

ISA SOFTWARE V.1.3

1. CASO DI STUDIO : GRAFO $P_1^{(1)} \times P_1 2^{(1)}$

Definition 1.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V . L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G , l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

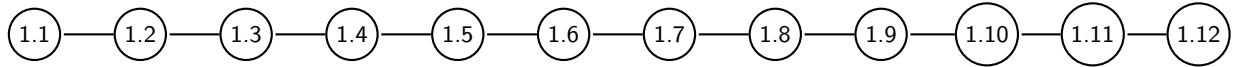
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 1.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano v_1, v_2, \dots, v_n è una matrice $A(G) = [a(i, j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1; 1) \longrightarrow (1; 2), \\ (1; 2) \longrightarrow (1; 1), (1; 3), \\ (1; 3) \longrightarrow (1; 2), (1; 4), \\ (1; 4) \longrightarrow (1; 3), (1; 5), \\ (1; 5) \longrightarrow (1; 4), (1; 6), \\ (1; 6) \longrightarrow (1; 5), (1; 7), \\ (1; 7) \longrightarrow (1; 6), (1; 8), \\ (1; 8) \longrightarrow (1; 7), (1; 9), \\ (1; 9) \longrightarrow (1; 8), (1; 10), \\ (1; 10) \longrightarrow (1; 9), (1; 11), \\ (1; 11) \longrightarrow (1; 10), (1; 12), \\ (1; 12) \longrightarrow (1; 11), \end{array} \right.$$



1.1. Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.

Definition 1.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n, k)$ il numero di k -sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_1^{(1)} \times P_1 2^{(1)}$.

Ecco alcuni valori

$T(n, k)$	$k = 0$	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2					
3	1	3	1				
4	1	4	3				
5	1	5	6	1			
6	1	6	10	4			
7	1	7	15	10	1		
8	1	8	21	20	5		
9	1	9	28	35	15	1	
10	1	10	36	56	35	6	
11	1	11	45	84	70	21	1
12	1	12	55	120	126	56	7

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
AD_n	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88
RS_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
K_n	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

1.2. Il problema.

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m, n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente

$$e \quad \bigcirc \quad u \quad \bigcirc$$

Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} e \longrightarrow e + u \\ u \longrightarrow e \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	u	e
u	0	1
e	1	1

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-2-x)}{(-1+x+x^2)} = 2 + 3x + 5x^2 + 8x^3 + 13x^4 + 21x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ⁽¹⁾

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
RS_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

1.3. Il nostro metodo.

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x . Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.

Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \dots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \dots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} E(x) = xE(x) + xU(x) + 1 \\ U(x) = xE(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.

In questo esempio lo stato iniziale è E . Quindi risolvendo in $E(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

$$E(x) = \frac{(-1-x)}{(-1+x+x^2)} = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 13x^5 + O(x^6)$$

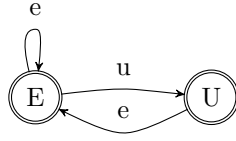
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

¹Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} E \rightarrow eE \mid uU \mid \lambda \\ U \rightarrow eE \mid \lambda \end{cases}$$



1.4. Ricorrenza Lineare.

In questo caso otteniamo la *ricorrenza locale* dal denominatore della funzione generatrice della somma delle righe:

$$F(x) = \frac{(-2-x)}{(-1+x+x^2)}.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
RS_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

$$RS_n = RS_{n-1} + RS_{n-2}$$

schema	1	0
	0	1
	0	*

$$T(n, k) = T(n-1, k) + T(n-2, k-1)$$

1.5. Antidiagonali.

$sigma =$	1	0
	0	1
	0	*

$$H_0 = 1, H_1 = 1 + x$$

$$V_0 = (1-x)^{-1}$$

1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
1	3	1	0	0	0
1	4	3	0	0	0
1	5	6	1	0	0