MARYLIN: LORO PROPRIETÀ.

O. M. D'ANTONA, P. CODARA

1. Memorandum

$$T_{n,k} = \sum_{i,j\geq 0} c_{i,j} T_{n-i,k-j}.$$

2. Proprietà moltiplicativa

Sia $\mathcal{M}$ una Marylin con schema $\begin{array}{|c|c|}\hline c_{1,1} & c_{1,0} \\ \hline c_{0,1} & T_{n,k} \\ \hline \end{array}$ e sia $\mathcal{L}$ la matrice ottenuta moltiplicando la k-esima colonna di $\mathcal{M}$ per k. Allora, per ogni $n, k \geq 1$, si ha

$$L_{n,k} = c_{1,0}L_{n-1,k} + c_{1,1}L_{n-1,k-1} + c_{0,1}L_{n,k-1} + c_{1,1}T_{n-1,k-1} + c_{0,1}T_{n,k-1} \tag{1}$$

Proof. . □

NOTA: $\mathcal{L}$ non è una Marylin. PROVA

$T_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	

$$T_{n,k} = T_{n-1,k-1} + T_{n-1,k}$$

$kT_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	0						
1	0	1					
2	0	2	2				
3	0	3	6	3			
4	0	4	12	12	4		
5	0	5	20	30	20	5	

Perfetto: la (1) recita

$$L_{n,k} = c_{1,0}L_{n-1,k} + c_{1,1}L_{n-1,k-1} + c_{0,1}L_{n,k-1} + c_{1,1}T_{n-1,k-1} + c_{0,1}T_{n,k-1},$$

Date: January 2, 2016.
Key words and phrases. Operazioni.tex.

ma ora $c_{1,0} = c_{1,1} = 1$ e $c_{0,1} = 0$. Quindi

$$L_{n,k} = L_{n-1,k} + L_{n-1,k-1} + T_{n,k-1}.$$

	0	1	2	3	4	5	6
$RS_n = 2^n$	1	2	4	8	16	32	
RS'_n	0	1	4	12	32	80	

$$RS'_n = nRS_{n-1} = n2^{n-1} \text{ per } n \geq 1.$$

Bello, ma è un caso particolare. In questo caso $\mathcal{L}$ fornisce il numero di lati del diagramma di Hasse dei k-sottoinsiemi di un n-insieme ordinati per inclusione. Si tratta di $\mathcal{B}_n$. La cosa generalizza alle potenze dei cammini [C,D'A].

Tentativo 2 $T_{n,k} = T_{n-1,k-1} + 2T_{n-1,k}$.

$T_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1						
1	1	1					
2	1	3	1				
3	1	7	5	1			
4	1	15	17	7	1		
5	1	31	49	31	9	1	
6	1	63	129				

Questa è la A007051: $RS_n = 3RS_{n-1} - 1 = (3^n + 1)/2$.

$kT_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	0						
1	0	1					
2	0	3	2				
3	0	7	10	3			
4	0	15	34	21	4		
5	0	31	98	93	36	5	
6	0	63	258				

	0	1	2	3	4	5	6
RS_n	1	2	5	14	41	122	
RS'_n	0	1	5	20	74	263	

La RS'_n non è su Sloane, ma mi accorgo che:

$$RS'_n = 3RS'_{n-1} + RS_{n-1} = 3RS'_{n-1} + \frac{3^{n-1}+1}{2} \ .$$

Ora chiudiamo la ricorrenza di RS'_n e, facilmente, otteniamo

$$RS'_n = \frac{(2n+3)3^{n-1} - 1}{4} \ .$$

Tentativo 3 $T_{n,k} = T_{n-1,k-1} + T_{n-1,k}$.

$T_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1						
1	2	1					
2	3	3	1				
3	4	6	4	1			
4	5	10	10	5	1		
5	6	15	20	15	6	1	
6	7	21	35	35			

A000225 shiftata. $RS_n = 2^{n+1} - 1$.

