# Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job
sous la direction de Joubine Aghili

Université de Strasbourg
Institut de Recherche de Mathématiques Avancées (IRMA)

25 août 2022

# Contexte

- 7 équipes de recherche
- 130 membres, dont 87 chercheurs et enseignants-chercheurs
- Au sein de l'équipe "Modélisation et Contôle"

IRMA
Institut de Recherche Mathématique Avancée

# Objectif

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites $V_{N_0}$
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives

Objectif : Trouver un substitut à l'erreur de projection dans l'algorithme glouton.
Dans le cadre des EDP paramétrée, la méthode des bases réduites s'avère souvent être une option de premier choix.

## Algorithme Glouton

**Require:** $\wedge_{test}$ un ensemble, $u_{EF}(\mu)$ et $u_{BR}(\mu)$ 2 fonctions
choisir $\mu_1$ de manière aléatoire
$u_1 = u_{EF}(\mu)$
$B_1 = Vect(u_1)$
**for** $i$ allant de 2 à $N_0$ **do**
  $u_i := \underset{\mu \in \wedge_{test}}{argmax}(||u_{EF}(\mu) - P_{B_i} u_{BR}(\mu)||)$
  $B_i := Vect(B_{i-1} \cup u_i)$
**end for**
**Ensure:** retourner $B_{N_0}$

Exemple d'EDP paramétrée :

$$\begin{cases} y'' + \mu y = 1 & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \\ \mu \text{ le paramètre} & \end{cases}$$

# Etapes du stage





Objectif principal : Construire un algorithme Glouton faible avec une modèle entrainé par réseau de neurone.
Etapes du stage :

- Implémenter un exemple en 1d en Python avec la méthode des éléments finis et donner une validation avec la solution exate.
- Implémenter la méthode des bases réduites et faire une validation.
- Entrainer un réseau de neurone apprenant l'erreur de projection à l'aide de PyTorch/TensorFlow.
- Extension au cas 2D avec Feel++ et les bibliothèques adaptées.

# Exemple 1D

On s'intéresse au problème 1D paramétrée par $\mu$ issue d'un miniprojet d'Alexandre Ern [3]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(D \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) + u = f, & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \\ D(x) = \begin{cases} 1, x \in \Omega_1 \\ \mu, x \in \color{red}{\Omega_2} \end{cases} \end{cases}$$


Décomposition de $\Omega$ en $\Omega_1$ et $\Omega_2$

# Formulation Variationnelle

La formulation variationnelle s'écrit: trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$a(u, v; \mu) = l(v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

En posant :

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega) \qquad a(u, v; \mu) := \int_{\Omega_1} v'u' + \mu \int_{\Omega_2} v'u' + \int_{\Omega} vu,$$

$$l(v) := \int_{\Omega} fv.$$

# Discrétisation de $\Omega$

Soit $\Omega$ un segment, que l'on décompose en $\Omega_1$ et $\Omega_2$ disjoints et construit un maillage équidistant :

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{N-1} K_i$$

tel que :

1. $N$ est le nombre d'éléments du maillage et $h$ le pas constant vaut $\frac{1}{N-1}$.
2. $K_i = [x_i, x_{i+1}]$ avec $x_i$ les noeuds du maillage.
3. On suppose que chaque maille $K_i$ se trouve soit dans $\overline{\Omega_1}$ soit dans $\overline{\Omega_2}$.


Décomposition de $\Omega$ en $K_i$

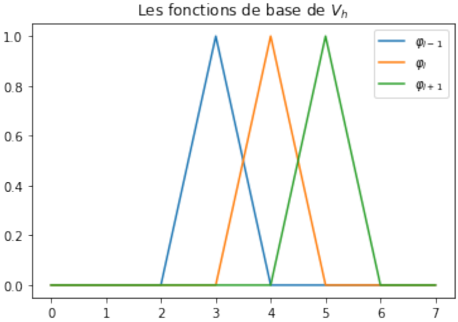
# Discrétisation de $H_0^1(\Omega)$



Une discrétisation possible de $H_0^1(\Omega)$ est l'espace $V_{h,0}$ défini par :

$$V_{h,0} = \{u \in V_h \mid u_{|\partial\Omega} = 0\}$$

$$V_h = Vect(\{\varphi_i\})$$



# Problème approché





En remplacant $H_0^1(\Omega)$ par $V_{h,0}$, on va chercher à résoudre le problème discret :

$$\text{Trouver } u_h \in V_{h,0} \text{ tel que : } a(u_h, v_h; \mu) = l(v_h), \forall v_h \in V_{h,0}$$

