ISA SOFTWARE V.1.3

1. Caso di studio : Grafo $P_3^{(1)} \times P_3^{(1)}$

Definition 1.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

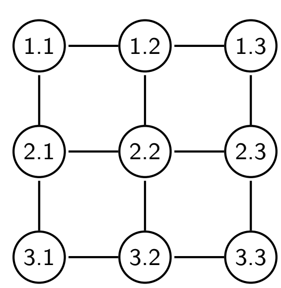
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 1.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases} (1;1) \longrightarrow & (2;1), (1;2), \\ (2;1) \longrightarrow & (1;1), (3;1), (2;2), \\ (3;1) \longrightarrow & (2;1), (3;2), \\ (1;2) \longrightarrow & (1;1), (2;2), (1;3), \\ (2;2) \longrightarrow & (2;1), (1;2), (3;2), (2;3), \\ (3;2) \longrightarrow & (3;1), (2;2), (3;3), \\ (1;3) \longrightarrow & (1;2), (2;3), \\ (2;3) \longrightarrow & (2;2), (1;3), (3;3), \\ (3;3) \longrightarrow & (3;2), (2;3), \end{cases}$$



Date: January 14, 2016.
Key words and phrases. sample.tex.

1.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 1.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_3^{(1)} \times P_3^{(1)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	3	1				
2	1	6	8	2			
3	1	9	24	22	6	1	
4	1	12	49	84	61	18	2

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

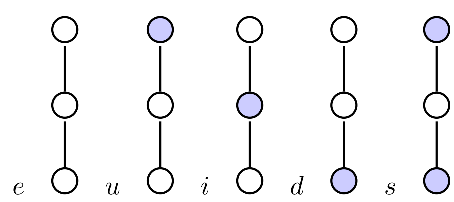
n	0	1	2	3	4
AD_n	1	1	4	8	18
RS_n	1	5	17	63	227
K_n	0	2	3	5	6

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

1.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} e \longrightarrow \ e+u+i+d+s \\ d \longrightarrow \ e+u+i \\ u \longrightarrow \ e+i+d \\ s \longrightarrow \ e+i \\ i \longrightarrow \ e+u+d+s \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	d	u	e	s	i
d	0	1	1	0	1
u	1	0	1	0	1
e	1	1	1	1	1
s	0	0	1	0	1
i	1	1	1	1	0

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(5 + 7x - x^2 - x^3)}{(1 - 2x - 6x^2 + x^4)} = 5 + 17x + 63x^2 + 227x^3 + 827x^4 + 2999x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([1])

n	0	1	2	3	4
RS_n	1	5	17	63	227

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

1.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.
Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} E(x) = xE(x) + xU(x) + xI(x) + xD(x) + xS(x) + 1 \\ D(x) = xE(x) + xU(x) + xI(x) + 1 \\ U(x) = xE(x) + xI(x) + xD(x) + 1 \\ S(x) = xE(x) + xI(x) + 1 \\ I(x) = xE(x) + xU(x) + xD(x) + xS(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.

[1]Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

In questo esempio lo stato iniziale è E. Quindi risolvendo in $E(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

$$E(x) = \frac{(1+3x+x^2-x^3)}{(1-2x-6x^2+x^4)} = 1+5x+17x^2+63x^3+227x^4+827x^5+O(x^6)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	5	17	63	227	827	2999	10897	39561	143677

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} E \to eE \mid uU \mid iI \mid dD \mid sS \mid \lambda \\ D \to eE \mid uU \mid iI \mid \lambda \\ U \to eE \mid iI \mid dD \mid \lambda \\ S \to eE \mid iI \mid \lambda \\ I \to eE \mid uU \mid dD \mid sS \mid \lambda \end{cases}$$