ISA SOFTWARE V.1.3

1. Caso di studio : Grafo $P_2^{(2)} \times P_5^{(2)}$

Definition 1.1. Un grafo (non orientato e finito) è una coppia ordinata (V, E) dove V è un insieme finito ed E è un multiinsieme di coppie non ordinate di elementi di V. L'insieme V contiene i vertici del grafo ed E i suoi lati. Per un generico grafo G, l'insieme dei suoi vertici è indicato con $V(G)$ e quello dei suoi lati con $E(G)$.

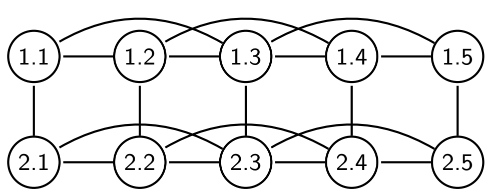
La struttura dati con la quale si è scelto di memorizzare il grafo è la matrice di adicenza.

Definition 1.2. La matrice di adiacenza di un grafo G i cui vertici siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una matrice $A(G) = [a(i,j)]$ simmetrica di ordine $n \times n$ in cui si pone:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito viene mostrata invece la lista di adiacenza che permette una più facile lettura delle adiacenze:

$$\begin{cases}
(1;1) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(1;3), \\
(2;1) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(2;3), \\
(1;2) \longrightarrow & (1;1),(2;2),(1;3),(1;4), \\
(2;2) \longrightarrow & (2;1),(1;2),(2;3),(2;4), \\
(1;3) \longrightarrow & (1;1),(1;2),(2;3),(1;4),(1;5), \\
(2;3) \longrightarrow & (2;1),(2;2),(1;3),(2;4),(2;5), \\
(1;4) \longrightarrow & (1;2),(1;3),(2;4),(1;5), \\
(2;4) \longrightarrow & (2;2),(2;3),(1;4),(2;5), \\
(1;5) \longrightarrow & (1;3),(1;4),(2;5), \\
(2;5) \longrightarrow & (2;3),(2;4),(1;5),
\end{cases}$$



Date: January 14, 2016.
Key words and phrases. sample.tex.

1.1. **Calcolo insiemi indipendenti con metodo forza bruta.**

Definition 1.3. Un insieme indipendente di un grafo è un insieme di vertici non adiacenti del grafo.

Definiamo $T(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi indipendenti di Grafo $P_2^{(2)} \times P_5^{(2)}$
.
Ecco alcuni valori

$T(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4
0	1				
1	1	2			
2	1	4	2		
3	1	6	6		
4	1	8	14	4	
5	1	10	26	18	2

Seguono le successioni delle antidiagonali, della somma delle righe e dei valori massimali di k per cui esistono insiemi indipendenti:

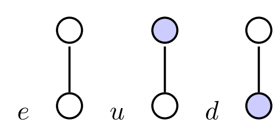
n	0	1	2	3	4	5
AD_n	1	1	3	5	9	15
RS_n	1	3	7	13	27	57
K_n	0	1	2	2	3	4

Ricerca delle bijezioni disabilitata per questa stampa.

1.2. **Il problema.**

Nel loro lavoro [Wilf], Wilf e Calkin basano la ricerca del numero di insiemi indipendenti di una supergriglia, $SG(m,n)$, sul concetto di *matrice di trasferimento*, TM nel seguito.

Il procedimento per costruire l'automa associato a questa supergriglia è il seguente



Il sistema ottenuto dai possibili proseguimenti (di un passo) è il seguente:

$$\begin{cases} ee \longrightarrow\ e+u+d \\ ud \longrightarrow\ e \\ ed \longrightarrow\ e+u \\ de \longrightarrow\ e+u \\ du \longrightarrow\ e \\ eu \longrightarrow\ e+d \\ ue \longrightarrow\ e+d \end{cases}$$

Riscriviamo lo schema con stringhe tutte di lunghezza h (la potenza del cammino orizzontale):

$$\begin{cases} ee \longrightarrow & ee + eu + ed \\ ud \longrightarrow & de \\ ed \longrightarrow & de + du \\ de \longrightarrow & ee + eu \\ du \longrightarrow & ue \\ eu \longrightarrow & ue + ud \\ ue \longrightarrow & ee + ed \end{cases}$$

Un risultato di algebra lineare afferma che la somma degli elementi della matrice $(I - xTM)^{-1}$ è la funzione generatrice degli insiemi indipendenti. La matrice TM di questo esempio è

TM	ud	ed	de	du	eu	ee	ue
ud	0	0	1	0	0	0	0
ed	0	0	1	1	0	0	0
de	0	0	0	0	1	1	0
du	0	0	0	0	0	0	1
eu	1	0	0	0	0	0	1
ee	0	1	0	0	1	1	0
ue	0	1	0	0	0	1	0

La funzione generatrice è

$$F(x) = \frac{(-7 - 6x - 7x^2 - 3x^3)}{(-1 + x + x^2 + 2x^3 + x^4)} = 7 + 13x + 27x^2 + 57x^3 + 117x^4 + 241x^5 + O(x^6)$$

Dalla espansione in serie della fgo otteniamo i valori di RS_n ([1])

n	0	1	2	3	4	5
RS_n	1	3	7	13	27	57

Il coefficiente di x^n nell'espansione in serie di questa funzione è il numero totale di insiemi indipendenti, dove n è il numero di colonne del grafo considerato.

1.3. **Il nostro metodo.**

Adesso costruiamo il sistema lineare in cui le variabili sono funzioni generatrici nell'indeterminata x. Avremo tante variabili ed equazioni quante sono le stringhe legali.

Alla generica linea dello schema

$$ab \longrightarrow cd + \cdots + ef$$

associamo la equazione

$$AB(x) = xCD(x) + \cdots + xEF(x) + 1$$

[1]Ricordiamo che il metodo di Wilf non considera il grafo vuoto

In questo caso abbiamo il seguente schema

$$\begin{cases} EE(x) = xEE(x) + xEU(x) + xED(x) + 1 \\ UD(x) = xDE(x) + 1 \\ ED(x) = xDE(x) + xDU(x) + 1 \\ DE(x) = xEE(x) + xEU(x) + 1 \\ DU(x) = xUE(x) + 1 \\ EU(x) = xUE(x) + xUD(x) + 1 \\ UE(x) = xEE(x) + xED(x) + 1 \end{cases}$$

L'automa che stiamo generando avrà uno stato per ogni stringa legale del linguaggio. Tutti gli stati sono finali. Ognuna delle nostre variabili è la funzione generatrice del linguaggio riconosciuto dall'automa a partire dallo stato corrispondente alla variabile.
In questo esempio lo stato iniziale è EE. Quindi risolvendo in $EE(x)$ si ottiene il linguaggio accettato dall'automa.

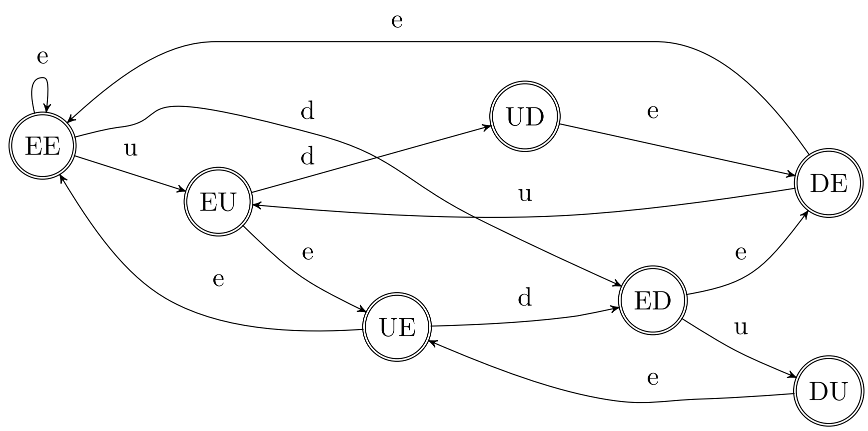
$$EE(x) = \frac{(-1 - 2x - 3x^2 - x^3)}{(-1 + x + x^2 + 2x^3 + x^4)} = 1 + 3x + 7x^2 + 13x^3 + 27x^4 + 57x^5 + O(x^6)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RS_n	1	3	7	13	27	57	117	241	499	1031

abbiamo che il coefficiente di x^t è il numero di insiemi indipendenti del grafo costituito dalle prime t barrette verticali.

Il software costruisce il sistema e genera l'automa

$$\begin{cases} EE \to eEE \mid uEU \mid dED \mid \lambda \\ UD \to eDE \mid \lambda \\ ED \to eDE \mid uDU \mid \lambda \\ DE \to eEE \mid uEU \mid \lambda \\ DU \to eUE \mid \lambda \\ EU \to eUE \mid dUD \mid \lambda \\ UE \to eEE \mid dED \mid \lambda \end{cases}$$


EE
EU
UD
UE
ED
DE
DU
e
u
d
e
u
d
e
e
d
e
u
e