Projet CSMI M2
Méthodes *structure-preserving* pour les EDPs

Joubine Aghili*, Victor Michel-Dansac, Emmanuel Franck

IRMA, Univ. Strasbourg,
Inria TONUS, Strasbourg.

Mardi 5 Octobre 2021

Schéma SP pour les EDO

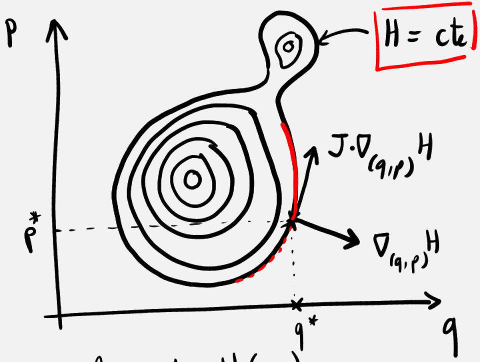
Certaines équations s'écrivent comme un système Hamiltonien :

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p H(q,p) \\ \dot{p} = -\partial_q H(q,p) \end{cases}$$

Schéma SP pour les EDO

Certaines équations s'écrivent comme un système Hamiltonien :

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p H(q,p) \\ \dot{p} = -\partial_q H(q,p) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{X} = J\nabla_{(q,p)} H, \quad H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}.$$



Isovaleurs de H(q,p)

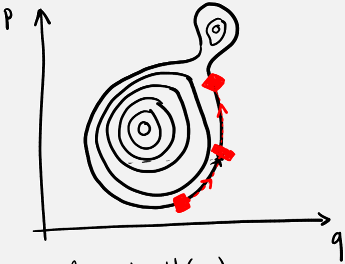
Schéma SP pour les EDO

Certaines équations s'écrivent comme un système Hamiltonien :

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p H(q,p) \\ \dot{p} = -\partial_q H(q,p) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{X} = J\nabla_{(q,p)} H, \quad H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}.$$

Propriété importante :

> *Conservation du Hamiltonien* $\frac{d}{dt}H(q,p) = 0$ *et du volume dans l'espace des phases.*

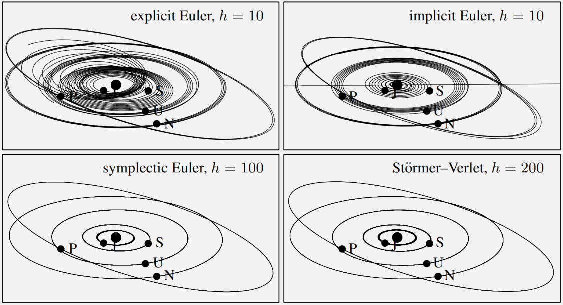


Isovaleurs de H(q,p)

Schéma SP pour les EDO

Motivation : schéma numérique dit *symplectique* conservant cette propriété [Ruth, Feng Kang, Hairer, Lubich, Wanner,...]

- Simulations en temps long (pas possible avec de l'explicite ni implicite !)
- Réduction des erreurs et de la précision



Geometrical Numerical Integration – Hairer, Lubich, Wanner 2002

Schéma SP pour les EDP

$$\mathcal{L}(u) = 0, \text{sur un domaine } \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

- $\mathcal{L}$ est défini sur un certain espace fonctionnel $(H^1(\Omega), ...)$
- $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel pouvant faire intervenir les opérateurs $\partial_t, \mathrm{div}, \mathrm{grad}, \mathrm{rot}, ...$

Schéma SP pour les EDP

$$\mathcal{L}(u) = 0, \text{sur un domaine } \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

- $\mathcal{L}$ est défini sur un certain espace fonctionnel $(H^1(\Omega), ...)$
- $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel pouvant faire intervenir les opérateurs $\partial_t, \mathrm{div}, \mathrm{grad}, \mathrm{rot}, ...$

Remarque : Il existe des relations entre ces opérateurs différentiels résumées sous la forme d'un diagramme *complexe de de Rham*

$$\{0\} \longrightarrow X_1 \xrightarrow{grad} X_2 \xrightarrow{rot} X_3 \xrightarrow{div} X_4 \longrightarrow \mathbb{R},$$

telles que div(rot) = 0, rot(grad) = 0, ainsi qu'un *complexe dual*

$$\{0\} \longleftarrow X_1^* \xleftarrow{grad*} X_2^* \xleftarrow{rot*} X_3^* \xleftarrow{div*} X_4^* \longleftarrow \mathbb{R},$$

où sont définis les adjoints div^*, rot^* et grad^*.

