

# Nonlinear compressive reduced basis approximation for PDE's

Hassan Ballout

CSMI Master's program,  
University of Strasbourg

September 2024



- 1 Project Plan
- 2 Contexte
- 3 Cas test
- 4 RBM classique
- 5 Nonlinear compressive RBM
- 6 References

# Objectives

- Etudier la méthode des bases réduites classique et ses limitations.
- Explorer le potentiel de la réduction de modèle non linéaire.
- Etudier la méthode "Nonlinear compressive reduced basis approximation for PDE's".
- Implémenter la méthode et la tester.
- Rédiger un article basé sur ce travail.

- 1 Project Plan
- 2 Contexte
- 3 Cas test
- 4 RBM classique
- 5 Nonlinear compressive RBM
- 6 References

## Réduction d'ordre de modèle.

- **Objective:**

- Réduire la dimension d'un modèle.
- Réduire le coût de calcul en préservant une précision acceptable.

- **Modèle d'intérêt: EDP paramétriques.**

For a given parameter  $\mu \in \mathcal{P} \in \mathbb{R}^P$  (the parameter space), find  $u(\mu) \in X$  such that:

$$\mathcal{R}(u(\mu); \mu) = 0$$

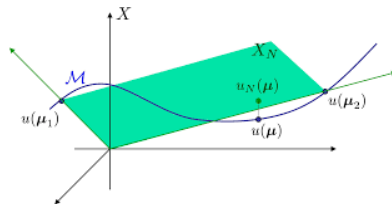
# Méthodes numériques

- Méthodes haute fidélité: volumes finis, éléments finis, ...
  - Précision élevée.
  - Coût de calcul élevé.
  - Non adapté pour faire un grand nombre de simulations.
- Méthodes de réduction d'ordre: bases réduites, POD, ...
  - Coût de calcul réduit.
  - Précision acceptable.
  - Adapté pour faire un grand nombre de simulations (optimisation, contrôle, ...).

# Méthodes numériques

- Méthodes haute fidélité: volumes finis, éléments finis, ...
  - Précision élevée.
  - Coût de calcul élevé.
  - Non adapté pour faire un grand nombre de simulations.
- Méthodes de réduction d'ordre: bases réduites, POD, ...
  - Coût de calcul réduit.
  - Précision acceptable.
  - Adapté pour faire un grand nombre de simulations (optimisation, contrôle, ...).

# Méthode de bases réduites



In practice: using FEM discretization

- $X \rightarrow X_h \subset X$ , de dimension  $N_h$ .
- $u(\mu) \in X \rightarrow u_h(\mu) \in X_h$ .
- $u_N(\mu)$  est une projection de  $u_h(\mu)$  sur  $X_N$  de dimension  $N \ll N_h$ .



# Barrière de Kolmogorov

**Problématique:** Dans quelles mesures  $\mathcal{M}$  peut être approximé par le meilleur sous-espace de dimension  $N$ .

**Mesure:** Kolmogorov  $N$ -width  $d_N(\mathcal{M}) = \inf_{\mathcal{V}_N} \max_{v \in \mathcal{M}} \min_{w \in \mathcal{V}_N} \|v - w\|$ .

- Pour les problèmes elliptiques :  $d_N(\mathcal{M}) \sim \mathcal{O}(e^{-\alpha N})$ .
- Pour certains problèmes hyperboliques:  $d_N(\mathcal{M}) \sim \mathcal{O}(N^{-1/2})$ .

