

Capitolo 1

La crisi della Fisica Classica e l'ipotesi di Planck

1.1 Il problema del corpo nero

Germania, 1877. Un neanche ventenne Max Planck decide di lasciare l'università di Monaco e trasferirsi a Berlino per terminare gli studi in fisica, anche lui fedele (come molti dei suoi coetanei), alla moda alto-borghese dell'epoca di effettuare gli studi universitari in più di una sede di prestigio. A Berlino, ha l'occasione di seguire le lezioni di alcune tra le figure di spicco del panorama scientifico XIX secolo, come Hermann von Helmholtz e Gustav Kirchhoff. Planck era tuttavia uno studente abbastanza fuori dal comune, e non esitava nel considerare quegli stessi professori piuttosto mediocri. A sua detta, sembra che Helmholtz fosse talmente annoiato nel tenere le sue lezioni, da commettere continui errori nei calcoli che effettuava alla lavagna.

Il professore, ad onor del vero, aveva una scusa più che valida per non preparare le proprie lezioni. Egli fu infatti tra i primi a promuovere la teoria elettromagnetica di Maxwell all'interno del proprio paese; fu su



Figura 1.1: Il giovane Max Planck

sua esplicita richiesta che, nel luglio del 1879, l'Accademia Prussiana delle Scienze di Berlino istituì un premio in favore di una dimostrazione sperimentale delle previsioni fornite dalla nuova teoria elettromagnetica. Il fisico che riuscì nell'impresa fu un giovane coetaneo di Planck, nonché allievo prediletto del professore: Heinrich Rudolf Hertz.

Nel 1888, Hertz dimostrò per primo l'esistenza delle onde elettromagnetiche grazie ad un apparato di sua costruzione (chiamato dipolo hertziano), in grado di emettere onde radio. La scoperta delle onde elettromagnetiche sancisce la definitiva consacrazione della teoria di Maxwell. Grazie a questi successi sperimentali, negli ultimissimi anni dell'800, germoglia all'interno della comunità scientifica la convinzione che il compito della fisica sia "ormai pressoché terminato". Il genio di Newton ha reso possibile la comprensione della meccanica dei corpi, quello di Maxwell dei fenomeni elettromagnetici, facendo apparire completo il quadro di comprensione della Natura. Gli stessi professori di Planck, di cui sopra, sono fermamente convinti che ormai resti soltanto da "misurare meglio alcune quantità" e spiegare una manciata di fenomeni di "minor conto", tra cui:

- la capacità della luce ultravioletta di indurre una corrente in un conduttore (fenomeno noto col nome di *effetto fotoelettrico*);
- gli spettri "a righe" di assorbimento ed emissione dei gas;
- il problema della radiazione di *corpo nero*.

Tutti erano ignari del fatto che questi tre problemi, e in particolare quello dello spettro di corpo nero, avrebbero segnato il decisivo punto di svolta nella comprensione della realtà fisica. Fu, infatti, proprio lo studio di questi fenomeni a innescare la "crisi" della meccanica classica, e portare alla nascita della *meccanica quantistica*.

Vogliamo ora concentrarci proprio sull'ultimo dei tre punti elencati. Non è in alcun modo riduttivo affermare che l'origine del problema del corpo nero risieda in osservazioni sistematiche di fenomeni legati a necessità industriali. La comprensione dei corpi incandescenti, infatti, aveva un enorme impatto nelle produzioni industriali di oggetti come stufe, piastre elettriche, lampade, etc. L'obiettivo degli ingegneri dell'epoca, come Werner Siemens¹, consisteva nello sviluppo di uno standard di misurazione dell'intensità luminosa. L'idea era quella di poter misurare la temperatura di oggetti incandescenti (in fase di produzione e non), sulla base dell'analisi della radiazione che essi emettono. Si manifestava dunque la necessità di potersi avvalere di un modello

¹Fondatore dell'omonima azienda, giunta fino ai nostri giorni grazie agli innumerevoli brevetti di apparecchiature elettriche.

di riferimento, ovvero di un oggetto in grado di fornire una radiazione indipendente dalla sua natura (i.e., forma e composizione chimica), e dipendente solo dalla temperatura. Tale oggetto di riferimento, come vedremo tra breve, ha proprio il nome di *corpo nero*.

A livello sperimentale, non ci furono problemi di sorta. Nel giro di pochissimi anni fu possibile misurare lo spettro dei corpi incandescenti con grandissima precisione. Le difficoltà si affacciarono invece tutte al livello di comprensione teorica di tali distribuzioni spettrali. I fisici osservarono infatti un evidente disaccordo tra la distribuzione dei colori della luce emessa da queste sorgenti calde (come carbone e metallo fuso) e la corrispondente predizione teorica “classica”². Con riferimento alle numerose osservazioni compiute dagli istituti di ricerca tecnologica, lo stesso Planck affermerà in quegli anni che: “[...] qualcosa di imponente sta emergendo dalla osservazione di un semplice pezzo di carbone ardente.”

Ma facciamo qualche passo indietro, prima di entrare nel merito della questione del *corpo nero*. Tutti noi abbiamo esperienza del fatto che una brace gialla in un camino ardente (1400-1600°C) risulta più calda di una brace rossa di un camino in via di spegnimento (1200-1300°C). All’aumentare della temperatura, il colore della luce emessa si sposta dal rosso verso il blu. La correlazione tra il colore della radiazione termica emessa e la temperatura di oggetti incandescenti, incuriosì l’astronomo anglo-tedesco William Herschel che, già nel 1800 (prima dell’insorgere delle necessità industriali di cui si è appena parlato), effettuò una scoperta sorprendente. Facendo passare la luce del Sole attraverso un prisma e, facendo in modo che ognuno dei colori in cui veniva scomposta la luce andasse a colpire uno solo dei diversi termometri disposti su di un banco, si accorse che i termometri non indicavano tutti la stessa temperatura. Si tratta della prima evidenza del fatto che l’intensità della radiazione che proviene dal Sole è diversa per ognuna delle lunghezze d’onda incidenti. In particolare, la distribuzione spettrale della radiazione emessa dal Sole, assomiglia moltissimo a quella del già citato corpo nero.

