

Planck_e_il_corpo_nero

April 16, 2020

Table of Contents

- 1 Introduzione al problema del corpo nero
 - 1.1 Un po' di storia..
 - 1.2 Kirchhoff
 - 1.3 legge di Rayleigh-Jeans
 - 1.3.0.1 La legge di Wien
 - 1.3.0.2 Legge di stefan-Boltzmann
- 2 Dimostrazione della formula di Planck
 - 2.1 Ipotesi
 - 2.1.1 Ipotesi di quantizzazione - Planck
 - 2.1.2 Fattore di Boltzmann
 - 2.1.2.1 $h\nu \ll k_B T$
 - 2.1.2.2 $h\nu = k_B T$
 - 2.1.2.3 $h\nu > k_B T$
 - 2.2 L'equilibrio termodinamico ed energia del corpo nero
 - 2.2.1 Studiamo il denominatore
 - 2.2.2 Studiamo il numeraore
 - 2.3 L'energia media e la distribuzione di Planck
 - 2.4 la densità di energia - distribuzione di Planck
- 3 Conseguenze della formula di Planck
 - 3.1 La legge di Wien
 - 3.2 La legge di Stefan
 - 3.3 La legge di Rayleigh-Jeans

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import Image
from IPython.display import IFrame
from scipy.constants import h, c, k, pi
```

1 La legge di Planck

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

1.1 Introduzione al problema del corpo nero

1.1.1 Un po' di storia..

Tutti noi abbiamo esperienza del fatto che una brace gialla in un camino ardente (1400 – 1600 C) risulta più calda di una brace rossa di un camino in via di spegnimento (1200 – 1300 C). All'aumentare della temperatura, il colore della luce emessa si sposta dal rosso verso il blu. La correlazione tra il colore della radiazione termica emessa e la temperatura di oggetti incandescenti, incuriosì l'astronomo anglo-tedesco William Herschel che, già nel 1800 (prima dell'insorgere delle necessità industriali di cui si è appena parlato), effettuò una scoperta sorprendente. Facendo passare la luce del Sole attraverso un prisma e, facendo in modo che ognuno dei colori in cui veniva scomposta la luce andasse a colpire uno solo dei diversi termometri disposti su di un banco, si accorse che i termometri non indicavano tutti la stessa temperatura. Si tratta della prima evidenza del fatto che l'intensità della radiazione che proviene dal Sole è diversa per ognuna delle lunghezze d'onda incidenti. In particolare, la **distribuzione spettrale della radiazione emessa dal Sole, assomiglia moltissimo a quella del già citato corpo nero.**

In realtà, ogni corpo che non si trovi in equilibrio termico con l'ambiente che lo circonda, emette radiazione in forma di comune calore. Il fenomeno è riconducibile all'oscillazione delle cariche del corpo stesso che, in accordo con la teoria di Maxwell (e le osservazioni di Hertz) muovendosi emettono radiazione, rallentando. In questo modo il corpo si raffredda.

1.1.2 Kirchhoff

Planck riconoscerà l'importanza del modello di Kirchhoff per lo sviluppo della sua teoria, affermando: *Kirchhoff ha dimostrato che lo stato della radiazione termica all'interno di una cavità delimitata da una sostanza, di qualsiasi natura, che la assorbe e la emette, a una temperatura uniforme, è totalmente indipendente dalla natura della sostanza stessa. È stata così dimostrata l'esistenza di una funzione universale che dipende solo dalla temperatura e dalla lunghezza d'onda (come dalla frequenza), ma in nessun modo dalle proprietà di alcuna sostanza. La scoperta di tale funzione straordinaria prometteva una comprensione più profonda della relazione tra energia e temperatura che è di fatto, il problema più importante della termodinamica e, di conseguenza, di tutta la fisica molecolare.*

1.1.3 legge di Rayleigh-Jeans

Lord Rayleigh vuole ricavare la funzione che descrive l'energia per unità di volume e di lunghezza d'onda che viene emessa all'interno del corpo nero posto ad una temperatura T . Ossia vuole

ricavare

$$I(\lambda, T)$$

Sapendo che valgono le leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann

La legge di Wien La legge dello spostamento di Wien è:

