Problème inverse pour la tomographie optique Applications à la mesure de turbidité

Abdou WADE

Master 2 CSMI, upervised by **Joubine Aghili**

Soutenance rapport de stage
27 août 2025

Plan

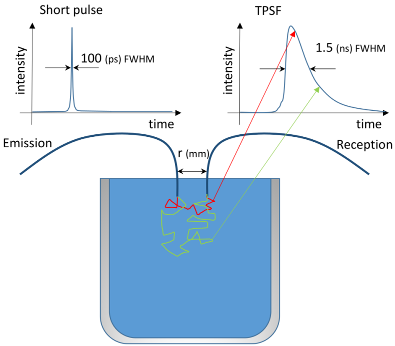
Contexte du stage

- **Stage** réalisé sous la supervision de *Joubine Aghili* au sein de l'UFR de Mathématiques et Informatique, en collaboration avec *Anne Pallarès* (ICube, Unistra), sur les problématiques de pollution de l'eau.
- Ce stage s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche financé par le **PEPR Maths-Vives** (*Programme et Équipement Prioritaire de Recherche*, France 2030), dédié à la promotion des mathématiques pour le vivant et l'environnement.
- PEPR Maths-Vives vise à soutenir des projets interdisciplinaires alliant mathématiques, modélisation et enjeux environnementaux.
- **Durée du stage :** 5 mois.

Contexte scientifique et pollution de l'eau

- **Pollution de l'eau** : un enjeu majeur pour la santé, les écosystèmes et l'environnement. Les contaminants solides en suspension peuvent transporter des polluants et dégrader la qualité de l'eau
- **Mesure de la turbidité** : indicateur clé pour évaluer la concentration en particules en suspension dans les milieux aquatiques. Elle fournit une mesure optique du trouble de l'eau liée à la présence de ces particules.
- **Turbidité (Unités de turbidité néphélométriques - NTU)** :
  - Eau potable : généralement inférieure à 1 NTU
  - Rivières peu polluées : 1 à 10 NTU
  - Eaux de surface avec pollution modérée : 10 à 100 NTU

Motivations et objectifs



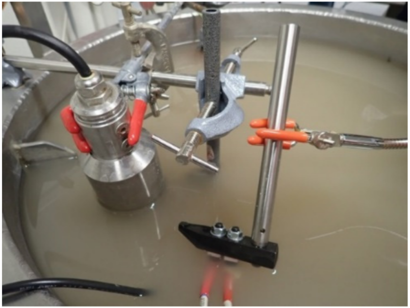


Figure – TROT[1] experimental setup, iCube, Unistra

1. Pallarès, A. et al. in *Sensors*, 2021.

Objectifs du stage

Objectif global : Estimer les paramètres optiques par filtres de Kalman à partir de mesures expérimentales de TPSF
Plan :

- Compréhension du modèle EDP
- Prise en main des filtres de Kalman
- Génération de données
- Premières estimations
- Etude de robustesse

Modèle de transfert radiatif

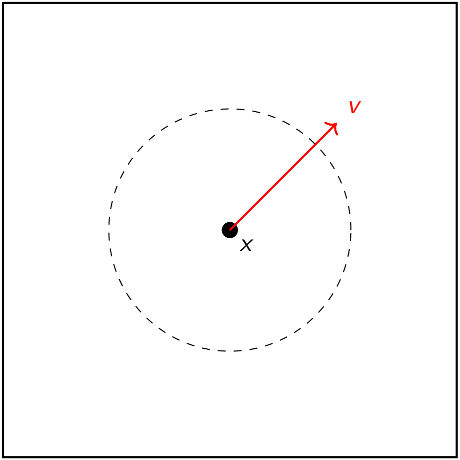
Équation de Transfert Radiatif (ETR) : cas général

La propagation de la lumière[2] est décrite par l'ETR :

$$\frac{1}{c}\partial_t u + v \cdot \nabla_x u + (\mu_a + \mu_s)u = \mu_s \int_{S^{d-1}} u(t,x,v')\, \Phi_g(v,v')\, dv' + s$$

- c : vitesse de la lumière.
- u : intensité radiative en temps t, position $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, direction $v \in S^1$.
- μ_a, μ_s : coefficients d'absorption et de diffusion(m^{-1})
- Φ_g : fonction de phase (redistribution angulaire).
- s : source lumineuse,
- paramètres : μ_a, μ_s et g.