$kT_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	0						
1	0	1					
2	0	3	2				
3	0	6	8	3			
4	0	10	20	15	4		
5	0	15	40	45	24	5	
6	0	21	70				

	0	1	2	3	4	5	6
RS_n	1	3	7	15	31	63	
RS'_n	0	1	5	17	49	129	

A000337. $RS'_n = (n+1)2^n + 1$. Anche certe mappe da C_n ad alberi ... che non ricordo.

Bisogna studiare il passaggio da RS_n s RS'_n.

Tentativo 4 $T_{n,k} = 2T_{n-1,k-1} - T_{n-1,k}$

$T_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	
$n=0$	1									
1	2	2								
2	3	2	4							
3	4	4	0	8						
4	5	4	8	-8	16					
5	6	6	0	24	-32	32				
6	7	6	12	-24	80	-96	64			
7	8	8	0	48	-128	256	-256	128		
8	9	8	16	-48	224	-512	768	-640	256	
9	10	10	0	80	-320				-1536	512
10	10	10	20	-80	480					

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RS_n	1	4	9	16	25	36	49	64	81		
AD_n	1	2	5	6	13	10	29	6	69	-38	196

NOTA1. Da Cap3-1.tex vedo che, per $n \geq 1$, abbiamo la ricorrenza

$$RS_n = (\alpha + \beta)RS_{n-1} + m_{n,0} - \beta m_{n-1,0}.$$

Quindi $RS_n = RS_{n-1} + (n+1) + n = RS_{n-1} + 2n + 1$. Dunque - incredibile! -

$$RS_n = (n+1)^2.$$

Guardare anche le colonne (es. $k = 4$: $4 \times A002492 shift\ 8n(n+1)(2n+1)/3$).

NOTA2. Dalla $\quad D(x) = \dfrac{(1 - c_{0,1}x)H(x) + (1 - c_{1,0}x)V(x) - m_{0,0}}{1 - (c_{0,1} + c_{1,0})x - c_{1,1}x^2}$

ricavo che $\quad D(x) = \dfrac{(1+x)(1-x)^{-2}}{1 + x - 2x^2} = \dfrac{1+x}{1 - x - 3x^2 + 5x^3 - 2x^4}$.

Per $n \geq 4$, abbiamo la ricorrenza è: $d_n = d_{n-1} + 3d_{n-2} - 5d_{n-3} + 2d_{n-4}$. Bene - e se fosse così sarebbe pazzesco - $|AD|$ inizia come il valore assoluto della A232603 (shift). Infatti, almeno per $0 \leq n \leq 8$, ho verificato che

$$|AD|_n = \left| 2^n \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{(-2)^k} \right|.$$

Inoltre $\quad 27|AD|_n = |(-1)^n(9n^2 + 12n + 2) - 2^{n+1}|.$

$kT_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7
$n=0$	0							
1	0	2						
2	0	2	8					
3	0	4	0	24				
4	0	4	16	-24	64			
5	0	6	0	72	-128	160		
6	0	6	24	-72	320	-480	384	
7	0	8	0	144	-512	1280		
8	0	8	32	-144	896			

	0	1	2	3	4	5	6	
RS'_n	0	2	10	28	60	110	182	
AD_n	0	0	2	2	12	4	46	-18

Le antidiagonali non sono su Sloane, ma le somme sono la A006331:

$$RS_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\ .$$

Sorpresa: Questa è la A002492, la colonna $T_{n,4}$. Invece è ovvio che la diagonale principale sia $n2^n$ visto che prima era 2^n.

$$\frac{1}{1-2x}\ \to\ \frac{2x}{(1-2x)^2}\ .$$

E ancora: per la sottodiagonale della T vedere A241204.

