Corso di Fisica Quantistica

Dip.to di Fisica, Università di Pavia

Esercizi sull'effetto fotoelettrico e sull'effetto Compton:

9 febbraio 2018

Lucio Claudio Andreani

Web: http://fisica.unipv.it/dida/corso-fisica-quantistica.htm

Eventuali errori possono essere segnalati a lucio.andreani@unipv.it Grazie!

Bibliografia

[CF] A. Caforio, A. Ferilli, *Fisica!* Le Monnier Scuola

[HRK] D. Halliday, R. Resnick, K.S. Krane, *Fisica 2*, Casa Editrice Ambrosiana

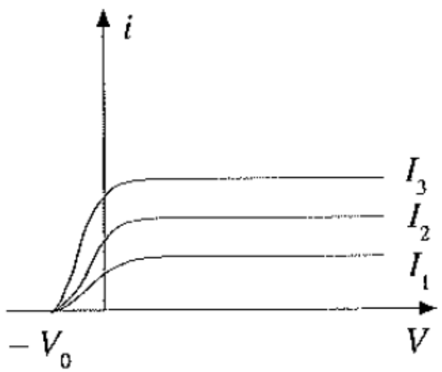
[MNV] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci: *Fisica – Vol II* , EdiSES

Formule utili

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}, \quad p = \frac{h}{\lambda}, \quad h = 6.626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

Quanti di luce o fotoni
(ipotesi di Einstein)

$$f > f_{\min} = \frac{W_e}{h}$$

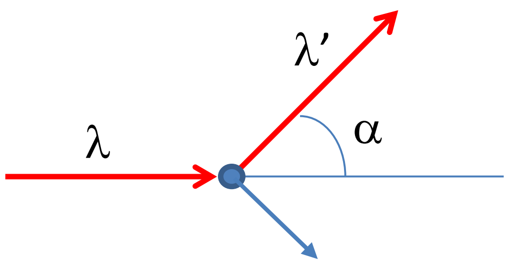


Effetto fotoelettrico:
Frequenza di soglia,
lavoro di estrazione

$$E_{\mathrm{kin,max}} = hf - W_{\mathrm{e}}$$
$$= h(f - f_{\min}) \equiv eV_0$$

Energia cinetica massima
e potenziale di arresto

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_{\mathrm{e}} c}(1 - \cos\alpha)$$



Effetto Compton

$$1\ \mathrm{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

Definizione
dell'elettronvolt

MNV esempio 18.4

La lunghezza d'onda massima per l'estrazione di fotoelettroni da una data superficie metallica è λ_{max}=480 nm. (a) Determinare il lavoro di estrazione del metallo. (b) Se viene utilizzata una radiazione con λ=300 nm, qual è il potenziale di arresto V_0?

Materiale	W_e (eV)
Argento	4.8
Cesio	1.8
Cromo	4.6
Litio	2.1
Nickel	4.6
Platino	5.3
Potassio	2.2
Sodio	1.8
Tantalio	4.2
Tungsteno	4.5

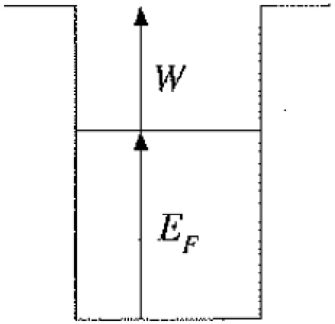
Soluzione: (a) Il lavoro di estrazione del metallo è

