Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job
sous la direction de Joubine Aghili

Université de Strasbourg
Institut de Recherche de Mathématiques Avancées (IRMA)

25 août 2022

Contexte

- 7 équipes de recherche
- 130 membres, dont 87 chercheurs et enseignants-chercheurs
- Au sein de l'équipe "Modélisation et Contôle"

IRMA
Institut de Recherche Mathématique Avancée

Objectif

Objectif : Trouver un substitut à l'erreur de projection dans l'algorithme glouton.
Dans le cadre des EDP paramétrée, la méthode des bases réduites s'avère souvent être une option de premier choix.

Algorithme Glouton

Require: $\wedge_{test}$ un ensemble, $u_{EF}(\mu)$ et $u_{BR}(\mu)$ 2 fonctions
  choisir μ_1 de manière aléatoire
  $u_1 = u_{EF}(\mu)$
  $B_1 = Vect(u_1)$
  for i allant de 2 à N_0 **do**
    $u_i := \underset{\mu \in \wedge_{test}}{argmax}(||u_{EF}(\mu) - P_{B_i} u_{BR}(\mu)||)$
    $B_i := Vect(B_{i-1} \cup u_i)$
  end for
Ensure: retourner B_{N_0}

Exemple d'EDP paramétrée :

$$\begin{cases} y'' + \mu y = 1 & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \\ \mu \text{ le paramètre} & \end{cases}$$

Etapes du stage

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job
sous la direction
de Joubine Aghili

Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives

Objectif principal : Construire un algorithme Glouton faible avec un modèle entrainé par réseau de neurone.

Etapes du stage :

- Implémenter un exemple en 1d en Python avec la méthode des éléments finis et donner une validation avec la solution exacte.
- Implémenter la méthode des bases réduites et faire une validation.
- Entrainer un réseau de neurone apprenant l'erreur de projection à l'aide de PyTorch/TensorFlow.
- Extension au cas 2D avec Feel++ et les bibliothèques adaptées.

Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives

Exemple 1D

On s'intéresse au problème 1D paramétrée par μ issue d'un miniprojet d'Alexandre Ern [3]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}(D \cdot \frac{\partial u}{\partial x}) + u = f, & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \\ D(x) = \begin{cases} 1, x \in \Omega_1 \\ \mu, x \in \color{red}{\Omega_2} \end{cases} & \end{cases}$$

Décomposition de Ω en Ω_1 et Ω_2

Formulation Variationnelle

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job
sous la direction
de Joubine Aghili

Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives

La formulation variationnelle s'écrit : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v; \mu) = l(v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

En posant :

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega) \qquad a(u, v; \mu) := \int_{\Omega_1} v'u' + \mu \int_{\Omega_2} v'u' + \int_{\Omega} vu,$$

$$l(v) := \int_{\Omega} fv.$$

Discrétisation de Ω

Soit Ω un segment, que l'on décompose en Ω_1 et Ω_2 disjoints et construit un maillage équidistant :

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{N-1} K_i$$

tel que :

1. N est le nombre d'éléments du maillage et h le pas constant vaut $\frac{1}{N-1}$.
2. $K_i = [x_i, x_{i+1}]$ avec x_i les noeuds du maillage.
3. On suppose que chaque maille K_i se trouve soit dans $\overline{\Omega_1}$ soit dans $\overline{\Omega_2}$.

Décomposition de Ω en K_i

Discrétisation de $H_0^1(\Omega)$

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

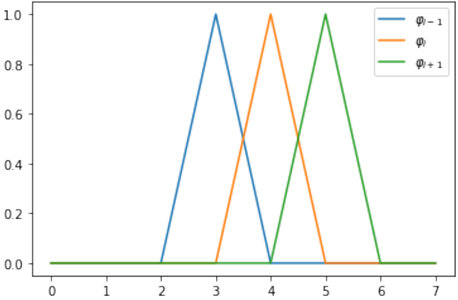
Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives

Une discrétisation possible de $H_0^1(\Omega)$ est l'espace $V_{h,0}$ défini par :

$$V_{h,0} = \{u \in V_h \mid u_{|\partial\Omega} = 0\}$$

$$V_h = Vect(\{\varphi_i\})$$

Les fonctions de base de V_h



Problème discret

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives

En remplacant $H_0^1(\Omega)$ par $V_{h,0}$, on va chercher à résoudre le problème discret :

$$\text{Trouver } u_h \in V_{h,0} \text{ tel que : } a(u_h, v_h; \mu) = l(v_h), \forall v_h \in V_{h,0}$$