2.1. $RS\ \to\ RS'$. Sopra abbiamo visto che con $H(x)=1, V(x)=(1-x)^{-1}$ e con $c_{0,1}=B$ abbiamo

$$RS_n = (B+1)^n\ \to\ RS'_n = Bn(B+1)^{n-1}.$$

Questo è quasi immediato. Poi abbiamo visto che con $H(x)=1, V(x)=(1-x)^{-2}$ e con $c_{0,1}=B=2$ abbiamo

$$RS_n = \frac{(B+1)^n+1}{2}\ \to\ RS'_n = \frac{(2n+3)Bn(B+1)^{n-1}+1}{4}\ .$$

Congettura: sotto queste ipotesi

$$RS_n = \frac{(B+1)^n+C}{D}\ \to\ RS'_n = \frac{(Bn+E)(B+1)^{n-1}+C'}{D'}\ .$$

3. Proprietà delle psuedo potenze

Sia $\mathcal{M}$ una Marylin con schema $\begin{array}{|c|c|}\hline c_{1,1} & c_{1,0}\\ \hline c_{0,1} & T_{n,k}\\ \hline\end{array}$ e sia $\mathcal{L}$ la matrice ottenuta moltiplicando la k-esima colonna di $\mathcal{M}$ per b^k. Allora ([1]), $\mathcal{L}$ è una Marylin con schema

[1]Anche questa dimostrazione è semplice, ma meno noiosa.

$bc_{1,1}$	$c_{1,0}$
$bc_{0,1}$	$T_{n,k}$

Inoltre $V^L(x) = V(x)$ e $H^L(x) = H(bx)$.

In un certo senso, la proprietà delle pseudopotenze (2X2X2X...X2) si generalizza a qualunque successione (aXbX...Xc).

Lo ho fatto per i fattoriali, ma non ricordo dove ... GGGRRR!!! Va rifatto.

3.1. **Delannoy con $b = 2$.**

$T_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1	1	1	1	1	1	
1	1	3	5	7	9	11	
2	1	5	13	25	41		
3	1	7	25	63			
4	1	9	41				
5	1	11					

1	1
1	$T_{n,k}$

$2^kT_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1	2	4	8	16	32	
1	1	6	20	56	144	192	
2	1	10	52	200			
3	1	14	100	504			
4	1	18	144				
5	1	22					

2	1
2	$T_{n,k}$

	0	1	2	3	4	5	6
AD_n	1	2	5	12	29	70	
AD'_n	1	3	11	39	139		

$$AD'_n = \mathbf{3}AD'_{n-1} + \mathbf{2}AD'_{n-2} \quad \text{NOTA: qui il } \mathbf{3} \text{ è } bc_{0,1} + c_{1,0} \text{ e il } \mathbf{2} \text{ è } bc_{1,1}.$$

$$\frac{1}{1-2x-x^2} \;\to\; \frac{1}{1-3x-2x^2}\,.$$

Ora ricordiamo che ...

Proposition 3.1.

The scheme $\tilde{\sigma} \doteq \begin{array}{|c|c|}\hline c_{1,1} & c_{1,0}+c_{0,1} \\ \hline 0 & * \\ \hline\end{array}$ *with* $\tilde{H}(x) = m_{0,0}$, *and*

$$\tilde{V}(x) = \frac{(1-c_{0,1}x)H(x) + (1-c_{1,0}x)V(x) - m_{0,0}}{1-(c_{0,1}+c_{1,0})x} \tag{2}$$

triangularizes σ, *the general* $(1,1)$*-scheme. That is to say that* $M_{\tilde{\sigma}}$ *is a lower triangular (infinite) matrix with* $\tilde{d}_n = d_n$ *for* $n = 0, 1, \ldots$

For these matrices we also have both the recurrence and the closed form of their *row sums*, written $\widetilde{RS}_n$. Indeed $RS_0 = m_{0,0}$, and

$$\widetilde{RS}_n = (c_{1,1} + c_{1,0} + c_{0,1})\widetilde{RS}_{n-1} + m_{n,0} - (c_{1,0} + c_{0,1})m_{n-1,0},$$

for $n \geq 1$. The closed form is

$$\widetilde{RS}_n = m_{n,0} + c_{1,1} \sum_{i=0}^{n-1} (c_{1,1} + c_{1,0} + c_{0,1})^{n-1-i} m_{n,i} \ .$$

Finally ...