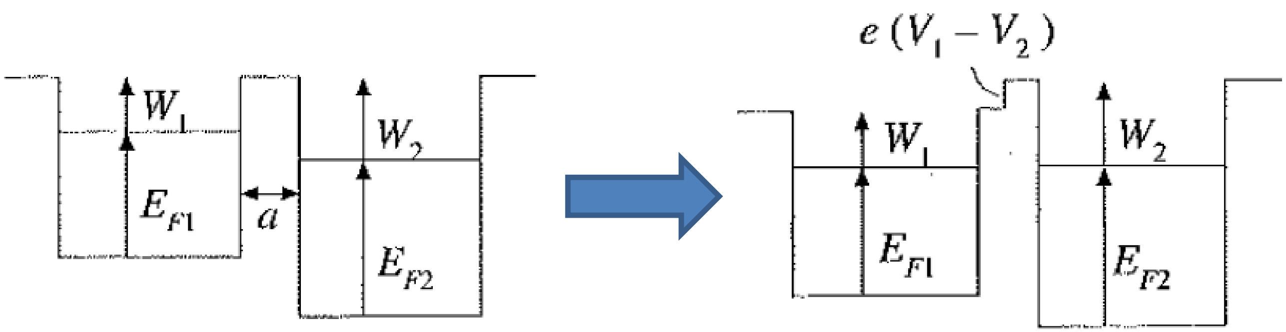
$$W = \frac{hc}{\lambda_{\text{max}}} = 4.14 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 2.59\ \text{eV}.$$

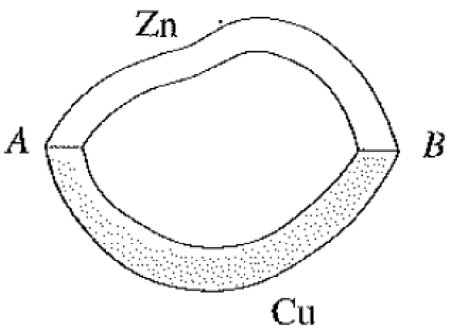
(b) Usando radiazione con λ=300 nm l'energia dei fotoni $E=hc/\lambda$=$6.6\cdot10^{-19}$ J=4.14 eV. Pertanto la massima energia dei fotoelettroni estratti è pari a $E-W$=1.55 eV e il potenziale di arresto è V_0=1.55 V.

Lavoro di estrazione e effetto Volta

Il lavoro di estrazione *W* dell'effetto fotoelettrico è una proprietà del metallo, detta funzione lavoro (*work function*). Esso rappresenta l'energia necessaria per estrarre un elettrone dal massimo livello occupato, detto *livello di Fermi*. Gli elettroni nel metallo si trovano in una *buca di potenziale*.







Fra due metalli diversi posti a contatto si stabilisce una differenza di potenziale ΔV, tale che $e\Delta V=W_1-W_2$ è pari alla differenza fra le due funzioni lavoro. Questo è l'*effetto Volta*, scoperto da Alessandro Volta a Pavia nel 1796.

Se i due metalli vengono posti in una soluzione elettrolitica si ottiene la *pila di Volta* e la produzione di una corrente elettrica.

MNV esempio 18.5

Un fascio luminoso con λ=500 nm ha intensità I=10^{-6} W/cm^2: esso incide su una superficie di cesio avente un'area Σ=20 cm^2. (a) Sapendo che il lavoro di estrazione del cesio è W_e=1.8 eV, calcolare l'energia cinetica massima degli elettroni emessi. (b) Supponendo che l'efficienza del processo di emissione sia 0.12 (efficienza quantica) calcolare la massima corrente ottenibile.

Soluzione: (a) Poiché ogni fotone ha un'energia $E=hc/\lambda=4\cdot10^{-19}$ J=2.5 eV, l'energia cinetica massima è data da

$$E_{\mathrm{max}} = \frac{hc}{\lambda} - W_{\mathrm{e}} = (2.5-1.8)\ \mathrm{eV} = 0.7\ \mathrm{eV}.$$

