TP2 EDP

Sacha

June 2023

1 Vérification

1.1 Le Laplacien

Ω est le cercle unité et $\partial(\Omega) = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_F$
$\Gamma_D = \{x = (cos(\theta), sin(\theta)), \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\}$
$\Gamma_N = \{x = (cos(\theta), sin(\theta)), \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)\}$
$\Gamma_F = \{x = (cos(\theta), sin(\theta)), \theta \in (\pi, 2\pi)\}$

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u = g \text{ sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = m \text{ sur } \Gamma_N \\ u + \frac{\partial u}{\partial n} = l \text{ sur } \Gamma_F \end{cases}$$

2. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ une fonction test. Multiplions v des deux côtés de la première égalité et intégrons l'équation

$$-\int_\Omega \Delta u v = \int_\Omega f v$$

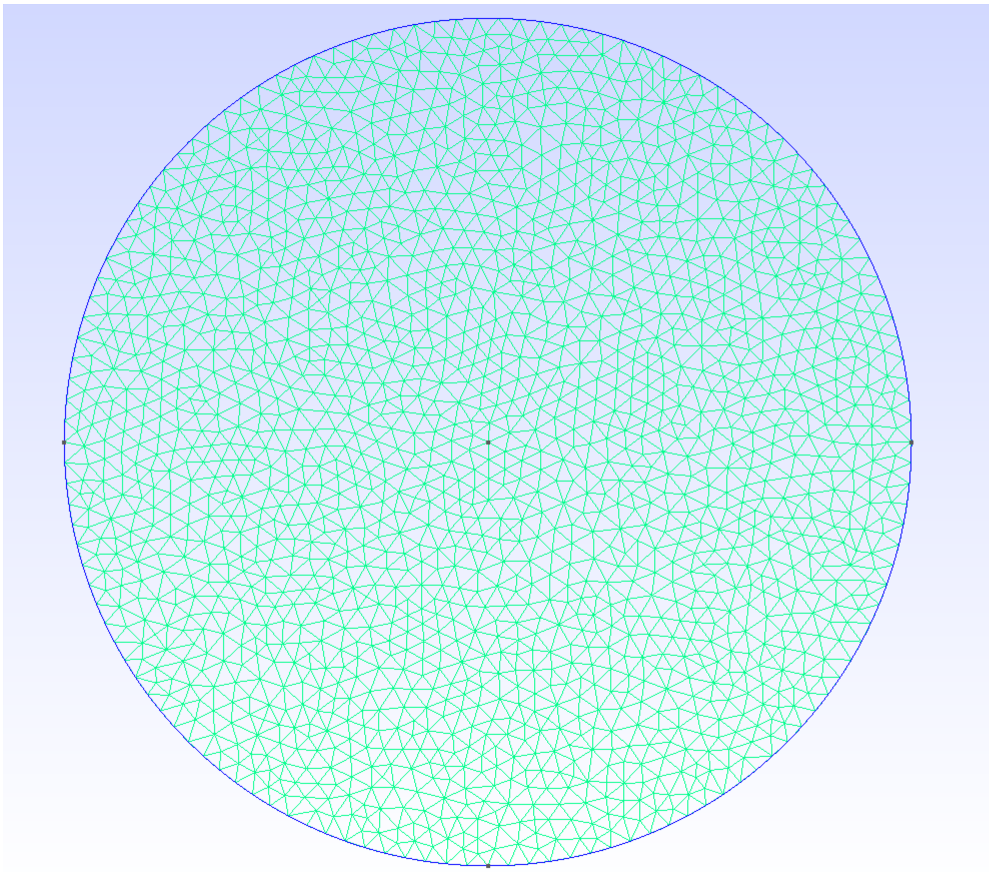
En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial(\Omega)} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_\Omega f v$$

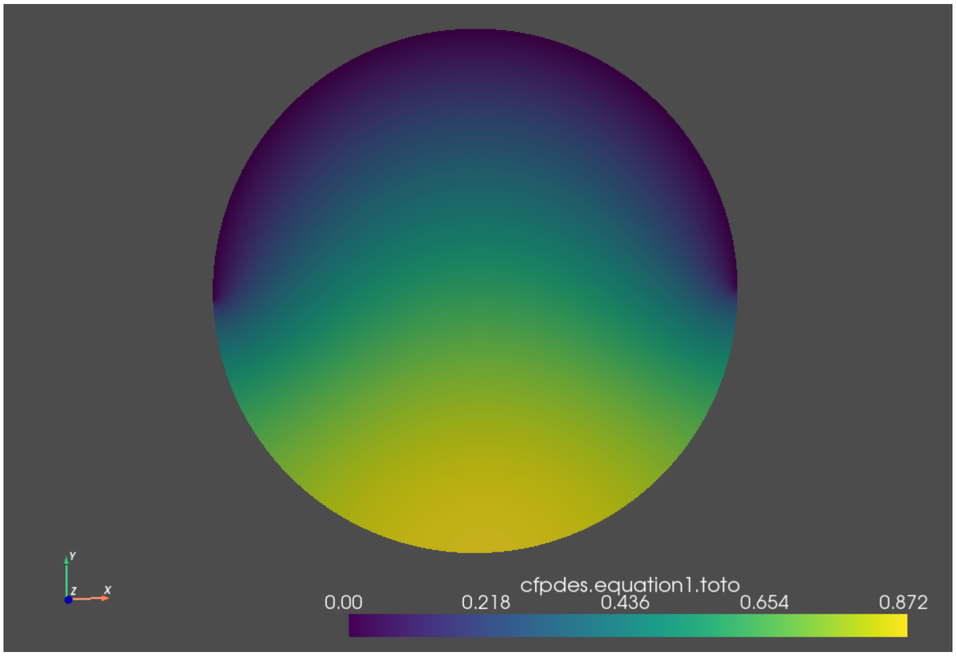
Or $v = 0$ sur $\partial(\Omega)$ car $v \in H_0^1(\Omega)$

Donc, $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v$

Après assemblage du maillage sur Gmsh voici le maillage qu'on obtient:



En utilisant feelpp_toolbox_coefficientformpdes, on obtient la solution suivante:



La barre en bas à droite correspond à l'échelle des valeurs. Plus la couleur d'un point est bleue, plus sa valeur en u est proche de 0. Et inversement, plus la couleur est jaune, plus sa valeur est proche du maximum de u (0.874).

