

TP2 EDP

Sacha

June 2023

1 Vérification

1.1 Le Laplacien

Ω est le cercle unité et $\partial(\Omega) = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_F$

$$\Gamma_D = \{x = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\}$$

$$\Gamma_N = \{x = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)\}$$

$$\Gamma_F = \{x = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in (\pi, 2\pi)\}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u = g \text{ sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = m \text{ sur } \Gamma_N \\ u + \frac{\partial u}{\partial n} = l \text{ sur } \Gamma_F \end{cases}$$

2. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ une fonction test. Multiplions v des deux côtés de la première égalité et intégrons l'équation

$$-\int_{\Omega} \Delta u v = \int_{\Omega} f v$$

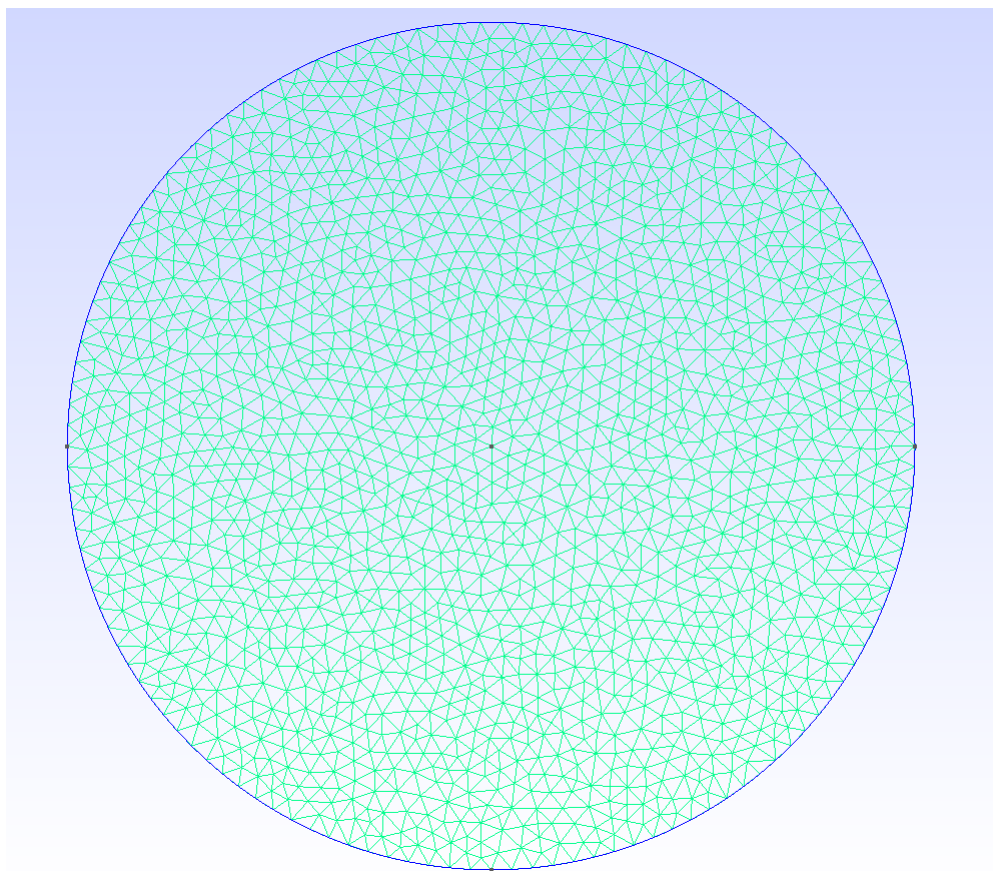
En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\partial(\Omega)} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Omega} f v$$

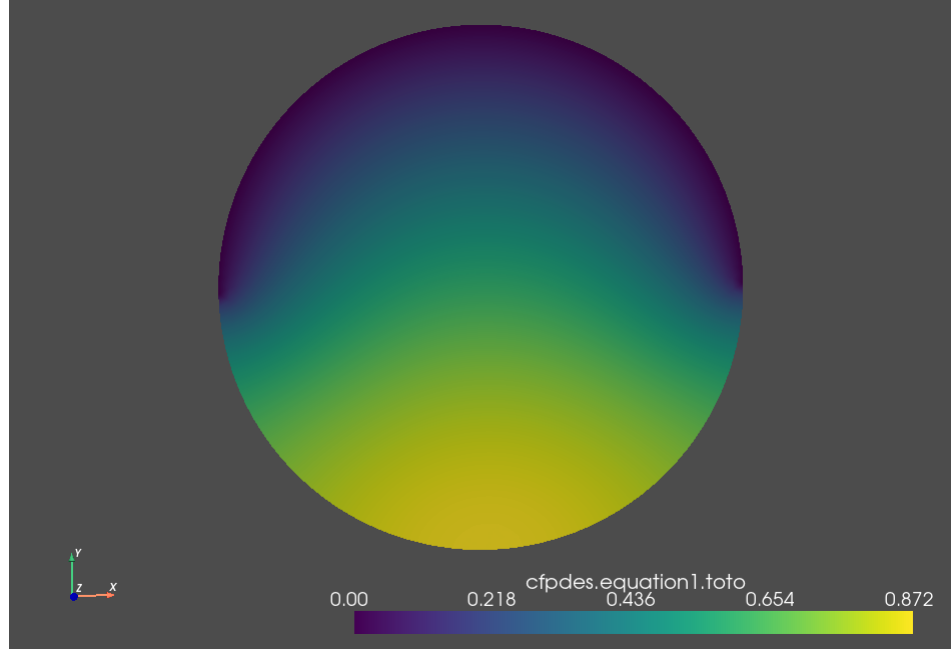
Or $v = 0$ sur $\partial(\Omega)$ car $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\text{Donc, } \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v$$