Matrices éléments finis

Notons

$$A_\mu := \begin{pmatrix} & & \\ & a(\varphi_i, \varphi_j; \mu) & \\ & & \end{pmatrix} \quad X_\mu := \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix} \quad \text{et } b := \begin{pmatrix} \\ l(\varphi_j) \\ \\ \end{pmatrix}$$

Résoudre le problème discret revient à touver X_μ tel que

$$A_\mu X_\mu = b$$

où :

1. $A_\mu = A_1 + \mu A_2 + M$
2. $A_1 = \int_\Omega \mathbb{1}_{\Omega_1} \varphi_i' \varphi_j'$, $A_2 = \int_\Omega \mathbb{1}_{\Omega_2} \varphi_i' \varphi_j'$, $M = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j$
3. $b = \int_\Omega f \varphi_j$

Introduction
- Contexte
- Objectif du stage

Elements finis
- Formulation Variationnelle
- Discrétisation du problème
  - Construction des espaces d'approximation
  - Construction des matrices éléments finis
- Validation

Modèle réduit
- Formulation du problème réduit
- Espace des bases réduites V_{N_0}
- Matrices réduites
- Etude du modèle réduit

Conclusion et perspectives

Matrices éléments finis

Posons

$$D := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Après calculs on a :

$$A_1 := \frac{1}{h} \begin{pmatrix} D & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & D & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & D & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & D & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & D \end{pmatrix} \qquad M := h \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A_2 := \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \cdot & D & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & D & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & D & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & D \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad b := h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Validation

Fixons $\mu = 1$ et notre problème 1D se réécrit :

$$\begin{cases} -u'' + u = 1 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Ce problème admet une unique solution u_{ex} connue:

$$\forall x \in \Omega, u_{ex}(x) = C_1 \exp(-x) + C_2 \exp(x) + 1$$

$$\text{avec } C_1 = \frac{1-e}{e - e^{-1}} \text{ et } C_2 = \frac{e^{-1} - 1}{e - e^{-1}}$$

Estimations d'errreur

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives

Quelques résultats pour évaluer la solution u_{EF} :

$$||u - u_h||_{1,\Omega} \leq ch|u|_{2,\Omega}$$

$$||u - u_h||_{0,\Omega} \leq ch^2|u|_{2,\Omega}$$

où $u \in H^2(\Omega)$ et $c \geq 0$ est indépendant de h

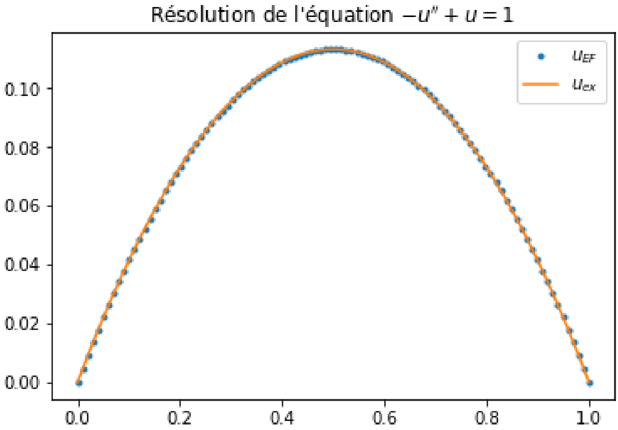
Illustration des Résultats

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives

Pour $N = 100$, on a :