On remarque que le bord du demi disque supérieur est égale à 0, ça correspond en fait aux conditions de Neumann et Dirichlet.

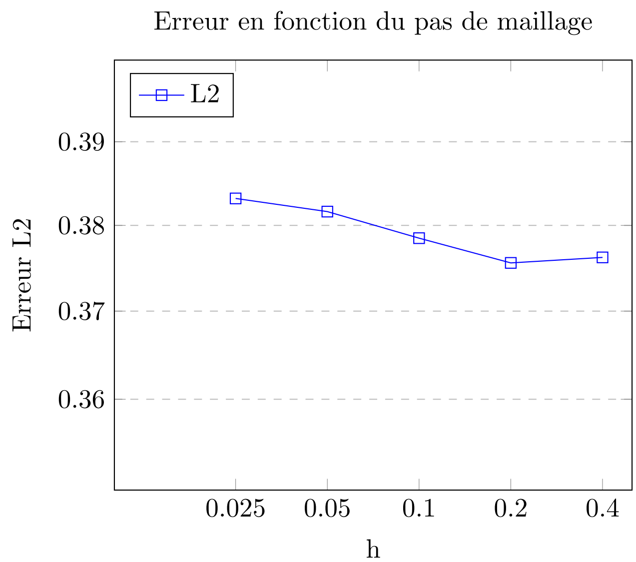
3. Pour que le u de notre équation soit égal à $sin(\pi x)cos(\pi y)$ on doit avoir:

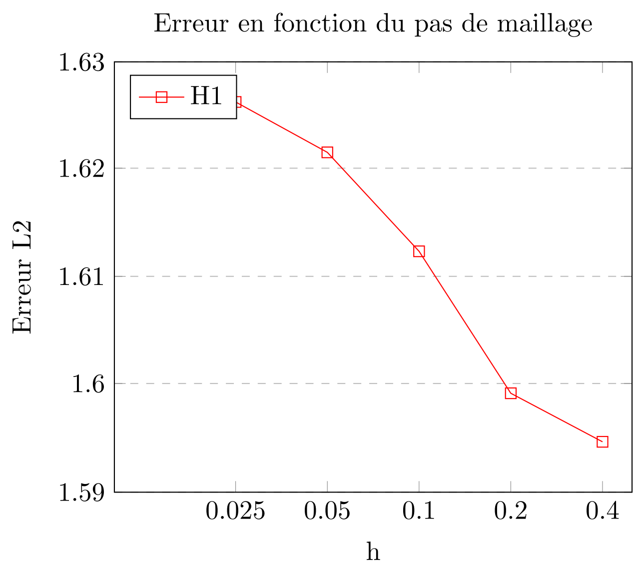
$f(x, y) = -2\pi^2 sin(\pi x)cos(\pi y)$

$g = sin(\pi x)cos(\pi y)$

$m = -\pi y * cos(\pi x)cos(\pi y) - \pi x * sin(\pi x)sin(\pi y)$

$l = g + m$





1.2 Fonctions peu régulières

2) Calculons $\frac{\partial u}{\partial r}$ et $\frac{\partial u}{\partial \theta}$

$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2}{3} r^{-\frac{1}{3}} sin(\frac{2}{3}\theta)$

$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{2}{3} r^{\frac{2}{3}} cos(\frac{2}{3}\theta)$

Or:

$\frac{\partial u}{\partial r}^2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 sin^2(\frac{2}{3}\theta)$

$\frac{\partial u}{\partial \theta}^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) cos^2(\frac{2}{3}\theta)$

Car $r < 1$

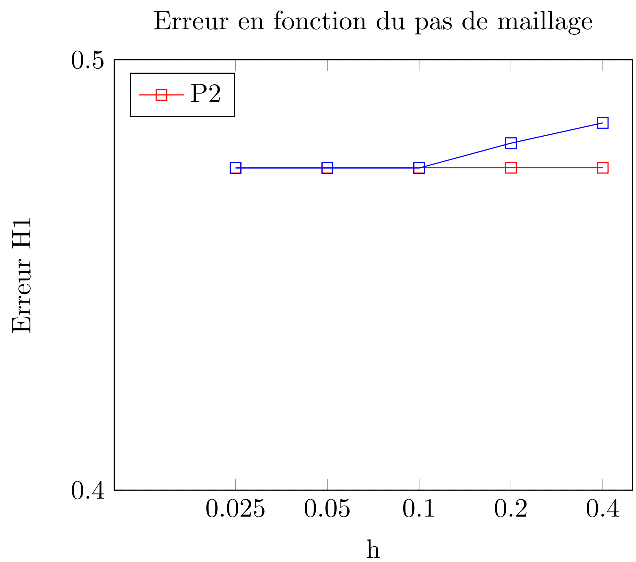
De plus, Ω est bornée, donc sin^2 et cos^2 sont intégrables à une constante près.

D'où $u \in H^1(\Omega)$

Maintenant, si on a θ tel que $(\frac{2}{3}\theta) \neq 0$. Alors on a $r^{-\frac{1}{3}} \to 0$ quand $r \to 0$

Donc $\frac{\partial u}{\partial r} \to 0$ quand $r \to 0$. On en déduit que le gradient n'est pas borné à l'origine, et donc $u \in H^2$ puisque $\frac{\partial u}{\partial r}$ n'est pas dérivable en 0.