Après assemblage du maillage sur Gmsh voici le maillage qu'on obtient:



En utilisant `feolpp_toolbox_coefficientformpdes`, on obtient la solution suivante:



La barre en bas à droite correspond à l'échelle des valeurs. Plus la couleur d'un point est bleue, plus sa valeur en u est proche de 0. Et inversement, plus la couleur est jaune, plus sa valeur est proche du maximum de u (0.874).

On remarque que le bord du demi disque supérieur est égale à 0, ça correspond en fait aux conditions de Neumann et Dirichlet.

3. Pour que le u de notre équation soit égal à $\sin(\pi x)\cos(\pi y)$ on doit avoir:

$$f(x, y) = -2\pi^2 \sin(\pi x)\cos(\pi y)$$

$$g = \sin(\pi x)\cos(\pi y)$$

$$m = -\pi y * \cos(\pi x)\cos(\pi y) - \pi x * \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

$$l = g + m$$

1.2 Fonctions peu régulières

2 Méthode de stabilisation

En testant plusieurs valeurs de ϵ on obtient les résultats suivants:

On remarque que plus ϵ est proche de 0, plus la valeur maximale de la solution (Le point le plus jaune) se rapproche d'un coin du carré.

2) Pour $\epsilon = 10$ ou $1e - 1$, on ne remarque pas de changements significatifs entre les différentes méthodes.

Cependant, si on prend $\epsilon = 1e - 3$, on obtient un résultat très différent.

3.1) Pour vérifier l'ordre de convergence, nous allons considérer une fonction $u(x, y) = x^2 + y^2$

Pour que u soit solution du problème, on doit avoir $f = -4e - 3 + 2 * x + 2 * y + x^2 + y^2$ et $g = x^2 + y^2$ si on prend $\epsilon = 1e - 3$, $\beta = (1, 1)^T$, $\mu = 1$ et $g = 0$.