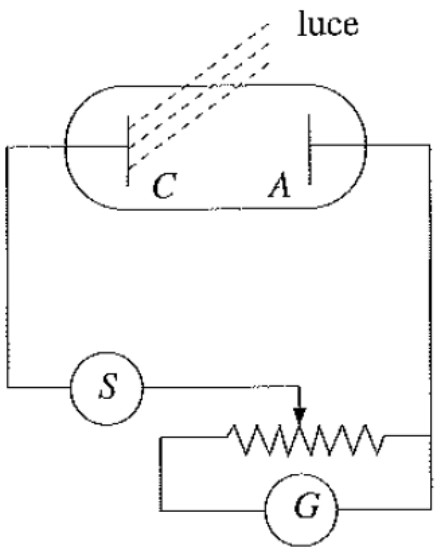
(b) Il numero ϕ di fotoni che incidono sul metallo per unità di tempo è dato da

$$\phi = \frac{I\Sigma}{E} = \frac{2\cdot10^{-5}\ \mathrm{W}}{4\cdot10^{-19}\ \mathrm{J}} = 5\cdot10^{13}\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

Quindi la corrente massima è $I_{max}=0.12\cdot e\cdot\phi=9.6\cdot10^{-7}$ A=0.96 μA.

MNV esempio 18.6

Inviando un fascio di luce di intensità I=0.1 W/m^2 e lunghezza d'onda 0.396 μm su un catodo di potassio (W_e=2.2 eV), si osserva che l'anodo inizia a raccogliere elettroni dopo un tempo Δt=175 ns; la distanza fra catodo e anodo è d=10 cm. (a) Verificare che il risultato per l'intervallo temporale è in accordo con la teoria di Einstein. (b) Assumendo che il raggio di un atomo di potassio sia $r=2\cdot10^{-10}$ m=2A, stimare il tempo di estrazione di un elettrone nella teoria classica (ossia il tempo in cui incide sull'atomo una energia pari al lavoro di estrazione).



Soluzione: (a) Poiché ogni fotone ha un'energia $E=hc/\lambda=5.02\cdot10^{-19}$ J=3.14 eV, l'energia cinetica massima è data da E_{kin}=(3.14-2.2) eV=0.96 eV, da cui la velocità massima dei fotoelettroni è $v=(2E_{kin}/m_e)^{1/2}=5.8\cdot10^5$ m/s. La velocità risulta <<c, quindi non sono necessarie correzioni relativistiche. Il tempo di transito è $\Delta t=d/v$=172 ns ed è in accordo con il valore sperimentale.

(b) Modellizzando un atomo come un disco di area $\Sigma=\pi r^2$, il tempo classico di estrazione è dato dalla condizione $I\Sigma\tau=W_e$, da cui $\tau=W_e/(I\cdot\pi r^2)$=28 s. Si tratta di un tempo lunghissimo! La teoria classica è in completo disaccordo con l'esperimento.

Simulazione prova maturità di fisica del 11/11/2016, quesito 5:

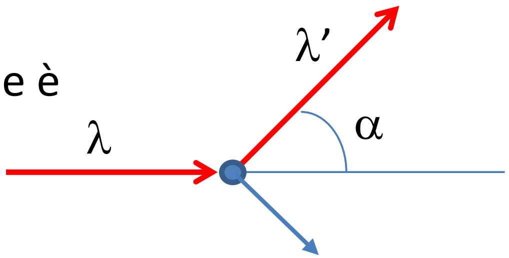
Vedi web http://fisica.unipv.it/dida/maturita.htm

Problema analogo sul Caforio-Ferilli, unità 3, esempio 4

***Quesito 5**: Un raggio X di energia 20 keV subisce la diffusione Compton da parte di un elettrone praticamente libero e in quiete. Calcola:*

1. la lunghezza d'onda del raggio x incidente e quella del raggio x diffuso a un angolo di 90°;

2. l'energia finale del raggio x e l'energia cinetica dell'elettrone dopo l'urto.



E' un problema standard sull'effetto Compton: la legge generale è

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\alpha)$$

dove $\lambda_C = \dfrac{h}{m_e c} = 2.43\,\mathrm{pm}$ è la lunghezza d'onda Compton (m_e=0.91·10^{-30} kg).