3)



On remarque que l'erreur stagne au bout d'un certain pas de maillage

La toolbox utilisée pour cette section est dans le fichier cercle_trois_quart.json

2 Méthode de stabilisation

En testant plusieurs valeurs de ϵ on obtient les résultats suivants:

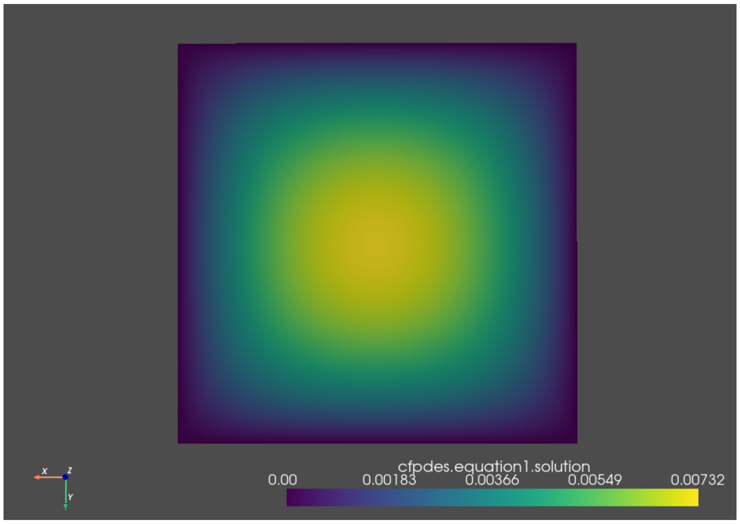


Figure 1: $\epsilon = 10$

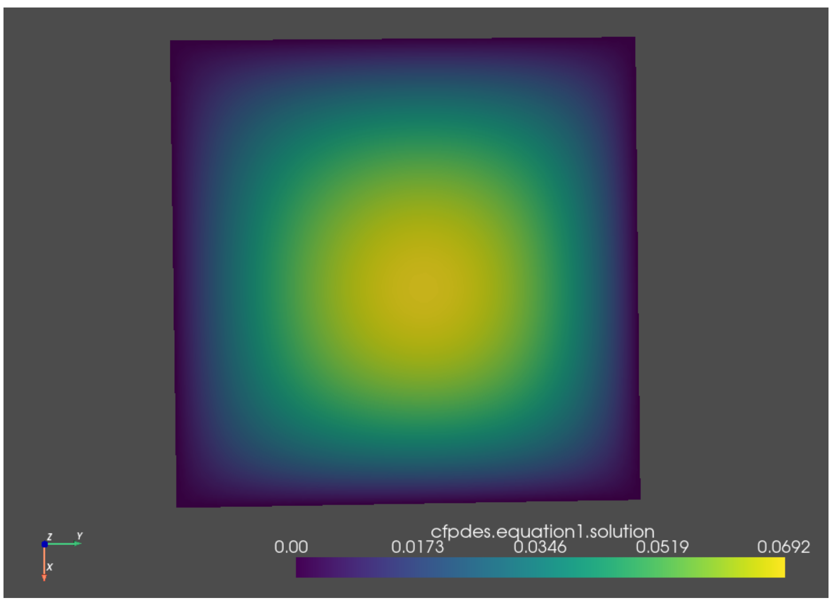


Figure 2: $\epsilon = 1$

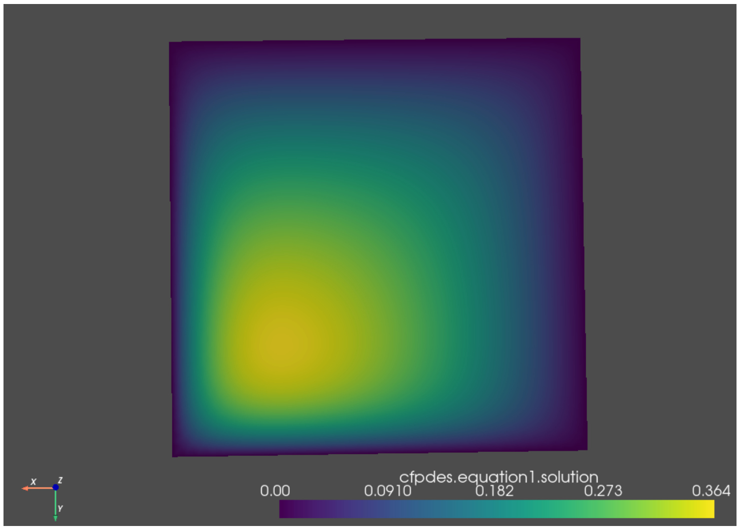


Figure 3: ϵ **= 1e-1**

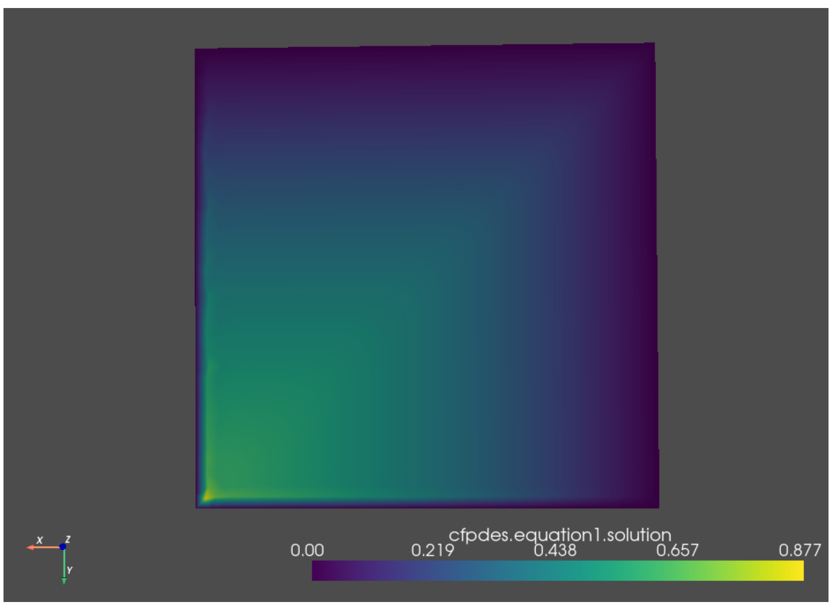


Figure 4: ϵ **= 1e-3**

On remarque que plus ϵ est proche de 0, plus la valeur maximale de la solution (Le point le plus jaune) se rapproche d'un coin du carré.