In realtà, ogni corpo che non si trovi in equilibrio termico con l’ambiente che lo circonda, emette radiazione in forma di comune calore. Il fenomeno è riconducibile all’oscillazione delle cariche del corpo stesso che, in accordo con la teoria di Maxwell (e le osservazioni di Hertz) muovendosi emettono radiazione, rallentando. In questo modo il corpo si raffredda. Ma c’è di più: ogni corpo emette in tutte le lunghezze d’onda, ma la distribuzione dell’energia in funzione di tale variabile dipende dalla sua temperatura. Lo stesso corpo umano, a 37 °C, emette radiazione elettromagnetica, ma il picco

²Per “teoria classica” si intende l’insieme delle leggi derivate dalla termodinamica e dall’elettromagnetismo allora note.

di emissione si ha per lunghezze d'onda nell'intorno di $9\ \mu\text{m}$, nella regione infrarossa dello spettro (si veda la Fig. 1.2, a sinistra). Al di sotto di $3\ \mu\text{m}$, per contro, l'emissione è praticamente trascurabile, motivo per cui si osserva che il corpo umano non emette radiazione nello spettro visibile ($0.4 \div 0.8\ \mu\text{m}$). Oggetti molto più caldi del corpo umano, come una lampadina ad incandescenza, emettono secondo una curva di intensità che assomiglia a quella del corpo umano, ma decisamente spostata verso lunghezze d'onda più piccole, come mostrato dalla Fig. 1.2 (destra). Il massimo di emissione, stavolta, si osserva per lunghezze d'onda nell'intorno del μm , a 3000 K. In tal modo, la banda del visibile ha un'intensità non trascurabile, e per questo la lampadina fornisce una radiazione percepibile dall'occhio umano.

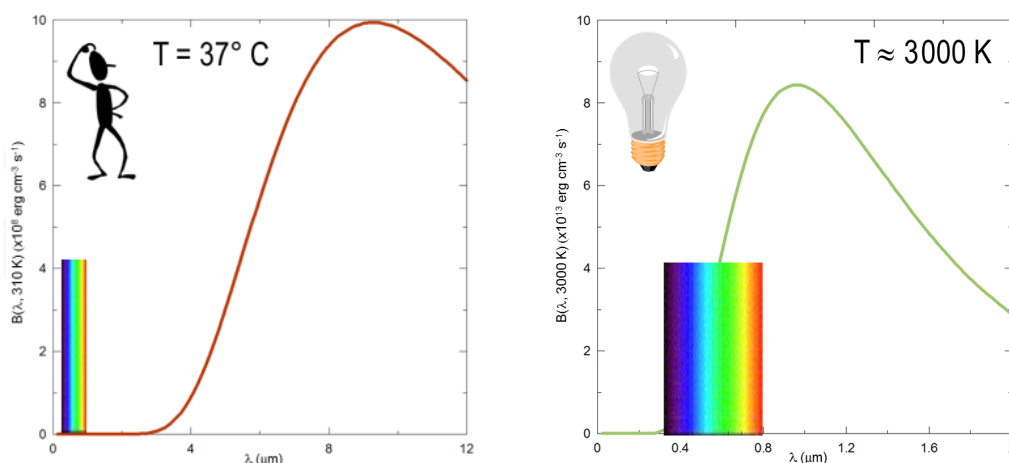


Figura 1.2: Spettri di emissione di un corpo umano a 37°C (sinistra) e di una lampadina a incandescenza a 3000 K (destra). Il potere emissivo del corpo umano in corrispondenza della banda del visibile è praticamente nullo, motivo per cui un corpo umano non brilla di luce propria. Al contrario, la lampadina ha un picco di emissione in prossimità delle lunghezze d'onda della luce visibile.

All'equilibrio, i corpi incandescenti emettono necessariamente la stessa quantità di radiazione che assorbono. L'emissività, e , e l'assorbimento, a , rispettivamente indici della capacità di irraggiare e assorbire la radiazione elettromagnetica, per corpi in tali condizioni sono, quindi, uguali. Nello specifico, l'emissività di un materiale è definita come la frazione di energia irraggiata da quel materiale rispetto all'energia irraggiata da un corpo di riferimento che si trovi alla stessa temperatura. Come corpo di riferimento si assume il *corpo nero*, definito come “un oggetto in equilibrio termico in grado di assorbire completamente tutta la radiazione incidente e, allo stesso modo, in

grado di emettere la stessa radiazione che è in grado di assorbire". Si ponga attenzione al fatto che la radiazione incidente non viene mai riflessa, ma sempre completamente assorbita.

Per cercare di capire come mai un corpo nero debba necessariamente irradiare energia (e non solo assorbirla) si immagini di avere un corpo incandescente di fronte ad un oggetto nero e che i due siano perfettamente isolati rispetto all'ambiente che li circonda (ovvero non c'è possibilità che il calore venga disperso). Con il passare del tempo, l'oggetto nero assorbirà tutto il calore emesso dall'altro corpo e, di conseguenza, si riscalderà. Quando le temperature dei due corpi saranno uguali, il corpo nero non potrà più assorbire l'energia di quello incandescente, altrimenti il secondo principio della termodinamica verrebbe violato. L'unico modo di continuare ad assorbire l'energia irraggiata è che venga irradiata energia in uguale misura. La difficoltà di cogliere a pieno la natura di un corpo nero ideale sta nel fatto che esso non esiste in natura. Molti degli oggetti che assorbono radiazione nella banda del visibile non la assorbono nella banda dell'ultravioletto o infrarosso, o viceversa: in altre parole, per tali oggetti è $a < 1$.

Per questo motivo, i fisici sperimentali del XIX secolo dovettero inventare un sistema da laboratorio in grado di comportarsi nel modo più simile possibile ad un corpo nero ideale. Il primo a proporre un modello di corpo nero soddisfacente fu proprio uno dei professori che Planck non amava in giovinezza: Gustav Kirchhoff. Nonostante Kirchhoff annoiasse i suoi studenti per motivi opposti a quelli di Helmholtz - si dice che preparasse delle lezioni così minuziosamente da recitarle quasi a memoria -, egli ebbe l'intuizione di paragonare la radiazione di corpo nero ad una certa temperatura, a quella emessa attraverso un foro molto piccolo praticato in una cavità le cui pareti si trovino a quella stessa temperatura (si veda la Fig. 1.3).

Una radiazione di frequenza arbitraria che entrasse attraverso il foro della cavità verrebbe assorbita e riemessa un numero infinito di volte dalle pareti interne, rimanendo intrappolata nella cavità. In tal senso, il foro si comporta come un corpo nero: tutta la radiazione incidente viene "assorbita", senza essere mai riflessa³. Allo stesso tempo, la probabilità che della radiazione fuoriesca dal foro è estremamente bassa, motivo per cui anche se questa fuoriuscisse, non verrebbe alterato l'equilibrio della cavità. La radiazione intrappolata all'interno rappresenta dunque una buona approssimazione della radiazione di corpo nero. Con dei semplici ragionamenti di bilancio energetico e avvalendosi del *principio dell'equilibrio dettagliato*⁴, Kirchhoff capì che

³Questo è il motivo per cui l'ingresso di una chiesa molto grande appare nero a chi la osserva da molto lontano.