**Curse of dimensionality:** du domaine et de l'espace des paramètres.

**Solution:** Méthodes non linéaires.



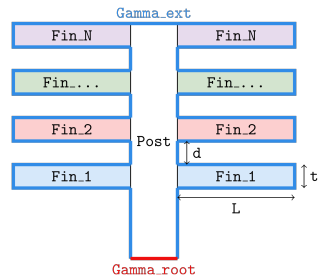
## Problème multiparamétrique

$$\begin{cases} -k^i \Delta u = 0 \text{ in } \Omega^i, i = 0, \dots, N_f \\ +BC \end{cases}$$

- Un paramètre est donné par  $\mu = (k^1, \dots, k^{N_f}, Bi)$ .
- La formulation faible: trouver  $u(\mu) \in X$  tel que:

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{N_f} \int_{\Omega^i} k^i (\nabla u(\mu), \nabla v) dx + B_i \int_{\Gamma_{ext}} u(\mu) v ds}_{a(u(\mu), v; \mu)} = \underbrace{\int_{\Gamma_{root}} v ds}_{f(v; \mu)}, \quad \forall v \in X$$

- La dimension de l'espace des paramètres  $P$  peut varier de 1 à  $N_f + 1$ .



## Haute fidélité

On considère le cas test avec  $N_f = 5$ , avec un maillage de  $N_{el} = 43622$  éléments. Une méthode d'éléments finis d'ordre 2 est utilisée ce qui donne  $N_h = 89745$  DOF.

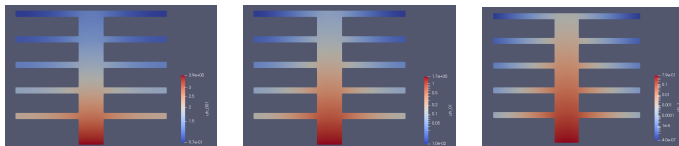


Figure 1: High fidelity solutions for  $Bi=0.01$ (left),  $Bi=0.1$ (middle) and  $Bi=1$ (right)

L'erreur  $L^2$  de l'approximation FEM est de l'ordre de  $10^{-4}$  par rapport à une approximation de référence d'ordre 3 avec  $N_{ref} = 200050$  DOF.

- 1 Project Plan
- 2 Contexte
- 3 Cas test
- 4 RBM classique**
- 5 Nonlinear compressive RBM
- 6 References

## Méthode de bases réduites classique

- On cherche une approximation de  $u(\mu)$  dans un sous-espace de dimension  $N$ :

$$\underbrace{\|u(\mu) - u_N(\mu)\|_X}_{\text{total error}} \leq \underbrace{\|u(\mu) - u_h(\mu)\|_X}_{\text{FEM error}} + \underbrace{\|u_h(\mu) - u_N(\mu)\|_X}_{\text{RB error}}$$

- On construit une base reduite  $V = \text{span}\{\zeta_1, \dots, \zeta_N\}$  avec une méthode POD.
- Par un approche Galerkin, on obtient un système linéaire:

$$A_N^\mu u_N^\mu = f_N^\mu$$

- L'efficacité est assurée par la decomposition onligne/offline et la decomposition affine.

# Résultats

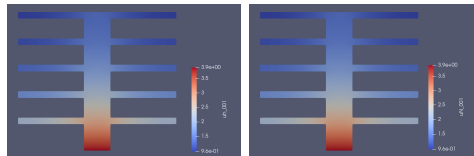


Figure 2: FEM(left) and RB with  $N = 8$ (right) solutions for  $Bi = 0.001$

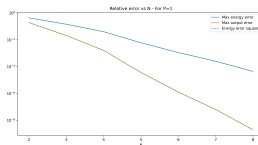
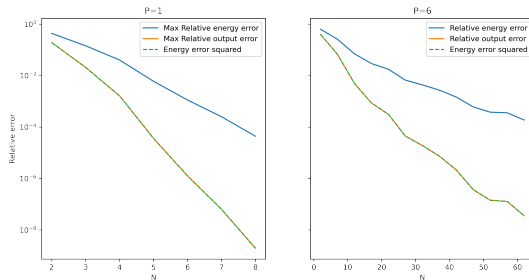


Figure 3: Relative error vs the number of modes for  $P = 1$

# Challenges

$P$	$N_{\max}$	Online time	FEM time	Max L2 error	Mean L2 error
1	8	1.98e-04	5.18e-01	3.17e-05	6.37e-06
6	63	6.42e-04	5.18e-01	2.29e-05	3.68e-06