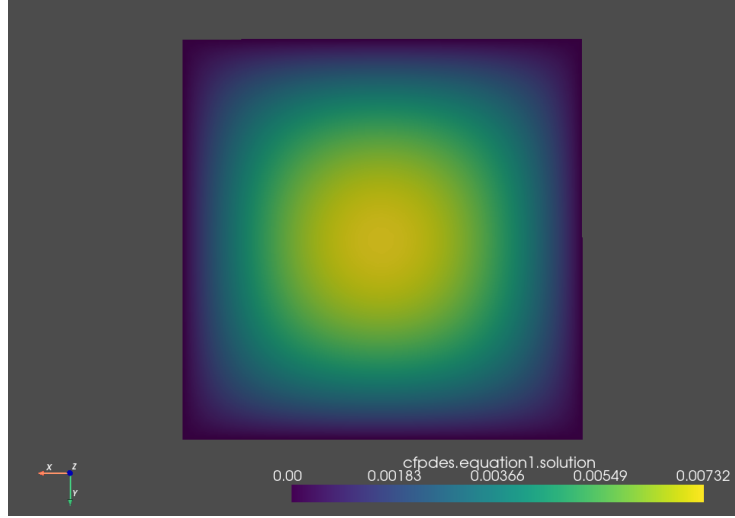


Figure 1: $\epsilon = 10$

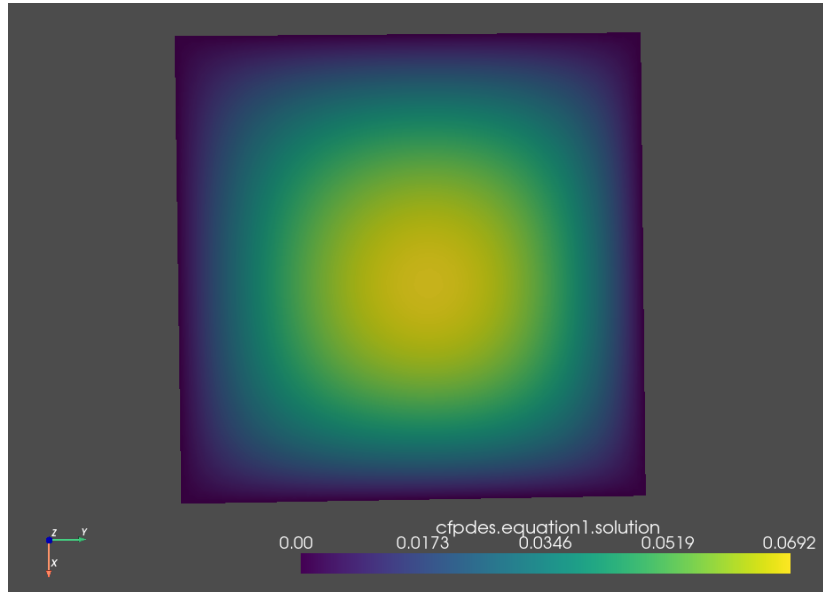


Figure 2: $\epsilon = 1$

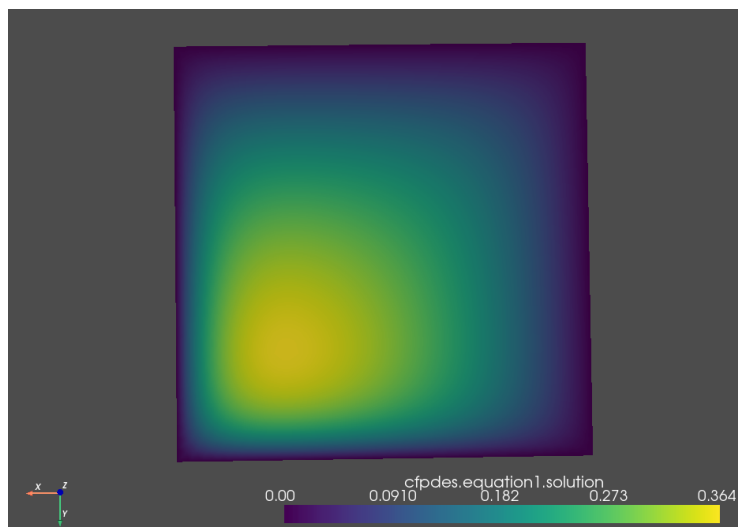


Figure 3: $\epsilon = 1e-1$

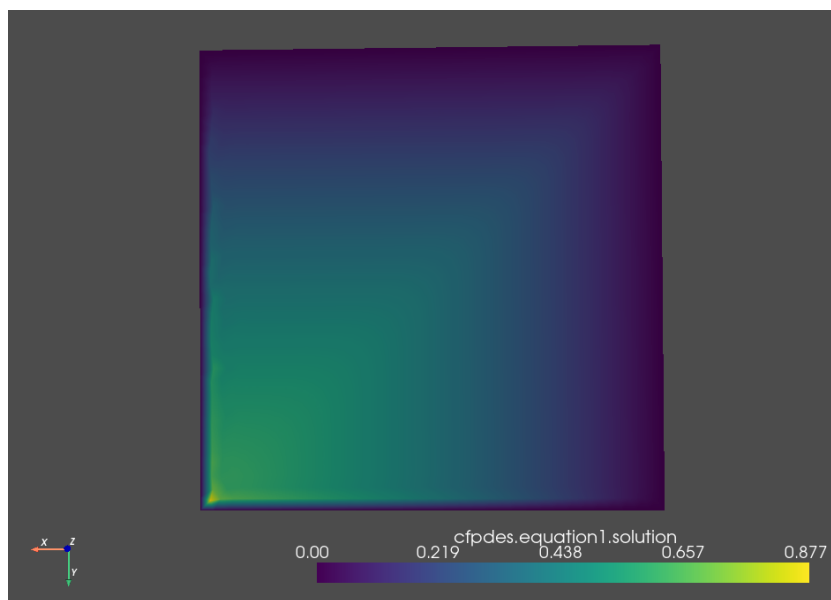


Figure 4: $\epsilon = 1e-3$

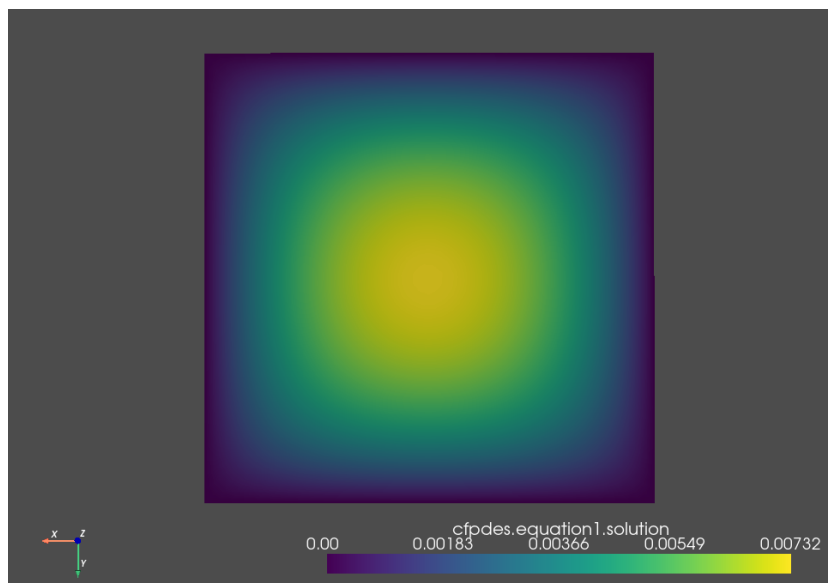


Figure 5: $\epsilon = 10$ avec SUPG

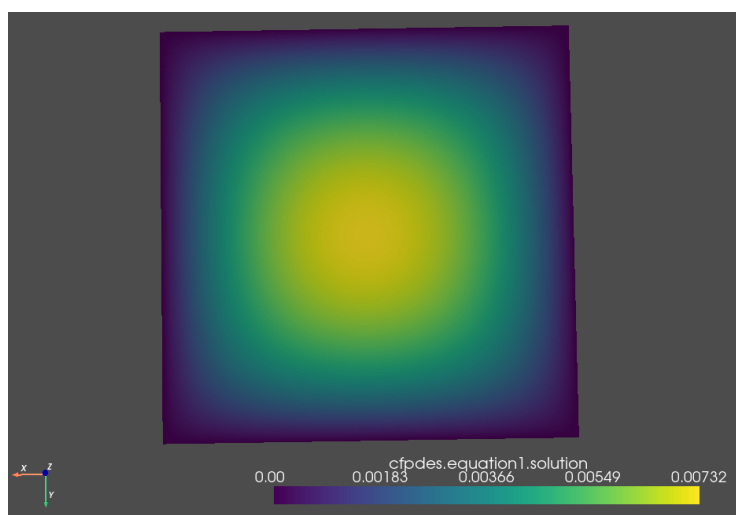


Figure 6: $\epsilon = 10$ avec GaLS

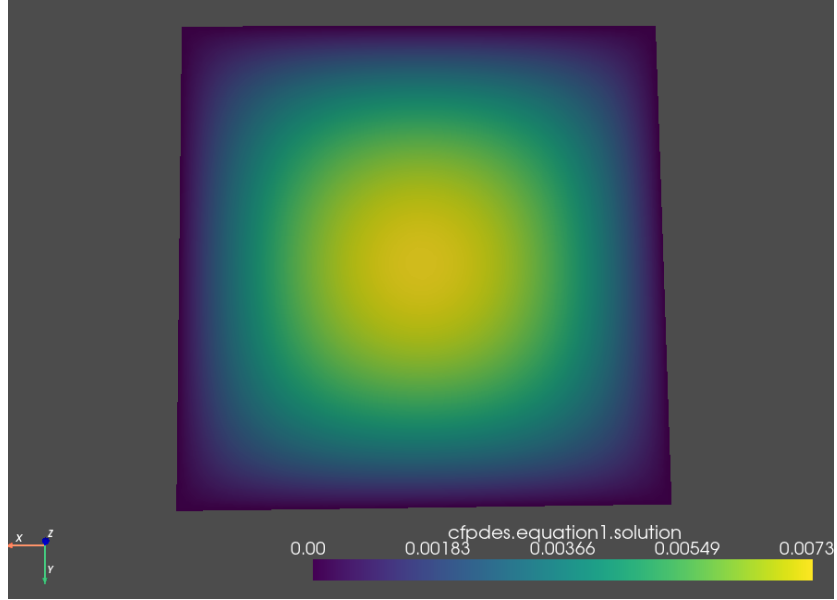


Figure 7: $\epsilon = 10$ sans stabilisation