2) Pour $\epsilon = 10$ ou $1e - 1$, on ne remarque pas de changements significatifs entre les différentes méthodes.

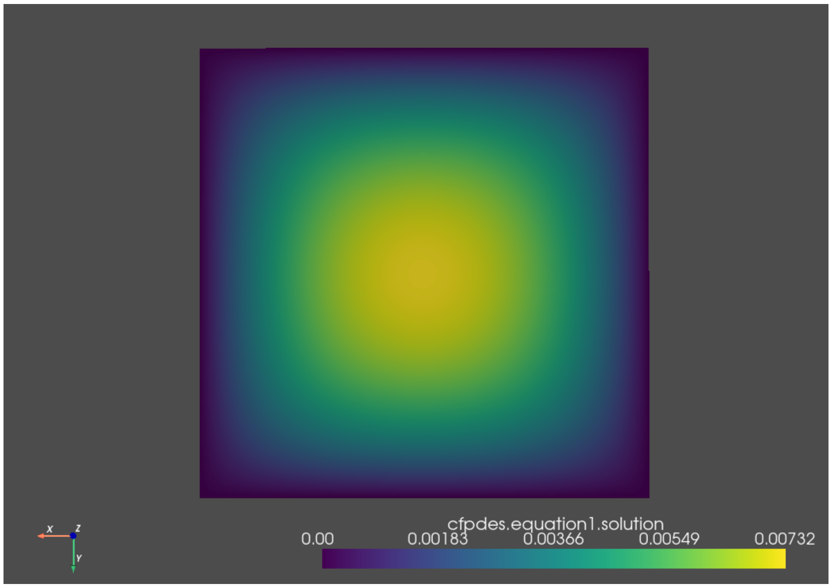


Figure 5: ϵ **= 10 avec SUPG**

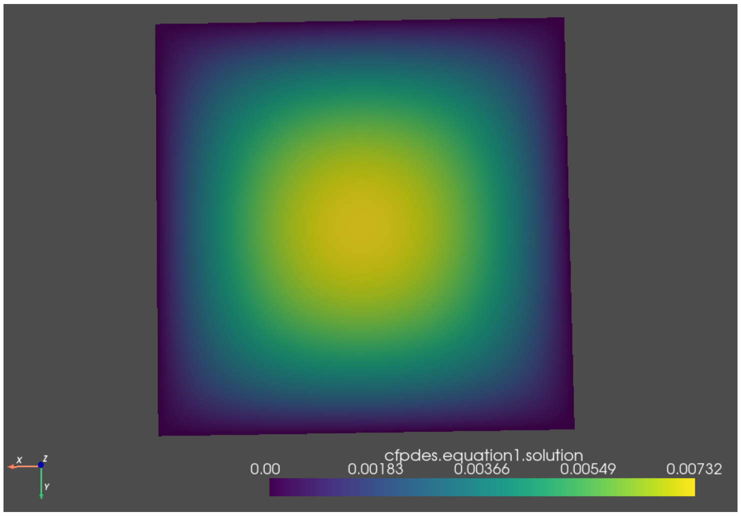


Figure 6: ϵ **= 10 avec GaLS**

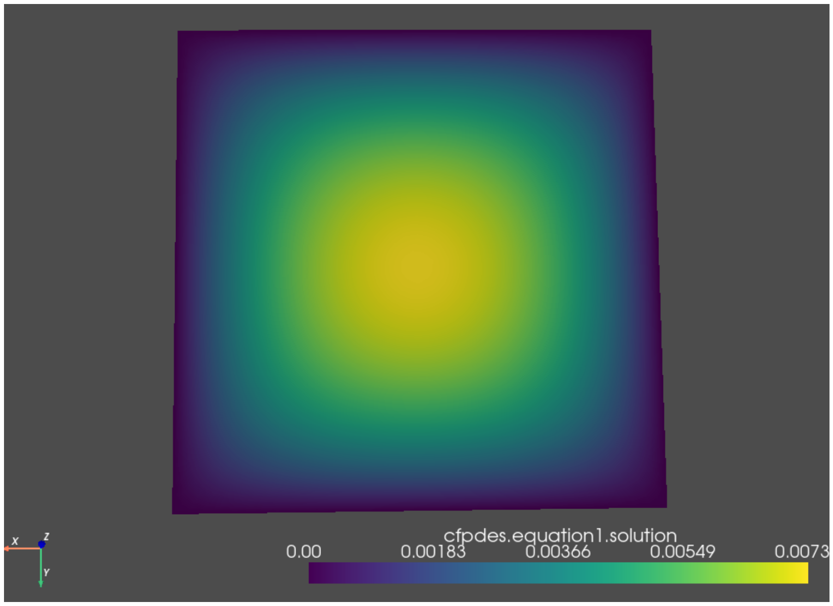


Figure 7: ϵ = 10 sans méthode de stabilisation

Cependant, si on prend $\epsilon = 1e - 3$, on obtient un résultat très différent.

