# Radiazione di corpo nero

La radiazione emessa da un corpo, come effetto della sua temperatura, é detta **radiazione termica**. Un corpo non isolato emette ed assorbe radiazione dall'ambiente circostante. In condizioni di equilibrio termico la quantitá di radiazione emessa é uguale a quella assorbita e la temperatura rimane costante. Lo spettro della radiazione termica dipende fortemente dalla temperatura e, in modo minore, dalla natura del corpo. Un corpo che assorbe tutta la radiazione incidente su di esso é detto **corpo nero**. Lo spettro della radiazione emessa da un corpo nero ha carattere universale, cioé dipende solo dalla temperatura $T$. Un esempio di corpo nero é costituito da una cavitá racchiusa da una parete metallica in cui é presente un foro, molto piccolo rispetto alle dimensioni della cavitá. La radiazione incidente dall'esterno attraverso il foro viene riflessa ed eventualmente assorbita dalle pareti e solo una una frazione trascurabile sará riemessa, quindi la cavitá si comporta come un perfetto assorbitore. Supponiamo che le pareti della cavitá siano in equlibrio termico a temperatura $T$. La radiazione emessa dal foro é un campione fedele della radiazione all'interno della cavitá e quindi caratterizza lo spettro di radiazione di **corpo nero** a temperatura $T$. Lo spettro emesso dal foro $R_T(\nu)$, nell'intervallo di frequenza $\nu$ e $\nu + d\nu$, (radianza spettrale) é, a meno di un fattore moltiplicativo dimensionale, uguale alla densitá di energia della cavitá $\rho_T(\nu)$, che in seguito chiameremo **densitá di radiazione di corpo nero**. Lo spettro di corpo nero, vedi Fig. 1, e Fig. 3 é descritto fenomenologicamente da una legge empirica, legge di Wien, e dalla legge di Stefan, ricavata dapprima empiricamente, ma che puó essere dedotta da considerazioni di termodinamica. La descrizione teorica, nell'ambito della fisica classica, é data dalla legge di Rayleigh-Jeans.

## 1 La legge di Wien

La legge (di spostamento) di Wien afferma che la frequenza massima, $\nu_{max}$, di uno spettro di corpo nero a temperatura $T$ cresce linearmente con $T$

$$\nu_{max} \propto T \qquad \text{o} \qquad \lambda_{max}\, T = cost. \tag{1}$$

dove $\nu_{max}\, \lambda_{max} = c$ ($c$ velocitá della luce). Quindi al crescere di $T$ la frequenza massima $\nu_{max}$ (la lunghezza d'onda $\lambda_{max}$) si sposta verso valori piú grandi (rispettivamente verso valori piú bassi), vedi Fig. 1.

## 2 La legge di Stefan

La legge di Stefan afferma che l'integrale della radianza spettrale $R_T(\nu)$ su tutto lo lo spettro di $\nu$, cioé l'energia totale emessa per unitá di area e per unitá di tempo cresce con la quarta potenza di $T$ (espressa in gradi assoluti o Kelvin)

$$R_T = \int_0^\infty R_T(\nu)\, d\nu = \sigma\, T^4 \tag{2}$$

$R_T$ é chiamta la **radianza** e $\sigma$, la **costante di Stefan-Boltzmann** vale

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ W/m^2 K^4 \tag{3}$$

## 3 La legge di Rayleigh-Jeans

Vogliamo calcolare, sulla base della fisica classica, la densitá di energia elettromagnetica, nell'intervallo di frequenza $\nu$, $\nu + d\nu$, in una cavitá metallica in equilibrio a temperatura $T$. Si consideri una cavitá metallica, per semplicitá un cubo di lato $L$, in equilibrio termico alla temperatura $T$. Gli elettroni nelle pareti della cavitá, a causa del moto accelerato per effetto dell'agitazione termica, emettono radiazione elettromagnetica. Per l'ipotesi di equilibrio la radiazione assorbita ed emessa da una parete sono uguali. Non é necessario studiare in dettaglio il moto degli elettroni, ma possiamo studiare la configurazione delle onde elettromagnetiche nella cavitá. In una cavitá metallica, per le condizioni sulle superfici, le onde elettromagnetiche possono esistere come onde stazionarie. Scegliendo tre spigoli del cubo orientati come una terna di assi cartesiani si ha, per esempio ($c = \omega/k, \omega = 2\pi\nu, k = 2\pi/\lambda$)

$$E_x(\vec{x}, t) \propto \cos k_x x \ \sin k_y y \ \sin k_z z \ \sin \omega t \tag{4}$$

Imponendo che $E_x(\vec{x}, t)$ si annulli per ogni valore di $x, t$ sulle pareti del cubo a $y = 0, L$ e $z = 0, L$, si ha

$$\begin{aligned} \sin k_y L &= 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k_y L = \frac{n_y \pi}{L} \\ \sin k_z L &= 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k_z L = \frac{n_z \pi}{L} \end{aligned} \tag{5}$$

con $n_y, n_z \in \mathbf{Z}_+$. Con analoghe considerazioni sulle altre componentin del campo elettrico si conclude che le onde elettromagnetiche permesse sono quelle il cui vettore d'onda $\vec{k}$ soddisfa