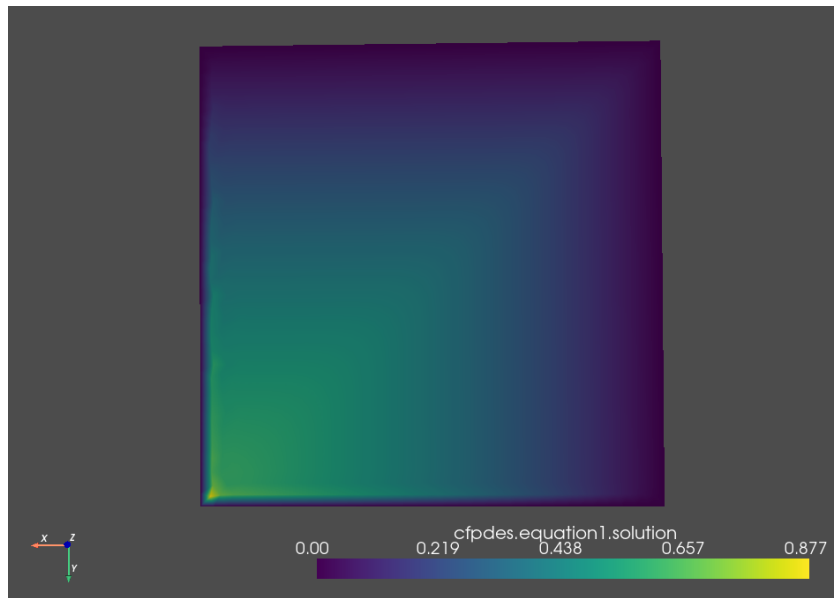


Figure 8: $\epsilon = 1e-3$ avec SUPG

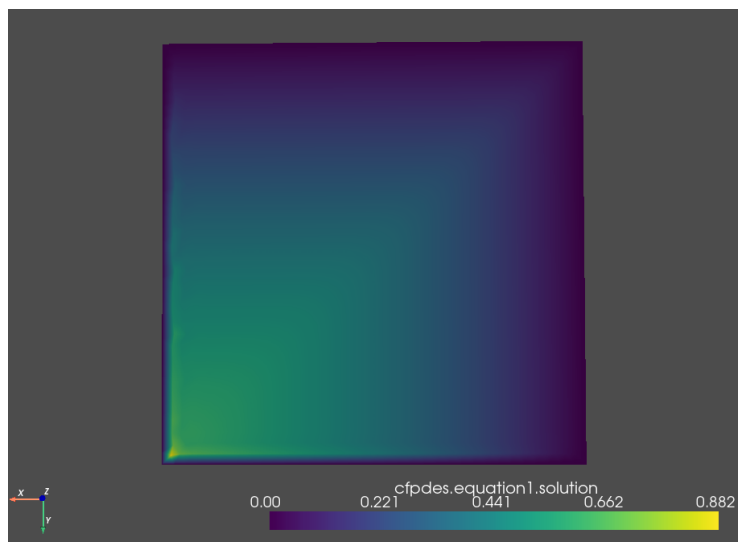


Figure 9: $\epsilon = 1e-3$ avec GaLS

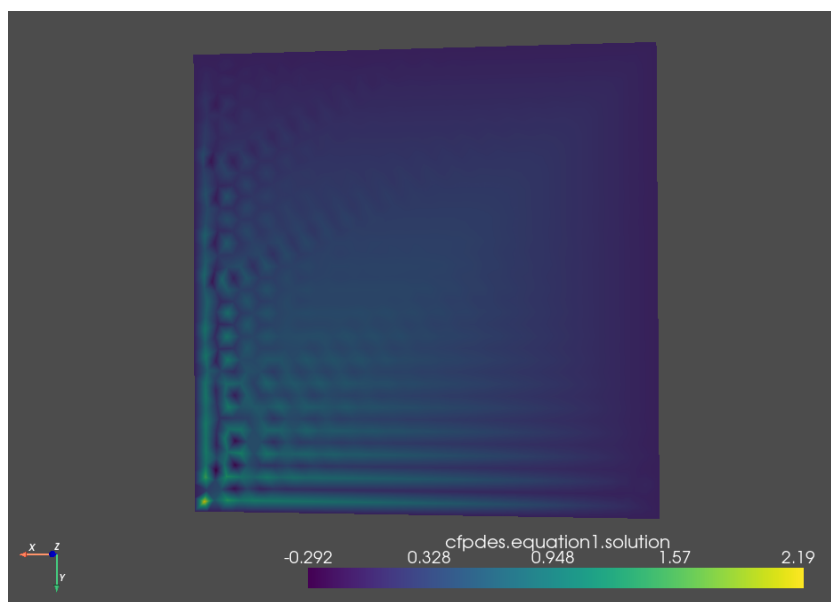


Figure 10: $\epsilon = 1e-3$ sans stabilisation

Regardons les erreurs en normes L^2 et H^1 :

h	L^2	H^1
0.4	1.8799026774634953e-01	2.2682461643710003e-02
0.2	1.1270157838966860e-01	8.2928153375460677e-03
0.1	5.7989554719951569e-02	1.9807126752690446e-03
0.05	2.9143380172362593e-02	4.9159706734286835e-04
0.025	1.4476276503802189e-02	1.2284868096793368e-04

Table 1: Erreur en norme L^2 et H^1 pour différent pas de maillage avec une base de fonctions \mathbb{P}_1

h	L^2	H^1
0.4	7.1088742768433036e-15	9.1605437148933129e-16
0.2	1.3057911970147188e-14	4.7978347293371833e-16
0.1	2.3735140893920529e-14	5.8111735674615155e-16
0.05	3.9026536236342233e-14	1.4540753830744363e-15
0.025	7.4083789924857955e-14	2.7957426964335838e-15

Table 2: Erreur en norme L^2 et H^1 pour différent pas de maillage avec une base de fonctions \mathbb{P}_2