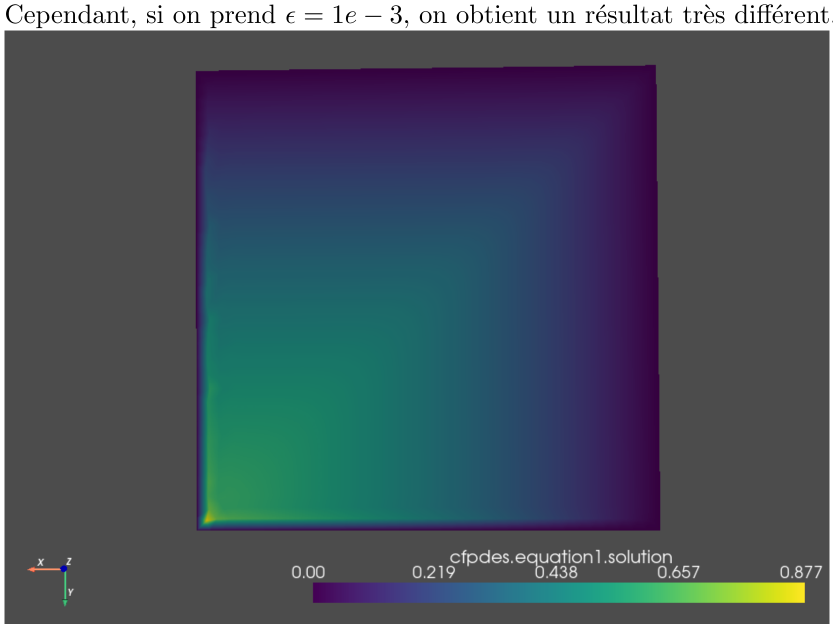


Figure 8: ϵ = 1e-3 avec SUPG

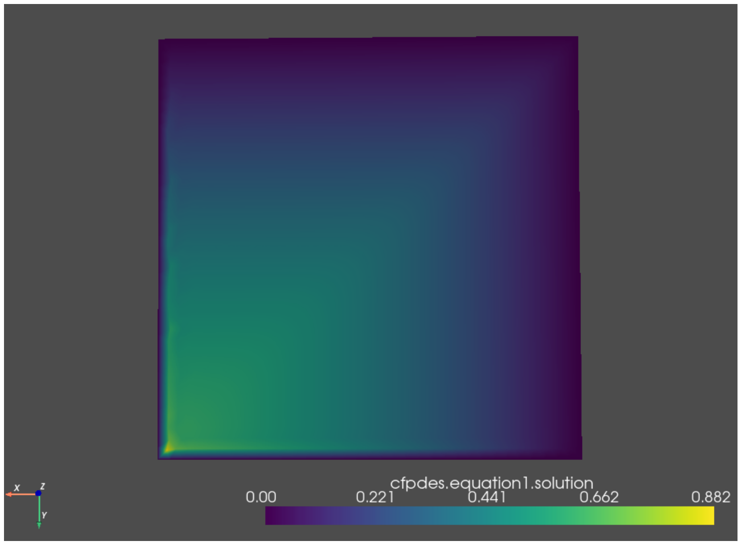


Figure 9: ϵ = 1e-3 avec GaLS

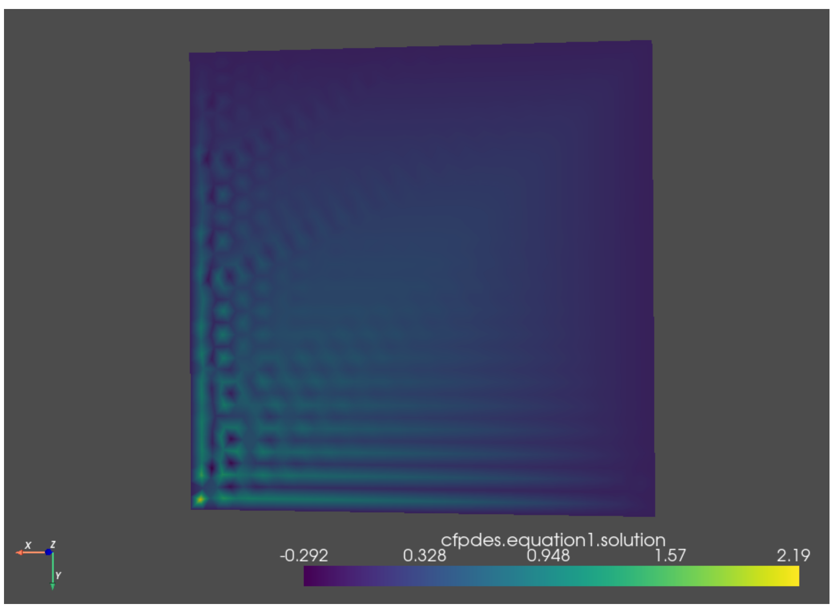


Figure 10: ϵ = 1e-3 sans méthode de stabilisation

3.1) Pour vérifier l'ordre de convergence, nous allons considérer une fonction $u(x, y) = x^2 + y^2$

Pour que u soit solution du problème, on doit avoir $f = -4e-3+2*x+2*y+x^2+y^2$ et $g = x^2+y^2$ si on prend $\epsilon = 1e-3$, $\beta = (1,1)^T$, $\mu = 1$ et $g = 0$.

Regardons les erreurs en normes L^2 et H^1:

h	L^2	H^1
0.4	1.8799026774634953e-01	2.2682461643710003e-02
0.2	1.1270157838966860e-01	8.2928153375460677e-03
0.1	5.7989554719951569e-02	1.9807126752690446e-03
0.05	2.9143380172362593e-02	4.9159706734286835e-04
0.025	1.4476276503802189e-02	1.2284868096793368e-04

Table 1: Erreur en norme L^2 et H^1 pour différent pas de maillage avec une base de fonctions $\mathbb{P}_1$

h	L^2	H^1
0.4	7.1088742768433036e-15	9.1605437148933129e-16
0.2	1.3057911970147188e-14	4.7978347293371833e-16
0.1	2.3735140893920529e-14	5.8111735674615155e-16
0.05	3.9026536236342233e-14	1.4540753830744363e-15
0.025	7.4083789924857955e-14	2.7957426964335838e-15

Table 2: Erreur en norme L^2 et H^1 pour différent pas de maillage avec une base de fonctions $\mathbb{P}_2$

En utilisant la section Statistics de la toolbox feel++, nous pouvons également calculer la norme H^1 de notre solution. Feel++ nous donne ce résultat:

$$||u||_{H^1} \approx 1.81$$

On a donc bien:

$$||u - u_h||_{L^2} \leq h^{\frac{1}{2}} ||u||_{H^1}$$

Avec h, le pas du maillage. Ce qui confirme la convergence d'ordre $\frac{1}{2}$.