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \qquad \vec{k} = \frac{\pi}{L}(n_1, n_2, n_3) \qquad n_i \in \mathbf{Z_{>0}} \tag{6}$$

Fissato un $\vec{k}$ dobbiamo calcolare il numero $dN$ di onde stazionarie comprese nell'intervallo $[k, k + dk]$. Per grandi valori di $k$, possiamo considerare $k$ come una variabile continua ed il calcolo del numero di onde stazionarie si riduce a calcolare il volume del guscio sferico compreso tra $k + dk$ e $k$ nell'ottante con con $k_i \geq 0$

$$dN = \frac{1}{8} \frac{\text{volume guscio sferico in k-spazio}}{\text{unitá di volume in k-spazio}} = \frac{4\pi k^2 dk}{8(\pi/L)^3} \tag{7}$$

Il fattore 1/8 é dovuto all'ottante positivo. L'espressione eq.(7) va moltiplicata per 2 perché le onde elettromagnetiche sono onde trasversali ed hanno due possibili direzioni di polarizzazione, quindi si ha ($\omega = ck = 2\pi\nu$)

$$dN = \frac{L^3 k^2 dk}{\pi^2} = \frac{L^3 \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} = \frac{8\pi L^3 \nu^2 d\nu}{c^3} \tag{8}$$

La densitá di energia nell'intervallo di frequenza $[\nu,\nu + d\nu]$ si calcola moltiplicando l'eq.(8), densitá degli stati, per l'energia media di ogni stato alla temperatura $T$ e dividendo per il volume $L^3$. L'energia media $< E >$ classicamente si calcola con la distribuzione di Boltzmann, che da la probabilitá che uno stato in equilibrio termico a temperatura $T$ abbia l'energia $E$ ( $k_B = 1,38 \cdot 10^{16}\ erg/K$ é la costante di Boltzmann).

$$P(E) = N\, e^{-E/k_B T} \tag{9}$$

La condizione di normalizzazione

$$\int_0^\infty P(E)\, dE = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad N = \frac{1}{k_B T} \qquad \Longrightarrow \qquad P(E) = \frac{e^{-E/k_B T}}{k_B T} \tag{10}$$

Quindi si ha

$$< E > = \int_0^\infty E\, P(E)\, dE = k_B T \tag{11}$$

in accordo con il valore medio per l'energia totale di un oscillatore unidimensionale

$$< E >_{tot} = < E >_{cin} + < E >_{pot} \qquad < E >_{cin} = < E >_{pot} = \; k_B T/2 \tag{12}$$

Quindi, moltiplicando per $k_B T$, l'eq.(8) si trova

$$\rho_T(\omega)\, d\omega = k_B T\, \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \iff \rho_T(\nu)\, d\nu = k_B T\, \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \tag{13}$$

L'eq.(13) é in accordo con la curva sperimentale solo per piccoli valori di $\nu$. Inoltre l'integrale in $d\omega$ (o in $d\nu$) dell'eq.(13) diverge, mostrando una inconsistenza del calcolo classico.

# 4 La formula di Planck

Nel 1900 Max Planck formuló l'ipotesi che l'energia di una onda elettromagnetica di frequenza $\nu$, in una cavitá, puó assumere solo valori discreti, multipli interi di $h\nu = \hbar\omega$, cioé $E_n = nh\nu$ dove $h = 6,62 \cdot 10^{-34}\; joule \cdot sec$ é una costante dimensionale, chiamata adesso costante di Planck ($\hbar = h/2\pi$). Da questa ipotesi ne consegue che l'energia media non deve essere calcolata con un integrale su i valori continui positivi di $E$, pesati con la distribuzione di Boltzmann $P(E)$ eq.(9), ma come somma di una serie su tutti i valori discreti $E_n$, pesati con $P(E_n)$. Assumendo valida la distribuzione di Boltzmann eq.(9) si ha ($E_n = nh\nu$)

$$< E > = \frac{\sum_0^\infty E_n\, P(E_n)}{\sum_0^\infty P(E_n)} \tag{14}$$

Con $\alpha = h\nu/k_B T$ l'eq.(14) diventa

$$< E > = \; k_B T\, \frac{\sum_0^\infty n\alpha\, e^{-n\alpha}}{\sum_0^\infty e^{-n\alpha}} \tag{15}$$

L'eq.(15) si calcola facilmente notando che

1. Il fattore che moltiplica $k_B T$ nel lato destro dell'eq.(15) si puó scrivere come

$$-\alpha\, \frac{d}{d\alpha}\, ln \sum_0^\infty e^{-n\alpha} = \frac{\sum_0^\infty n\alpha\, e^{-n\alpha}}{\sum_0^\infty e^{-n\alpha}} \tag{16}$$