En utilisant la section Statistics de la toolbox feel++, nous pouvons également calculer la norme H^1 de notre solution. Feel++ nous donne ce résultat:

$$\|u\|_{H^1} \approx 1.81$$

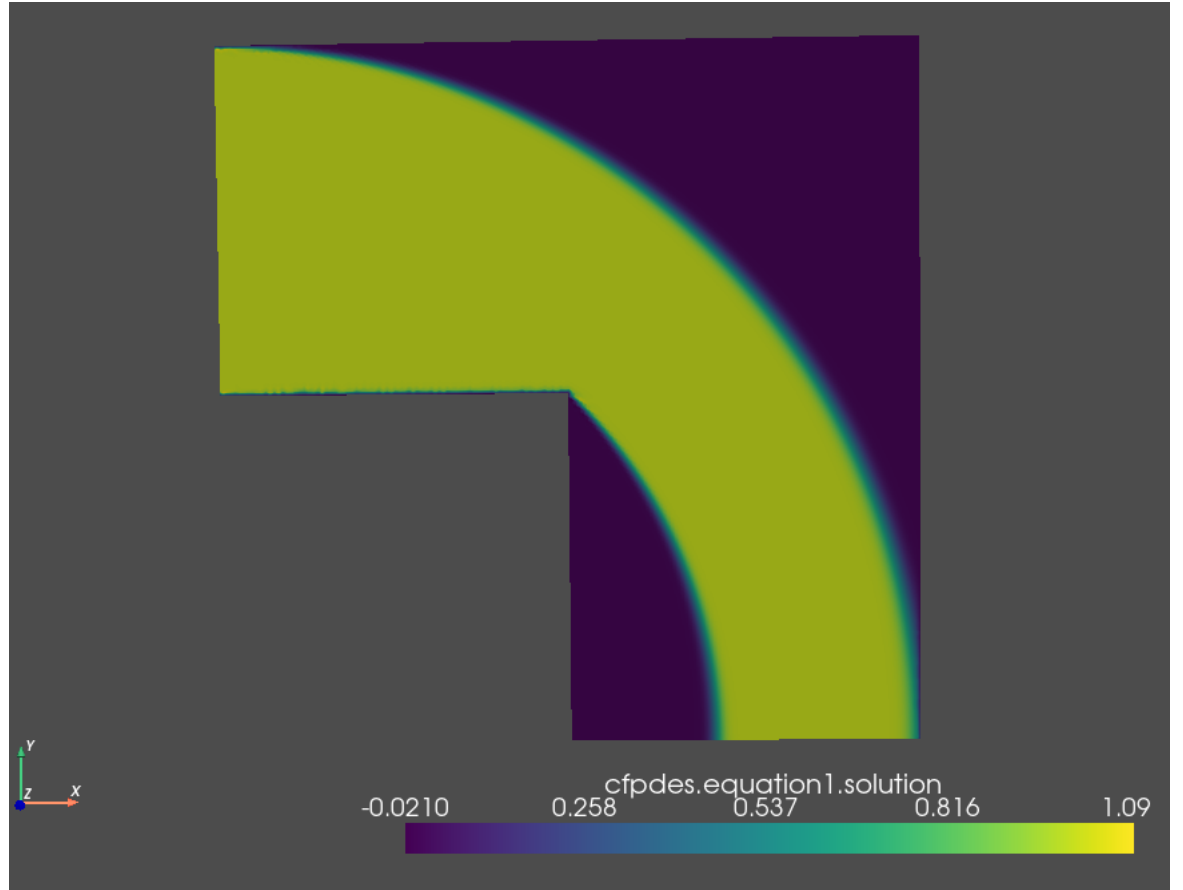
On a donc bien:

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq h^{K+\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1}$$

Avec h , le pas du maillage. Ce qui confirme la convergence d'ordre $\frac{1}{2}$.

La toolbox associée à cette partie est trouvable dans le fichier adr_manufacturee.cfg et adr_manufacturee.json du dossier adr.

3.2) Voici la solution du problème après avoir appliqué une méthode de stabilisation GaLS.



Sur le bord gauche, nous remarquons que la solution est tout le temps égale à 1, comme la condition de Dirichlet que l'on a imposé.

La toolbox utilisée pour générer cette solution est trouvable dans le fichier `adr_L.cfg` et `adr_L.json` dans le dossier `adr`. Le maillage utilisé s'appelle `L.geo`

3 Stokes

1) Pour que la solution de Kovsznay soit solution du problème, on doit calculer f tel que:

$$-\Delta u + \nabla p = f$$

et

$$u = g \text{ sur } \partial\Omega$$

Intéressons-nous à la première équation:

$$\Delta u = \Delta u_1 e_1 + \Delta u_2 e_2$$

avec u_i la i -ème coordonnée du vecteur u , et e_i le i -ème vecteur de la base canonique.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\lambda e^{\lambda x} \cos(2\pi y) & \frac{\partial u_1}{\partial y} &= 2\pi e^{\lambda x} \sin(2\pi y) \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= -\lambda^2 e^{\lambda x} \cos(2\pi y) & \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} &= 4\pi^2 e^{\lambda x} \cos(2\pi y) \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \Delta u_1 = (4\pi^2 - \lambda^2) e^{\lambda x} \cos(2\pi y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} &= \frac{\lambda^2}{2\pi} e^{\lambda x} \sin(2\pi y) & \frac{\partial u_2}{\partial y} &= \lambda e^{\lambda x} \cos(2\pi y) \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} &= -\lambda^3 e^{\lambda x} \sin(2\pi y) & \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} &= -2\lambda\pi e^{\lambda x} \sin(2\pi y) \end{aligned}$$