⁴Secondo tale principio, l'uguaglianza tra quantità di energia emessa e assorbita da un corpo in equilibrio termico è valido per ogni lunghezza d'onda della radiazione scambiata.

l'intensità, per unità di lunghezza d'onda, della radiazione all'interno della cavità è indipendente dalla forma e dalla natura delle pareti, e dipende soltanto dalla temperatura dell'oggetto. Nel suo discorso di accettazione del premio

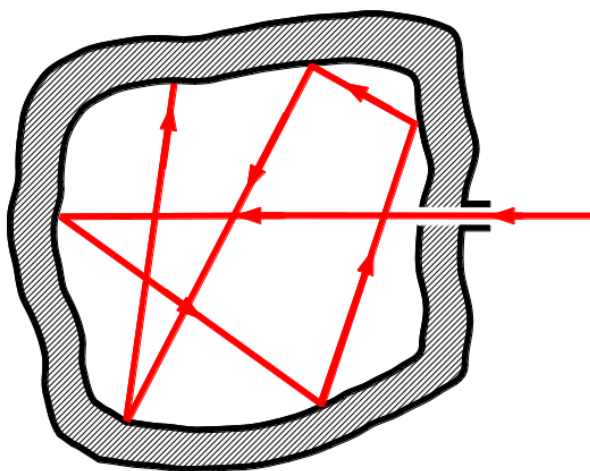


Figura 1.3: Rappresentazione del comportamento della radiazione “intrappolata” in una cavità in cui è praticato un piccolo foro.

Nobel per la fisica, Planck riconoscerà l'importanza del modello di Kirchhoff per lo sviluppo della sua teoria, affermando: *“Kirchhoff ha dimostrato che lo stato della radiazione termica all'interno di una cavità delimitata da una sostanza, di qualsiasi natura, che la assorbe e la emette, a una temperatura uniforme, è totalmente indipendente dalla natura della sostanza stessa. È stata così dimostrata l'esistenza di una funzione universale che dipende solo dalla temperatura e dalla lunghezza d'onda (come dalla frequenza), ma in nessun modo dalle proprietà di alcuna sostanza. La scoperta di tale funzione straordinaria prometteva una comprensione più profonda della relazione tra energia e temperatura che è, di fatto, il problema più importante della termodinamica e, di conseguenza, di tutta la fisica molecolare.”*

Quando Planck inizia ad interessarsi al problema della radiazione di corpo nero è già professore universitario e membro dell'Accademia delle Scienze; siamo nel 1894. È assolutamente sorprendente - forse, addirittura incredibile -, pensare che Planck si avvicinò al problema con l'intento di dare una giustificazione teorica ai processi termodinamici irreversibili (come quello che porta all'equilibrio termico nella cavità), senza dover ricorrere né all'ipotesi atomica, né all'interpretazione statistica dell'entropia (data da Boltzmann qualche anno prima). Ancora molto lontano dalle nuove idee quantistiche, Planck inizia a lavorare sotto l'influenza delle tesi antiatomistiche della cosiddetta

schiera degli “energetisti”. Questi ultimi, ritenevano che la termodinamica fosse il quadro perfetto per lo sviluppo di un modello completo della natura. Guidati solo dal primo principio della termodinamica - dunque, dalla conservazione dell’energia -, gli energetisti dubitavano persino dell’esistenza degli atomi. Con queste premesse, lo sforzo intellettuale che fece Planck nell’introdurre la teoria quantistica merita un’ammirazione particolare: pur non credendo nell’esistenza degli atomi, aprì la strada alla comprensione della natura discreta dell’“infinitamente piccolo”.

Nell’elaborazione della teoria di Planck, giocò un ruolo fondamentale la possibilità di accedere alle misure sperimentali dei fisici del vicino Istituto Imperiale di Fisica e Tecnologia. Gli scienziati di tale istituzione furono infatti tra i primi a fornire delle accurate distribuzioni spettrali della radiazione dei corpi neri, ovvero del modo in cui l’intensità della radiazione emessa varia con la lunghezza d’onda. Fin da subito, tali misure sperimentali, consentirono di evidenziare delle importanti caratteristiche di tali spettri. Dai dati si verificò, ad esempio, che la forma dello spettro di un corpo nero è definita *solo* dalla temperatura, come previsto da Kirchhoff. Questo significa che tutti i corpi incandescenti, ad una data temperatura, emettono radiazione termica secondo una distribuzione in lunghezza d’onda che è ben approssimata da quella di un corpo nero ideale alla stessa temperatura (è il caso dello spettro del Sole, come vedremo meglio in seguito).

Tra i fisici dell’Istituto Imperiale di Fisica e Tecnologia impegnati in questo tipo di studi, uno, poco più giovane di Planck, nel 1911 avrebbe ricevuto il Premio Nobel proprio per le sue ricerche sul corpo nero. Si tratta di Wilhelm Wien, il quale, avvalendosi di argomentazioni di termodinamica e di elettromagnetismo fu in grado di stabilire che il *potere emissivo*, ovvero la potenza per unità di superficie emessa in un intervallo infinitesimo di lunghezza d’onda, dipende da temperatura e lunghezza d’onda nel modo seguente:

$$\Psi_\lambda = \frac{1}{\lambda^5} F(\lambda T) \quad (1.1)$$

dove la funzione F dipende del prodotto tra lunghezza d’onda e temperatura (e non delle due grandezze in maniera separata). Come vedremo, tale funzione non risulta in nessun modo calcolabile con un approccio di tipo classico. Sulla base della sua formulazione teorica, e grazie alla ormai elevata affidabilità delle misure sperimentali, Wien poté anche dedurre una relazione che lega la lunghezza d’onda cui corrisponde il massimo dell’emissione alla temperatura, anche nota come *legge dello spostamento di Wien*:

$$\lambda_{\max} T = \text{costante} \quad (1.2)$$

dove il valore della costante, ricavato empiricamente, è $2.898 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$. Se-

condo tale legge, con il crescere della temperatura del corpo nero, diminuisce la lunghezza d'onda a cui viene irradiata la maggior quantità di energia (si vedano gli spettri riportati in Fig. 1.4). Il risultato è assolutamente compa-

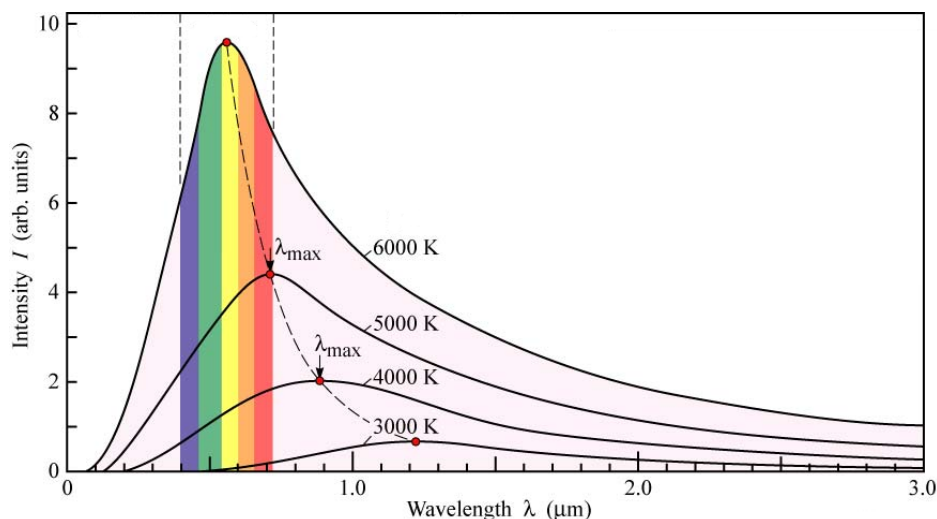


Figura 1.4: Intensità della radiazione termica di corpo nero (in unità arbitrarie), in funzione della lunghezza d'onda di emissione, per diversi valori di temperatura.