La toolbox associée à cette partie est trouvable dans le fichier adr_manufacturee.cfg et adr_manufacturee.json du dossier adr.

3.2) Voici la solution du problème après avoir appliqué une méthode de stabilisation GaLS.

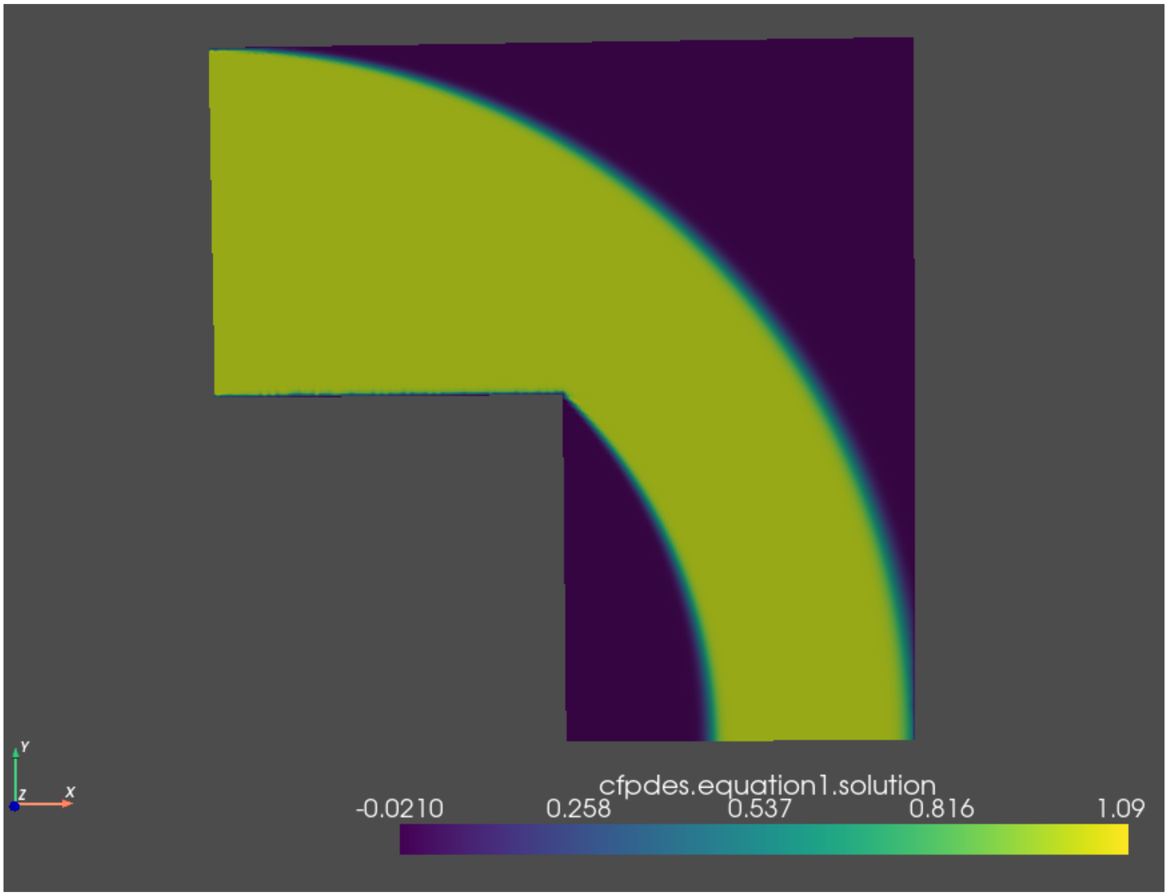


Figure 11: Solution approximé de u sur un maillage en forme de L

Sur le bord gauche, nous remarquons que la solution est tout le temps égale à 1, comme la condition de Dirichlet que l'on a imposé.

On remarque aussi que sur les autre bords, la solution est nulle (excepté le bord bas), ça correspond à la condition de Dirichlet homogène. Et le bord bas corredpond à la condition de Neumann homogène.

La toolbox utilisée pour générer cette solution est trouvable dans le fichier adr_L.cfg et adr_L.json dans le dossier adr. Le maillage utilisé s'appelle L.geo

3 Stokes

1) Pour que la solution de Kovsznay soit solution du problème, on doit calculer f tel que:

$$-\Delta u + \nabla p = f$$

et

$$u = g \text{ sur } \partial\Omega$$

Intéressons-nous à la première équation:

$$\Delta u = \Delta u_1 e_1 + \Delta u_2 e_2$$

avec u_i la i-ème coordonnée du vecteur u, et e_i le i-ème vecteur de la base canonique.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\lambda e^{\lambda x} cos(2\pi y) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 2\pi e^{\lambda x} sin(2\pi y)$$
$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -\lambda^2 e^{\lambda x} cos(2\pi y) \qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 4\pi^2 e^{\lambda x} cos(2\pi y)$$

On a donc $\Delta u_1 = (4\pi^2 - \lambda^2) e^{\lambda x} cos(2\pi y)$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\lambda^2}{2\pi} e^{\lambda x} sin(2\pi y) \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y} = \lambda e^{\lambda x} cos(2\pi y)$$
$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -\lambda^3 e^{\lambda x} sin(2\pi y) \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = -2\lambda\pi e^{\lambda x} sin(2\pi y)$$

Finalement, on a:

$$\Delta u = \begin{pmatrix} (4\pi^2 - \lambda^2) e^{\lambda x} cos(2\pi y) \\ (\frac{\lambda^3}{2\pi} - 2\lambda\pi) e^{\lambda x} sin(2\pi y) \end{pmatrix}$$