# Matrices éléments finis



Notons

$$A_\mu := \begin{pmatrix} & & \\ & a(\varphi_i, \varphi_j; \mu) & \\ & & \end{pmatrix} X := \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix} \text{ et } b := \begin{pmatrix} \\ l(\varphi_j) \\ \\ \end{pmatrix}$$

Résoudre le problème approché revient à touver $X_\mu$ tel que

$$A_\mu X_\mu = b$$

où :

1. $A_\mu = A_1 + \mu A_2 + M$
2. $A_1 = \int_\Omega \mathbb{1}_{\Omega_1} \varphi_i' \varphi_j'$ , $A_2 = \int_\Omega \mathbb{1}_{\Omega_2} \varphi_i' \varphi_j'$ , $M = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j$
3. $b = \int_\Omega f \varphi_j$

# Matrices éléments finis

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction
Contexte
Objectif du stage

Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation

Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites $V_{N_0}$
Matrices réduites
Etude du modèle réduit

Conclusion et perspectives

Posons

$$D := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Après calculs on a :

$$A_1 := \frac{1}{h} \begin{pmatrix} D & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & D & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & D & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & D & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & D \end{pmatrix}$$

$$M := h \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A_2 := \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & D & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & D & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & D & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & D \end{pmatrix}$$

$$b := h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Validation



Fixons $\mu = 1$ et le problème 1D se réécrit :

$$\begin{cases} -u'' + u = 1 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Ce problème admet une unique solution $u_{ex}(x)$ connue:

$$\forall x \in \Omega, u_{ex}(x) = C_1 \exp(-x) + C_2 \exp(x) + 1$$

$$\text{avec } C_1 = \frac{1-e}{e-e^{-1}} \text{ et } C_2 = \frac{e^{-1}-1}{e-e^{-1}}$$

# Estimations d'errreur



Quelques résultats pour évaluer la solution $u_{EF}$ :

$$||u - u_h||_{1,\Omega} \leq ch|u|_{2,\Omega}$$

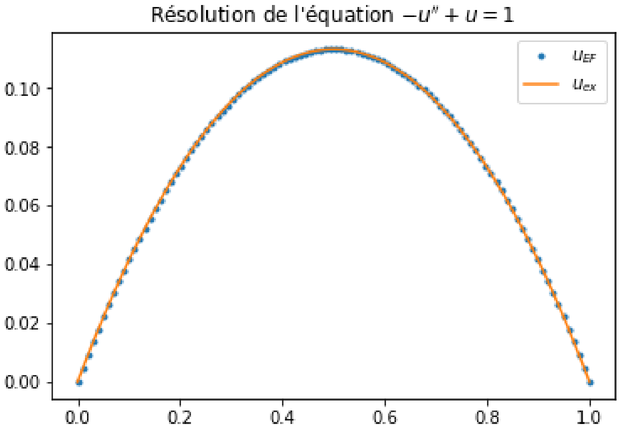
$$||u - u_h||_{0,\Omega} \leq ch^2|u|_{2,\Omega}$$

où $u \in H^2(\Omega)$ et $c \geq 0$ est indépendant de $h$

# Illustration des Résultats



Pour $N = 100$, on a :

