Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Université de Strasbourg Institut de Recherche de Mathématiques Avancées (IRMA)

25 août 2022

Contexte

Algorithme Glouton faible par apprentissage

> Congo Job ous la direction Joubine Aghi

Introduction Contexte

Objectif du stag

Formulation
Variationnelle
Discrétisation du
problème
Construction des
espaces
d'approximation
Construction des
matrices éléments

Formulation du problème réduit Espace des base réduites V_{N_c}

Espace des base réduites V_{N_0} Matrices réduites Etude du modèle réduit

Conclusion et perspectives

- 7 équipes de recherche
- 130 membres, dont 87 chercheurs et enseignants-chercheurs
- Au sein de l'équipe "Modélisation et Contôle"



Objectif

Algorithme Glouton faible par apprentissage

sous la direction de Joubine Aghili

Introduction Contexte

Objectif du stage

Elements fini

Formulation Variationnelle Discrétisation of

problème

Construction de

d'approximation

Construction des matrices éléments finis

Modèle réduit

Formulation du
problème réduit

Espace des bases
réduites V_{N,}

Matrices réduites

Etude du modèle
réduit

Conclusion et perspectives Objectif: Trouver un substitut à l'erreur de projection dans l'algorithme glouton.

Dans le cadre des EDP paramétrée, la méthode des bases réduites s'avère souvent être une option de premier choix.

Algorithme Glouton

Require: \land_{test} un ensemble, $u_{EF}(\mu)$ et $u_{BR}(\mu)$ 2 fonctions choisir μ_1 de manière aléatoire $u_1 = u_{EF}(\mu)$ $B_1 = Vect(u_1)$ for i allant de 2 à N_0 do $u_i := \underset{\mu \in \land_{test}}{argmax}(||u_{EF}(\mu) - P_{B_i}u_{BR}(\mu)||)$ $B_i := Vect(B_{i-1} \cup u_i)$

end for Ensure: retourner B_{N_0}

Exemple d'EDP paramétrée :

$$\begin{cases} y'' + \mu y = 1 & \Omega \\ u = 0 & \partial \Omega \\ \mu \text{ le paramètre} \end{cases}$$

Etapes du stage

Algorithme Glouton faible par apprentissage

sous la direction de Joubine Aghil

Introductio

Objectif du stage

Elements finis
Formulation
Variationnelle
Discrétisation du
problème
Construction des
espaces
d'approximation
Construction des
matrices éléments
finis
Validation

Modèle réduit
Formulation du
problème réduit
Espace des bases
réduites V_{N₀}
Matrices réduites
Etude du modèle
réduit

Conclusion et perspectives

Objectif principal : Construire un algorithme Glouton faible avec une modèle entrainé par réseau de neurone.

Etapes du stage :

- Implémenter un exemple en 1d en Python avec la méthode des éléments finis et donner une validation avec la solution exacte.
- Implémenter la méthode des bases réduites et faire une validation.
- Entrainer un réseau de neurone apprenant l'erreur de projection à l'aide de PyTorch/TensorFlow.
- Extension au cas 2D avec Feel++ et les bibliothèques adaptées.

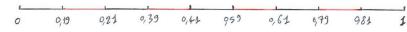
Exemple 1D

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Flements finis

On s'intéresse au problème 1D paramétrée par μ issue d'un miniprojet d'Alexandre Ern [3]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}(D \cdot \frac{\partial u}{\partial x}) + u = f, & \Omega \\ u = 0 & \partial \Omega \\ D(x) = \begin{cases} 1, x \in \Omega_1 \\ \mu, x \in \Omega_2 \end{cases} \end{cases}$$



Décomposition de Ω en Ω_1 et Ω_2

Formulation Variationnelle

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Formulation Variationnelle

La formulation variationnelle s'écrit : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v; \mu) = I(v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

En posant:

$$\forall u,v\in H^1_0(\Omega) \quad a(u,v;\mu):=\int_{\Omega_1} v'u'+\mu\int_{\Omega_2} v'u'+\int_{\Omega} vu,$$
 $I(v):=\int_{\Omega} fv.$

Discrétisation de Ω

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction
Contexte
Objectif du stag

Elements fini
Formulation
Variationnelle
Discrétisation of

problème
Construction des espaces
d'approximation
Construction des

matrices éléments finis Validation

Modèle réduit
Formulation du
problème réduit
Espace des bases
réduites V_{N,}
Matrices réduites
Etude du modèle

Conclusion et

Soit Ω un segment, que l'on décompose en Ω_1 et Ω_2 disjoints et construit un maillage équidistant :

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{N-1} K_i$$

tel que:

- I N est le nombre d'éléments du maillage et h le pas constant vaut $\frac{1}{N-1}$.
- $K_i = [x_i, x_{i+1}]$ avec x_i les noeuds du maillage.
- On suppose que chaque maille K_i se trouve soit dans $\overline{\Omega_1}$ soit dans $\overline{\Omega_2}$.



Décomposition de Ω en K_i

Discrétisation de $H_0^1(\Omega)$

Algorithme Glouton faible par apprentissage Une discrétisation possible de $H^1_0(\Omega)$ est l'espace $V_{h,0}$ défini par :

$$V_{h,0} = \{u \in V_h \mid u_{\mid \partial \Omega} = 0\}$$

$$V_h = Vect(\{\varphi_i\})$$

Les fonctions de base de V_h

1.0

0.8

0.6

0.4

0.2

5

apprentissage

Congo Job

Introduction

Objectif du stag

Formulation
Variationnelle
Discrétisation du

Construction des espaces d'approximation Construction des matrices éléments finis

Modèle rédu

problème réduit

Espace des bases
réduites V...

Matrices réduites Etude du modèle

Conclusion et perspectives

Problème approché

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Construction des matrices éléments

En remplacant $H_0^1(\Omega)$ par $V_{h,0}$, on va chercher à résoudre le problème discret :

Trouver $u_h \in V_{h,0}$ tel que : $a(u_h, v_h; \mu) = I(v_h), \forall v_h \in V_{h,0}$

Matrices éléments finis

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction

Objectif du stag

Flements fin

Formulation

Variationnell

Discrétisal

Construction

espaces d'approximatio

Construction des matrices éléments finis

Modèle réd

Formulation du problème réduit Espace des base réduites V_{N_0} Matrices réduites

Conclusion et perspectives

Notons

$$A_{\mu} := \left(egin{aligned} & a(arphi_i, arphi_j; \mu) & \ \end{array}
ight) X_{\mu} := \left(egin{aligned} lpha_0 \ dots \ lpha_{N-1} \ \end{array}
ight) ext{ et } b := \left(\emph{I}(arphi_j)
ight) \end{aligned}$$

Résoudre le problème discret revient à touver X_{μ} tel que

$$A_{\mu}X_{\mu}=b$$

où:

$$A_{\mu} = A_1 + \mu A_2 + M$$

2
$$A_1 = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\Omega_1} \varphi_i' \varphi_j'$$
, $A_2 = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\Omega_2} \varphi_i' \varphi_j'$, $M = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j$

$$b = \int_{\Omega} f \varphi_j$$

Matrices éléments finis

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Construction des matrices éléments

Posons

$$D := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Après calculs on a :

$$A_1 := \frac{1}{h} \begin{pmatrix} D & \cdots & \cdots & \ddots \\ \vdots & D & \cdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & D & \cdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & D & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & D \end{pmatrix}$$

$$A_2 := \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \vdots \dot{D} \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\ \vdots \vdots \dot{D} \vdots \vdots \vdots \\ \vdots \vdots \dot{D} \vdots \vdots \vdots \\ \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\ \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\ \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\ D & \vdots \end{pmatrix}$$

$$M:=h\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$b := h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Validation

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la directior de Joubine Aghi

Contexte

Objectif du sta

Elements finis

Variationnelle Discrétisation d

Construction de espaces

d'approximation

Construction des
matrices élément

Validation

Formulation du problème réduit Espace des base réduites V_{N_0} Matrices réduites

réduit
Conclusion et

Fixons $\mu = 1$ et le problème 1D se réécrit :

$$\begin{cases} -u'' + u = 1\\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Ce problème admet une unique solution $u_{ex}(x)$ connue:

$$\forall x \in \Omega, u_{\mathrm{ex}}(x) = C_1 \exp(-x) + C_2 \exp(x) + 1$$

avec
$$C_1 = \frac{1-e}{e-e^{-1}}$$
 et $C_2 = \frac{e^{-1}-1}{e-e^{-1}}$

Estimations d'errreur

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Validation

Quelques résultats pour évaluer la solution u_{FF} :

$$||u-u_h||_{1,\Omega} \leq ch|u|_{2,\Omega}$$

$$||u-u_h||_{0,\Omega} \leq ch^2|u|_{2,\Omega}$$

où $u \in H^2(\Omega)$ et $c \ge 0$ est indépendant de h

Illustration des Résultats

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction Contexte

Objectif du stag

Elements finis

Formulation

Variationnelle

problème

Construction d

espaces

Construction des

matrices élémen finis

Validation

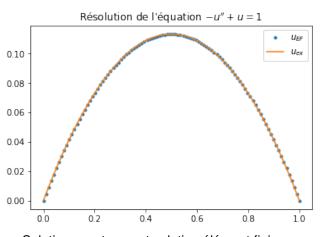
Modèle rédu

Formulation du problème réduit Espace des base réduites V

réduites V_{N_0} Matrices réduite Etude du modèl

Conclusion et

Pour N = 100, on a:



Solution exacte u_{ex} et solution élément fini u_{EF}

Illustration des erreurs

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction

Objectif du stag

Elomonte finis

Elements iini

Formulation

Discrétisation

problème

Construction of

Construction o

d'approximation

matrices élément

Validation

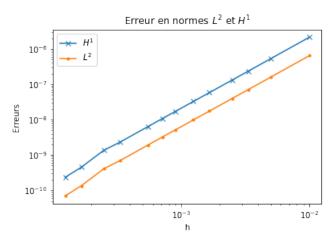
Modèle réd

Formulation du problème réduit Espace des base

réduites V_{N_o}
Matrices réduites

Conclusion et

Conclusion et perspectives Pour diverses valeurs de N, on a:

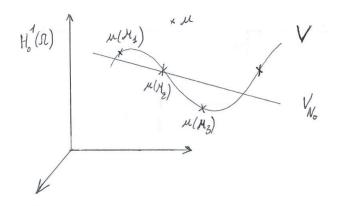


Erreurs $||u_{ex} - u_{EF}||_{L^2}$ et $||u_{ex} - u_{EF}||_{H^1}$ en fonction de h

Modèle réduit

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Formulation du problème réduit



La méthode des bases réduites s'appuie sur le fait que les solutions de l'EDP vivent sur unevariété V. On fait l'hypothèse fondamentale que $V \approx V_{N_0}$, avec V_{N_0} un espace affine de faible dimension.

Modèle réduit

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction

Objectif du stac

Flements fini

Formulation

Variationnelle

Discrétisation d

problème

Construction

espaces d'approvimation

Construction des matrices élément

Valida

Formulation du

problème réduit

Matrices réduite

Conclusion e

On cherche
$$X_{\mu}^{br}:=\begin{pmatrix} X_{\mu,1}^{br} \\ \vdots \\ X_{\mu,N_0}^{br} \end{pmatrix}$$
 tel que

$$u^{br}(\mu) = x_{\mu,1}^{br} u_1 + ... + x_{\mu,N_0}^{br} u_{N_0}$$

Les fonctions u_i sont appelés «snapshot», et sont obtenues en résolvant le problème approché par éléments finis.

Construction de la base réduite

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la directior de Joubine Aghi

Introduction

Objectif du stage

Objectif du stag

Formulation Variationnelle Discrétisation du problème

espaces
d'approximation
Construction des

Construction des matrices élément finis Validation

Formulation du problème réduit

Espace des bases réduites V_{N₆}

Matrices réduites

Conclusion et

On définit $\wedge_{test} \subset \wedge = \mathbb{R}^+_*$ En pratique :

$$\wedge_{\textit{test}} := \{\mu_1, ..., \mu_{\textit{M}}\} \; \text{et} \; \textit{M} pprox 100$$

Grâce à l'algorithme Glouton avec \land_{test} , on a la base réduite :

$$V_{N_0} := \textit{vect}(u_1, u_2, ..., u_{N_0}) \text{ et } \wedge_{\textit{trial}} := \{\mu_1, ..., \mu_{N_0}\}$$

Matrices réduites

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Contexte
Objectif du stage

Elements fin Formulation Variationnelle

problème
Construction des espaces d'approximation
Construction des matrices élément

Modèle réduit
Formulation du
problème réduit
Espace des base
réduites V_N

Matrices réduites Etude du modèle réduit

Conclusion et

En posant

$$U=\left(u_{1},...,u_{N_{0}}\right)$$

Et construisant

$$V_0^{BR} := U^T (A_0 + M) U$$
 et $V_1^{BR} := U^T A_1 U$

Avec les relations suivantes :

$$\mathcal{B}^{BR} := \mathcal{U}^T b$$
 et $\mathcal{A}_{\mu}^{BR} = \mathcal{V}_0^{BR} + \mu \mathcal{V}_1^{BR}$

Résoudre le problème réduit revient finalement à trouver X_{μ}^{br} tel que :

$$A_{\mu}^{BR}X_{\mu}^{br}=B^{br}$$

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghi

Introductio Contexte

Objectif du stag

Elements finis

Formulation

Variationnelle

Discrétisation d

probleme

Construction of

espaces d'approximatio

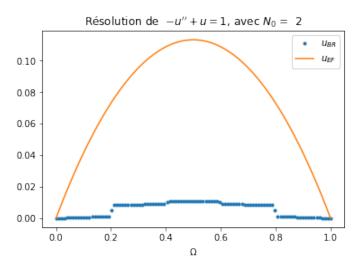
Construction des matrices élément

Modèle rédui

Formulation du problème réduit Espace des bases réduites V_{N_0} Matrices réduites Etude du modèle

Conclusion et perspectives

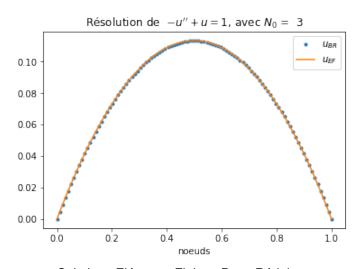
réduit



Solutions Eléments Finis et Base Réduite

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Etude du modèle réduit



Solutions Eléments Finis et Base Réduite

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghi

Contexte

Objectif du staç

Elements finis

Discrétisation d

Construction d

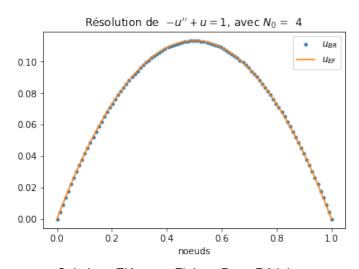
d'approximation

Construction des matrices éléments finis

Modèle réduit

Formulation du problème réduit Espace des bases réduites $V_{N_0^i}$ Matrices réduites Etude du modèle réduit

Conclusion et perspectives



Solutions Eléments Finis et Base Réduite

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghi

Contexte

Objectif du stag

Elements finis

Discrétisation d

problème Construction d

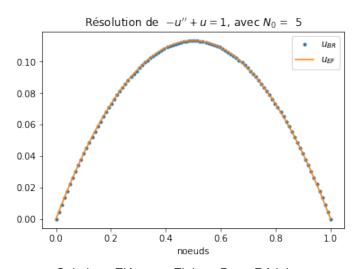
Construction de espaces

Construction des matrices éléments

Modèle réduit

Formulation du problème réduit Espace des bases réduites $V_{N_0^i}$ Matrices réduites Etude du modèle réduit

Conclusion et perspectives



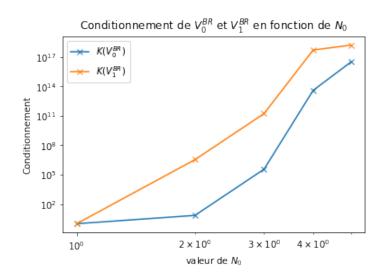
Solutions Eléments Finis et Base Réduite

Le conditionnement

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Etude du modèle réduit





Evolution du conditionnement



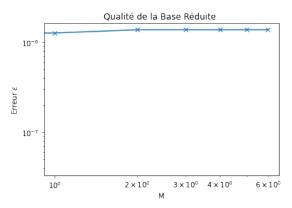
Qualité de la base réduite

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Etude du modèle réduit

Après construction de V_{N_0} , on calcule

$$\epsilon := \sup_{\mu \in \wedge_{\mathit{test}}} ||u^{\mathsf{EF}}(\mu) - u^{\mathsf{RB}}(\mu)||_{L^2} \ \mathsf{où} \ \wedge_{\mathit{test}} \cap \wedge_{\mathit{trial}} = \emptyset$$



Erreur ϵ pour $M \in \{10, 100, 500, 1000, 2000, 2500, 3000\}$



Résolution avec $N_0 = 3$ et $\mu = 0.05$

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Contexte
Objectif du stag

Objectif du stag

Formulation
Variationnelle
Discrétisation du
problème
Construction des
espaces
d'approximation
Construction des
matrices élément

Modèle réduit

Formulation du problème réduit

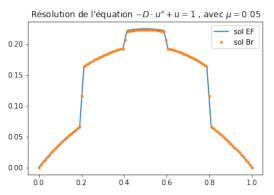
Espace des bases réduites V_{N,}

Matrices réduites

Etude du modèle réduit

Conclusion et

En fixant $\mu = 0.05$, voici la résolution du problème éléments finis et du problème réduit :



Solution Elément Finis et Base Réduite pour $\mu = 0.05$

Erreur absolue

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghil

Introductio

Objectif du stag

Elomonte fini

Elements linis

Variationnelle

Discrétisation d

problème

Construction d

espaces d'approximation

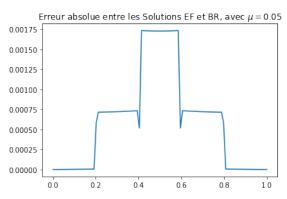
Construction des matrices éléments finis

Modèle réduit

Formulation du problème réduit

Espace des base réduites V_{N_0} Matrices réduites

Etude du modèle réduit Conclusion et



Erreur en valeur absolu entre les solutions EF et BR pour $\mu=$ 0.05

Conclusion et perspectives

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Perspectives : remplacer $f(\mu) = argmax(||u_{EF}(\mu) - P_{B_i}u_{BR}(\mu)||)$

dans par un réseau de neuronne $NN(\mu)$ puis réaliser avec Feel++ l'extension 2D/3D.

Algorithme Glouton

Require: \wedge_{test} un ensemble, $u_{EF}(\mu)$ et $u_{BR}(\mu)$ 2 fonctions choisir μ_1 de manière aléatoire $u_1 = u_{EF}(\mu)$ $B_1 = Vect(u_1)$

for *i* allant de 2 à N_0 **do**

 $u_i := argmax(||u_{EF}(\mu) - P_{B_i}u_{BR}(\mu)||)$

 $B_i := Vect(B_{i-1} \cup u_i)$

end for

Ensure: retourner B_{N_0}

References I

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghil

Introduction
Contexte
Objectif du stag

Formulation
Variationnelle
Discrétisation du
problème
Construction des
espaces
d'approximation
Construction des
matrices éléments

Modèle réduit
Formulation du
problème réduit
Espace des bases
réduites V_{N,}
Matrices réduites
Etude du modèle

Gianluigi Rozza, An introduction to reduced basis method for parametrized PDEs

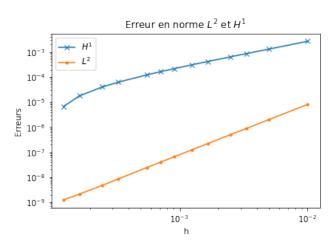


Alexandre Ern, Analyse numérique et optimisation Méthode des bases réduites

Gwenol Grandperrin, Introduction à la méthode des bases réduites

Erreur L2 et H1

Algorithme Glouton faible par apprentissage



Matrices réduites

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introductio

Objectif du stag

Elements finis
Formulation
Variationnelle

Discrétisation d problème

Construction d

d'approximation
Construction des

Construction des matrices éléments finis

Formulation du problème réduit

réduites V_{N_0} Matrices réduites

Etude du modèle

Conclusion et perspectives On sait que u_{μ}^{BR} et u_i se décomposent sous la forme

$$u^{\mu}_{BR}=\sum_{i=1}^{N_0}X^{BR}_{\mu,i}u_i$$

$$u_i = \beta_0 \varphi_0 + ... + \beta_{Nel-1} \varphi_{Nel-1}$$

Et par billinéaire et linéarité de l et a_{μ} , on a :

$$a_{\mu}(u_{\mu}^{\mathsf{BR}},u_{i}) = \sum_{i=1}^{N_{0}} \sum_{k,j=0}^{\mathsf{Nel}-1} X_{\mu,i}^{\mathsf{BR}} \beta_{i,k} \beta_{i,j} a_{\mu}(\varphi_{k},\varphi_{j})$$

$$I(u_i) = \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=0}^{Nel-1} \beta_{i,j} I(\varphi_j)$$

Matrices réduites

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction Contexte

Objectif du sta

Elements fin

Discrétisation du problème

Construction des espaces

espaces d'approximation Construction des matrices éléments finis

Modèle réduit
Formulation du
problème réduit
Espace des bases
réduites V_{N,g}
Matrices réduites
Etude du modèle
réduit

Conclusion et perspectives Posons maintenant

$$egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned\\ egin{aligned} egi$$

On réécrit sous forme matricielle :

$$(U^{T}A_{\mu}U)X^{br} = U^{T}(A_{0} + M)U + \mu U^{T}A_{1}U = U^{T}b$$

Notons

$$V_0^{BR} := U^T (A_0 + M) U$$
 et $V_1^{BR} := U^T A_1 U$

Ainsi on a les relations suivantes :

$$B^{BR} := U^T b$$
 et $A_{\mu}^{BR} = V_0^{BR} + \mu V_1^{BR}$

Matrices éléments finis

Algorithme Glouton faible par apprentissage

Congo Job sous la direction de Joubine Aghili

Introduction Contexte

Objectif du stage

Formulation Variationnelle Discrétisation du

Discrétisation du problème

Construction des

d'approximation

Construction des
matrices éléments

Modèle réduit

Formulation du problème réduit

Espace des bases réduites V_{N_0} Matrices réduites

Conclusion et

Les conditions aux bords sont imposés fortement dans la matrice A_1 et b.

$$(A_{\mu})_{ij} = egin{cases} A_{ij}, orall i, j \in \{1,...,Nel-2\} \ 1, \, ext{lorsque (i, j)} = (0,0) \, ext{ou (i, j)} = (Nel-1,Nel-1) \ 0, \, ext{sinon} \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} \textit{h}, \forall j \in \{1,...,\textit{Nel}-2\} \\ \textit{0}, \textit{sinon} \end{cases}$$