tibile con l'esperienza quotidiana: la luce che proviene da corpi incandescenti si sposta dal rosso verso il giallo, e poi verso il blu, all'aumentare della temperatura. Si ricordi ancora il caso della brace nel camino: quando la fiamma è ancora attiva, la brace assume una colorazione gialla, quando il fuoco è spento, e quindi la temperatura più bassa, la brace assume una colorazione rossa⁵.

La (1.2) ci consente di risalire alla temperatura di un corpo in emissione, nota la lunghezza d'onda cui l'emissione è massima (non necessariamente nel visibile)⁶. Ad esempio, sapendo che il massimo di emissione della radiazione solare è nell'intorno di $0.5 \mu\text{m}$, si può stabilire che la temperatura superficiale del Sole è di circa 5800 K (cfr. Fig. 1.5).

Contemporaneamente a Wien e Planck, altri fisici di rilievo, come Josef Stefan, contribuirono alla comprensione della radiazione emessa da un corpo

⁵La lunghezza d'onda del colore rosso ($\lambda_{\text{rosso}} \approx 620 - 750 \text{ nm}$) è maggiore di quella del colore giallo ($\lambda_{\text{giallo}} \approx 570 - 590 \text{ nm}$)

⁶La legge di Wien trova applicazione diretta nel cosiddetto *pirometro*. Si tratta sostanzialmente di uno strumento in grado di confrontare la luminosità di un corpo, di cui si vuole misurare la temperatura, con quella di un filamento di tungsteno di temperatura misurabile.

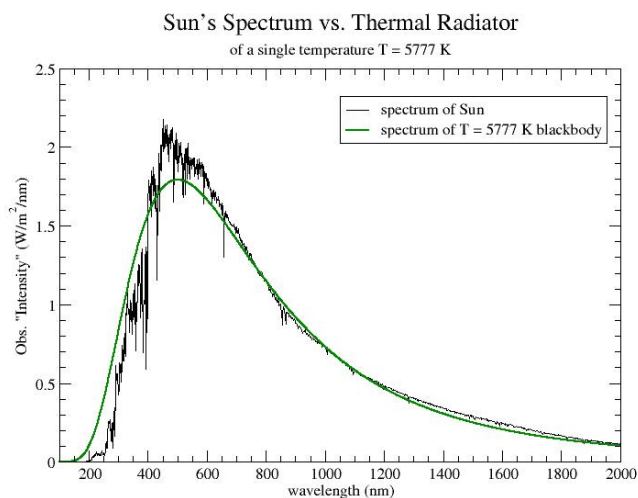


Figura 1.5: Confronto tra lo spettro della radiazione solare, misurata fuori dell'atmosfera terrestre (curva nera), e quello prevista per un corpo nero alla temperatura di 5777 K (curva verde). Le stelle, enormi sfere di materiale incandescente, emettono radiazione termica simile a quella di un corpo nero alla temperatura della superficie stellare.

nero. Basandosi su osservazioni sperimentali, Stefan si accorse che la potenza totale irradiata da un corpo nero, Ψ_{tot} (corrispondente all'area al di sotto della curva del potere emissivo), è proporzionale, tramite una costante σ , alla quarta potenza della temperatura, ovvero:

$$\Psi_{tot} = \sigma T^4 \quad (1.3)$$

Fu uno dei più brillanti studenti di Stefan, tale Ludwig Boltzmann, a fornire una giustificazione teorica per tale legge. Basandosi solo su considerazioni di termodinamica ed elettromagnetismo, Boltzmann fu in grado di ricavare proprio l'Eq. (1.3) (che prese dunque il nome di *legge di Stefan-Boltzmann*), determinando per la costante σ (anch'essa divenuta nota col nome di costante di Stefan-Boltzmann) il valore: $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$. Noti i vincoli forniti dalla legge di Stefan-Boltzmann e da quella dello spostamento di Wien, restava da determinare un quadro teorico in grado di predire l'andamento del potere emissivo Ψ_λ . In altre parole, occorreva ricavare, dai principi primi di termodinamica ed elettromagnetismo, la forma della $F(\lambda T)$ che compare nella (1.1).

Purtroppo, dopo i successi di Kirchhoff, Wien, Stefan e Boltzmann, iniziano i problemi. La forma funzionale di Ψ_λ , infatti, non sembrava essere in alcun

modo ricavabile a partire da concetti classici. Nessuna delle previsioni teoriche era infatti in grado di riprodurre correttamente l'intero spettro osservato. Un primo tentativo empirico di ricavare l'espressione di Ψ_λ venne da Wien (nel 1896) che, osservando una certa somiglianza tra lo spettro di corpo nero e la distribuzione delle velocità di Maxwell, suppose che le analogie fossero dovute al fatto che l'emissione di radiazione era in qualche modo legata proprio all'agitazione termica, e quindi alla velocità delle molecole del corpo nero, ricavando una relazione che va sotto il nome di *legge di radiazione di Wien*:

$$\Psi_\lambda = \frac{C}{\lambda^5} e^{-C'/\lambda T} \quad (1.4)$$

Tale funzione, tuttavia, ha dei limiti piuttosto evidenti:

- il processo di emissione ed assorbimento della radiazione in cavità non ha un solido fondamento teorico;
- la funzione interpola in maniera soddisfacente i punti sperimentali nella regione di piccole λ , ma fallisce evidentemente per grandi lunghezze d'onda, sottostimando il potere emissivo rispetto ai valori sperimentali;
- il valore delle costanti C e C' non è prevedibile teoricamente e deve necessariamente essere ricavato sperimentalmente.

Lo stesso Planck tentò di dedurre la formula di Wien a partire da ragionamenti sull'entropia del sistema, ma senza alcun successo. L'Eq. (1.2) rimase una buona approssimazione empirica dei dati per piccole lunghezze d'onda e nulla più.

