Stratégies optimales de régulation d'épidémies

Vincent Italiano

August 24, 2021

Table of contents

Le stage

- MIMESIS.
  - développement d'outils numériques pour la simulation en temps réel
  - simulation de chirurgie
  - machine learning
- Modélisation d'épidémie

Modèles épidémiologiques

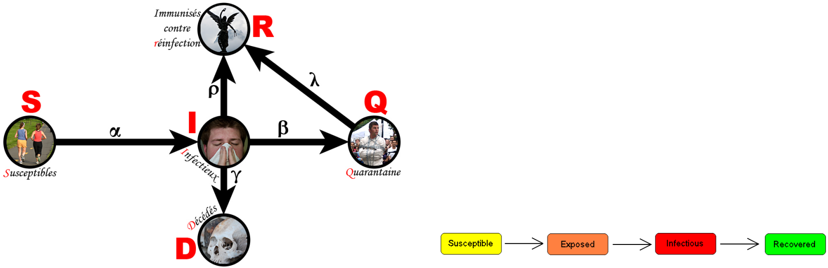


Figure: exemples de modèles épidémiologiques

Le modèle SIR

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma} \boxed{R}$$

- S : représente les personnes saines.
- I : les personnes infectées.
- R : les personnes retirées.
- β : taux de transmission.
- γ : taux de guérison.

Le modèle SIR

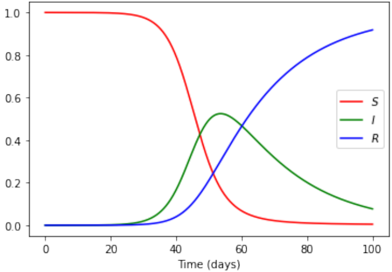
$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) = \gamma I(t) \\ S(t_0) = S_0, I(t_0) = I_0, R(t_0) = R_0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\text{avec } S_0 + I_0 + R_0 = 1.$$

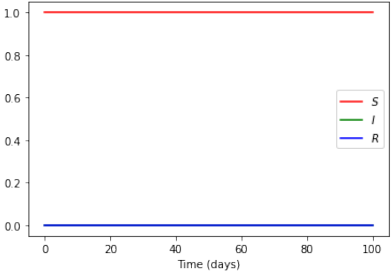
Le modèle SIR

$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ déterminé la dynamique de l'épidémie.

- si $\mathcal{R}_0 < 1$ il n'y a pas d'épidémie.
- Si $\mathcal{R}_0 > 1$ une épidémie à lieu si $S_0 > \frac{1}{\mathcal{R}_0}$.
- $S_{\text{herd}} = 1/\mathcal{R}_0$: seuil d'immunité collective, I commence à baisser.



a) $\beta = 0.29, \gamma = 0.05$



b) $\beta < \gamma$

Figure: Exemple de modélisation avec le modèle SIR

Le modèle étudié

$$\begin{cases} S'(t) = -u(t)\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = u(t)\beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \end{cases} \tag{2}$$

$S(0) = S_0, I(0) = I_0$ et $S_0 + I_0 \leq 1$.

- $u = 1$, aucune restriction.
- plus u prend des petites valeurs plus le confinement est strict.

$$U_{\alpha,T} = \{u \in L^2([0,+\infty[), \alpha \leq u(t) \leq 1 \text{ si } t \in [0,T], u(t) = 1 \text{ si } t > T\}$$

Theorem ([2])

Soit $\alpha \in [0,1[$. Supposons $S_0 > S_{herd}$ et posons

$$\bar{\alpha} = \frac{S_{herd}}{S_0 + I_0 - S_{herd}} \ln\left(\frac{S_0}{S_{herd}}\right)$$

- *Il n'existe pas de temps $T > 0$ et $u \in U_{\alpha,T}$ tels que*

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = S_{herd}$$

- *Si $\alpha < \bar{\alpha}$, alors pour tout $0 < \varepsilon < S_{herd}$ il existe un $T > 0$ et $u \in U_{\alpha,T}$ tels que*

$$S_{herd} \geq \lim_{t\to\infty} S(t) \geq S_{herd} - \varepsilon$$

On considère le problème :

$$\sup_{u \in U_{\alpha,T}} S_\infty(u) \qquad (\mathcal{P}_{\alpha,T})$$

où

$$S_\infty(u) = \lim_{t \to \infty} S(t)$$

avec (S, I) la solution du problème (2) associée u.
Ou sa forme équivalente :

$$\inf_{u \in U_{\alpha,T}} J(u) \qquad (\mathcal{P}^{\Phi}_{\alpha,T})$$

où

$$J(u) = \gamma \int_0^T (u(t) - 1) I(t) \mathrm{d}t$$

Résultats théoriques

Theorem ([2])

Soit $\alpha \in [0,1[$ *et* $T > 0$. *Le problème* $(\mathcal{P}^{\Phi}_{\alpha,T})$ *admets une unique solution* u^* *De plus, il existe un unique réel* $T_0 \in [0, T[$ *tel que* $u^* = u_{T_0}$ *où*

$$u_{T_0} = 1_{[0,T_0]} + \alpha 1_{[T_0,T]} + 1_{[T,+\infty[}$$

On a un nouveau problème équivalent :

$$\sup_{T_0 \in [0,T[} S_\infty(u_{T_0}) \qquad (\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha,T})$$

Résultats théoriques

on note

$$\psi(T_0) = (1-\alpha)\beta I^{T_0}(T) \int_{T_0}^{T} \frac{S^{T_0}(t)}{I^{T_0}(t)} \mathrm{d}t - 1 \tag{3}$$

où (S^{T_0}, I^{T_0}) désigne la solution de (2) associée à u_{T_0}.

