20	29
RS_n	1	3	6	11	18	27	61	126
K_n	0	1	2	2	2	2	4	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

37. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times CZ_7^{(1)}$

Definition 37.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

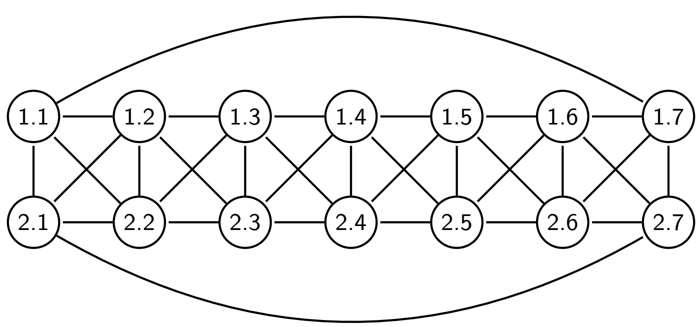
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 37.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;2),(1;7), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;7), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3),(2;3), \\
(2;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(1;2),(1;3),(2;3), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;2),(2;2),(2;3),(1;4),(2;4), \\
(2;3) \longrightarrow & (1;2),(2;2),(1;3),(1;4),(2;4), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;3),(2;3),(2;4),(1;5),(2;5), \\
(2;4) \longrightarrow & (1;3),(2;3),(1;4),(1;5),(2;5), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;4),(2;4),(2;5),(1;6),(2;6), \\
(2;5) \longrightarrow & (1;4),(2;4),(1;5),(1;6),(2;6), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;5),(2;5),(2;6),(1;7),(2;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (1;5),(2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;1),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;1),(1;6),(2;6),(1;7),
\end{cases}$$



37.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 37.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times CZ_7^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4			
3	1	6	2		
4	1	8	10		
5	1	10	22	4	
6	1	12	38	24	
7	1	14	58	68	8

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	7	11	21	35
RS_n	1	3	5	9	19	37	75	149
K_n	0	1	1	2	2	3	3	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

38. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times CZ_7^{(2)}$

Definition 38.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

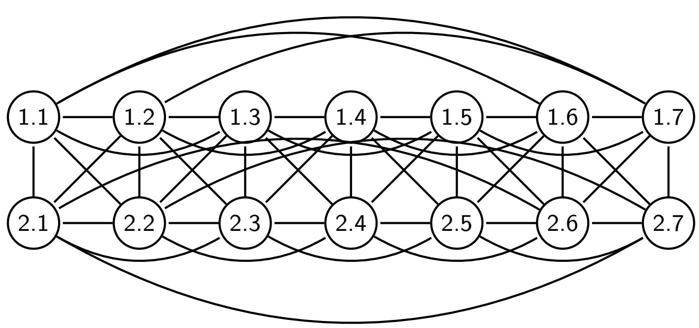
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 38.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;2),(1;3),(1;6),(1;7), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(2;6),(2;7), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(2;2),(1;3),(2;3),(1;4),(1;7), \\
(2;2) \longrightarrow & (1;1),(2;1),(1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(2;7), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;2),(2;3),(1;4),(2;4),(1;5), \\
(2;3) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;2),(1;3),(1;4),(2;4),(2;5), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(1;5),(2;5),(1;6), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;2),(1;3),(2;3),(1;4),(1;5),(2;5),(2;6), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(2;4),(2;5),(1;6),(2;6),(1;7), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;3),(1;4),(2;4),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(1;6) \longrightarrow & (1;1),(1;4),(1;5),(2;5),(2;6),(1;7),(2;7), \\
(2;6) \longrightarrow & (2;1),(2;4),(1;5),(2;5),(1;6),(1;7),(2;7), \\
(1;7) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(1;5),(1;6),(2;6),(2;7), \\
(2;7) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(2;5),(1;6),(2;6),(1;7),
\end{cases}$$



38.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 38.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times CZ_7^{(2)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4			
3	1	6	2		
4	1	8	6		
5	1	10	12		
6	1	12	26	4	
7	1	14	44	22	2

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	7	11	17	25
RS_n	1	3	5	9	15	23	43	83
K_n	0	1	1	2	2	2	3	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.

39. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times M_7^{(1)}$

Definition 39.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

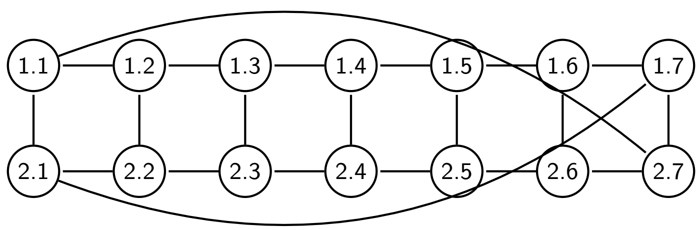
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 39.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;7), \\ (2;1) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(1;7), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(1;3), \\ (2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;3), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;2),(2;3),(1;4), \\ (2;3) \longrightarrow & (2;2),(1;3),(2;4), \\ (1;4) \longrightarrow & (1;3),(2;4),(1;5), \\ (2;4) \longrightarrow & (2;3),(1;4),(2;5), \\ (1;5) \longrightarrow & (1;4),(2;5),(1;6), \\ (2;5) \longrightarrow & (2;4),(1;5),(2;6), \\ (1;6) \longrightarrow & (1;5),(2;6),(1;7), \\ (2;6) \longrightarrow & (2;5),(1;6),(2;7), \\ (1;7) \longrightarrow & (2;1),(1;6),(2;7), \\ (2;7) \longrightarrow & (1;1),(2;6),(1;7), \end{cases}$$



39.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 39.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times M_7^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	2						
2	1	4						
3	1	6	6	2				
4	1	8	16	8				
5	1	10	30	30	10	2		
6	1	12	48	76	48	12		
7	1	14	70	154	154	70	14	2

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	7	15	29	51
RS_n	1	3	5	15	33	83	197	479
K_n	0	1	1	3	3	5	5	7

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

Wilf: Non possiamo usare il metodo di Wilf per trovare la Fgo delle somme delle righe in quanto il grafo è un circuito.