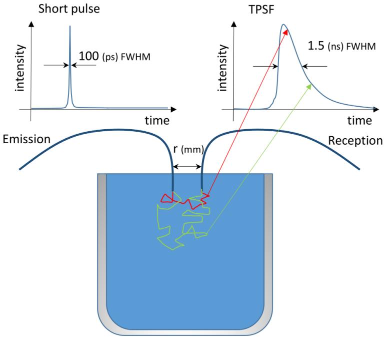
2. qu'on suppose monochromatique



u(t,x,v) : l'intensité lumineuse en ce point x, dans la direction v.

Connection with the problem

$$\frac{1}{c}\partial_t u + v \cdot \nabla_x u + (\mu_a + \mu_s) u = \mu_s \int_{S^{d-1}} u(t, x, v')\, \Phi_g(v, v')\, dv' + s$$



Ici, en notant S_{in} la section d'angle rentrant dans la fibre, on a :

- s correspond au short pulse lumineux injecté dans le milieu,
- $\displaystyle\int_{S_{\mathrm{in}}} u(\hat{x}, t, v)\, dv$ correspond à la fonction de diffusion temporelle des photons (TPSF).

Paramètres du modèle

- μ_a : Représente la probabilité par unité de longueur qu'un photon soit absorbé par une particule.
- μ_s : Quantifie la probabilité par unité de longueur qu'un photon soit diffusé (changé de direction) par une particule.

Paramètres du modèle

Le paramètre g mesure la tendance des photons à conserver leur direction initiale :

$$g = \langle \cos \theta_k \rangle$$

où θ_k est l'angle entre le rayon incident et le rayon dévié au k-ième événement de diffusion.

$\Rightarrow g \in [-1, 1]$, il quantifie l'anisotropie de la diffusion.

Fonction de phase Henyey–Greenstein

La fonction de phase Φ_g utilise g pour modéliser la redistribution angulaire.

En 2D :

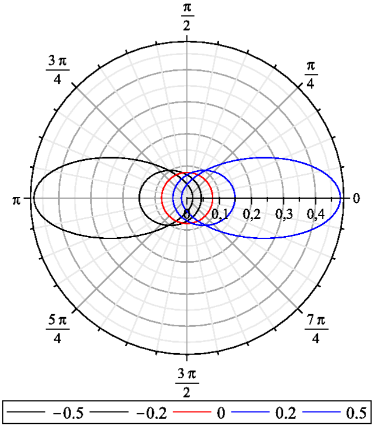
$$\Phi_{HG}^{(2D)}(v, v') = \frac{1 - g^2}{2\pi\left(1 + g^2 - 2g\, v \cdot v'\right)}$$

En 3D :

$$\Phi_{HG}^{(3D)}(v, v') = \frac{1}{4\pi(1 + g^2 - 2g\, v \cdot v')^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ Plus $|g|$ est grand, plus la diffusion est directionnelle.

Impact du paramètre g



- $g = 0$: diffusion isotrope.
- $g > 0$: diffusion avant.
- $g < 0$: diffusion arrière.

$\Rightarrow$ g contrôle la profondeur d'information et l'identifiabilité des paramètres.