Proposition 3.2.

$$\widetilde{RS}(x) = \frac{(1 - c_{0,1}x)H(x) + (1 - c_{1,0}x)V(x) - m_{0,0}}{1 - (c_{1,1} + c_{1,0} + c_{0,1})x} \ . \tag{3}$$

Quindi, la triangolarizzata isodiagonale , TI nel seguito, di $2^k T(n,k)$ è

$TI(2^kT_{n,k})$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1						
1	3	2					
2	9	12	4				
3	27	54	36	8			
4	81	216	...				

2	3
0	$T_{n,k}$

con $c_{0,1} = 2$, $H(x) = (1-2x)^{-1}$, $m_{0,0} = 1$, $c_{1,0} = 1$ e $V(x) =? = (1-x)^{-1}$.

$$\text{Quindi } \widetilde{RS}_n = \frac{(1-2x)(1-2x)^{-1} + (1-x)(1-x)^{-1} - 1}{1 - (2+2+1)x} = \frac{1}{1-5x} \ .$$

3.2. **Delannoy con $b = -1$.**

$T_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1	1	1	1	1	1	
1	1	3	5	7	9	11	
2	1	5	13	25	41		
3	1	7	25	63			
4	1	9	41				
5	1	11					

1	1
1	$T_{n,k}$

$(-1)^kT_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1	-1	1	-1	1	-1	
1	1	-3	5	-7	9	-11	
2	1	-5	13	-25	41		
3	1	-7	25	-63			
4	1	-9	41				
5	1	-11					

-1	1
-1	$T_{n,k}$

	0	1	2	3	4	5	6
AD_n	1	2	5	12	29	70	
AD'_n	1	0	-1	0	1	0	

Quindi, la TI di $(-1)^k T(n,k)$ è

$TI((-1)^k T_{n,k})$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1						
1	0	-1					
2	0	0	1				
3	0	0	0	-1			
4	0	0	0	0	1		

-1	0
0	$T_{n,k}$

con $c_{0,1} =? = 0$, $H(x) =? = 1$, $m_{0,0} = 1$, $c_{1,0} =? = 1$ e $V(x) =? = 1$.

$$\text{Quindi } \widetilde{RS}_n = \frac{(1 - 0 \cdot x) \cdot 1 + (1 - 0 \cdot x) \cdot 1 - 1}{1 - (-1 + 0 + 0)x} = \frac{1}{1 + x} .$$

$$AD'_n = 0 \cdot AD'_{n-1} - AD'_{n-2}; \qquad \frac{1}{1 - 2x - x^2} \rightarrow \frac{1}{1 + x^2} .$$

Nota: la proprietà dei determinanti ... vale ancora.

3.3. ALTRA PROVA. $\mathcal{M}$ con $H(x) = V(x) = (1-x)^{-1}$ e $b = 2$.

$T_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1	1	1	1	1	1	
1	1	4	7	10	13	16	
2	1	7	22	46	69		
3	1	10	46	136			
4	1	13	69				
5	1	16					

2	1
1	$T_{n,k}$

	0	1	2	3	4	5	6
AD_n	1	2	6	16	44	120	

$A(x) = (1 - 2x - 2x^2)^{-1}$.

