Piano Lauree Scientifiche

In collaborazione con MIUR, con.Scienze, Confindustria

La dinamica del moto browniano

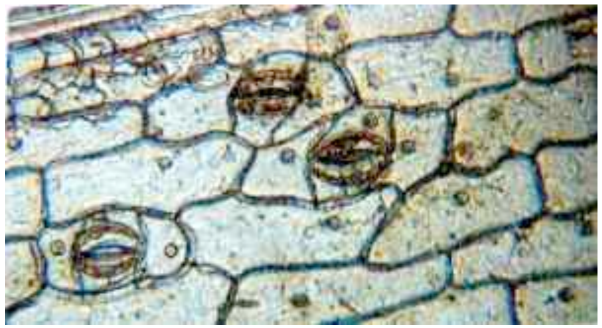
Giorgio Pastore (pastore@ts.infn.it)
Maria Peressi (peressi@ts.infn.it)
Enrico Smargiassi (enrico.smargiassi@ts.infn.it)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

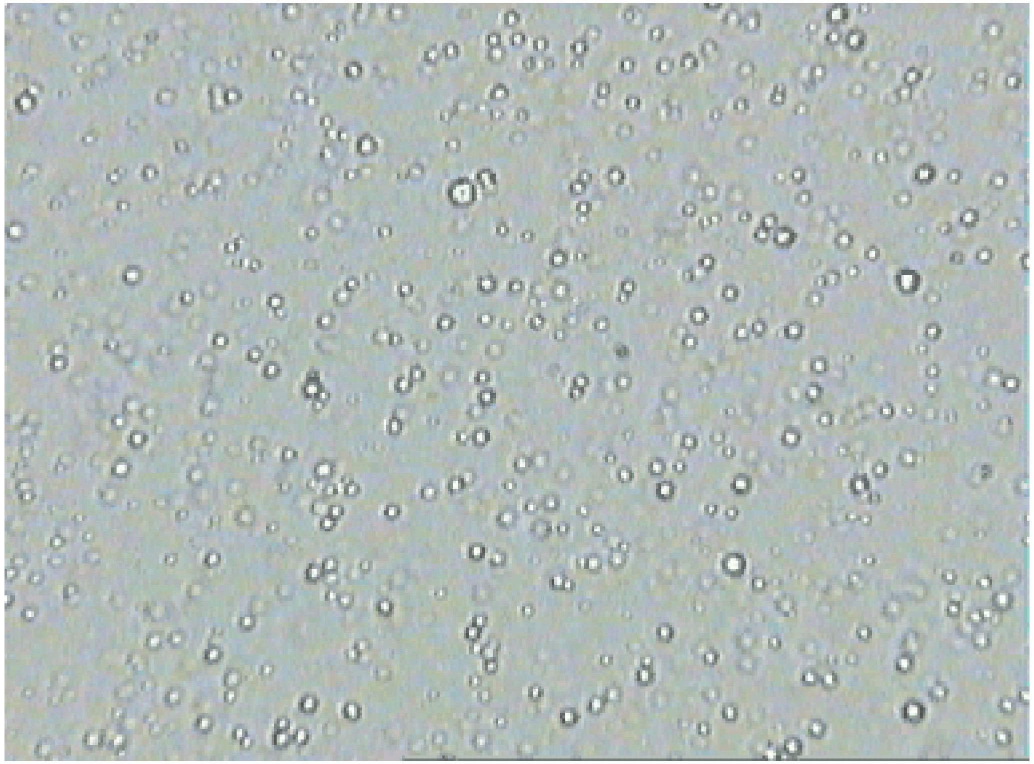
5 febbraio 2013

Le ricerche di Robert Brown

(1773-1858)



Cosa e' il moto browniano



Cosa e' il moto browniano

Remarks on Active Molecules (1827)

"… extremely minute particles of solid matter, whether obtained from organic or inorganic substances, when suspended in pure water, or in some other aqueous fluids, exhibit motions for which I am unable to account, and which from their irregularity and seeming independence resemble in a remarkable degree the less rapid motions of some of the simplest animalcules of infusions."

…

"These causes of motion (evaporation, currents), however, either singly or combined with others, -- as, the attractions and repulsions among the particles themselves, their unstable equilibrium in the fluid in which they are suspended, their hygrometrical or capillary action, and in some cases the disengagement of volatile matter, or of minute air bubbles, -- have been considered by several writers as sufficiently accounting for the appearances. … the insufficiency of the most important of those enumerated, may, I think, be satisfactorily shown by means of a very simple experiment.