2. sommando la serie che appare nel lato sinistro dell'eq.(16) ($X = e^{-\alpha}$)

$$\sum_0^\infty e^{-n\alpha} = \sum_0^\infty X^n = (1 - X)^{-1} \tag{17}$$

3. calcolando la derivata del logaritmo naturale della somma della serie eq.(17)

$$\frac{d}{d\alpha}\, ln\, (1 - e^{-\alpha})^{-1} = (-1) \frac{1}{(1 - e^{-\alpha})^{-1}} (1 - e^{-\alpha})^{-2} e^{-\alpha} = \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \tag{18}$$

Inserendo l'eq.(15)-(18) nell'eq.(14) si trova

$$< E > = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \tag{19}$$

Moltiplicando la densitá degli stati eq.(8) per l'energia media calcolata in eq.(19) e dividendo per il volume $L^3$ Planck ricavó la formula per densitá di energia del corpo nero

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \tag{20}$$

che é in ottimo accordo con la curva sperimentale, Fig. 2. Si noti che l'integrale indefinito dell'espressione eq.(20) esiste in quanto

$$\rho_T(\nu)_{\nu\to\infty} \sim \nu^3 \, e^{-h\nu/k_B T} \to 0 \tag{21}$$

Si noti che

$$\nu = c/\lambda \implies d\nu = -(c/\lambda^2) d\lambda \implies \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \tag{22}$$

quindi la formula di Planck eq.(20) per la distribuzione spettrale della radiazione espressa in lunghezza d'onda si scrive

$$\rho_T(\lambda) \, d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \tag{23}$$

# 5 Conseguenze della formula di Planck

Utilizzando l'eq.(20) é possibile ricavare la legge di Wien, di Stefan e la legge di Rayleigh-Jeans come limite per $\nu \to 0$.

- La legge di Wien

  Imponendo che la derivata rispetto a $\nu$ dell'eq.(20) si annulli si determina $\nu_{max}$ e $\lambda_{max} = c/\nu_{max}$.

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_T(\nu)}{d\nu} = 0 \quad &\implies \quad \left(3\nu^2 - \nu^3 \frac{h}{k_B T} e^{h\nu/k_B T} (e^{h\nu/k_B T} - 1)^{-1}\right) = 0 \\ &\implies \quad 3(e^\alpha - 1) - \alpha \, e^\alpha = 0 \implies e^\alpha (1 - \alpha/3) = 1 \end{aligned} \tag{24}$$

  Per trovare la soluzione dell'eq.(24) occorre risolvere l'equazione trascendente

$$e^{-\alpha} = (1 - \alpha/3) \implies \alpha \sim 2.8 \implies \lambda_{max} \, T = 0.29 \, cmK \tag{25}$$

  La soluzione dell'equazione si trova graficamente cercando il valore di $\alpha$ per il quale la retta $1 - \alpha/3$ intercetta la curva esponenziale $e^{-\alpha}$. Il valore $\alpha = 0$ va scartato perch corrisponde ad $\nu = 0$ (minimo della curva).

- La legge di Stefan

  Calcoliamo la radianza usando l'eq.(20), ricordando che la radianza spettrale é proporzionale alla densitá d'energia

$$R_T \propto \int_0^\infty \rho_T(\nu) \, d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \, d\nu \tag{26}$$

Cambiando variabile

$$\alpha = h\nu/k_B T \quad \Longrightarrow \quad k_B T/h \, d\alpha = d\nu \tag{27}$$

L'eq.(26 si scrive

$$R_T \propto \frac{8\pi h}{c^3} \left( \frac{k_B T}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{\alpha^3 \, e^{-\alpha} \, d\alpha}{1 - e^{-\alpha}} \tag{28}$$

L'eq.(28) mostra una proporzionalitá tra la radianza e la quarta potenza della temperatura, in quanto l'integrale indefinito é un numero. Tale integrale si puó esplicitamente calcolare mediante uno sviluppo in serie di potenze del denominatore dell'integrando

$$(1 - e^{-\alpha})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \tag{29}$$

Inserendo tale espressione l'integrale in $\alpha$ dell'eq.(28) diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \alpha^3 \, e^{-n\alpha} \, d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3!}{n^4} = \frac{\pi^4}{15} \tag{30}$$

Si ricordi che

$$\int_0^\infty x^n \, e^{-qx} dx = \frac{n!}{q^{n+1}} \tag{31}$$

- La legge di Rayleigh-Jeans

  Se $h \, \nu << k_B \, T$ possiamo sviluppare l'esponenziale che appare nel denominatore dell'eq.(20) e fermarci al primo ordine

$$\rho_T(\nu)_{\nu \to 0} \sim k_B T \, \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \tag{32}$$

  che é la legge classica vedi eq.(13). Si ricordi che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 \ldots \tag{33}$$

  Si noti che la disuguaglianza $h \, \nu << k_B \, T$ é verificata a basse frequenze e per ogni valore di $\nu$ se $h \to 0$, limite classico.


Bibliografia di riferimento:

Per il corpo nero:

Eisberg-Resnick: *Quantum Physics* - Cap. 1

Per le onde elettromagnetiche in una cavitá:

Caldirola: *Introduzione alla Fisica Teorica*