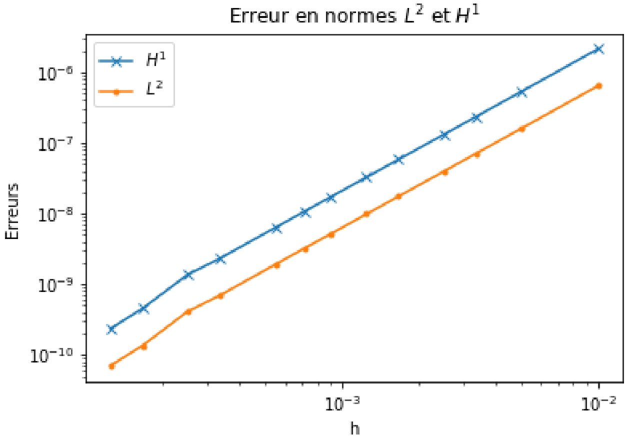



Solution exacte $u_{ex}$ et solution élément fini $u_{EF}$

# Illustration des erreurs

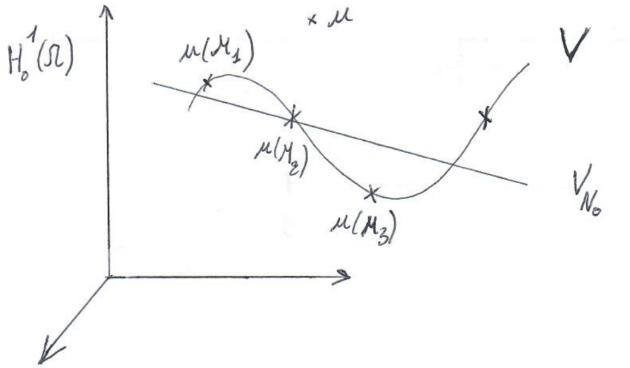


Pour diverses valeurs de $N$, on a:




Erreurs $||u_{ex} - u_{EF}||_{L^2}$ et $||u_{ex} - u_{EF}||_{H^1}$ en fonction de h

# Modèle réduit




La méthode des bases réduites s'appuie sur le fait que les solutions de l'EDP vivent sur unevariété V. On fait l'hypothèse fondamentale que $V \approx V_{N_0}$, avec $V_{N_0}$ un espace affine de faible dimension.

# Modèle réduit





On cherche $X_\mu^{br} := \begin{pmatrix} x_{\mu,1}^{br} \\ \vdots \\ x_{\mu,N_0}^{br} \end{pmatrix}$ tel que

$$u^{br}(\mu) = x_{\mu,1}^{br} u_1 + \ldots + x_{\mu,N_0}^{br} u_{N_0}$$

Les fonctions $u_i$ sont appelés «snapshot», et sont obtenues en résolvant le problème approché par éléments finis.

# Construction de la base réduite



On définit $\wedge_{test} \subset \wedge = \mathbb{R}_*^+$
En pratique :

$$\wedge_{test} := \{\mu_1, ..., \mu_M\} \text{ et } M \approx 100$$

Grâce à l'algorithme Glouton avec $\wedge_{test}$, on a la base réduite :

$$V_{N_0} := vect(u_1, u_2, ..., u_{N_0}) \text{ et } \wedge_{trial} := \{\mu_1, ..., \mu_{N_0}\}$$

# Matrices réduites



En posant

$$U = (u_1, ..., u_{N_0})$$

Et construisant

$$V_0^{BR} := U^T(A_0 + M)U \quad \text{et} \quad V_1^{BR} := U^T A_1 U$$

Avec les relations suivantes :

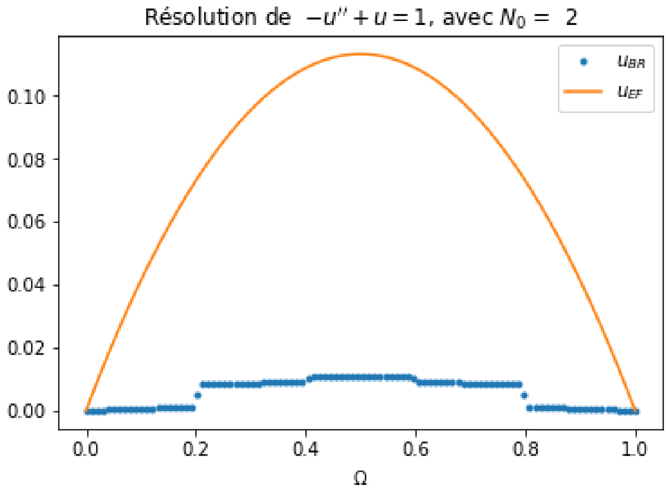
$$B^{BR} := U^T b \text{ et } A_\mu^{BR} = V_0^{BR} + \mu V_1^{BR}$$