Solution exacte u_{ex} et solution élément fini u_{EF}

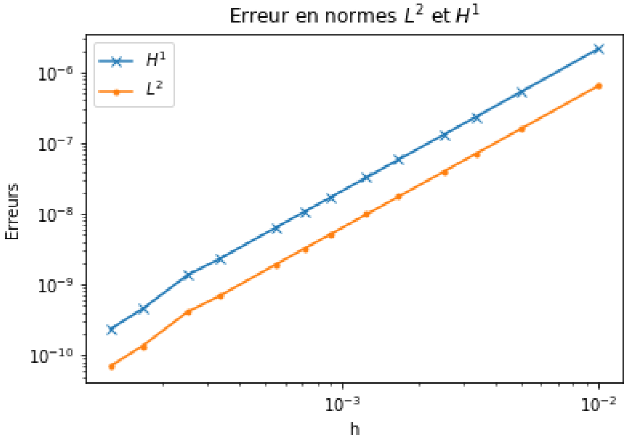
Illustration des erreurs

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

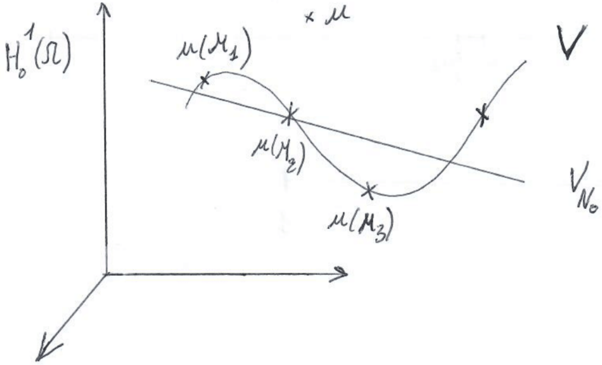
Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives

Pour diverses valeurs de N, on a:



Erreurs $||u_{ex} - u_{EF}||_{L^2}$ et $||u_{ex} - u_{EF}||_{H^1}$ en fonction de h

Modèle réduit



La méthode des bases réduites s'appuie sur le fait que les solutions de l'EDP vivent sur une variété V. On fait l'hypothèse fondamentale que $V \approx V_{N_0}$, avec V_{N_0} un espace affine de faible dimension.

Modèle réduit

Dans ce problème réduit, on cherche $X_\mu^{br} := \begin{pmatrix} x_{\mu,1}^{br} \\ \vdots \\ x_{\mu,N_0}^{br} \end{pmatrix}$ tel que

$$u^{br}(\mu) = x_{\mu,1}^{br} u_1 + \dots + x_{\mu,N_0}^{br} u_{N_0}$$

Les fonctions u_i sont appelés «snapshot», et sont obtenues en résolvant le problème discret par éléments finis.

Construction de la base réduite

Algorithme Glouton faible par apprentissage
Congo Job sous la direction de Joubine Aghili
Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives

On définit $\wedge_{test} \subset \wedge = \mathbb{R}_*^+$
En pratique :

$$\wedge_{test} := \{\mu_1, ..., \mu_M\} \text{ et } M \approx 100$$

Grâce à l'algorithme Glouton avec $\wedge_{test}$, on a la base réduite :

$$V_{N_0} := vect(u_1, u_2, ..., u_{N_0}) \text{ et } \wedge_{trial} := \{\mu_1, ..., \mu_{N_0}\}$$

Matrices réduites

En posant

$$U = (u_1, ..., u_{N_0})$$

Et construisant

$$V_0^{BR} := U^T(A_0 + M)U \quad \text{et} \quad V_1^{BR} := U^T A_1 U$$

Avec les relations suivantes :

$$B^{BR} := U^T b \text{ et } A_\mu^{BR} = V_0^{BR} + \mu V_1^{BR}$$

Résoudre le problème réduit revient finalement à trouver X_μ^{br} tel que :

$$A_\mu^{BR} X_\mu^{br} = B^{br}$$

Résolution BR avec $N_0 = 2$

Algorithme Glouton faible par apprentissage

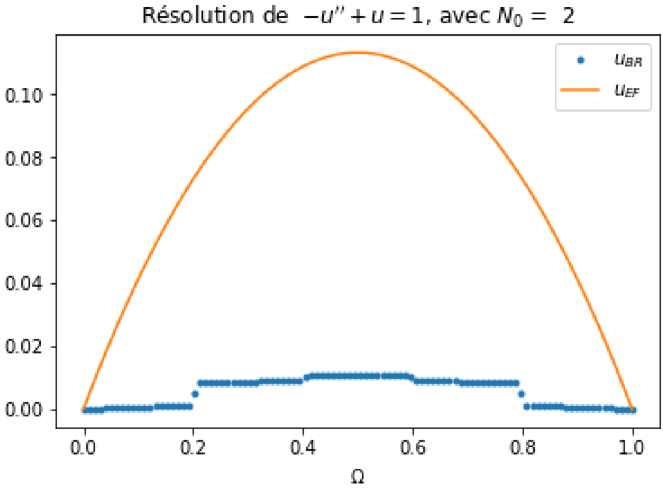
Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction
Contexte
Objectif du stage

Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation

Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit

Conclusion et perspectives



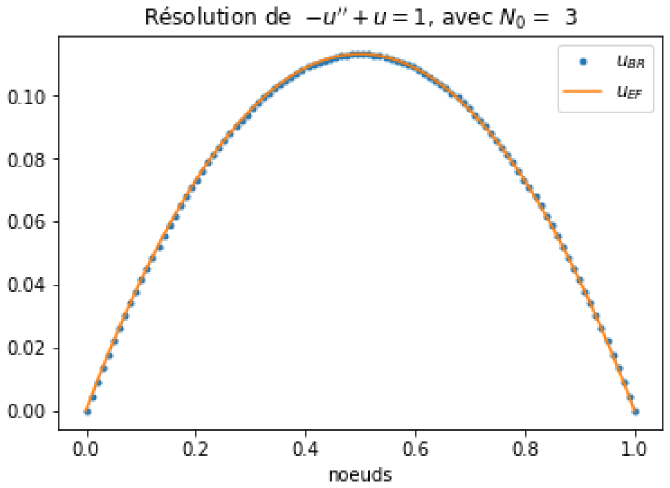
Solutions éléments finis et base réduite avec $N_0 = 2$

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives

Résolution BR avec $N_0 = 3$



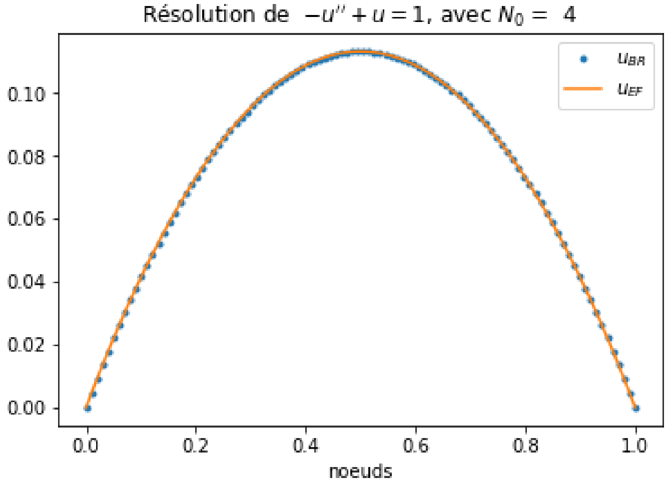
Solutions éléments finis et base réduite avec $N_0 = 3$

Résolution BR avec $N_0 = 4$

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives



Solutions éléments finis et base réduite avec $N_0 = 4$

Résolution BR avec $N_0 = 5$

Algorithme Glouton faible par apprentissage

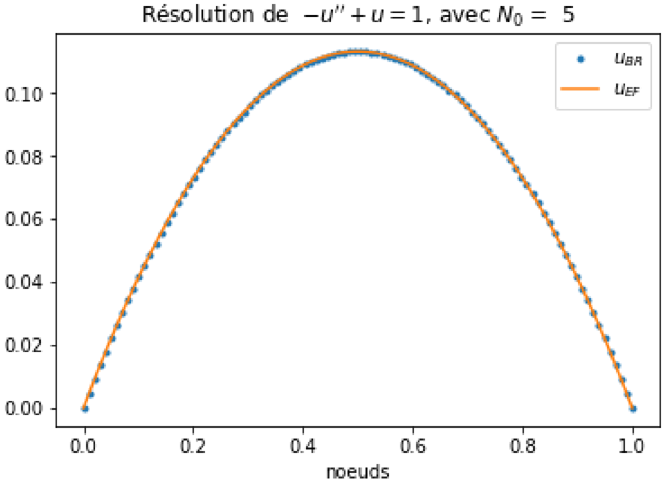
Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction
- Contexte
- Objectif du stage

Elements finis
- Formulation Variationnelle
- Discrétisation du problème
  - Construction des espaces d'approximation
  - Construction des matrices éléments finis
- Validation

Modèle réduit
- Formulation du problème réduit
- Espace des bases réduites V_{N_0}
- Matrices réduites
- Etude du modèle réduit

Conclusion et perspectives



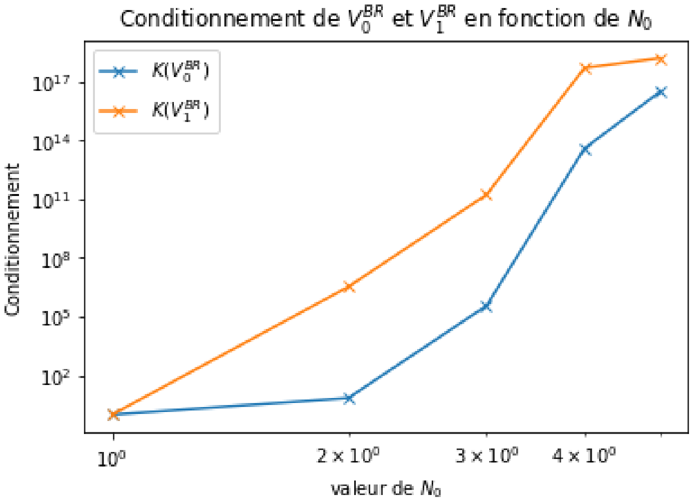
Solutions éléments finis et base réduite avec $N_0 = 5$