Un tentativo più sistematico venne compiuto da John William Strutt, più usualmente noto come Lord Rayleigh. Egli propose un approccio diverso per ricavare l'espressione di Ψ_λ . Si tratta, comunque, di un approccio di tipo classico, basato sulla possibilità di assorbire ed emettere radiazione in cavità (ad ogni lunghezza d'onda), solo per mezzo di onde elettromagnetiche *stazionarie*. Per onda stazionaria s'intende un'onda che non si propaga lungo una fissata direzione spaziale, ma oscilla soltanto nel tempo. Essa presenterà dunque dei punti in cui è fissa e di ampiezza nulla, detti *nodi*. Nel modello di Rayleigh, i nodi delle onde stazionarie si trovano sempre sulle pareti della cavità. Ogni spostamento di energia all'interno della cavità è vincolato ad avvenire per mezzo di un'onda stazionaria di questo tipo. Su questa base, egli associò ogni onda a un oscillatore armonico unidimensionale (l'oscillazione armonica è legata all'oscillazione del campo elettrico). In questo modo, la *densità spettrale d'energia* ρ , ovvero l'energia per unità di volume in un intervallo infinitesimo di lunghezza d'onda, sarà ottenuta come prodotto tra

la densità di volume n_λ dei modi di lunghezza d'onda compresa tra λ e $\lambda + d\lambda$ e l'energia media $\langle \varepsilon_\lambda \rangle$ di un oscillatore, ovvero:

$$\rho = n_\lambda \langle \varepsilon_\lambda \rangle. \quad (1.5)$$

Utilizzando il principio di *equipartizione dell'energia*, secondo il quale, all'equilibrio e a temperatura fissata, l'energia cinetica media per grado di libertà di un oscillatore è, indipendentemente dalla sua frequenza, uguale a $kT/2$ (con k costante di Boltzmann), e tenendo conto che l'energia potenziale media è uguale a quella cinetica⁷, si ha:

$$\langle \varepsilon_\lambda \rangle = 2 \times \frac{1}{2} kT = kT. \quad (1.6)$$

Per quanto riguarda il numero di *modi*, risulta (vedi Appendice A):

$$n_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}, \quad (1.7)$$

che inserita, insieme alla (1.6), nella (1.5), fornisce la cosiddetta *legge di Rayleigh-Jeans*⁸

$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT. \quad (1.8)$$

Da questa, moltiplicando per la velocità della luce, otteniamo il potere emissivo, i.e. $\Psi_\lambda = c\rho$.

Sebbene la (1.8) sia ricavata in maniera rigorosa, a partire da principi primi e basandosi su argomentazioni di fisica classica assolutamente solide, essa risulta in accordo con i valori sperimentali soltanto per valori molto elevati di λ , ovvero piccoli valori della frequenza ν (vedi Fig. 1.6). L'inaspettata divergenza della funzione $\rho(\lambda, T)$ per grandi valori di frequenza della radiazione di corpo nero (ovvero piccole λ), evidenzia però il fallimento della teoria classica, tanto da essere definita come la “*catastrofe ultravioletta*”. Il termine non è esagerato: la legge di Rayleigh-Jeans predice una quantità infinita di energia radiata, risultato chiaramente assurdo.

1.2 La rivoluzione di Planck

All'inizio dell'anno 1900, dunque, la situazione è sinteticamente questa: la teoria classica, che si concretizza nella formula di Rayleigh-Jeans, non è in

⁷Questo risultato prende il nome di *teorema del viriale*.

⁸Un errore di calcolo nella derivazione di Rayleigh fu corretto da Sir James Jeans nel 1905.

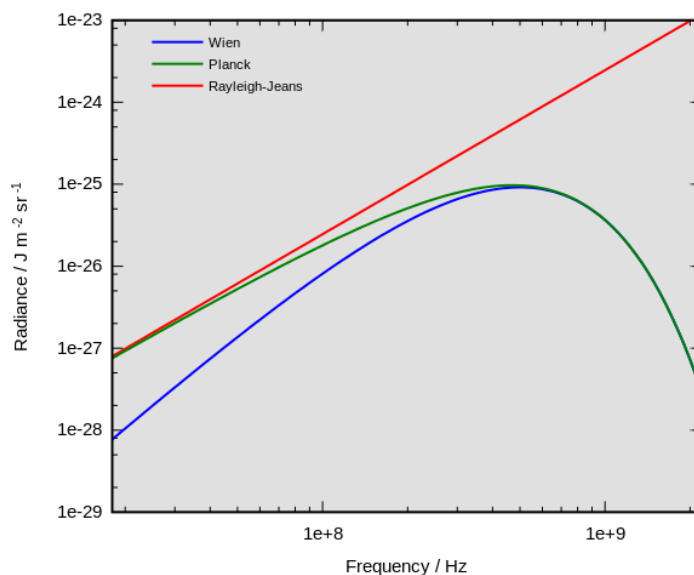


Figura 1.6: Confronto tra le varie predizioni teoriche relative allo spettro in funzione della frequenza di un corpo nero alla temperatura di 8 mK. Per completezza, nella figura è riportata anche la predizione di Planck (vedi avanti), l'unica in accordo con le osservazioni sperimentali.

grado di spiegare la radiazione di corpo nero. La migliore approssimazione disponibile per essa è una formula empirica fornita da Wien che, tuttavia, non ha alcun fondamento teorico. L'impressione generale è che il problema della teoria classica risieda nel calcolo del numero di modi di vibrazione per ogni lunghezza d'onda. Basta infatti osservare la struttura della (1.7) per comprendere che il numero di modi tende a divenire sempre più grande man mano che λ decresce, fino a divergere nel limite $\lambda \rightarrow 0$. Questo aspetto, ovviamente, non sfuggì a Max Planck.

Nell'estate del 1900, Ferdinand Kurlbaum e Heinrich Rubens, ottengono delle misurazioni estremamente accurate di alcune distribuzioni spettrali di corpo nero, osservando un netto disaccordo tra i dati sperimentali e le previsioni teoriche⁹. All'ora del tè di domenica 7 ottobre 1900, Rubens e consorte fanno visita a Planck nella sua casa di Berlino. In quell'occasione, Rubens mostra a Planck come le sue ultime misure sperimentali si accordino perfettamente alla legge di Rayleigh-Jeans per grandi valori di lunghezza d'onda, dove, invece, risulta inefficiente la predizione di Wien (cfr. Fig. 1.6). La situazione è

⁹Inizialmente, i dati sperimentali non erano sufficientemente precisi da evidenziare il disaccordo con la predizione di Wien. Solo con le misure di Kurlbaum e Rubens, il problema del corpo nero acquistò la criticità che lo rese famoso.

rovesciata nella regione delle piccole lunghezze d'onda, dove l'accordo è con la legge di Wien, mentre la curva di Rayleigh-Jeans è “catastroficamente” sbagliata. Quando Rubens e la moglie lasciano la casa, Planck si chiude nel suo studio, e in poche ore scopre fortuitamente la legge che lo avrebbe fatto passare alla storia. Senza nessuna apparente motivazione teorica, modificando leggermente la legge di Wien con l'aggiunta di un “meno uno” al denominatore:

$$\Psi_\lambda = \frac{C}{\lambda^5(e^{C'/\lambda T} - 1)} \quad (1.9)$$

si otteneva un accordo perfetto con i dati sperimentali. Tuttavia, nonostante la (1.9) fosse in grado di riprodurre l'andamento delle misure di Rubens in tutto il l'intervallo di frequenze accessibile, essa presentava gli stessi problemi della legge di Wien: era del tutto priva di una derivazione teorica fondata e le costanti C e C' dovevano ancora essere valutate empiricamente.

