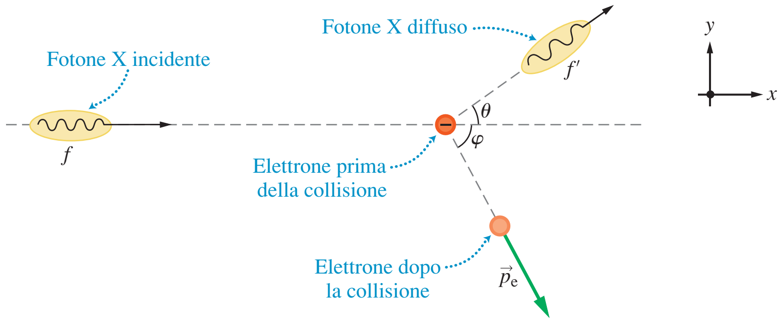
La formula dello spostamento Compton

Per ricavare la formula dello spostamento Compton consideriamo l'urto elastico fra fotone ed elettrone e applichiamo i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto.



Analizziamo la situazione *prima dell'urto*.

- Il fotone incidente si muove lungo l'asse x; la sua energia è:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

e la sua quantità di moto è:

$$p_{fx} = \frac{h}{\lambda} \qquad \text{componente lungo l'asse } x$$

$$p_{fx} = 0 \qquad \text{componente lungo l'asse } y$$

- L'elettrone è fermo nell'origine del sistema di riferimento, quindi la sua quantità di moto è nulla e la sua energia è:

$$E_0 = m_e c^2$$

Analizziamo la situazione *dopo l'urto*.

- Il fotone è diffuso a un angolo θ rispetto alla sua direzione iniziale, quindi:

$$E' = hf' = \frac{hc}{\lambda'} \qquad \text{energia}$$

$$p'_{fx} = \frac{h}{\lambda'} \cos\theta \qquad \text{componente } x \text{ della quantità di moto}$$

$$p'_{fy} = \frac{h}{\lambda'} \operatorname{sen}\theta \qquad \text{componente } y \text{ della quantità di moto}$$

- L'elettrone è diffuso a un angolo φ, quindi:

$$E_e = m_e c^2 + K \qquad \text{energia } (K = \text{energia cinetica relativistica})$$

$$p_{ex} = p_e \cos\varphi = m_e v \cos\varphi \qquad \text{componente } x \text{ della quantità di moto}$$

$$p_{ey} = -p_e \operatorname{sen}\varphi = -m_e v \operatorname{sen}\varphi \qquad \text{componente } y \text{ della quantità di moto}$$

Applichiamo ora le leggi di conservazione.
Per la legge di conservazione dell'energia abbiamo:

$$E + m_e c^2 = E' + E_e \qquad [1]$$

Per la legge di conservazione della quantità di moto abbiamo:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos\theta + p_e \cos\varphi \qquad [2]$$

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \operatorname{sen}\theta - p_e \operatorname{sen}\varphi \qquad [3]$$

Se nell'equazione [1] sostituiamo a E_e la relazione fra quantità di moto e energia relativistica:

$$E_e = \sqrt{c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4}$$

otteniamo:

$$E + m_e c^2 - E' = \sqrt{c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4}$$

da cui, elevando al quadrato entrambi i membri, ricaviamo p_e^2:

$$p_e^2 = \frac{(E + m_e c^2 - E')^2 - m_e^2 c^4}{c^2} \qquad [4]$$

Dalla [2], ricordando che $p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$, ricaviamo $p_e \cos\varphi$ ed eleviamo al quadrato:

$$p_e^2 \cos^2\varphi = \frac{1}{c^2}(E - E' \cos\theta)^2$$

Sviluppando i calcoli otteniamo:

$$p_e^2 \cos^2\varphi = \frac{1}{c^2}(E^2 + E'^2 \cos^2\theta - 2EE' \cos\theta) \qquad [5]$$

Analogamente, dalla [3] ricaviamo $p_e \operatorname{sen}\varphi$ ed eleviamo al quadrato:

$$p_e^2 \operatorname{sen}^2\varphi = \frac{E'^2}{c^2} \operatorname{sen}^2\theta \qquad [6]$$

Sommando le equazioni [5] e [6] abbiamo:

$$p_e^2(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi) = \frac{1}{c^2}(E^2 + E'^2 \cos^2\theta - 2EE' \cos\theta + E'^2 \operatorname{sen}^2\theta)$$

da cui:

$$p_e^2 = \frac{1}{c^2}(E^2 + E'^2 - 2EE' \cos\theta) \qquad [7]$$

Confrontiamo ora le equazioni [4] e [7]: poiché i primi membri sono uguali, uguagliamo i secondi membri:

$$(E + m_e c^2 - E')^2 - m_e^2 c^4 = E^2 + E'^2 - 2EE' \cos\theta$$

Svolgendo i calcoli otteniamo:

$$\cancel{E^2} + \cancel{m_e^2 c^4} + \cancel{E'^2} + 2E m_e c^2 - 2EE' - 2E' m_e c^2 - \cancel{m_e^2 c^4} = \cancel{E^2} + \cancel{E'^2} - 2EE' \cos\theta$$

$$2 m_e c^2 (E - E') = 2EE'(1 - \cos\theta)$$

Dividendo per $2m_e c^2 EE'$ entrambi i membri dell'equazione precedente possiamo scrivere:

$$\frac{E - E'}{EE'} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta) \quad \rightarrow \quad \frac{\lambda'}{hc} - \frac{\lambda}{hc} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$$

da cui si ottiene la formula dello spostamento Compton:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$