Table 1: Comparison between  $P = 1$  and  $P = 6$





- 1 Project Plan
- 2 Contexte
- 3 Cas test
- 4 RBM classique
- 5 Nonlinear compressive RBM**
- 6 References

# Encodeur-Décodeur

Une méthode d'approximation basée sur  $m$  paramètres repose sur 2 applications continues :

- L'**encodeur** :  $E : X \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Le **décodeur** :  $D : \mathbb{R}^m \rightarrow X$

L'approximation de  $u$  est alors donnée par la composition encodeur-décodeur :

$$u \approx D(E(u))$$

## Notion de width

L'épaisseur (width) de  $\mathcal{M}$  est donnée par

$$\inf_{E,D} \max_{v \in \mathcal{M}} \|v - D(E(v))\|$$

En particulier,

- Si on choisit  $D$  linéaire, on obtient le Kolmogorov  $m$ -width  $d_m(\mathcal{M})$ .
- Si on choisit  $E$  linéaire et  $D$  non linéaire, on obtient le sensing number  $s_m(\mathcal{M})$ .

# Nonlinear compressive RB

Dans le cas où :

- $d_m(\mathcal{M})$  décroît lentement. (1)
- $s_m(\mathcal{M})$  décroît beaucoup plus rapidement. (2)

Pour atteindre une précision  $\epsilon$ :

(1)  $\implies u \approx \sum_{i=1}^N \hat{u}_i \zeta_i$  avec  $N = N(\epsilon)$  grand.

(2)  $\implies u \approx D(\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u))$  avec  $n = n(\epsilon) \ll N$ .

Idée:  $\lambda_i(u) \approx \hat{u}_i$  for  $i = 1, \dots, n \rightarrow \hat{u}_k = \phi_k(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n) \approx \hat{\phi}_k(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$  pour  $k = n+1, \dots, N$ . Avec  $\hat{\phi}_k$  sont des modèles non linéaires appris offline.

$$u \approx \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \psi_i + \sum_{k=n+1}^N \hat{\phi}_k(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n) \psi_k \rightarrow A_n^\mu u_n^\mu = f_n^\mu - B^\mu \hat{\phi}(u_n^\mu)$$

## Choix de $n$

**Problème inverse:** Combien de coefficients  $\{\hat{u}_i^\mu\}_{i=1}^n$  pour reconstruire  $\mu$ ?

Si  $\mu = R(E(u(\mu))) = R(\hat{u}_1^\mu, \dots, \hat{u}_n^\mu)$ , alors  $Id_{\mathcal{M}} = u \circ R \circ E$ . Dans ce cas,

$$s_n(\mathcal{M}) = 0$$

Numeriquement, on a trouvé que pour  $P \leq 3$ ,  $n = P$  est suffisant pour reconstruire  $\mu$ .  
En pratique, on choisit donc  $n \approx P$ .

## Phase offline

---

**Algorithm 1** Nonlinear compressive reduced basis offline phase

---

Compute the reduced basis of size  $N$  using POD, or RB.

Assemble offline RB quantities.

Choose a train set of size  $M$ :  $\{\mu_1, \dots, \mu_M\}$ .

Compute corresponding reduced basis approximations  $\{u_i\}_{i=1}^M$ .

Choose  $n \ll N$ .

**for**  $k = n + 1$  to  $N$  **do**

Learn  $\phi_k = \arg \min_{\phi \in F} \left\{ \sum_{i=1}^M |u_i^k - \phi(u_i^1, \dots, u_i^n)|^2 \right\}$ .