I giorni che seguirono l'incontro con Rubens furono a dir poco estenuanti per Planck. Egli lavorò giorno e notte nel tentativo di dare un fondamento teorico alla sua equazione partendo dai noti principi classici, ma ogni suo sforzo fu assolutamente vano. Il desiderio di motivare la propria intuizione si fece ancora più pressante nel momento in cui Planck si accorse anche che per piccoli valori di lunghezza d'onda la sua equazione di riduceva a quella di Wien, mentre per grandi λ a quella di Rayleigh-Jeans (come mostrato in Appendice B).

Esauriti tutti i possibili approcci teorici (classici) al problema, Planck si rende conto di dover cominciare a guardare “fuori dalle vie battute”. Ragionando sul modello di Rayleigh, Planck intuisce che il problema risiede nel considerare ugualmente possibili tutti i modi di vibrazione degli oscillatori¹⁰ in cavità. Planck matura l'idea che ci sia qualcosa che proibisca i modi ad alta frequenza, evitando la catastrofe ultravioletta.

Nei primi giorni del dicembre 1900, Planck compie quello che egli stesso in seguito definì “un atto disperato”: ipotizza che leggi di natura non siano continue, ma discrete. Egli avanza l'ipotesi che ogni oscillatore nella cavità possa scambiare solo quantitativi di energia che siano un *multiplo intero* di una quantità fondamentale, detta *quanto di energia*, dipendente dalla frequenza ν , e pari a:

$$E = h \nu \quad (1.10)$$

¹⁰Per la precisione, a differenza di Rayleigh, che considerava le onde stazionarie scambiate in cavità alla stregua di oscillatori armonici, Planck considera le cariche degli atomi delle pareti della cavità come degli oscillatori armonici, che interagiscono col campo di radiazione. Si può dimostrare che i due approcci sono del tutto equivalenti.

con h valore costante che passerà alla storia come *costante di Planck*. L'assunto sembra a prima vista solo un artificio matematico che ovvia alla divergenza ad alta frequenza, ma le implicazioni vanno ben oltre la semplice soluzione matematica. L'ipotesi di Planck si rivelerà presto necessaria per spiegare diversi fenomeni non compresi e in molti casi, addirittura predittiva. Prima di affrontare il calcolo dello spettro di Planck, cerchiamo di capire qualitativamente come l'assunzione della discretizzazione dell'energia (o, brevemente la *quantizzazione*) possa influenzare il numero degli oscillatori all'interno della cavità (e nello specifico i modi di più alta frequenza). Secondo la (1.10), un oscillatore di frequenza ν può scambiare "pacchetti" di energia pari a $h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots, nh\nu$, solo con la radiazione di frequenza ν . Ora, se tale frequenza è molto elevata, gli scambi energetici sono consistenti, e dunque l'emissione di una radiazione di quella frequenza comporterebbe un forte squilibrio energetico della cavità (ovvero un flusso netto di energia in una certa direzione). Tale situazione è totalmente inaccettabile, dal momento che un corpo nero è per definizione un corpo *in equilibrio* a una certa temperatura. Per dirla con un'analogia, supponiamo che il corpo nero sia il portafoglio di un comune cittadino italiano. Sarebbe auspicabile, per tale cittadino, avere un portafoglio che sia sempre "in equilibrio", ovvero che registri delle uscite sempre uguali alle entrate¹¹. Se associamo i diversi tagli di monete e banconote a oscillatori di frequenza diversa, è chiaro che lo scambio di monete da un euro (o multipli di esso) è estremamente più comune, e meno destabilizzante, di quello di banconote da 500 euro.

È interessante notare che Planck non fece nessuna supposizione sulla reale natura di questo "quanto di energia" (bisognerà aspettare l'avvento della QED¹² per questo); la soluzione di Planck fu inizialmente solo un artificio matematico, e nulla più. Infatti, assunta per l'energia di un oscillatore armonico la seguente espressione:

$$\epsilon_n = n h \nu \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

in equilibrio termico, alla temperatura T , l'energia media sarà data da:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{-\epsilon_n/(kT)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon_n/(kT)}}. \quad (1.11)$$

Introdotta la *somma di equipartizione*

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_n} \quad \beta = \frac{1}{kT},$$

¹¹In verità, sarebbe auspicabile avere degli ingressi maggiori delle uscite, ma lavorate un po' di fantasia...

¹²Acronimo inglese che sta per Elettrodinamica Quantistica.

è facile vedere che la (1.11) può essere scritta come:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{Z} \left(-\frac{dZ}{d\beta} \right) = -\frac{d}{d\beta} \ln Z.$$

Ricordando l'espressione per la somma di una serie geometrica di ragione q (< 1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},$$

si ha:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h \nu})^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta h \nu}}$$

e, quindi:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= -(1 - e^{-\beta h \nu}) \frac{-h \nu e^{-\beta h \nu}}{(1 - e^{-\beta h \nu})^2} \\ &= h \nu \frac{e^{-\beta h \nu}}{1 - e^{-\beta h \nu}} = \frac{h \nu}{e^{\beta h \nu} - 1} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Si vede, quindi, che, a differenza del caso classico, l'ipotesi di Planck conduce ad un'energia media degli oscillatori che dipende sia da T che da ν . È proprio questa dipendenza dalla frequenza che consente di eliminare la divergenza del numero di oscillatori ad alte frequenze (la celebre catastrofe ultravioletta). Infatti, per avere l'espressione finale della densità spettrale d'energia, sarà sufficiente moltiplicare l'energia media ad una data frequenza di oscillazione per il corrispondente numero di *modi* di oscillazione possibili. Quest'ultimo è dato dal calcolo di Rayleigh-Jeans che, ribadiamolo, pur portando all'assurdo di energia infinita ad alte frequenze, non è in alcun modo sbagliato. Si ottiene, quindi:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8 \pi \nu^4}{c^4} \frac{h \nu}{e^{h \nu / (k T)} - 1}. \quad (1.13)$$

A questo punto qualcosa di molto familiare dovrebbe saltare all'occhio. Infatti, riscrivendo la (1.13) in termini della lunghezza d'onda ($\nu = c/\lambda$), e tenendo conto che $\Psi_\lambda = c \rho$, otteniamo:

$$\Psi_\lambda = \frac{8 \pi}{\lambda^5} \frac{h c}{e^{h c / (\lambda k T)} - 1} \quad (1.14)$$

che, posto $C = 8 \pi h c$ e $C' = h c / k$, riproduce esattamente l'equazione “fortunata” di Planck (cfr. Eq. (1.9)). Inoltre, partendo dall'Eq. (1.13) e facendone i limiti per λ molto grande e λ molto piccola, si ottengono (cfr. Appendice

B), rispettivamente, la formula di Rayleigh-Jeans (che ben si adatta ai dati nel limite di lunghezze d'onda elevate) e quella di Wien (che è in accordo con le misure per valori di lunghezza d'onda piccole).