$$\lambda_{max} T = b; \quad b \text{ è una costante misurata empiricamente, detta costante di Wien } b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Legge di Stefan-Boltzmann La potenza per unità di area totale irradiata da un corpo che si trova ad una data temperatura è:

$$I_{tot}(T) = \sigma \cdot T^4; \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

Si tratta, comunque, di un approccio di tipo classico, basato sulla possibilità di **assorbire ed emettere radiazione in cavità (ad ogni lunghezza d'onda), solo per mezzo di onde elettromagnetiche stazionarie.**

Per onda stazionaria s'intende un'onda che non si propaga lungo una fissata direzione spaziale, ma oscilla soltanto nel tempo. Essa presenterà dunque dei punti in cui è fissa e di ampiezza nulla, detti nodi.

Nel modello di Rayleigh: 1. i nodi delle onde stazionarie si trovano sempre sulle pareti della cavità 2. ogni trasmissione di energia all'interno della cavità è vincolato ad avvenire per mezzo di un'onda stazionaria.

Su questa base, egli associò ogni onda a un oscillatore armonico unidimensionale (l'oscillazione armonica è legata all'oscillazione del campo elettrico). In questo modo, la densità spettrale d'energia $u_\nu(T)$, ovvero l'energia per unità di volume in un intervallo infinitesimo di lunghezza d'onda, sarà ottenuta come prodotto tra la densità di volume n_λ dei modi di lunghezza d'onda compresa tra λ e $\lambda + d\lambda$ e l'energia media $\langle \epsilon_\lambda \rangle$ di un oscillatore, ovvero:

$$\rho = n_\lambda \langle \epsilon_\lambda \rangle .$$

Utilizzando il principio di equipartizione e l'ipotesi di un campo elettromagnetico formato da onde stazionarie Rayleigh arriva alla conclusione che La densità di energia u_ν per unità di intervallo di frequenza a una frequenza ν è, secondo The Rayleigh-Jeans Radiation,

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi}{c^2} \nu^2 k_b T$$

Per una dimostrazione [legge di Rayleigh-Jeans](#)

Che porta al problema della catastrofe ultravioletta e la mancanza di accordo con i dati sperimentali a frequenze elevate.

1.2 Dimostrazione della formula di Planck

1.2.1 Ipotesi

Ipotesi di quantizzazione - Planck L'energia del campo magnetico all'interno della cavità, all'equilibrio, non può prendere qualsiasi valore, ma può assumere solo multipli interi di una energia *discretizzata*, un **quanto di energia** che dipende dalla frequenza e da una costante, cioè:

$$E_n = n h \nu \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \in \mathbb{N}$$

Fattore di Boltzmann Le energie vanno "pesate" con un fattore. Non tutte le energie hanno lo stesso peso. Anzi andando ad energie elevate, ovvero frequenze elevate, queste debbono necessariamente essere meno probabili. Il fattore che media è il fattore di Boltzmann

$$f(E_n) = e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$$

come ben si può vedere dal grafico, questo fattore va a pesare in modo differente energie diverse e fornisce la probabilità che in uno sistema ad una temperatura T ci sia un oscillatore, o un modo del campo elettromagnetico, con energia $h\nu$.

$h\nu \ll k_B T$ Per capire il grafico fissiamo una temperatura T e pensiamo a 3 regimi diversi:

Abbiamo quindi una suddivisione delle energie in molti intervalli piccoli

$h\nu = k_B T$ Come si può notare se andiamo ad una energia per cui $k_B T = h\nu$ allora il fattore si

$h\nu > k_B T$

1.2.2 L'equilibrio termodinamico ed energia del corpo nero

All'equilibrio termodinamico vogliamo conoscere l'energia media $\langle E \rangle$, quindi:

L'energia media è data da:

$$\langle E \rangle = \frac{\text{somma delle energie di tutti gli stati nella cavità} \times \text{peso di ogni energia}}{\text{numero totale degli stati} \times \text{peso di ogni energia}} \quad (1)$$

Ricordando che: 1. $E_n = n h \nu$; energia dello stato 2. $f(E_n) = e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$; peso dello stato n -esimo