$2^k T_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1	2	4	8	16	32	
1	1	8	28	80	208		
2	1	14	88	368			
3	1	20	184	1088			
4	1	26	276				
5	1	32					

4	1
2	$T_{n,k}$

	0	1	2	3	4	5	6
AD'_n	1	3	13	51	205		

$$AD'_n = \mathbf{3}AD'_{n-1} + \mathbf{4}AD'_{n-2}$$

$$A(x) = (1 - 3x - 4x^2)^{-1}.$$

4. Un'importante osservazione

Finora abbiamo trattato ricorrenze lineari, ma c'è - almeno - un importante caso *non lineare* in cui possiamo applicare (anche se parzialmente) la nostra teoria. Nello specifico, consideriamo la tabella generata dalla ricorrenza con schema

1	k
0	$S_{n,k}$

e condizioni al contorno $H(x) = V(x) = 1$. Eccola:

$S_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	

Abbiamo i numeri di Stirling di seconda specie:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

che, come si sa, sono univocamente individuati dalla relazione

$$x^n = \sum_{k\geq 0} S_{n,k}(x)_k.$$

Nel caso delle potenze abbiamo $s_n = 0$ e, per i decrescenti, $r_k = k - 1$. Quindi, come noto, il coefficiente di $S_{n-1,k}$, cioè $c_{1,0}$, è

$$r_{k+1} - s_n = k$$

mentre il coefficiente di $S_{n-1,k-1}$, cioè $c_{1,1}$, è 1. Se invece consideriamo la tabella generata dalla ricorrenza con schema

1	$-1+n$
0	$s_{n,k}$

e condizioni al contorno $H(x) = V(x) = 1$, ovvero:

$S_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1						
1	0	1					
2	0	-1	1				
3	0	2	-3	1			
4	0	-6	11	-6	1		
5	0	24	...				

Abbiamo i numeri di Stirling di prima specie:

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (1-n)S_{n-1,k}$$

che sono univocamente individuati dalla relazione

$$(x)_n = \sum_{k\geq 0} s_{n,k}x^k.$$

Ora abbiamo $s_n = n - 1$ e, $r_k = 0$. Ed ecco che $c_{1,0} = 0 - (n-1) = 1 - n$.
VEDERE LAH

5. Linearità

Sia $\mathcal{M}$ una Marylin con schema $\begin{array}{|c|c|}\hline c_{1,1} & c_{1,0} \\ \hline c_{0,1} & T_{n,k} \\ \hline\end{array}$ e sia $\mathcal{L} = a\mathcal{M}$.

Allora $\mathcal{L}$ è (banalmente) una Marylin con schema $\begin{array}{|c|c|}\hline c_{1,1} & c_{1,0} \\ \hline c_{0,1} & L_{n,k} \\ \hline\end{array}$ e

$H'(x) = aH(x)$ e $V'(x) = aV(x)$. Esempio: Delannoy con $a = 2$.

$L_{n,k}$	$k = 0$	1	2	3	4	5	6
$n = 0$	2	2	2	2	2	2	2
1	2	6	10	14	18	22	
2	2	10	26	50	82		
3	2	14	50	126			
4	2	18	82				
5	2	22					

$T_{n,k}$	$k = 0$	1	2	3	4	5	6
$n = 0$	1	1	1	1	1	1	1
1	1	3	5	7	9	11	
2	1	5	13	25	41		
3	1	7	25	63			
4	1	9	41				
5	1	11					

5.1. **L'operazione δ.** Data una Marylin $\mathcal{M}$, genero $\delta\mathcal{M}$ facendo la differenza prima di ogni sua riga:

$$\delta_{n,k} = T_{n,k} - T_{n,k-1}$$

per $k \geq 1$. Ecco l'esempio Delannoy.

$T_{n,k} - T_{n-1,k}$	$k = 0$	1	2	3	4	5	6
$n = 0$	1	0	0	0	0	0	0
1	1	2	2	2	2	2	
2	1	4	8	12	16		
3	1	6	18	38			
4	1	8	32				
5	1	10					

Come prevedibile, $\delta\mathcal{M}$ è ancora una Marylin, ma la cosa interessante è che si perde la simmetria.