Finalement, on a:

$$\Delta u = \begin{pmatrix} (4\pi^2 - \lambda^2) e^{\lambda x} \cos(2\pi y) \\ (\frac{\lambda^3}{2\pi} - 2\lambda\pi) e^{\lambda x} \sin(2\pi y) \end{pmatrix}$$

Calculons ∇p

$$p = -\frac{e^{2\lambda x}}{2} + C$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\lambda e^{2\lambda x}$$

Comme il n'y a pas de y dans p , il vient immédiatement que $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

Et donc:

$$\nabla p = \begin{pmatrix} -\lambda e^{2\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement on a:

$$\begin{aligned} f &= \begin{pmatrix} (4\pi^2 - \lambda^2) e^{\lambda x} \cos(2\pi y) \\ (\frac{\lambda^3}{2\pi} - 2\lambda\pi) e^{\lambda x} \sin(2\pi y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda e^{2\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (4\pi^2 - \lambda^2) e^{\lambda x} \cos(2\pi y) - \lambda e^{2\lambda x} \\ (\frac{\lambda^3}{2\pi} - 2\lambda\pi) e^{\lambda x} \sin(2\pi y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Maintenant, déterminons C tel que p soit de moyenne nulle, c'est à dire:

$$\int_{\Omega} p = 0$$

Comme Ω est un rectangle, on a l'égalité suivante:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} p &= \int_{-0.5}^1 \int_{-0.5}^{1.5} \frac{-e^{2\lambda x}}{2} + C dy dx \\
&= \int_{-0.5}^1 \left(\frac{-e^{2\lambda x}}{2} + C \right) \int_{-0.5}^{1.5} dy dx \\
&= \int_{-0.5}^1 \left(\frac{-e^{2\lambda x}}{2} + C \right) [y]_{-0.5}^{1.5} dx \\
&= 2 \int_{-0.5}^1 \left(\frac{-e^{2\lambda x}}{2} + C \right) dx \\
&= 2 \left[\frac{-e^{2\lambda x}}{4\lambda} + Cx \right]_{-0.5}^1 \\
&= 2 \left(\frac{-e^{2\lambda}}{4\lambda} + C + \frac{e^{-\lambda}}{4\lambda} + \frac{C}{2} \right) \\
&= \frac{-e^{2\lambda} + e^{-\lambda}}{2\lambda} + 3C
\end{aligned}$$

Or on a:

$$\begin{aligned}
\frac{-e^{2\lambda} + e^{-\lambda}}{2\lambda} + 3C &= 0 \\
3C &= \frac{e^{2\lambda} - e^{-\lambda}}{2\lambda} \\
C &= \frac{e^{2\lambda} - e^{-\lambda}}{6\lambda}
\end{aligned}$$

2) Voici la formulation variationnelle pour le problème de Stokes:

On cherche (u, p) dans $H_0^1 \times L_*^2$ avec L_*^2 l'ensemble des fonctions de carré intégrable telle que $\int_{\Omega} p = 0$.

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla v - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v = \int_{\Omega} f \cdot v$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot u = 0$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ et $\forall q \in L_*^2$

3) En choisissant, une base $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$ voici les solutions obtenues:

On remarque que la méthode a du mal à converger vers la solution exacte de p

4) Maintenant en utilisant la méthode $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$, on obtient les résultats suivants:

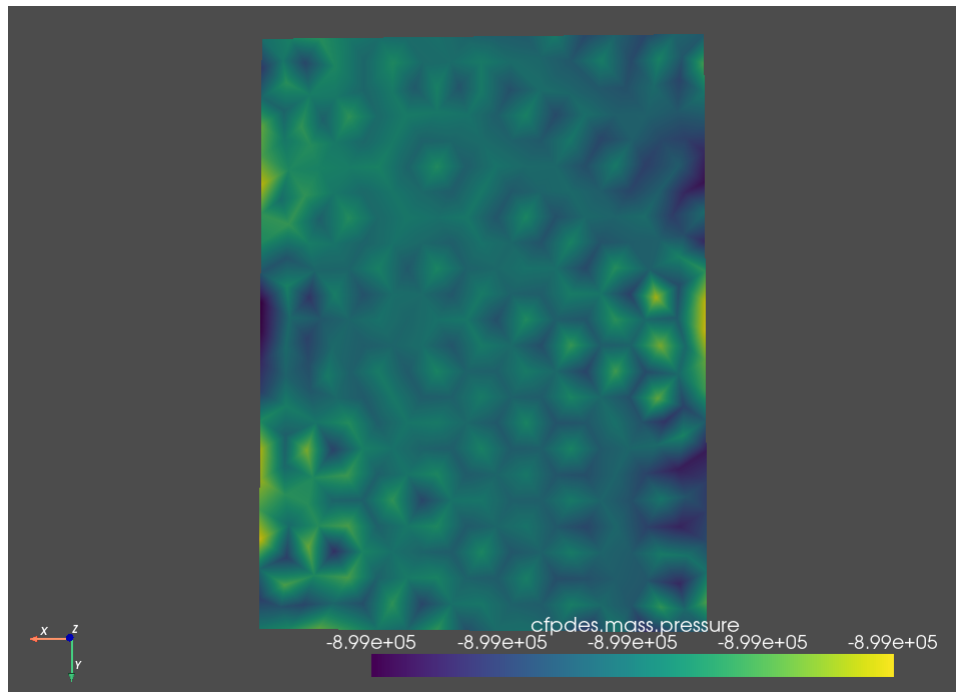
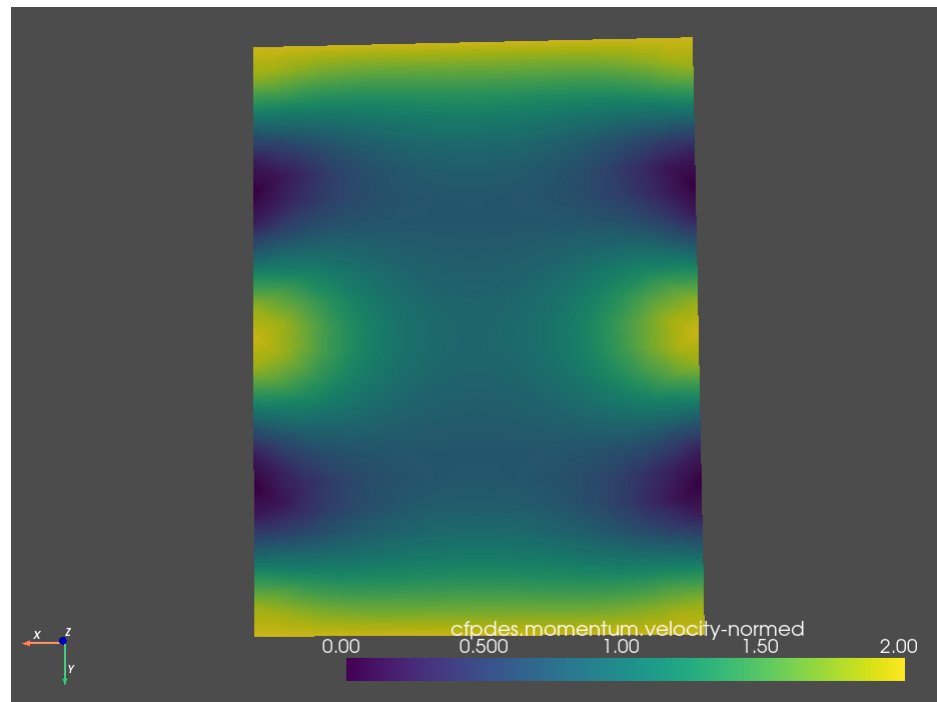


Figure 11: Solution approchée de p avec une erreur L^2 de: $1.5577586580821336e+06$



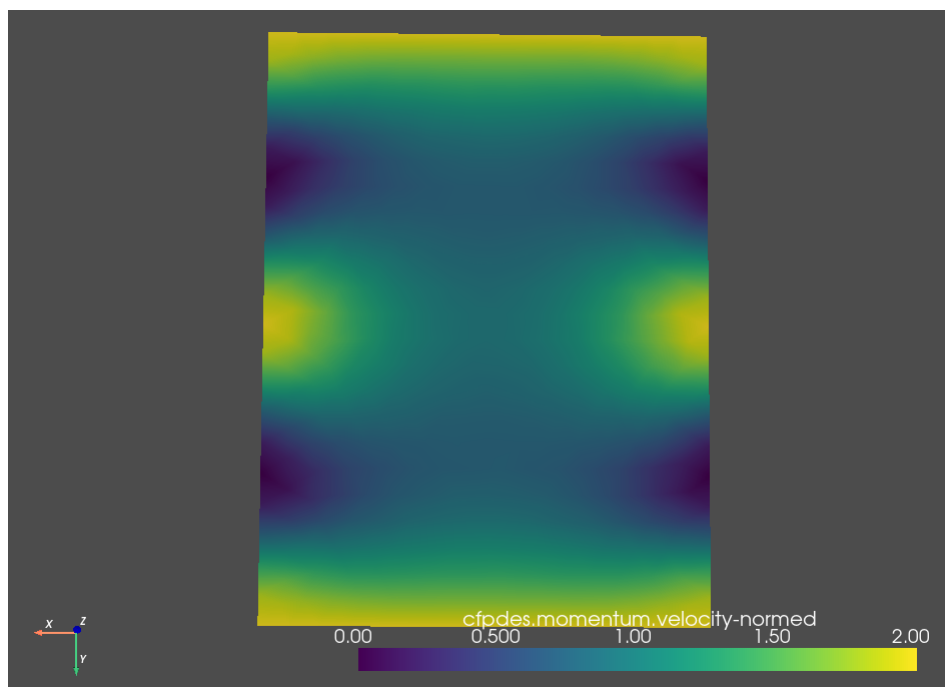


Figure 12: Solution approchée de u avec une erreur L^2 de: $7.4786283012603649 \times 10^{-01}$