Lunghezza d'onda dei raggi X incidenti: $\lambda = \dfrac{hc}{E} = 62{,}05\,\mathrm{pm}.$

Lunghezza d'onda dei raggi X diffusi a 90°: $\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_e c} = 64{,}47\,\mathrm{pm}.$

Energia dei raggi X diffusi: $E' = \dfrac{hc}{\lambda'} = 19{,}25\,\mathrm{keV}.$

Energia cinetica dell'elettrone dopo l'urto: $E_{\mathrm{kin}} = E - E' = 750\ \mathrm{eV}.$

Una misura della costante di Planck: simulazione prova maturità di fisica del 11/11/2016, no. 4 prob. 2,

vedi web http://fisica.unipv.it/dida/maturita.htm

L'interesse di questo problema è di fare l'analisi di un esperimento di laboratorio mediante fit dei dati. Si tratta dell'esperimento con cui Millikan (1916) ha verificato l'interpretazione di Einstein dell'*effetto fotoelettrico*. L'apparato è simile a quello di Lenard (1902).

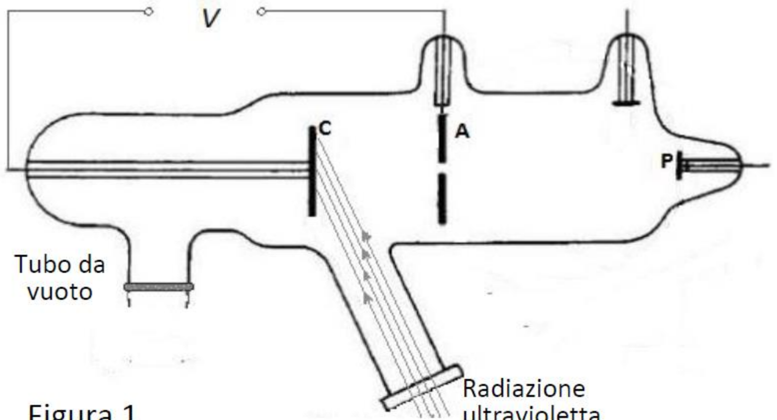


Figura 1

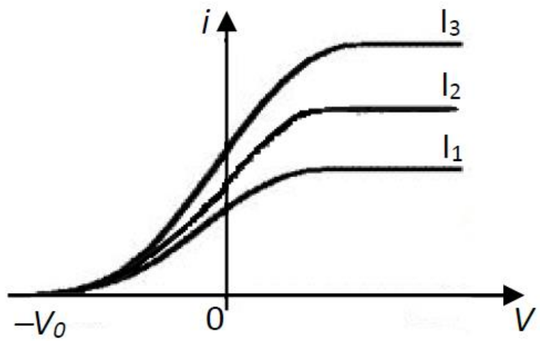


Figura 2

La luce ultravioletta penetra all'interno di un tubo in cui è stato fatto il vuoto e colpisce il catodo C portandolo ad emettere elettroni chiamati *fotoelettroni*. I fotoelettroni possono attraversare l'anodo A e raggiungere il piatto P connesso ad un elettrometro.

Tra anodo e catodo esiste una d.d.p. V che può essere variata: l'aumento della tensione V provoca un aumento della corrente fotoelettrica fino a farle raggiungere un valore di saturazione mentre quando V decresce fino ad essere invertita (il catodo diventa positivo rispetto all'anodo) si evidenzia una tensione V_0, detta *potenziale di arresto*, per cui la corrente si annulla. La Figura 2 rappresenta l'andamento della fotocorrente i in funzione della d.d.p. V applicata per intensità crescenti I_1, I_2, I_3 della luce incidente sul catodo.