Le conditionnement

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives

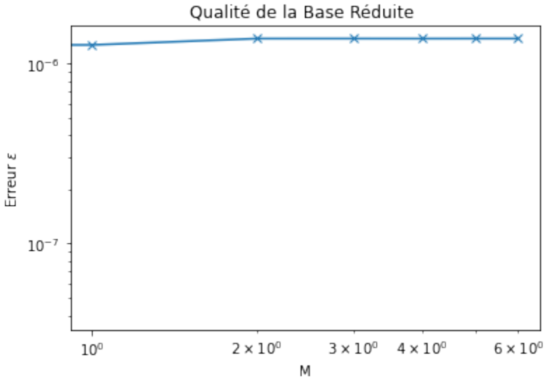


Evolution du conditionnement

Qualité de la base réduite

Après construction de V_{N_0}, on calcule

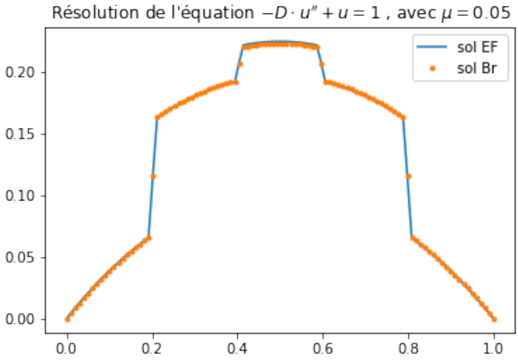
$$\epsilon := \sup_{\mu \in \wedge_{test}} ||u^{EF}(\mu) - u^{RB}(\mu)||_{L^2} \text{ où } \wedge_{test} \cap \wedge_{trial} = \emptyset$$



Erreur ϵ pour $M \in \{10, 100, 500, 1000, 2000, 2500, 3000\}$

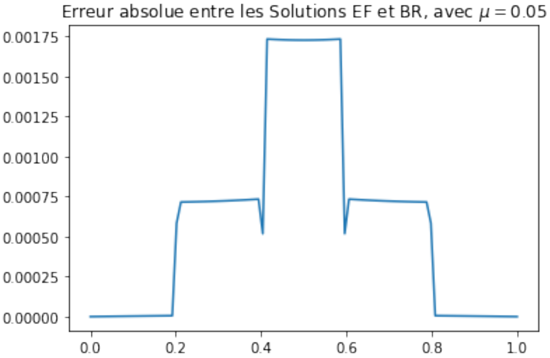
Résolution avec $N_0 = 3$ et $\mu = 0.05$

En fixant $\mu = 0.05$, voici la résolution du problème éléments finis et du problème réduit :



Solution Elément Finis et Base Réduite pour $\mu = 0.05$

Erreur absolue



Erreur en valeur absolu entre les solutions EF et BR pour $\mu = 0.05$

Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites V_{N_0}
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Perspectives futures : remplacer $\underset{\mu \in \wedge_{test}}{argmax}(||u_{EF}(\mu) - P_{B_i} u_{BR}(\mu)||)$ dans par un réseau de neuronne $NN(\mu)$ puis réaliser avec Feel++ l'extension 2D/3D.

Algorithme Glouton

Require: $\wedge_{test}$ un ensemble, $u_{EF}(\mu)$ et $u_{BR}(\mu)$ 2 fonctions

  choisir μ_1 de manière aléatoire

  $u_1 = u_{EF}(\mu)$

  $B_1 = Vect(u_1)$

  for i allant de 2 à N_0 **do**

    $u_i := \underset{\mu \in \wedge_{test}}{argmax}(||u_{EF}(\mu) - P_{B_i} u_{BR}(\mu)||)$

    $B_i := Vect(B_{i-1} \cup u_i)$

  end for

Ensure: retourner B_{N_0}

References I

- Gianluigi Rozza, *An introduction to reduced basis method for parametrized PDEs*
- B. Haasdonk, *Reduced Basis Methods for Parametrized PDEs – A Tutorial Introduction for Stationary and Instationary Problems*
- Alexandre Ern, *Analyse numérique et optimisation Méthode des bases réduites*
- Gwenol Grandperrin, *Introduction à la méthode des bases réduites*