Méthode des ordonnées discrètes (DOM)

- Difficulté : travailler avec x et v !
- Idée : remplacer l'intégrale angulaire par une somme discrète (quadrature).
- Domaine angulaire S^1 (cas 2D) $\Rightarrow$ K directions discrètes $\{v_l\}_{l=1}^K$ avec poids $\{\omega_l\}$.
- Le champ lumineux est représenté par un tenseur (n, n, K), vectorisé pour un traitement matriciel efficace.
- L'ETR devient un système de K équations de transport couplées :

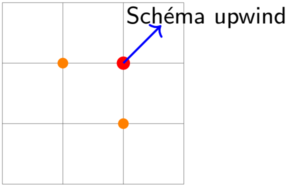
$$v_\ell \cdot \nabla_x u_\ell(x) + (\mu_a + \mu_s) u_\ell(x) = \mu_s \sum_{m=1}^{K} \omega_m \, u_m(x) \, \Phi_g(v_\ell, v_m) + s_\ell(x)$$

pour $1 \leq \ell \leq K$, l'inconnue est $u_\ell(x) \approx u(x, v_\ell)$.

Discrétisation différences finies

Discrétisation spatiale : schéma upwind

- Chaque terme directionnel $v_l \cdot \nabla_x u_l$ est traité comme une équation de transport.
- Schéma choisi : **upwind explicite**, robuste aux flux dirigés.
- Grille carrée $2D$ avec $\Delta x = \Delta y$.



$$\frac{u_{i,j,l}^{n+1} - u_{i,j,l}^{n}}{\Delta t} + v_{l,x}\,\frac{u_{i,j,l}^{n} - u_{\mathrm{up}_x(i,l),j,l}^{n}}{\Delta x} + v_{l,y}\,\frac{u_{i,j,l}^{n} - u_{i,\mathrm{up}_y(j,l),l}^{n}}{\Delta y} + (\mu_a + \mu_s)\, u_{i,j,l}^{n} - \mu_s\, I_{i,j,l}^{n} = s_{i,j,l}^{n}\,.$$

Discrétisation spatiale : pas de temps

- La stabilité est garantie si la condition CFL est respectée :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max_l |v_l|}$$

- Permet une intégration temporelle plus simple, en évitant les systèmes linéaires à résoudre.

Estimation des paramètres

Formulation du problème inverse

- **Objectif** : retrouver les paramètres optiques internes (μ_a, μ_s, g) à partir de mesures lumineuses partielles et bruitées.
- Reformulation sous forme d'un problème d'**assimilation séquentielle** :
  - On estime un état augmenté :

$$z_k = \begin{pmatrix} U_k \\ \mu_a \\ \mu_s \\ g \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+3}$$

  où U_k : champ lumineux vectorisé, $N = n \times n \times K$

- **Remarque** : il s'agit d'un problème d'estimation d'état non linéaire.

Principe du filtre de Kalman étendu (EKF)

- **Motivation** : traiter l'estimation séquentielle d'un état augmenté à chaque itération, en présence de dynamiques et mesures bruitées, potentiellement non linéaires.
- **Modèle dynamique non linéaire** :

$$z_{k+1} = f(z_k) + w_k \qquad y_{k+1} = h(z_{k+1}) + v_{k+1}$$

  - f : schéma de propagation du champ lumineux + conservation des paramètres
  - h : opérateur d'observation (moyenne angulaire, paramètres)
  - w_k, v_k : bruits gaussiens de modèle et d'observation
- **Idée** : à chaque pas, le filtre prédit l'état puis le corrige par assimilation de la mesure via un gain optimal.

Algorithme EKF

- **Étape de prédiction** :

$$\widehat{z}_{k+1|k} = f(\widehat{z}_{k|k}) \qquad P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^\top + Q$$

- **Assimilation de la mesure** :

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^\top (H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^\top + R)^{-1}$$

$$\text{Innovation :} \quad e_{k+1} = y_{k+1} - h(\widehat{z}_{k+1|k})$$

$$\text{Correction :} \quad \widehat{z}_{k+1|k+1} = \widehat{z}_{k+1|k} + K_{k+1} e_{k+1}$$

$$P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1|k}$$

- F_k : jacobien de Δf en $\widehat{z}_{k|k}$(autodifférentiation).
- cet algorithme est piloté par les matrices P_k, Q et R.