Schémas SP pour les EDP

Motivation :

*Construire des **analogues discrets** présevant ces propriétés*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "d/dx"] \arrow[d, "I_1"'] & X_2 \arrow[d, "R_2"] \\ \tilde{X}_1 \arrow[r, "\mathbb{G}"] & \tilde{X}_2 \end{tikzcd}$$

Complexe primal

$$\begin{tikzcd} X_1^* \arrow[d, "I_1^*"'] & X_2^* \arrow[l, "-d/dx"'] \arrow[d, "R_2^*"] \\ \tilde{X}_1^* & \tilde{X}_2^* \arrow[l, "\mathbb{G}^T"'] \end{tikzcd}$$

complexe dual.

Exemple de complexe primal/dual dans le cas 1D

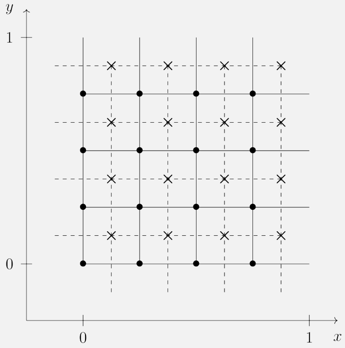
$\rightsquigarrow$ La commutativité de ces diagrammes est l'un des points-clé permettant d'obtenir de *bons* schémas numériques [Arnold, Whinter].

Dualité

Certaines quantités doivent être calculées sur le maillage dual (barycentres des éléments)

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathbf{d}^2}{\partial t} + \mathrm{d}\mathbf{h}^1 &= \mathbf{j}^2 \\
\frac{\partial \mathbf{b}^2}{\partial t} + \mathrm{d}\mathbf{e}^1 &= 0, \\
\mathrm{d}\mathbf{d}^2 &= \rho^3, \\
\mathrm{d}\mathbf{b}^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{d}^2 = \star\mathbf{e}^1, \qquad \mathbf{h}^1 = \star\mathbf{b}^2.$$



$\rightsquigarrow$ L'opérateur de Hodge $\star$ fait passer du maillage primal au dual.

Le projet

Grandes étapes du projet :

- Comprendre la construction théorique du complexe discret

Le projet

Grandes étapes du projet :

- Comprendre la construction théorique du complexe discret
- Implémenter dans un code de calcul les opérateurs discrets avec un choix particulier d'opérateurs $\mathcal{I}$ et $\mathcal{R}$.

Le projet

Grandes étapes du projet :

- Comprendre la construction théorique du complexe discret
- Implémenter dans un code de calcul les opérateurs discrets avec un choix particulier d'opérateurs $\mathcal{I}$ et $\mathcal{R}$.
- Vérifier sur plusieurs cas tests : Poisson 1D, Maxwell 1D
  - maillage primal/dual,

Le projet

Grandes étapes du projet :

- Comprendre la construction théorique du complexe discret
- Implémenter dans un code de calcul les opérateurs discrets avec un choix particulier d'opérateurs $\mathcal{I}$ et $\mathcal{R}$.
- Vérifier sur plusieurs cas tests : Poisson 1D, Maxwell 1D
  - maillage primal/dual,
  - conditions de bords,

Le projet

Grandes étapes du projet :

- Comprendre la construction théorique du complexe discret
- Implémenter dans un code de calcul les opérateurs discrets avec un choix particulier d'opérateurs $\mathcal{I}$ et $\mathcal{R}$.
- Vérifier sur plusieurs cas tests : Poisson 1D, Maxwell 1D
  - maillage primal/dual,
  - conditions de bords,
  - ordre de convergence, etc

Le projet

Grandes étapes du projet :

- Comprendre la construction théorique du complexe discret
- Implémenter dans un code de calcul les opérateurs discrets avec un choix particulier d'opérateurs $\mathcal{I}$ et $\mathcal{R}$.
- Vérifier sur plusieurs cas tests : Poisson 1D, Maxwell 1D
  - maillage primal/dual,
  - conditions de bords,
  - ordre de convergence, etc
- Généraliser le code pour d'autres opérateurs d'interpolation/réduction

Le projet

Grandes étapes du projet :

- Comprendre la construction théorique du complexe discret
- Implémenter dans un code de calcul les opérateurs discrets avec un choix particulier d'opérateurs $\mathcal{I}$ et $\mathcal{R}$.
- Vérifier sur plusieurs cas tests : Poisson 1D, Maxwell 1D
  - maillage primal/dual,
  - conditions de bords,
  - ordre de convergence, etc
- Généraliser le code pour d'autres opérateurs d'interpolation/réduction
- Suivant avancement : Maxwell 2D, 1D courbe, non structuré...

Support principal :

Structure-preserving methods on staggered grids, E. Sonnendrücker
Notes de cours, TU München.

Des questions ?