La Figura 3 rappresenta l'apparato strumentale con il quale hai partecipato all'esperimento che ha permesso di raccogliere i dati della Tabella 1 in cui sono riportati i valori dei potenziali di arresto V_0 misurati in corrispondenza delle diverse lunghezze d'onda λ della radiazione monocromatica utilizzata. Utilizzando i valori della Tab. 1 viene costruito il GRAFICO 1 in cui è rappresentata l'energia cinetica massima con cui vengono emessi i fotoelettroni in funzione della frequenza della radiazione considerata.

TABELLA 1

λ (nm)	V_0 (V)
580	0,693
546	0,809
436	1,312
405	1,536
365	1,940

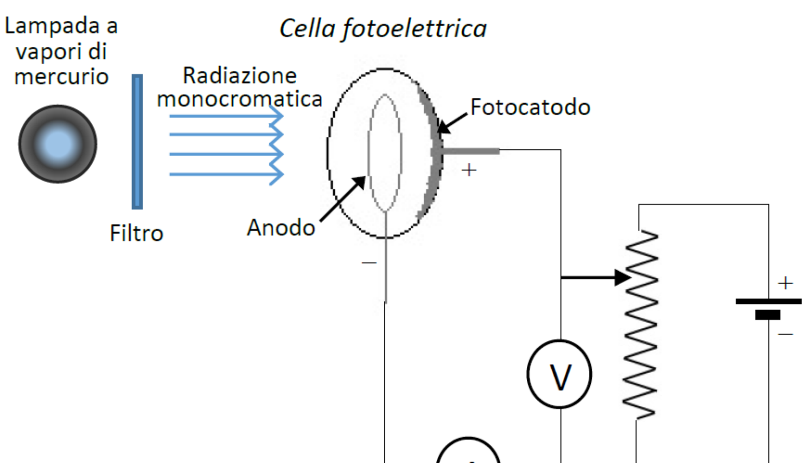
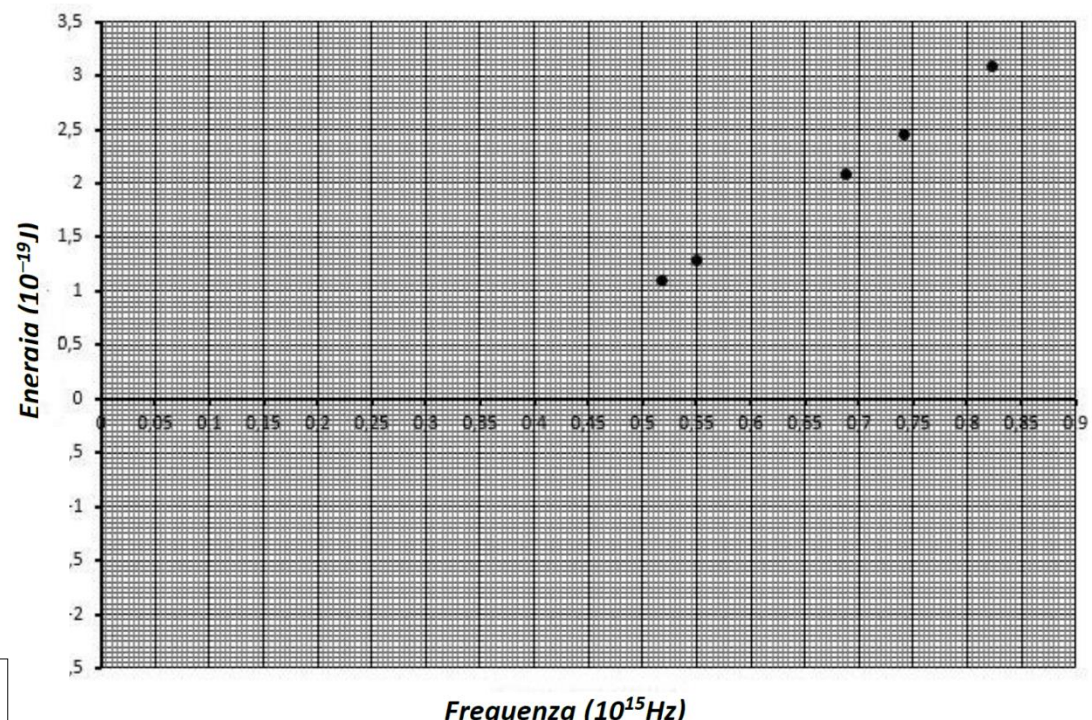