---

# Algorithm

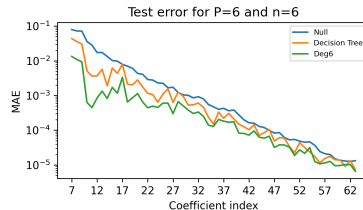
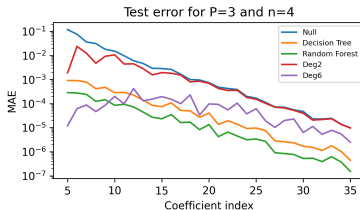
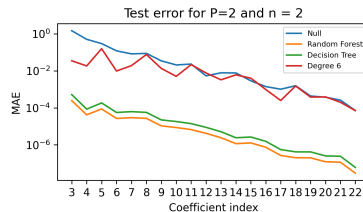
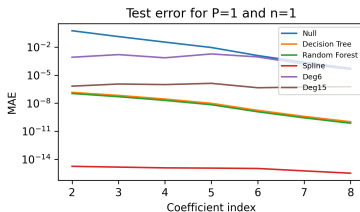
---

**Algorithm 2** Nonlinear compressive reduced basis online phase (Picard iteration)

---

- 1: **Initialization:**  $\mathbf{u}_n^0 = \mathbf{u}_0$ , s.t.  $\mathbf{A}_n^\mu \mathbf{u}_0 = \mathbf{f}_n^\mu$ .
  - 2: **Iteration**  $k$ :
  - 3:   Compute  $\phi(\mathbf{u}_n^{k-1})$ .
  - 4:   Solve  $\mathbf{A}_n^\mu \mathbf{u}_n^k = \mathbf{f}_n^\mu - B^\mu \phi(\mathbf{u}_n^{k-1})$ .
  - 5: **Stopping criterion:**  $\|\mathbf{u}_n^k - \mathbf{u}_n^{k-1}\| < \epsilon$ .
-

# Regression





# Nonlinear compressive RBM in action

$P = 1$

Model	Mean Energy Error	Mean L2 Error	Max L2 Error
Classical RBM (with 8 modes)	$1.22 \times 10^{-5}$	$6.80 \times 10^{-6}$	$3.86 \times 10^{-5}$
Classical RBM (with 1 mode)	$5.96 \times 10^{-1}$	$6.33 \times 10^{-1}$	$2.68 \times 10^0$
Spline	$1.22 \times 10^{-5}$	$6.80 \times 10^{-6}$	$3.86 \times 10^{-5}$
Decision tree	$1.22 \times 10^{-5}$	$6.84 \times 10^{-6}$	$3.87 \times 10^{-5}$

$P = 2$

Model	Mean Energy Error	Mean L2 Error	Max L2 Error
Classical RBM (with 22 modes)	$7.46 \times 10^{-6}$	$2.59 \times 10^{-6}$	$5.12 \times 10^{-6}$
Classical RBM (with 6 modes)	$2.35 \times 10^{-2}$	$1.14 \times 10^{-2}$	$1.98 \times 10^{-2}$
Classical RBM (with 2 modes)	$2.42 \times 10^{-1}$	$1.67 \times 10^{-1}$	$3.49 \times 10^{-1}$
Degree 4 (n=6) regression	$7.46 \times 10^{-6}$	$2.59 \times 10^{-6}$	$5.12 \times 10^{-6}$
Decision tree (n=2)	$1.55 \times 10^{-3}$	$6.74 \times 10^{-4}$	$2.84 \times 10^{-3}$

- 1 Project Plan
- 2 Contexte
- 3 Cas test
- 4 RBM classique
- 5 Nonlinear compressive RBM
- 6 References**

- [1] A. Cohen, C. Farhat, A. Somacal, and Y. Maday, “Nonlinear compressive reduced basis approximation for PDE’s,” Mar. 2023, working paper or preprint. [Online]. Available: <https://hal.science/hal-04031976>
- [2] J. L. Barnett, C. Farhat, and Y. Maday, “Neural-network-augmented projection-based model order reduction for mitigating the kolmogorov barrier to reducibility of cfd models,” 2022.

*Thank You*