	0	1	2	3	4	5	6
AD_n	1	2	5	12	29	70	169
AD'_n	1	1	3	7	17	41	99

Osservazioni: (1) la successione degli AD'_n ha la stessa ricorrenza degli AD_n; (2) la successione degli AD'_n è la A001333; (3) per $n \geq 2$,

$$AD'_n = AD_{n-1} + AD_{n-2}. \tag{4}$$

Provo con i binomiali:

BIN	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

δBIN	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$n=0$	1	-1	0	0	0	0	0		
1	1	0	-1	0					
2	1	1	-1	-1	0				
3	1	2	0	-2	-1	0			
4	1	3	2	-2	-3	-1	0		
5	1	4	5	0	-5	-4	-1	0	
6	1	5	9	5	-5	-9	-5	-1	0

Osservazioni: (1) la simmetria dei binomiali implica che le somme delle righe di δBIN siano tutte nulle; (2) per $n \geq 2$,

$$AD'_n = AD_{n-2}. \tag{5}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	2	3	5	8	13	21
AD'_n	1	0	1	1	2	3	5	8

NOTA. Le (4) e (5) sono diretta conseguenza della (facilmente dimostrabile)

$$AD'_n = AD_n - AD_{n-1}$$

per $n \geq 1$ e $AD'_0 = AD_0$.

6. Se funziona ...

Matrice con somma delle righe $RS_n = 4^n$ e schema

1	2
0	$G_{n,k}$

$G_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6		
$n=0$	1								
1	3	1							
2	10	5	1						
3	36	20	7	1					
4	136	76	34	9	1				
5	528	288	144	52	11	1			
6	2080	1104	576	248	74	13	1		
7	8256	4288	2256	1072	396	100	15	1	
8					1864	596	130	17	1

First column looks like A007582. Dunque $G_{n,0} = 2^{n-1}(1+2^n)$.
Inoltre $G_{n,n-2}$ è la A005893: $G_{n,n-2} = 2n^2 + 2$, per $n \geq 2$.

Le diagonali sono dei polinomi. Vediamo $G_{n,n-3}$.

$$\begin{array}{ccccc}
36 & 76 & 144 & 248 & 396 \\
40 & 68 & 104 & 148 & \\
28 & 36 & 44 & & \\
8 & 8 & & &
\end{array}$$

Dunque, per $n \geq 3$,

$$G_{n,n-3} = 36\binom{n-3}{0} + 40\binom{n-3}{1} + 28\binom{n-3}{2} + 8\binom{n-3}{3} = \cdots =$$

$$= \frac{4n^3 - 6n^2 + 14n + 12}{3}\ .$$

$$\begin{array}{ccccc}
136 & 288 & 576 & 1072 & 1864 \\
152 & 288 & 496 & 792 & \\
136 & 208 & 296 & & \\
72 & 88 & & & \\
16 & & & &
\end{array}$$

Dunque, per $n \geq 4$, $G_{n,n-4} =$

$$136\binom{n-4}{0} + 152\binom{n-4}{1} + 136\binom{n-4}{2} + 72\binom{n-4}{3} + 16\binom{n-4}{3}$$

$$\begin{array}{ccccc}
10 & 20 & 34 & 52 & 74 \\
10 & 14 & 18 & 22 & \\
4 & 4 & 4 & &
\end{array}$$

Dunque, per $n \geq 2$, $G_{n,n-2} =$

$$10\binom{n-2}{0} + 10\binom{n-2}{1} + 4\binom{n-2}{2}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
n=0 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 2 & & & & \\
2 & 10 & 10 & 4 & & & \\
3 & 36 & 40 & 28 & 8 & & \\
4 & 136 & 152 & 136 & 72 & 16 & \\
5 & 528 & 576 & 576 & 416 & 176 & 32
\end{array}$$

$D_{n,n-1} = n2^n + 2^{n-1}$

Moreover $40 = 3 \times 10 + 10$, $152 = 3 \times 40 + 36$

$28 = 2(10 + 4)$ $136 = 2(40 + 28)$ ... $D_{n,k} = 2(D_{n-1,k} + D_{n-1,k-1})$

That's weird: so far row sums are A079028: $(n + 4)4^{n-1}$. Next value is 2304.