Lo spettro di Planck si adatta perfettamente alle misure sperimentali per tutti i valori di lunghezza d'onda e tutte le costanti sono automaticamente determinate. L'assunzione del carattere discreto della Natura sembra funzionare alla perfezione.

Non è difficile immaginare lo sgomento della comunità scientifica nel leggere la relazione che Planck presentò, il 14 dicembre 1900 (data ritenuta da molti come quella della vera nascita della meccanica quantistica), in occasione di una riunione della Società di Fisica di Berlino. Per anni, tutti i più brillanti fisici teorici (e non) rimasero scettici nei confronti della teoria quantistica introdotta da Planck. Essi fallirono ripetutamente nel tentativo di falsificare quella che sembrava essere una mera assunzione formale per la risoluzione matematica del problema di corpo nero. Tra tutti, il più scettico era proprio Planck stesso¹³, che cercò (invano) di trovare dei punti deboli nel suo approccio per il resto della sua esistenza, come evidenziato da una nota nella sua autobiografia: *“Ho provato per moltissimi anni a salvare la fisica dai livelli discontinui dell'energia”*. Fa davvero riflettere la scelta del termine *“salvare la fisica”*. Comprensibilmente, l'assimilazione di una teoria così rivoluzionaria non è affatto facile. Nonostante la difficoltà di comprendere tutte le implicazioni che la negazione della continuità dell'energia avrebbe comportato, già alla fine del primo decennio del XX secolo, tutti concordavano sul fatto che l'ipotesi quantistica fosse necessaria per giungere all'espressione di Planck, che di fatto continuava a resistere a *tutti* i confronti con i risultati sperimentali.

Soltanto una persona comprese il potenziale dei quanti di energia: Albert Einstein. Già nel 1905 (appena cinque anni dopo la scoperta di Planck), l'allora ventiseienne impiegato dell'Ufficio Brevetti di Berna impresso la svolta decisiva per l'affermazione dell'ipotesi quantistica. Egli, infatti, pubblicò un articolo, dal titolo: *“Su di un punto di vista euristico, concernente la produzione e la trasformazione della luce”*, che gli valse l'assegnazione del Premio Nobel per la Fisica nel 1921, nel quale uno degli argomenti trattati (in realtà, solo uno tra i cinque di quell'articolo) era la spiegazione teorica dell'effetto fotoelettrico (altro problema aperto, non giustificabile in chiave classica)¹⁴. Sulla base dell'ipotesi quantistica, Einstein propose una teoria perfettamente in grado di spiegare tutte le osservazioni sperimentali. Nell'articolo si legge:

¹³Proprio per tale aspetto paradossale, Planck è stato incluso nella categoria dei “rivoluzionari riluttanti”.

¹⁴Come chiariremo in sezione 2.6, la spiegazione dell'effetto fotoelettrico non richiede la quantizzazione della radiazione incidente, ma solo della materia.

“La teoria ondulatoria della luce, che fa uso di funzioni spaziali continue, si è verificata ottima per quel che riguarda i fenomeni puramente ottici e sembra veramente insostituibile in questo campo. Tuttavia [...] è pensabile che la teoria della luce, fondata su funzioni spaziali continue, possa entrare in conflitto con l’esperienza, qualora venga applicata ai fenomeni di emissione e trasformazione della luce. Infatti mi sembra che le osservazioni compiutesi sulla radiazione di corpo nero, la fotoluminescenza, l’emissioni di raggi catodici tramite luce ultravioletta e altri gruppi di fenomeni relativi all’emissione ovvero la trasformazione di luce, risultino molto più comprensibili se vengono considerate in base all’ipotesi che l’energia sia distribuita nello spazio in modo discontinuo.”

Le equazioni proposte da Einstein fornivano anche un modo alternativo per ottenere il valore della costante di Planck, assolutamente compatibile con i valori ricavati da Planck dall’analisi dei dati sperimentali (dal confronto con la costante di Stefan-Boltzmann). Ad oggi, la costante di Planck è nota con grande precisione, e ha il valore:

$$h = 6,62606957(29) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

L’articolo di Einstein suscitò grande interesse, ma ricevette dure critiche, anche dallo stesso Planck che non decideva ad arrendersi al successo della sua teoria. In un primo momento Planck non esitò a criticare Einstein per aver “troppo superato” i limiti della sua teoria, senza cercare alcun contatto con la dinamica classica. Solo successivamente Planck dovette ammettere che: *“Le sue speculazioni l’avevano spinto troppo in là talvolta, ad esempio per quanto riguarda la sua ipotesi dei fotoni, tuttavia non si deve dare troppa importanza a questo fatto. Infatti, le scienze esatte progredirebbero ben poco se nessuno osasse correre dei rischi.”* In definitiva, la spiegazione dell’effetto fotoelettrico aprì la strada allo sviluppo della teoria quantistica che, già nel 1927, anno in cui si svolse la celebre conferenza di Solvay, può considerarsi completa. In Fig. 1.7 è riportata la foto ufficiale di tutti i partecipanti alla conferenza. Praticamente *ognuno* di loro è passato alla storia per aver dato un contributo fondamentale alla costruzione della meccanica quantistica (tra i più famosi si riconoscono ad esempio: Planck, Einstein, Pauli, Dirac, Heisenberg, Schrödinger, Bohr, De Broglie, Curie e Lorentz).

Dunque, nel 1927, i problemi cruciali della crisi della meccanica classica sono stati tutti risolti grazie all’ipotesi di Planck: spettro di corpo nero, effetto fotoelettrico e spettri atomici¹⁵ sono perfettamente spiegati grazie all’introduzione della quantizzazione dell’energia. Planck dovette dunque arrendersi

¹⁵Grazie alla quantizzazione del momento angolare orbitale, Bohr riuscì a fornire un modello atomico soddisfacente, in grado di spiegare sia la stabilità degli atomi, che gli spettri di emissione e assorbimento dei gas (vedi capitolo 2).