Otteniamo che:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n E_n \cdot f(E_n)}{\sum_n f(E_n)} = \frac{\sum_n E_n \cdot e^{-\frac{E_n}{k_B T}}}{\sum_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}}} \quad (2)$$

↓

$$\frac{\sum_n nhv \cdot e^{-\frac{nhv}{k_B T}}}{\sum_n e^{-\frac{nhv}{k_B T}}} \quad (3)$$

Dobbiamo quindi capire come fare questa somma infinita che va da $n = 0$ a $n = \infty$. cioè il rapporto di due serie.

Innanzitutto facciamo una sostituzione per rendere il problema più leggibile

$$x = \frac{hv}{kT} \Downarrow \langle E \rangle = \frac{\sum_n nkTx \cdot e^{-nx}}{\sum_n e^{-nx}} \quad (4)$$

Studiamo in modo separato il denominatore ed il numeratore

Studiamo il denominatore Introduciamo la funzione

$$Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \quad (5)$$

come si può osservare è una serie geometrica

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots + e^{-nx} + \dots \quad (6)$$

Con ragione

$$q = e^{-x} \Rightarrow \text{di somma } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$\Downarrow Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

Studiamo il numeratore Il numeratore è

$$kT \sum_{n=0}^{\infty} nxe^{-nx} \quad (7)$$

Ritorniamo alla funzione $Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ e proviamo a ricavare la derivata.

$$\frac{dZ(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \quad (8)$$

Abbiamo qui la derivata di una somma, e per quanto infinita, le regole di derivazione (visto che le funzioni sono continue e derivabili in tutto \mathbb{R}) valgono ancora, e quindi la derivata della somma è la somma delle derivate:

$$\frac{dZ(x)}{dx} = - \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} \quad (9)$$

L'osservazione da fare è che quindi il numeratore e la derivata di $Z(x)$ sono uguali a meno di un fattore, cioè:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x e^{-nx} = -x \frac{dZ(x)}{dx} \quad (10)$$

1.2.3 L'energia media e la distribuzione di Planck

Sostituiamo quindi i risultati ottenuti

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n n k T x \cdot e^{-nx}}{\sum_n e^{-nx}} = \frac{-k T x \frac{dZ(x)}{dx}}{Z(x)}$$

Guardiamo bene il termine

$$\frac{\frac{dZ(x)}{dx}}{Z(x)} = \frac{1}{Z(x)} \frac{dZ(x)}{dx}$$

Dovreste accorgervi che se facciamo la derivata di

$$\frac{d \ln f(x)}{dx} = \frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}$$

E quindi

$$\frac{1}{Z(x)} \frac{dZ(x)}{dx} = \frac{d \ln Z(x)}{dx}$$

Che sostituita nel calcolo dell'energia media da:

$$\langle E \rangle = -k T x \frac{1}{Z(x)} \frac{dZ(x)}{dx} = -k T x \frac{d \ln Z(x)}{dx}$$

$$\Downarrow -k T x \frac{d \left(\ln (1 - e^{-x})^{-1} \right)}{dx} = -k T x \frac{d (-\ln (1 - e^{-x}))}{dx}$$

$$\Downarrow k T x \frac{d (\ln (1 - e^{-x}))}{dx} = k T x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

Infine operando l'ultima sostituzione otteniamo la **Legge di Planck** in funzione della frequenza della frequenza:

$$\langle E \rangle = h \nu \frac{e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}; \quad \text{Legge di Planck}$$

Si noti che

$$\nu = c/\lambda \Rightarrow d\nu = - (c/\lambda^2) d\lambda \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$$

1.2.4 la densità di energia - distribuzione di Planck

Per ottenere la densità energetica dobbiamo moltiplicare per la densità degli stati, euivalente a quelli di Raylegghi-Jeans $dN = \frac{8\pi L^3 \nu^2}{c^3} d\nu$ e dividere per il volume L^3 ,

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

che è in ottimo accordo con i dati sperimentali.

Per ricavare la densità in funzione della lunghezza d'onda si noti che

$$\nu = c/\lambda \Rightarrow d\nu = - (c/\lambda^2) d\lambda \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \quad (11)$$

quindi la formula di Planck eq. (20) per la distribuzione spettrale della radiazione espressa in lunghezza d'onda si scrive

$$u_T(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$