Application

Protocole expérimental (simulation)

Protocole : Estimer des valeurs cibles, à partir des mesures de u

- Grille discrète de dimension $(n, n, K) = (32, 32, 8)$, soit $N = 32 \times 32 \times 8 = 8192$.
- Vraies valeurs :

$$(\mu_a, \mu_s, g) = (0.01,\ 0.75,\ 0.8)$$

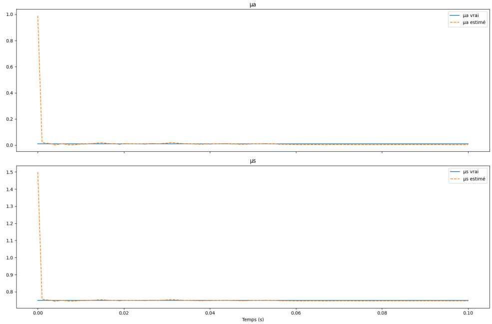
- Initialisation éloignée des vraies valeurs :

$$(\mu_a^0, \mu_s^0, g^0) = (0.5,\ 1.0,\ 0.0)$$

- Opérateur de mesure H : $Hu = \frac{1}{K} \sum_\ell u_\ell(t_k, \hat{x})$.

Convergence des paramètres optiques μ_a et μ_s

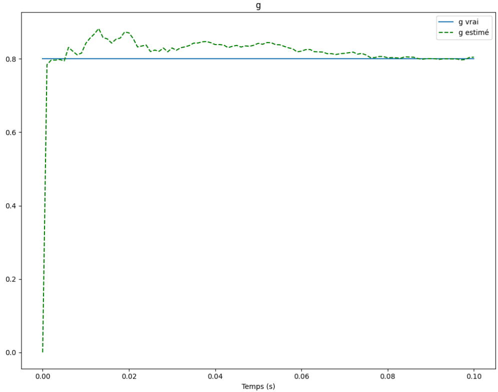
- **Absorption** μ_a : paramètre fortement observable, avec une correction rapide dès les premières itérations.
- **Diffusion** μ_s : paramètre moins observable, correction progressive, sensible au réglage de la variance d'observation $R_{3,3}$.



$$R = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Estimation du paramètre d'anisotropie g

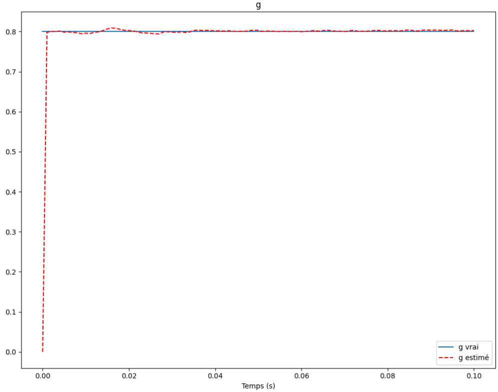
- Paramètre g faiblement observable, son influence est indirecte via la fonction de phase.
- Avec une variance d'observation élevée $R_{4,4} = 10$, la convergence est plus lente.



$$R = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Estimation du paramètre d'anisotropie g (suite)

- Amélioration notable en réduisant la variance d'observation à $R_{4,4} = 1.0$.
- Convergence plus stable et moins bruitée.