Calculons ∇p
$p = -\frac{e^{2\lambda x}}{2} + C$
$\frac{\partial p}{\partial x} = -\lambda e^{2\lambda x}$
Comme il n'y a pas de y dans p, il vient immédiatement que $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.
Et donc:
$\nabla p = \begin{pmatrix} -\lambda e^{2\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix}$
Finalement on a:

$$\begin{aligned} f &= \begin{pmatrix} (4\pi^2 - \lambda^2) e^{\lambda x} cos(2\pi y) \\ (\frac{\lambda^3}{2\pi} - 2\lambda\pi) e^{\lambda x} sin(2\pi y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda e^{2\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (4\pi^2 - \lambda^2) e^{\lambda x} cos(2\pi y) - \lambda e^{2\lambda x} \\ (\frac{\lambda^3}{2\pi} - 2\lambda\pi) e^{\lambda x} sin(2\pi y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Maintenant, déterminons C tel que p soit de moyenne nulle, c'est à dire:

$$\int_\Omega p = 0$$

Comme Ω est un rectangle, on a l'égalité suivante:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega p &= \int_{-0.5}^{1}\int_{-0.5}^{1.5} \frac{-e^{2\lambda x}}{2} + C dy dx \\
&= \int_{-0.5}^{1} \left(\frac{-e^{2\lambda x}}{2} + C\right) \int_{-0.5}^{1.5} dy dx \\
&= \int_{-0.5}^{1} \left(\frac{-e^{2\lambda x}}{2} + C\right) [y]_{-0.5}^{1.5} \, dx \\
&= 2\int_{-0.5}^{1} \left(\frac{-e^{2\lambda x}}{2} + C\right) dx \\
&= 2\left[\frac{-e^{2\lambda x}}{4\lambda} + Cx\right]_{-0.5}^{1} \\
&= 2\left(\frac{-e^{2\lambda}}{4\lambda} + C + \frac{e^{-\lambda}}{4\lambda} + \frac{C}{2}\right) \\
&= \frac{-e^{2\lambda} + e^{-\lambda}}{2\lambda} + 3C
\end{aligned}$$

Or on a:

$$\begin{aligned}
\frac{-e^{2\lambda} + e^{-\lambda}}{2\lambda} + 3C = 0 \\
3C = \frac{e^{2\lambda} - e^{-\lambda}}{2\lambda} \\
C = \frac{e^{2\lambda} - e^{-\lambda}}{6\lambda}
\end{aligned}$$

2) Voici la formulation variationnelle pour le problème de Stokes:

On cherche (u, p) dans $H_0^1 \times L_*^2$ avec L_*^2 l'ensemble des fonctions de carré intégrable telle que $\int_\Omega p = 0$.

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla v - \int_\Omega p \nabla \cdot v = \int_\Omega f \cdot v$$

$$\int_\Omega q \nabla \cdot u = 0$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ et $\forall q \in L_*^2$

3) En choisissant, une base $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$ voici les solutions obtenues:

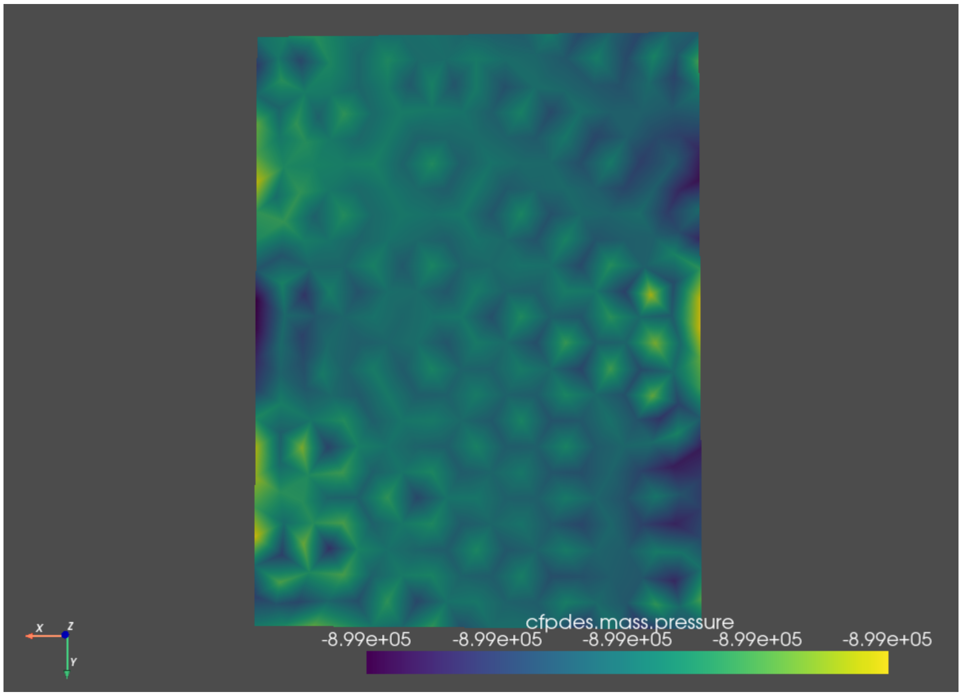


Figure 12: Solution approchée de p avec une erreur L^2 de: 1.5577586580821336e+06