```
[2]: IFrame(src='https://phet.colorado.edu/sims/html/blackbody-spectrum/latest/
      ↳blackbody-spectrum_en.html', width=1000, height=800)
```

```
[2]: <IPython.lib.display.IFrame at 0x7fca49152650>
```

1.3 Conseguenze della formula di Planck

Utilizzando leq.(26) è possibile ricavare la legge di Wien, di Stefan e la legge di Rayleigh-Jeans come limite per $\nu \rightarrow 0$

1.3.1 La legge di Wien

Imponendo che la derivata rispetto a ν dell'eq. (26) si annulli si determina ν_{\max} e $\lambda_{\max} = c/\nu_{\max}$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_T(\nu)}{d\nu} = 0 &\Rightarrow \left(3\nu^2 - \nu^3 \frac{h}{k_B T} e^{h\nu/k_B T} \left(e^{h\nu/k_B T} - 1 \right)^{-1} \right) = 0 \\ &\Rightarrow 3(e^\alpha - 1) - \alpha e^\alpha = 0 \Rightarrow e^\alpha (1 - \alpha/3) = 1 \end{aligned}$$

Per trovare la soluzione dell'eq.(24) occorre risolvere l'equazione trascendente

$$e^{-\alpha} = (1 - \alpha/3) \Rightarrow \alpha \sim 2.8 \Rightarrow \lambda_{\max} T = 0.29 \text{ cmK}$$

- La soluzione dell'equazione si trova graficamente cercando il valore di α per il quale la retta $1 - \alpha/3$ intercetta la curva esponenziale $e^{-\alpha}$. Il valore $\alpha = 0$ va scartato perché corrisponde ad $\nu = 0$ (minimo della curva).

1.3.2 La legge di Stefan

Calcoliamo la radianza usando l'eq.(26), ricordando che la radianza spettrale è proporzionale alla densità d'energia

$$u_T \propto \int_0^\infty \rho_T(\nu) d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu$$

Cambiando variabile

$$\alpha = h\nu/k_B T \Rightarrow k_B T/h d\alpha = d\nu$$

L'eq.(33) si scrive

$$u_T \propto \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{\alpha^3 e^{-\alpha} d\alpha}{1 - e^{-\alpha}}$$

Leq.(33) mostra una proporzionalità tra la radianza e la quarta potenza della temperatura, in quanto l'integrale indefinito è un numero. Tale integrale si può esplicitamente calcolare mediante uno sviluppo in serie di potenze del denominatore dell'integrando (che non facciamo ma che da come risultato:

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^3 e^{-\alpha} d\alpha}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{\pi^4}{15}$$

Inserendo tale espressione l'integrale in α dell'eq.(33) diventa

$$u_T \propto \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15}$$

1.3.3 La legge di Rayleigh-Jeans

Se $h\nu \ll k_B T$ possiamo sviluppare le esponenziali che appare nel denominatore dell'eq.(26) e fermarci al primo ordine

$$u_T(\nu)_{\nu \rightarrow 0} \sim k_B T \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

che è la legge classica vedi di Rayleigh-Jeans. Si ricordi che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 \dots$$

Si noti che la disuguaglianza $h\nu \ll k_B T$ è verificata a basse frequenze e per ogni valore di ν se $h \rightarrow 0$, limite classico.

[]: