Effetto Compton

L'ipotesi di Einstein per spiegare l'effetto fotoelettrico attribuisce alla radiazione elettromagnetica una natura corpuscolare, che ha una chiara conferma sperimentale nel 1923 con gli esperimenti di Compton. Tali esperienze consistono nell'inviare un fascio di raggi X, onde elettromagnetiche di frequenza ν dell'ordine di $10^{16} - 10^{20}\, hertz$, lunghezza d'onda dell'ordine di $10^{-2} - 10^{2}$ Angstroms ($1\, A = 10^{-10}\, m$), a cui corrispondono fotoni di energia $h\nu$ dell'ordine di $10^{2} - 10^{6}\, eV$, su un cristallo (grafite) e nel misurare l'intensitá della radiazione diffusa in funzione della sua lunghezza d'onda. Compton osservó che, sebbene la radiazione incidente fosse essenzialmente monocromatica di lunghezza d'onda λ, nella radiazione diffusa era presente una nuova lunghezza d'onda λ' che differiva da λ di una quantitá funzione dell'angolo di diffusione. Tale risultato é in contraddizione con le previsioni della fisica classica. In fatti classicamente ci si aspetta che gli elettroni liberi del cristallo, sotto l'azione del campo elettrico oscillante della radiazione incidente, compiano oscillazioni della stessa frequenza e quindi emettano radiazione diffusa in tutte le direzioni, ma della stessa frequenza dell'onda incidente. Compton spiegó il risultato sperimentale assumendo che la radiazione incidente era costituita da un fascio di fotoni, considerati come particelle, di energia $E = h\nu$ ed impulso p

$$p = E/c = h/\lambda \tag{1}$$

L'urto elastico dei fotoni con gli elettroni deve soddisfare le leggi della conservazione dell'energia e dell'impulso. Possiamo assumere gli elettroni inizialmente a riposo in quanto la loro energia cinetica, dovuta alla agitazione termica, é di vari ordini di grandezza inferiore all'energia di riposo ($E_0 = m_0\, c^2 = 0.5110\, MeV$). Nel piano di collisione, xy, con l'elettrone inizialmente a riposo nell'origine ed il fotone incidente con impulso $\vec{p_i} = p_i\, \vec{e_x}$, le conservazioni dell'energia e dell'impulso, nelle direzioni x e y, si scrivono

$$E_i \,+\, E_0 = E_f \,+\, E_0 \,+\, K \tag{2}$$
$$p_i = p_f\, \cos\theta \,+\, p\, \cos\phi \tag{3}$$
$$0 = p_f\, \sin\theta \,-\, p\, \sin\phi \tag{4}$$

dove E_i, p_i, (E_f, p_f) sono l'energia e l'impulso iniziali (rispettivamente finali) del fotone e p é l'impulso dell'elettrone dopo la collisione, la cui energia, dopo la collsione, é stata scritta nell'eq.(2) come $E = E_0 + K$, somma dell'energia a riposo e dell'energia cinetica $K = p^2/2m_0$, assumendo un moto non relativistico. Si ricordi la relazione relativistica tra energia e impulso

$$E = \sqrt{(cp)^2 \,+ (mc^2)^2} \quad \Longrightarrow \quad E \sim mc^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2} + \ldots\right) \quad \text{se} \quad p << mc \tag{5}$$

Facendo il quadrato dell'eqs.(3)-(4) si ottiene

$$(p_i - p_f\, \cos\theta)^2 \;=\; p^2\, \cos^2\phi \tag{6}$$
$$p_f^2\, \sin^2\theta \;=\; p^2\, \sin^2\phi \tag{7}$$

Sommando l'eqs.(6)-(7) si ottien

$$p_i^2 \,+\, p_f^2 \,- 2p_ip_f \cos\theta = p^2 \tag{8}$$

L'eq.(2) si riscrive, utilizzando la relazione tra impulso ed energia per un fotone eq.(1),

$$c\,(p_i - p_f) \;=\; K \tag{9}$$

Per l'elettrone si ha

$$E^2 = (cp)^2 + (m_9 c^2)^2 = (m_0 c^2 + K)^2 \quad\Longrightarrow\quad K^2 \,+\, 2K m_0 c^2 = (cp)^2 \tag{10}$$

Sostituendo nell'equazione precedente K e p con l'espressioni date, rispettivamente, dall'eq.(9) e dall'eq.(8) si ha

$$(p_i - p_f)^2 + 2(p_i - p_f)m_0 c = p_i^2 \,+\, p_f^2 \,-2p_i p_f \cos\theta \tag{11}$$

che si riduce a

$$(p_i - p_f)\, m_0 c = p_i p_f\,(1 - \cos\theta) \tag{12}$$

Dividendo entrambi i membri dell'eq.(12) per $p_i p_f$, moltiplicando per h e usando la relazione tra impulso e lunghezza d'onda per un fotone, eq.(1) si ottiene la relazione di Compton che é in buon accordo con i dati sperimentali

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C\,(1 - \cos\theta) \tag{13}$$

dove λ_C, detta **lunghezza d'onda Compton**, é

$$\lambda_C = h/m_0 c = 2.43 \cdot 10^{-12}\, m = 0.0243\; A \tag{14}$$

Questi esperimenti mostrano che la radiazione é costituita da fotoni, che si comportano come particelle, ma nello stesso tempo l'esistenza dei fenomeni di interferenza richiede anche una descrizione ondulatoria della radiazione.

NOTE

- Lo spostamento della lunghezza d'onda $\Delta\lambda$ dipende dall'angolo θ di osservazione, ma non dalla lunghezza iniziale λ del fascio incidente. Si noti che $\Delta\lambda/\lambda \sim 10^{-12}/\lambda$ é una quantitá molto piccola per radiazione nel visibile o nel dominio delle onde radio ($\lambda > 10^4\; A$).

- Sperimentalmente si osserva, nelle direzioni $\theta \neq 0$, un picco corrispondente a $\lambda' = \lambda$, che é dovuto alla diffusione della radiazione incidente con elettroni che rimangono legati all'atomo. In tal caso la diffusione va descritta come l'urto di un fotone con un oggetto a riposo di massa M, data dalla massa atomica, con $M >> m_0$ (per il carbonio $M \sim 22.000\, m_0$). Per questo tipo d'urto la lunghezza d'onda incidente é praticamente la stessa in qualunque direzione e si ritrova il risultato previsto dalla fisica classica.

- Se si analizza l'effetto fotoelettrico come urto anelastico, assorbimento del fotone da parte dell'elettrone, quindi senza fotone dopo la collisione si vede che l'eqs.(2)-(4) non possono essere simultaneamente soddisfatte se $p_f = 0$. Infatti se $p_f = 0$ le eqs.(3)-(4) si scrivono

  $$p_i = p\,\cos\phi \qquad 0 = p\,\sin\phi \qquad\Longrightarrow\qquad \phi = 0, \quad p = p_i \tag{15}$$

  La conservazione dell'energia implica, usando l'eq.(15)

  $$h\nu + E_{in,el} = h\nu + mc^2 = E_{fin,el} = \sqrt{(cp)^2 \,+ (mc^2)^2} = \sqrt{(h\nu)^2 \,+ (mc^2)^2} \tag{16}$$

  che é chiaramente impossibile. Quindi un elettrone libero non puó assorbire un fotone.