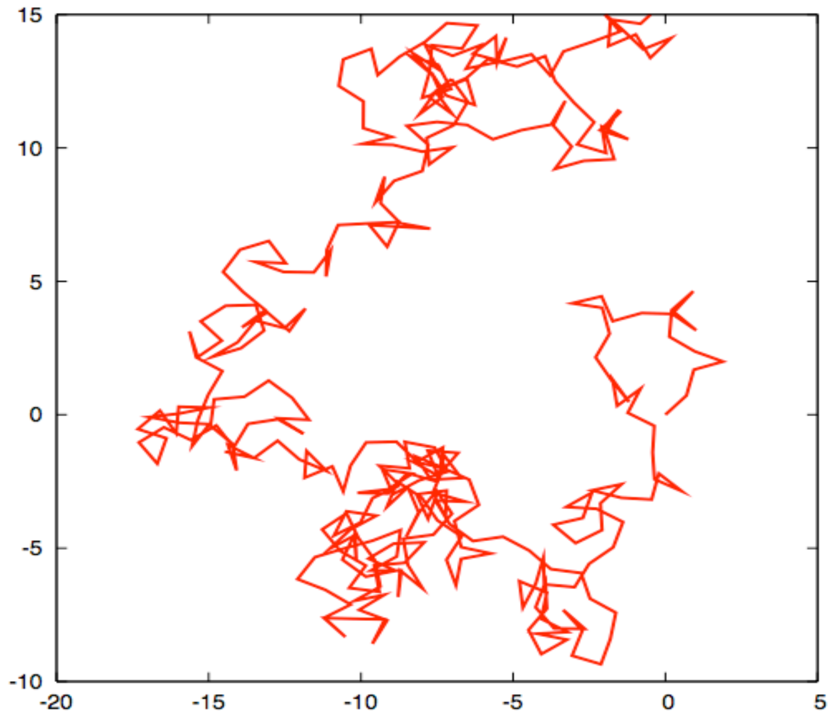
La teoria cinetica dei gas

$$P\,V = N\,m\,v^2/3 = n\,R\,T$$

$$K = m\,v^2/2 = 3\,R\,T / 2\,N_A$$

Ma se proviamo a misurare v dalla traiettoria osservata al microscopio abbiamo problemi…

Qual e' la velocita' ?



" Quello che questo studio suggerisce all' osservatore senza pregiudizi e' una funzione senza derivata e non una curva dotata di tangente." *(Jean Perrin, 1913)*

Albert Einstein e il suo “annus mirabilis” (1905)

- Effetto fotoelettrico

  (“Su un punto di vista euristico riguardo la produzione e trasformazione della luce”)

- Moto browniano

  (“Sul moto richiesto dalla teoria cinetica degli atomi a piccole particelle sospese in un liquido”)

- Teoria della relativita’ ristretta

- (“Sull’ elettrodinamica dei mezzi in movimento”)

Teoria del moto browniano: la strada di Einstein

"In questo lavoro si mostrera' che in accordo con la teoria molecolare-cinetica del calore, corpi di dimensioni visibili al microscopio sospesi in un liquido eseguiranno movimenti di ampiezza tale da poter essere facilmente osservati al microscopio, a causa dei moto molecolari dovuti al calore.

E' possibile che i moti che qui discuteremo siano identici al cosiddetto "moto molecolare Browniano"; tuttavia, le informazioni a me disponibili su questo mancano tanto in precisione che non posso formulare giudizi a riguardo."

Teoria del moto browniano: la strada di Einstein

“Se il movimento qui discusso potra’ essere realmente osservato (insieme alle proprieta’ che ci si aspetta di trovare), allora la termodinamica classica non potra’ piu’ essere considerata applicabile con precisione a corpi microscopici: diverra’ possibile determinare esattamente le vere dimensioni degli atomi. D’ altra parte, se si provera’ che le predizioni di questo movimento saranno sbagliate, questo sara’ un pesante argomento contro la concezione molecolare-cinetica del calore.”

Teoria del moto browniano: la strada di Einstein

- Analisi della diffusione di una particella in un fluido
- Analisi della distribuzione di probabilita' degli spostamenti e come questa dipende dal coefficiente di diffusione
- Formula che lega il rapporto $R/N_{A,}$(R costante dei gas), il coefficiente di diffusione D, la viscosità del solvente η, la temperatura T e il raggio molecolare P:

$$D = \frac{RT}{N_A} \frac{1}{6\pi\eta P}$$

Teoria del moto browniano: la strada di Langevin

“ Sono stato in grado di determinare … che e’ facile dare una dimostrazione infinitamente piu’ semplice mediante un metodo completamente diverso.”

Equazione di Langevin:

$$ma = F = -\gamma v + F_s$$

Urto elastico (1D)

Vediamo come si puo’ giustificare l’ equazione di Langevin. Analizziamo un urto in una dimensione tra una particella leggera di massa m e velocita v ed una pesante di massa M e vecocita’ V applicando le conservazioni di quantita’ di moto ed energia:

$$MV + mv = MV' + mv'$$

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2$$

Urto elastico (1D)

$$M(V - V') = m(v' - v)$$

$$M(V^2 - V'^2) = m(v'^2 - v^2)$$

$$M(V - V')(V + V') = m(v' - v)(v' + v)$$

da cui

$$V + V' = v' + v$$

arrivando al sistema

$$MV' + mv' = MV + mv$$

$$V' = v - V + v'$$

Urto elastico (1D)

$$v' = \frac{m-M}{m+M}v + \frac{2M}{m+M}V$$

$$V' = \frac{2m}{M+m}v + \frac{M-m}{M+m}V$$

Per m<<M

$$\frac{m}{M+m} \simeq \frac{m}{M}$$

$$\frac{M}{M+m} = \frac{M+m-m}{M+m} = 1 - \frac{m}{M+m} \simeq 1 - \frac{m}{M}$$

$$\frac{M-m}{M+m} = \frac{M+m-2m}{M+m} = 1 - \frac{2m}{M+m} \simeq 1 - \frac{2m}{M}$$

Urto elastico (1D)

$$V' \simeq \frac{2m}{M}v + \left(1 - \frac{2m}{M}\right)V$$

$$\Delta V = V' - V \simeq \frac{2m}{M}v - \frac{2m}{M}V$$

N collisioni in un tempo Δt

$$M\,\Delta V = 2m(v_0 + v_1 + ... + v_{N-1}) - 2m(V_0 + V_1 + ... + V_{N-1})$$

$$V_i \simeq V$$

$$N = n\Delta t$$

$$2mNV = 2mn\Delta t V(t)$$

$$M\,\Delta V = 2m(v_0 + v_1 + ... + v_{N-1}) - 2mn\Delta t V(t)$$

$$Ma = M\,\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{2m(v_0 + v_1 + ... + v_{N-1})}{\Delta t} - 2mnV(t)$$

N collisioni

$$Ma = F_s - \gamma V(t)$$

$$\gamma = 2mn$$

$$F_s = \frac{2m(v_0 + v_1 + ... + v_{N-1})}{\Delta t}$$

Forza stocastica e attrito hanno la stessa origine!

Un algoritmo per il moto browniano

$$V_{q+1} = V_q - \gamma V_q \frac{\Delta t}{M} + \Delta V_s$$

1 collisione

$$\Delta V_s = \frac{2mv}{M} = \frac{2}{M}\frac{v}{|v\ |}\sqrt{m^2v^2} = \frac{2}{M}\frac{v}{|v\ |}\sqrt{m^2v^2} =$$

$$= \frac{2}{M}\frac{v}{|v\ |}\sqrt{mkT} = \frac{1}{M}\frac{v}{|v\ |}\sqrt{\frac{2\gamma kT}{n}}$$

Si e' fatto uso dell' equipartizione per scrivere $mv^2=kT$

Un algoritmo per il moto browniano

$$\Delta V_N = w_q \frac{1}{M}\sqrt{2\gamma kT\Delta t}$$

W_q rappresenta un numero casuale estratto da una distribuzione gaussiana di media 0 e ampiezza (varianza) 1.

$$V_{q+1} = V_q - \frac{\gamma V_q}{M}\Delta t + w_q\frac{\sqrt{2\gamma kT\Delta t}}{M} + \frac{F_{ext}}{M}\Delta t$$

$$X_{q+1} = X_q + V_{q+1}\Delta t$$

Possiamo adesso risolvere le equazioni del moto sul computer per scoprire - verificare la relazione di Einstein

$$\langle R^2 \rangle = \frac{2dkT}{\gamma} t$$

d : n. dimensioni spaziali
R^2= quadrato della distanza dalla posizione iniziale, al tempo t