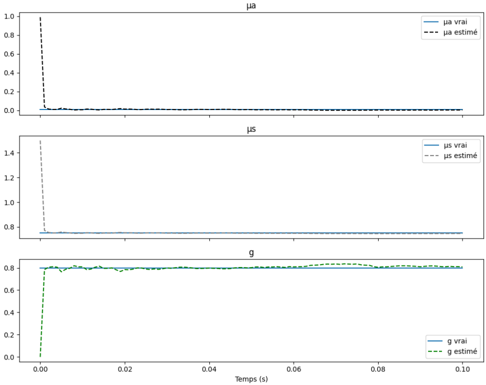
$$R = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estimation de référence des paramètres

- Matrice d'observation R est comme précédemment.
- Matrice de bruit de modèle Q :

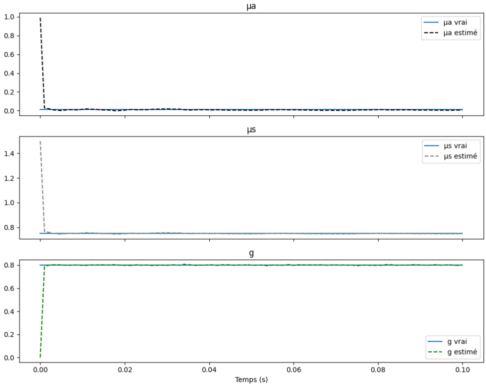
$$Q = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 & 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Estimation de référence des paramètres (suite)



Augmentation du bruit de modèle sur g

- Relâchement de la dynamique sur g par un facteur 10^5, soit $Q_{g,g} = 100$.
- Réduction nette des oscillations et du bruit sur l'estimation.



Robustesse et configurations extrêmes

- Le filtre converge même avec une initialisation très éloignée, à condition d'activer la projection (clamp) sur les paramètres.
- Confiance excessive dans les mesures (faible R) peut provoquer une instabilité numérique.
- Confiance excessive dans le modèle (faible Q) conduit à une correction lente et rigide.

y_{sum}

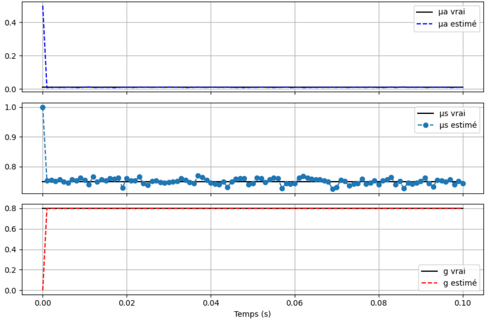
y_{sum} désigne la somme (ou la moyenne) angulaire du champ lumineux, calculée sur les K directions discrètes, en un point spatial donné ou sur une section de détection. Formellement :

$$y_{\mathrm{sum}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} U(i_0, j_0, k),$$

où $U(i_0, j_0, k)$ représente l'intensité lumineuse dans la direction k au point (i_0, j_0).

Etude de l'impact du bruit sur les mesures

- Bruit gaussien $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,\, 0.01^2)$ ajouté sur la mesure moyenne du champ lumineux y_{sum}.
- Bruits associés aux paramètres (μ_a, μ_s, g) avec écart-type $\sigma = (0.001, 0.01, 0)$.
- Matrice R adaptée aux bruits injectés : $R = \text{diag}(0.01^2,\, 0.001^2,\, 0.01^2,\, 0)$.



Conclusion

- Mise en œuvre d'un **filtre de Kalman étendu (EKF)** pour un problème inverse en transport radiatif.
- **Résultats clés** :
  - μ_a : convergence rapide, paramètre fortement observable.
  - μ_s : correction progressive, sensible au réglage de la matrice de covariance d'observation R.
  - g : estimation plus lente, nécessite un ajustement fin des matrices Q et R.
- Méthode robuste face à une initialisation éloignée et à la présence de bruit sur les mesures.

Perspectives

- Prise en compte de la section angulaire des récepteurs,
- application sur des **données expérimentales réelles** en tomographie optique,
- comparison avec d'autres méthodes de résolution du problème inverse (via réseau MLP),
- aller vers le 3D avec plus d'angles : comment gérer les matrices de très grandes tailles.

Merci pour votre attention !

Questions ?