ISA SOFTWARE V.1.3

1. Caso di studio : Grafo $P_2^{(1)} \times P_5^{(1)}$

Definition 1.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

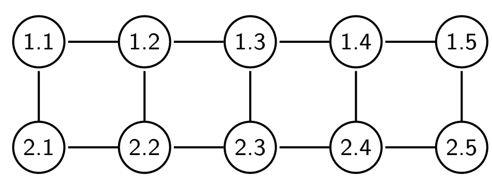
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 1.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\left\{ \begin{array}{lll} (1;1) & \longrightarrow & (2;1), (1;2), \\ (2;1) & \longrightarrow & (1;1), (2;2), \\ (1;2) & \longrightarrow & (1;1), (2;2), (1;3), \\ (2;2) & \longrightarrow & (2;1), (1;2), (2;3), \\ (1;3) & \longrightarrow & (1;2), (2;3), (1;4), \\ (2;3) & \longrightarrow & (2;2), (1;3), (2;4), \\ (1;4) & \longrightarrow & (1;3), (2;4), (1;5), \\ (2;4) & \longrightarrow & (2;3), (1;4), (2;5), \\ (1;5) & \longrightarrow & (1;4), (2;5), \\ (2;5) & \longrightarrow & (2;4), (1;5), \end{array} \right.$$



Date: January 14, 2016.
Key words and phrases. sample.tex.

1.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 1.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(1)} \times P_5^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	2						
2	1	4	2					
3	1	6	8	2				
4	1	8	18	12	2			
5	1	10	32	38	16	2		
6	1	12	50	88	66	20	2	
7	1	14	72	170	192	102	24	2

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

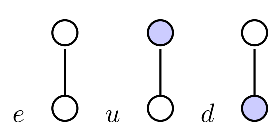
n	0	1	2	3	4	5	6	7
AD_n	1	1	3	5	9	17	31	57
RS_n	1	3	7	17	41	99	239	577
K_n	0	1	2	3	4	5	6	7

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

1.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} e \longrightarrow e+u+d \\ d \longrightarrow e+u \\ u \longrightarrow e+d \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	d	u	e
d	0	1	1
u	1	0	1
e	1	1	1

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-3-x)}{(-1+2x+x^2)} = 3 + 7x + 17x^2 + 41x^3 + 99x^4 + 239x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([1])

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	7	17	41	99	239	577

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

1.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} E(x) = xE(x) + xU(x) + xD(x) + 1 \\ D(x) = xE(x) + xU(x) + 1 \\ U(x) = xE(x) + xD(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è E. Quindi risolvendo in $E(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

$$E(x) = \frac{(-1-x)}{(-1+2x+x^2)} = 1 + 3x + 7x^2 + 17x^3 + 41x^4 + 99x^5 + O(x^6)$$

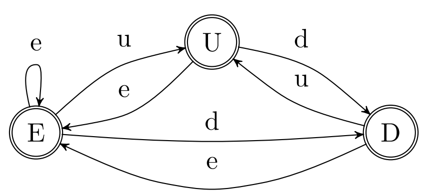
[1] Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} E \to eE \mid uU \mid dD \mid \lambda \\ D \to eE \mid uU \mid \lambda \\ U \to eE \mid dD \mid \lambda \end{cases}$$



1.4. **Ricorrenza Lineare.**

In questo caso otteniamo la *ricorrenza locale* dal denominatore della funzione generatrice della somma delle righe:

$$F(x) = \frac{(-3 - x)}{(-1 + 2x + x^2)} \ .$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
RS_n	1	3	7	17	41	99	239	577

$$RS_n = 2RS_{n-1} + RS_{n-2}$$

schema

1	0
1	1
0	$*$

$$T(n, k) = T(n-1, k) + T(n-1, k-1) + T(n-2, k-1)$$

1.5. **Antidiagonali.**

$$sigma = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$$

$$H_0 = 1, H_1 = 1 + 2x$$

$$V_0 = (1 - x)^-1$$

1	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
1	4	2	0	0	0
1	6	8	2	0	0
1	8	18	12	2	0
1	10	32	38	16	2