Figura 3



Con riferimento a quanto esposto, tenendo in considerazione i valori della carica e=1,602·10^{-19} C e della massa m=9,108·10^{-31} kg dell'elettrone:

Punto 1: *Esamina la situazione fisica corrispondente all'esperimento illustrato ed elenca le caratteristiche dell'effetto fotoelettrico non spiegabili mediante l'elettromagnetismo classico.*

La radiazione elettromagnetica (luce monocromatica) incide sul fotocatodo e può estrarre elettroni, che vengono accelerati ovvero decelerati dalla differenza di potenziale fra catodo e anodo. Se la tensione è tale che gli elettroni vengono accelerati verso l'anodo, la corrente cresce fino a raggiungere un valore di saturazione, quando tutti i fotoelettroni vengono raccolti dall'anodo. La corrente di saturazione aumenta con l'intensità della luce, in quanto un maggior numero di elettroni vengono estratti. Se la tensione è tale che gli elettroni vengono decelerati (ossia una tensione positiva sul catodo, che tende appunto ad attrarre gli elettroni verso il catodo) la corrente diminuisce fino ad annullarsi ad un determinato valore della tensione. Tale valore rappresenta il *potenziale di arresto*, chiamiamolo V_0: i fotoelettroni (alcuni di essi) possono raggiungere l'anodo solo quando $V > -V_0$. Il valore di V_0 cresce al diminuire della lunghezza d'onda della luce.

Vi sono due caratteristiche del fenomeno che sono inspiegabili a livello classico:

- La presenza del potenziale di arresto: se il flusso di energia arrivasse in maniera continua sul catodo, a una lunghezza d'onda fissata, basterebbe aumentare l'intensità della radiazione elettromagnetica per fornire energia sufficiente ad estrarre gli elettroni e far loro superare la differenza di potenziale fra catodo e anodo.
- Il potenziale di arresto *non dipende dall'intensità della radiazione*. Questo è ancora più misterioso a livello classico, ed è indice del fatto che il flusso di energia elettromagnetica non arriva in maniera in maniera continua.

Punto 2: *Descrivi l'interpretazione del fenomeno data da Einstein e la legge che lo regola da lui formulata.*

L'interpretazione di Einstein assume che il flusso di radiazione elettromagnetica consista di quanti di luce, o *fotoni*, ciascuno dei quali ha un'energia data da

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda},$$

dove f e λ sono rispettivamente la frequenza e la lunghezza d'onda della radiazione incidente. Ogni fotone può estrarre un elettrone alla volta, purché la frequenza f sia maggiore di una frequenza di soglia f_s, legata al potenziale di estrazione V_s dalla relazione

$$hf_S = eV_S.$$

Nell'esperimento, l'energia cinetica dei fotoelettroni dipende dalla frequenza della radiazione, e il suo valore massimo è dato da

$$E_{\mathrm{kin}} = h(f - f_S).$$

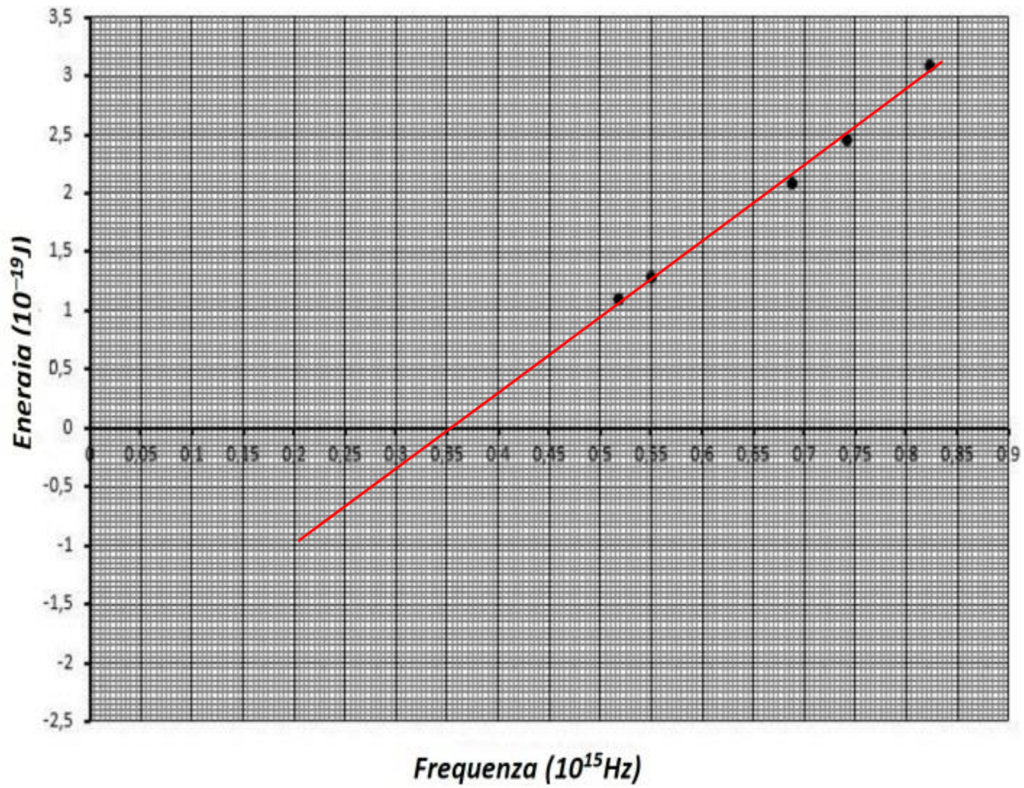
Il potenziale di arresto è determinato dal valore dell'energia potenziale che deve essere uguale e opposto all'energia cinetica massima, in modo da bloccare tutti gli elettroni sul catodo. Il potenziale di arresto V_0 è quindi determinato dalla relazione

$$V_0 = \frac{h}{e}(f - f_S).$$

Riportando V_0 in funzione di f si ha quindi una misura del rapporto h/e.

Punto 3: *Utilizzando il grafico effettua una stima del potenziale di estrazione e della frequenza di soglia del materiale di cui è costituito il fotocatodo, nonché del valore della costante di Planck calcolandone anche lo scarto percentuale dal valore oggi conosciuto, h=6,626·10*$^{-34}$ *Js.*

Il grafico riporta l'energia potenziale $eV_0=h(f-f_s)$, assumendo noto il valore della carica elementare *e*. Questa è appunto la funzione che permette di interpretare il grafico, o come si dice abitualmente, di "fittare i dati".



Nella figura riportiamo un esempio di fit lineare. Dall'intercetta con l'asse x (ossia dal valore in cui il potenziale di arresto si annulla) ricaviamo la frequenza di soglia:

$$f_S = 0{,}35 \cdot 10^{15} \text{ Hz.}$$

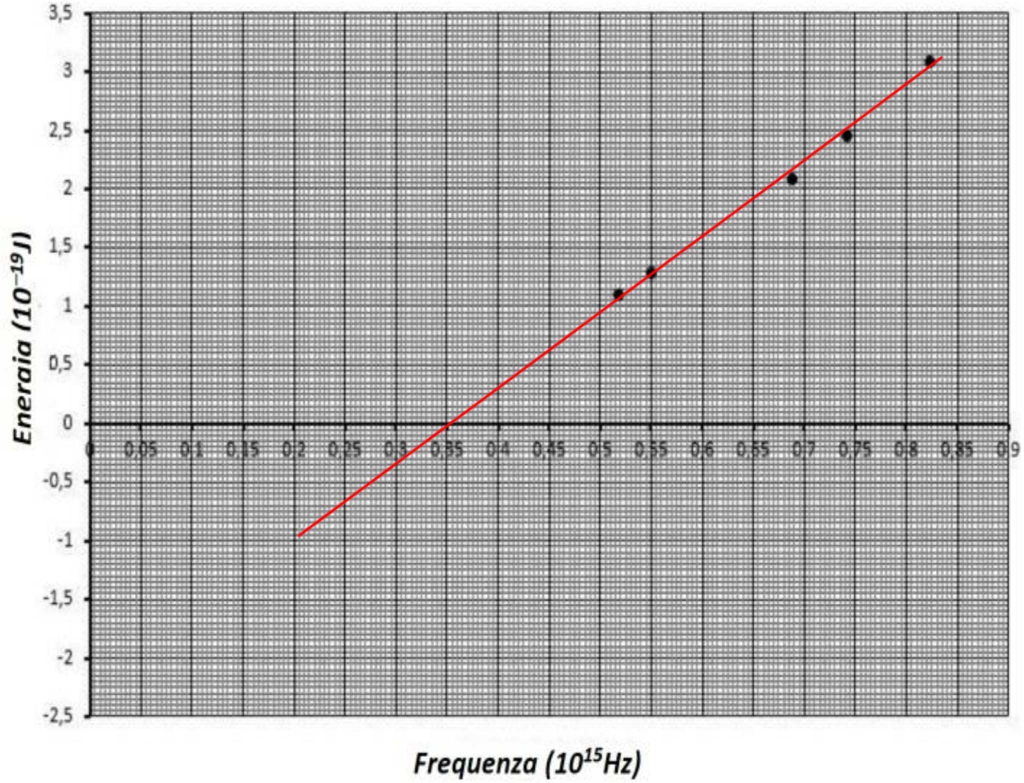
e il potenziale di estrazione (usando il valore noto della costante di Planck):

$$V_S = \frac{h}{e} f_S = 1.45 \text{ V.}$$

Il grafico permette anche di determinare la costante di Planck *h* dalla pendenza della retta. La pendenza calcolata dai punti (0,35; 0) e (0,81; 3,0) fornisce il valore

$$h_{fit} \cong \frac{3{,}0 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{0{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}} = 6{,}52 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}.$$

Lo scarto percentuale dal valore oggi conosciuto è $\Delta=(h-h_s)/h=1{,}6\%$. Fin troppo buono, considerando la semplicità della procedura.



Si intende che questi valori sono approssimati, oltre che per l'incertezza sperimentale, per l'arbitrarietà del posizionamento della retta di fit e della lettura del grafico. Quest'ultima incertezza può essere ridotta osservando che fra due tacche numerate vi è una griglia di 10 suddivisioni (sia sull'asse x che sull'asse y), che permette una lettura piuttosto accurata dei valori.

Punto 4: *Calcola il valore massimo della velocità raggiunta dai fotoelettroni prodotti durante l'esperimento ed esprimiti sull'opportunità di dover considerare eventuali correzioni relativistiche.*

La massima velocità raggiunta dai fotoelettroni corrisponde all'energia cinetica $E=h(f-f_s)$. Dalla tabella 1, quando λ=365 nm e $f=0{,}822\cdot10^{15}$ Hz abbiamo V=1,94 V da cui $E=3{,}104\cdot10^{-19}$ J. Questa è l'energia cinetica massima del fotoelettrone, che ci permette di calcolare la velocità:

$$v=\sqrt{\frac{2E}{m}}=8{,}26\cdot10^{5}\ \mathrm{ms}^{-1}\approx2{,}75\cdot10^{-3}\ c.$$

La velocità è meno di un centesimo della velocità della luce, quindi le correzioni relativistiche sono trascurabili.