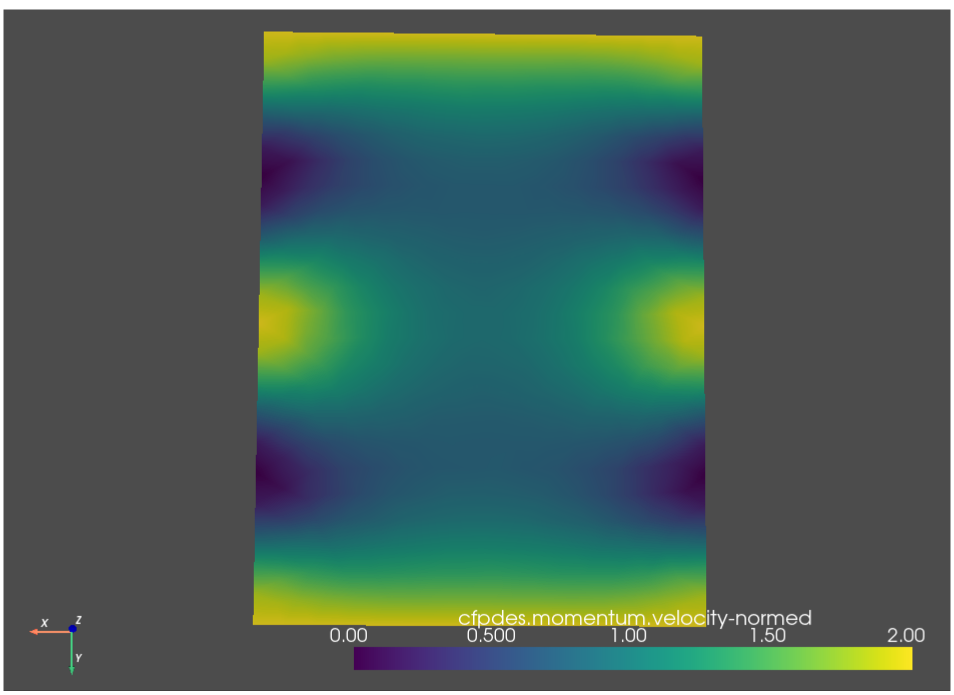


Figure 13: Solution approchée de u avec une erreur L^2 de: 7.4786283012603649e-01

On remarque que la méthode a du mal à converger vers la solution exacte de p

4) Maintenant en utilisant la méthode $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$, on obtient les résultats suivants:

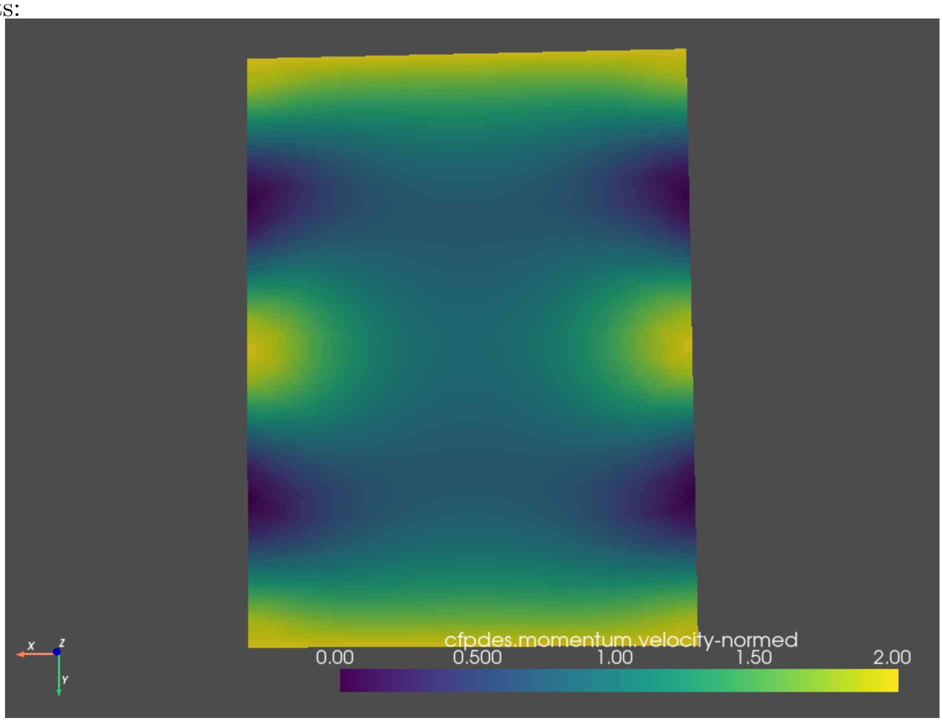


Figure 14: Solution approchée de u avec une base $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$

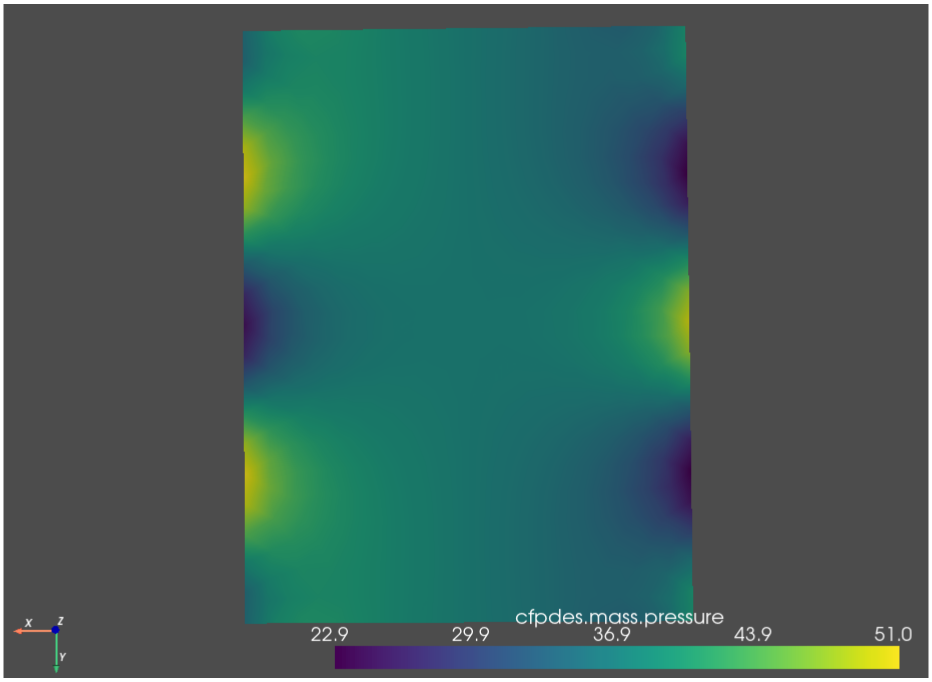


Figure 15: Solution approchée de p avec une base $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$