Theorem

Soit $\alpha \in [0,1[$, $T > 0$ et T_0^* la solution du problème $(\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha,T})$. La fonction ψ est décroissante sur $]0, T[$ et

- *si $\psi(0) \leq 0$, alors $T_0^* = 0$*
- *si $\psi(0) > 0$, alors T_0^* est l'unique solution sur $]0, T[$ de l'équation*

$$\psi(T_0) = 0$$

Résultats numériques

- Librairie python adaptée.
- algorithme de gradient projeté.
- utiliser les résultats théoriques.

paramètre	valeur
β	0.29
γ	0.1
α	0.231
S_0	$1 - I_0$
I_0	1.49×10^{-5}
R_0	0
T	100

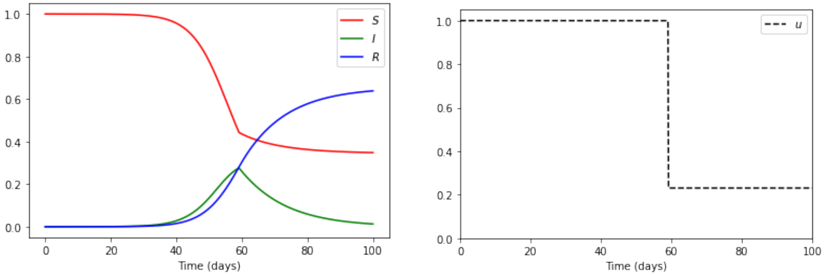
Table: valeurs des paramètres pour les simulations numériques

Avec GEKKO

```
# initialize gekko
m = GEKKO()
m.time = np.linspace(0,T,nt)

# Variables
S = m.Var(value=S0)
I = m.Var(value=I0)
x = m.Var(value=0)
u = m.Var(value=1,lb=alpha_conf,ub=1)
p = np.zeros(nt) # mark final time point
p[-1] = 1.0
final = m.Param(value=p)

# Equations
m.Equation(S.dt()==-beta*u*S*I)
m.Equation(I.dt()==beta*u*S*I-gamma*I)
m.Equation(x.dt()==gamma*(u-1)*I)

m.Obj(x*final) # Objective function
m.options.IMODE = 6 # optimal control mode
m.options.MAX_ITER = 2000  # adjust maximum iterations
m.solve(disp=False) # solve
```

Figure: Utilisation de GEKKO pour résoudre $(\mathcal{P}_{\alpha,T})$

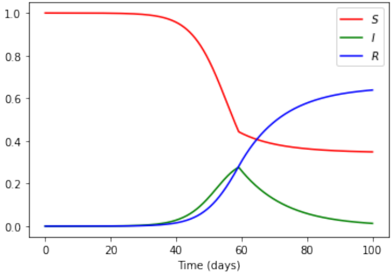
Avec GEKKO



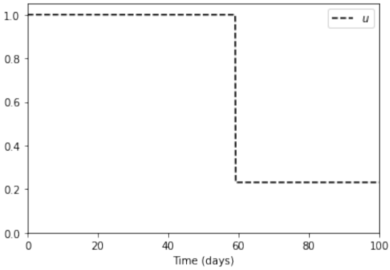
a) Solutions de (2) b) Contrôle associé

Figure: solution du problème $(\mathcal{P}_{\alpha,T})$ avec GEKKO

Par un gradient projeté/Avec les résultats théoriques



a) Solutions de (2)



b) Contrôle associé

Figure: solution du problème $(\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha,T})$ par dichotomie

La suite..

- Nouveau critère à optimiser, par exemple ne pas avec trop d'infectés.
- Autre type de modèle : SEIR par exemple.

Bibliography

Logan Beal, Daniel Hill, R Martin, and John Hedengren.
Gekko optimization suite.
Processes, 6(8):106, 2018.

Pierre-Alexandre Bliman, Michel Duprez, Yannick Privat, and Nicolas Vauchelet.
Optimal Immunity Control and Final Size Minimization by Social Distancing for the SIR Epidemic Model.
Journal of Optimization Theory and Applications, 189(2):408–436, 2021.

Marc Monticelli Corentin Bayette.
Modélisation d'une épidémie, partie 1.
Images des Mathématiques, 2020.

E.Trelat.
Contrôle optimal : théorie et applications.
collection "mathématiques discrètes", 2005.