Résoudre le problème réduit revient finalement à trouver $X_\mu^{br}$ tel que :

$$A_\mu^{BR} X_\mu^{br} = B^{br}$$

# Résolution BR avec $N_0 = 2$

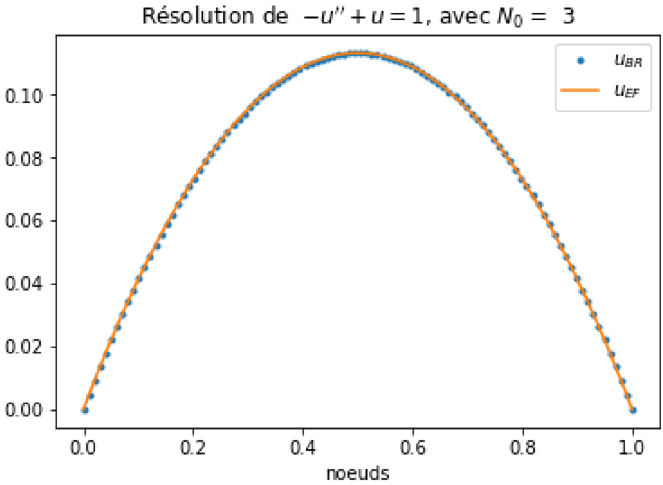





Solutions Eléments Finis et Base Réduite

# Résolution BR avec $N_0 = 3$

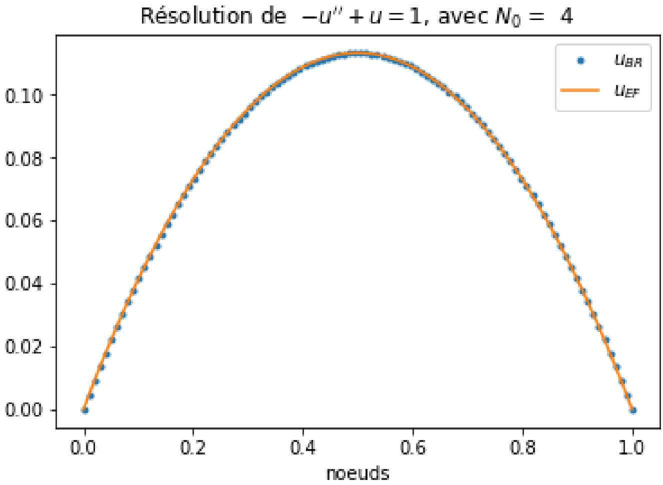





Solutions Eléments Finis et Base Réduite

# Résolution BR avec $N_0 = 4$





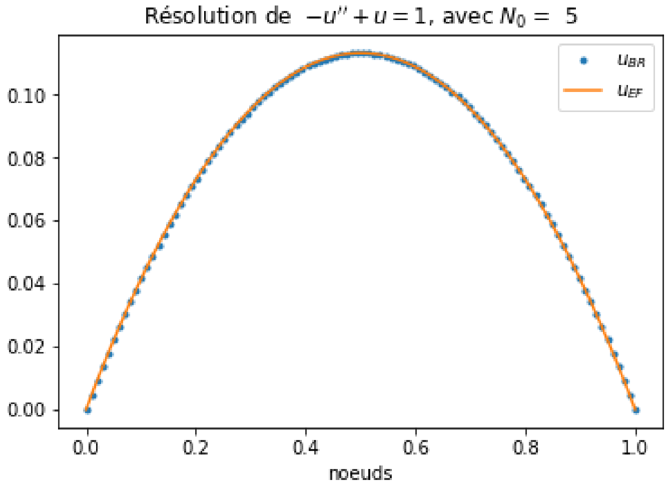

Solutions Eléments Finis et Base Réduite

# Résolution BR avec $N_0 = 5$

Algorithme Glouton faible par apprentissage

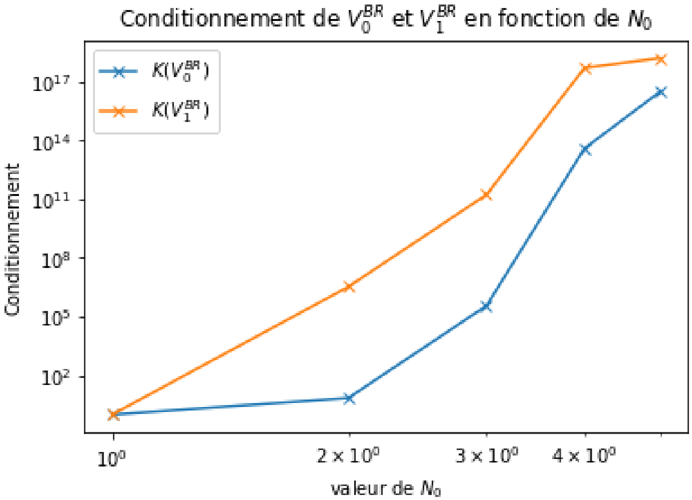
Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction
Contexte
Objectif du stage
Elements finis
Formulation Variationnelle
Discrétisation du problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices éléments finis
Validation
Modèle réduit
Formulation du problème réduit
Espace des bases réduites $V_{N_0}$
Matrices réduites
Etude du modèle réduit
Conclusion et perspectives




Solutions Eléments Finis et Base Réduite

# Le conditionnement

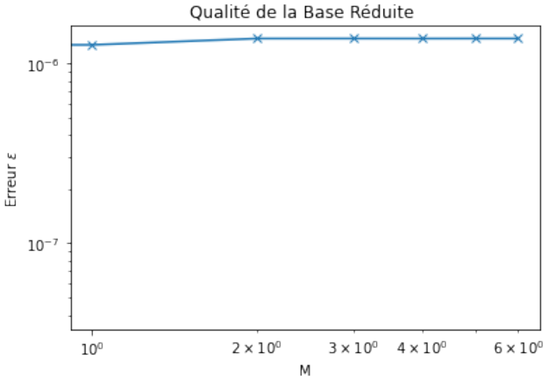



Evolution du conditionnement

# Qualité de la base réduite

Après construction de $V_{N_0}$, on calcule

$$\epsilon := \sup_{\mu \in \wedge_{test}} ||u^{EF}(\mu) - u^{RB}(\mu)||_{L^2} \text{ où } \wedge_{test} \cap \wedge_{trial} = \emptyset$$

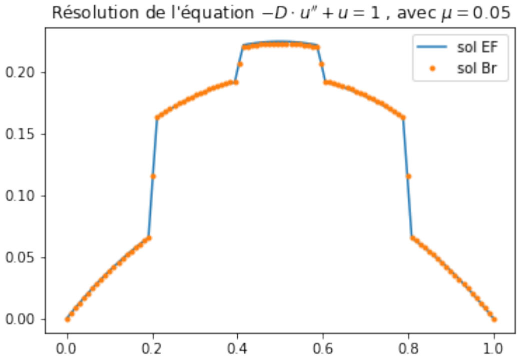



Erreur $\epsilon$ pour $M \in \{10, 100, 500, 1000, 2000, 2500, 3000\}$

# Résolution avec $N_0 = 3$ et $\mu = 0.05$



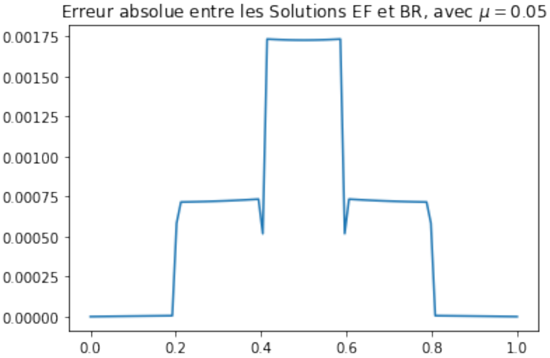
En fixant $\mu = 0.05$, voici la résolution du problème éléments finis et du problème réduit :




Solution Elément Finis et Base Réduite pour $\mu = 0.05$

# Erreur absolue






Erreur en valeur absolu entre les solutions EF et BR pour $\mu = 0.05$

# Conclusion et perspectives



Perspectives : remplacer $f(\mu) = \underset{\mu \in \wedge_{test}}{argmax}(||u_{EF}(\mu) - P_{B_i} u_{BR}(\mu)||)$ dans par un réseau de neuronne $NN(\mu)$ puis réaliser avec Feel++ l'extension 2D/3D.

## Algorithme Glouton

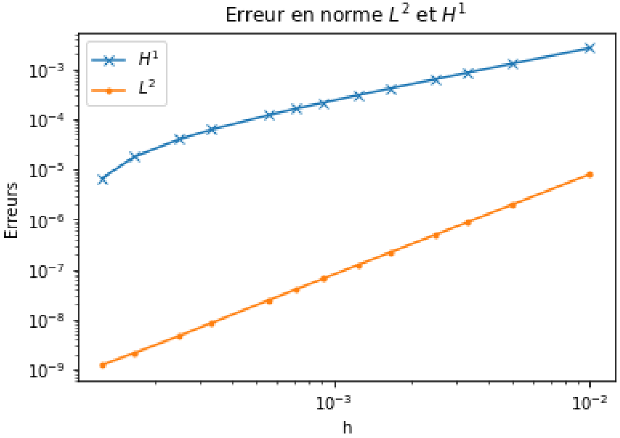
**Require:** $\wedge_{test}$ un ensemble, $u_{EF}(\mu)$ et $u_{BR}(\mu)$ 2 fonctions
  choisir $\mu_1$ de manière aléatoire
  $u_1 = u_{EF}(\mu)$
  $B_1 = Vect(u_1)$
  **for** $i$ allant de 2 à $N_0$ **do**
    $u_i := \underset{\mu \in \wedge_{test}}{argmax}(||u_{EF}(\mu) - P_{B_i} u_{BR}(\mu)||)$
    $B_i := Vect(B_{i-1} \cup u_i)$
  **end for**
**Ensure:** retourner $B_{N_0}$

# References I


- Gianluigi Rozza, *An introduction to reduced basis method for parametrized PDEs*
- B. Haasdonk, *Reduced Basis Methods for Parametrized PDEs – A Tutorial Introduction for Stationary and Instationary Problems*
- Alexandre Ern, *Analyse numérique et optimisation Méthode des bases réduites*
- Gwenol Grandperrin, *Introduction à la méthode des bases réduites*

# Erreur L2 et H1





# Matrices réduites



On sait que $u_\mu^{BR}$ et $u_i$ se décomposent sous la forme

$$u_{BR}^{\mu} = \sum_{i=1}^{N_0} X_{\mu,i}^{BR} u_i$$

$$u_i = \beta_0 \varphi_0 + \ldots + \beta_{Nel-1} \varphi_{Nel-1}$$

Et par billinéaire et linéarité de $l$ et $a_\mu$, on a :

$$a_\mu(u_\mu^{BR}, u_i) = \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{k,j=0}^{Nel-1} X_{\mu,i}^{BR} \beta_{i,k} \beta_{i,j} a_\mu(\varphi_k, \varphi_j)$$

$$l(u_i) = \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=0}^{Nel-1} \beta_{i,j} l(\varphi_j)$$

# Matrices réduites





Posons maintenant

$$X^{br} = \begin{pmatrix} X^{br}_{\mu,1} \\ . \\ . \\ . \\ X^{br}_{\mu,N_0} \end{pmatrix} U = (u_1, ..., u_{N_0})$$

On réécrit sous forme matricielle :

$$(U^T A_\mu U)X^{br} = U^T(A_0 + M)U + \mu U^T A_1 U = U^T b$$

Notons

$$V_0^{BR} := U^T(A_0 + M)U \quad \text{et} \quad V_1^{BR} := U^T A_1 U$$

Ainsi on a les relations suivantes :

$$B^{BR} := U^T b \text{ et } A_\mu^{BR} = V_0^{BR} + \mu V_1^{BR}$$

# Matrices éléments finis



Les conditions aux bords sont imposés fortement dans la matrice $A_1$ et $b$.

$$(A_\mu)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, \forall i,j \in \{1, ..., Nel-2\} \\ 1, \text{ lorsque (i, j) = (0,0) ou (i, j) = (Nel-1,Nel-1)} \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} h, \forall j \in \{1, ..., Nel-2\} \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$