

ISA SOFTWARE V.1.3

1. CASO DI STUDIO : GRAFO $P_2^{(1)} \times Z_8^{(1)}$

Definition 1.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V . L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G , l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

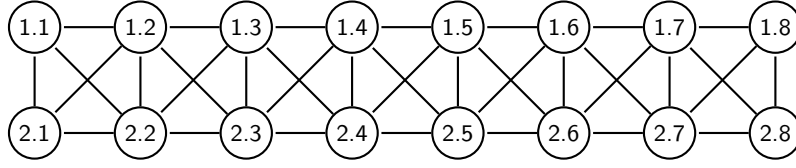
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 1.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano v_1, v_2, \dots, v_n è una matrice $A(G) = [a(i, j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1; 1) \longrightarrow (2; 1), (1; 2), (2; 2), \\ (2; 1) \longrightarrow (1; 1), (1; 2), (2; 2), \\ (1; 2) \longrightarrow (1; 1), (2; 1), (2; 2), (1; 3), (2; 3), \\ (2; 2) \longrightarrow (1; 1), (2; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 3), \\ (1; 3) \longrightarrow (1; 2), (2; 2), (2; 3), (1; 4), (2; 4), \\ (2; 3) \longrightarrow (1; 2), (2; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 4), \\ (1; 4) \longrightarrow (1; 3), (2; 3), (2; 4), (1; 5), (2; 5), \\ (2; 4) \longrightarrow (1; 3), (2; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 5), \\ (1; 5) \longrightarrow (1; 4), (2; 4), (2; 5), (1; 6), (2; 6), \\ (2; 5) \longrightarrow (1; 4), (2; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 6), \\ (1; 6) \longrightarrow (1; 5), (2; 5), (2; 6), (1; 7), (2; 7), \\ (2; 6) \longrightarrow (1; 5), (2; 5), (1; 6), (1; 7), (2; 7), \\ (1; 7) \longrightarrow (1; 6), (2; 6), (2; 7), (1; 8), (2; 8), \\ (2; 7) \longrightarrow (1; 6), (2; 6), (1; 7), (1; 8), (2; 8), \\ (1; 8) \longrightarrow (1; 7), (2; 7), (2; 8), \\ (2; 8) \longrightarrow (1; 7), (2; 7), (1; 8), \end{array} \right.$$



1.1. Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.

Definition 1.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n, k)$ il numero di k -sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times Z_8^{(1)}$.

Ecco alcuni valori

$T(n, k)$	$k = 0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4			
3	1	6	4		
4	1	8	12		
5	1	10	24	8	
6	1	12	40	32	
7	1	14	60	80	16
8	1	16	84	160	80

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

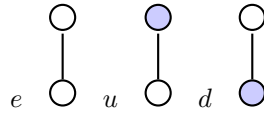
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
AD_n	1	1	3	5	7	13	23	37	63
RS_n	1	3	5	11	21	43	85	171	341
K_n	0	1	1	2	2	3	3	4	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

1.2. Il problema.

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m, n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} e \longrightarrow e + u + d \\ d \longrightarrow e \\ u \longrightarrow e \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	d	u	e
d	0	0	1
u	0	0	1
e	1	1	1

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-3 - 2x)}{(-1 + x + 2x^2)} = 3 + 5x + 11x^2 + 21x^3 + 43x^4 + 85x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ⁽¹⁾

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
RS_n	1	3	5	11	21	43	85	171	341

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

1.3. Il nostro metodo.

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x . Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.

Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \dots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \dots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} E(x) = xE(x) + xU(x) + xD(x) + 1 \\ D(x) = xE(x) + 1 \\ U(x) = xE(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.

¹Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

In questo esempio lo stato iniziale è E . Quindi risolvendo in $E(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

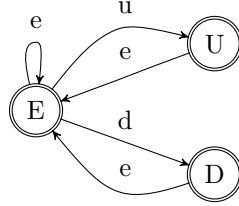
$$E(x) = \frac{(-1 - 2x)}{(-1 + x + 2x^2)} = 1 + 3x + 5x^2 + 11x^3 + 21x^4 + 43x^5 + O(x^6)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} E \rightarrow eE \mid uU \mid dD \mid \lambda \\ D \rightarrow eE \mid \lambda \\ U \rightarrow eE \mid \lambda \end{cases}$$



1.4. Ricorrenza Lineare.

In questo caso otteniamo la *ricorrenza locale* dal denominatore della funzione generatrice della somma delle righe:

$$F(x) = \frac{(-3 - 2x)}{(-1 + x + 2x^2)} .$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
RS_n	1	3	5	11	21	43	85	171	341

$$RS_n = RS_{n-1} + 2RS_{n-2}$$

schema	2	0
	0	1
	0	*

$$T(n, k) = T(n - 1, k) + 2T(n - 2, k - 1)$$

1.5. Antidiagonali.

$$sigma = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$$

$$H_0 = 1, H_1 = 1 + 2x$$

$$V_0 = (1 - x)^{-1}$$

1	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
1	4	0	0	0	0
1	6	4	0	0	0
1	8	12	0	0	0
1	10	24	8	0	0