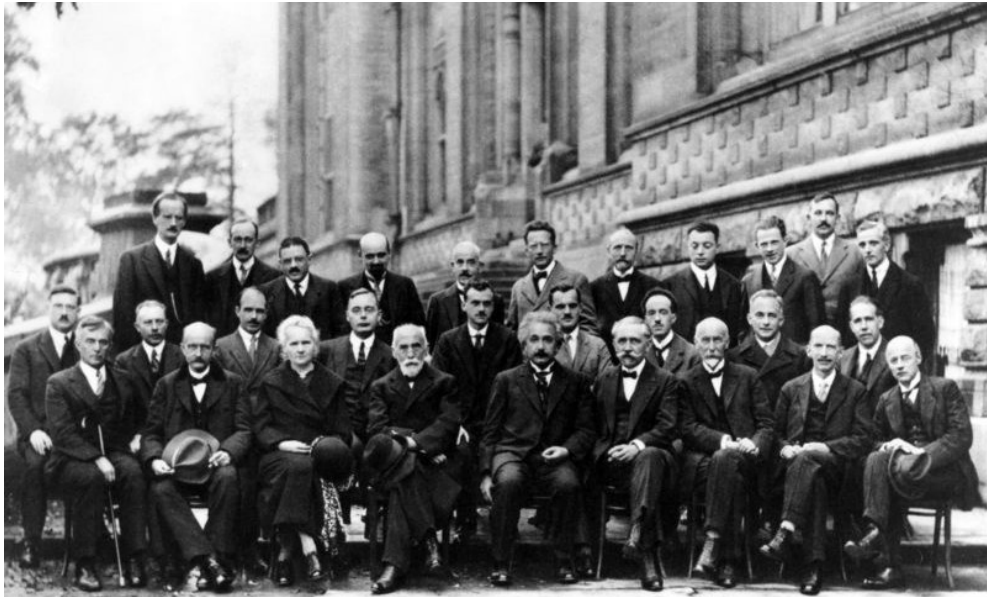


Figura 1.7: Foto di gruppo dei partecipanti alla conferenza Solvay del 1927.

a se stesso. L'ipotesi quantistica era un'ipotesi valida. La sua costante, divenuta tra le fondamentali della fisica (al pari della velocità della luce e della costante di gravitazione universale), assunse un ruolo cruciale nello sviluppo della teoria: essa determina sia il quanto fondamentale di radiazione, sia la scala di grandezza a cui i fenomeni naturali diventano “*quantistici*”.

Appendice A

Consideriamo una scatola cubica di spigolo L . Assumiamo che essa non contenga cariche e correnti elettriche e che la superficie interna delle sue pareti sia perfettamente riflettente. Si può dimostrare che il campo di radiazione all'interno della scatola ha la seguente dipendenza funzionale dalla coordinata spaziale $\vec{r} = (x, y, z)$:

$$\vec{E}(\vec{r}) \propto \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})$$

dove \vec{k} è il vettore d'onda, per il quale risulta:

$$k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Otterremo un campo stazionario imponendo che esso si annulli sulle pareti della scatola, ovvero che risulti:

$$\sin(k_x x) = \sin(k_y y) = \sin(k_z z) = 0$$

da cui si ottiene:

$$k_x = n_x \frac{\pi}{L}, \quad k_y = n_y \frac{\pi}{L}, \quad k_z = n_z \frac{\pi}{L}, \quad (1.15)$$

con $n_{x,y,z}$ interi positivi. Ogni possibile soluzione stazionaria, risulta, quindi, individuata dalla tripletta (n_x, n_y, n_z) , ovvero sarà rappresentata da un “nodo” di un reticolo tridimensionale. Introdotta una distanza in questo particolare spazio:

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2},$$

il numero di punti all'interno dello strato sferico compreso tra n e $n + dn$, sarà dato da¹⁶:

$$4\pi n^2 dn.$$

Poiché $n_x, n_y, n_z > 0$, occorre limitarsi ad un solo ottante dello strato, per cui si ha:

$$d\mathcal{N} = \frac{\pi}{2} n^2 dn. \quad (1.16)$$

Tenendo conto della (1.15), risulta inoltre:

$$n = \frac{L}{\pi} k$$

¹⁶Lo spazio è discreto ma applichiamo la formula valida nel caso di uno spazio tridimensionale continuo. La differenza è trascurabile per n sufficientemente grande.

per cui:

$$dn = \frac{L}{\pi} dk$$

e, quindi, la (1.16) può essere riscritta come:

$$d\mathcal{N} = \frac{\pi}{2} \frac{L^2}{\pi^2} k^2 \frac{L}{\pi} dk = \frac{L^3}{2\pi^2} k^2 dk.$$

Infine, tenendo conto della relazione $k = 2\pi/\lambda$ e delle due diverse direzioni di polarizzazione associate a ogni un'onda elettromagnetica, abbiamo:

$$d\mathcal{N} = \frac{L^3}{2\pi^2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{2\pi}{\lambda^2} (2 d\lambda) = L^3 \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

e, quindi ($V = L^3$):

$$n_\lambda = \frac{1}{V} \frac{d\mathcal{N}}{d\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^4}.$$

Appendice B

Consideriamo la distribuzione di Planck scritta in termini della lunghezza d'onda λ (cfr. (1.13)):

$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}. \quad (1.17)$$

Da questa è possibile ricavare le leggi di Wien e Rayleigh-Jeans semplicemente calcolando il limite di questa funzione al tendere della lunghezza d'onda a zero e infinito, rispettivamente. Indicata con λ_{peak} la lunghezza d'onda per il quale lo spettro consegue il proprio massimo, risulta:

- Limite per piccole lunghezze d'onda ($\lambda \ll \lambda_{\text{peak}}$)
Se λ è molto piccolo, allora $e^{hc/(\lambda kT)} \gg 1$. Quindi, il denominatore dell'Eq. (1.17) è approssimato dal termine esponenziale, per cui:

$$\rho(\lambda, T) \approx \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hc/(\lambda kT)}} = C e^{-C'/(\lambda T)} \quad (1.18)$$

ovvero la legge di Wien (con le costanti C e C' determinate).

- Limite per lunghezze d'onda grandi ($\lambda \gg \lambda_{\text{peak}}$)
Se λ è molto grande, allora l'esponente di $e^{hc/(\lambda kT)}$ è molto piccolo. In tali condizione, l'esponenziale può essere sviluppato in serie di Taylor:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Se ci limitiamo a considerare solo il primo ordine (ovvero si approssima e^x con $1 + x$), il denominatore di Eq. (1.17) è approssimato da:

$$1 + \frac{hc}{\lambda kT} - 1 = \frac{hc}{\lambda kT},$$

per cui, si ha:

$$\rho(\lambda, T) \approx \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{hc/(\lambda kT)} = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT$$

ovvero, esattamente la legge di Rayleigh-Jeans.

