TRƯỜNG ĐẠI HỌC TỰ NHIÊN - ĐHQG TP.HCM
KHOA TOÁN - TIN HỌC
CAO HỌC KHÓA 30 - KHOA HỌC DỮ LIỆU

***

BÁO CÁO ĐỒ ÁN

BIỂU DIỄN TRI THỨC

ĐỀ TÀI

HỆ THỐNG GIẢI BÀI TẬP KHÔNG GIAN VECTOR

Giảng viên Hướng dẫn: **TS. Nguyễn Đình Hiển**

Thực hiện: **NHÓM 7**

Phan Thị Thùy An	20C29002
Đinh Thị Nữ	20C29013
Lý Phi Long	20C29028
Đặng Khánh Thi	20C29038

TP.HCM, 07/2021

MỤC LỤC

1. Tổng quan

1.1. Giới thiệu đề tài

Trong kỷ nguyên công nghệ như hiện nay, ngày càng nhiều hệ thống thông minh - sản phẩm của ngành Trí tuệ nhân tạo - ra đời, phục vụ cho những nhu cầu khác nhau của con người. Một trong những nhu cầu quan trọng chính là nhu cầu học tập, nhu cầu trong lĩnh vực giáo dục.

Các hệ thống giải bài tập tự động, hệ thống thi trắc nghiệm xuất hiện nhiều hơn, với nội dung đa dạng, giúp học sinh, sinh viên có thể tra cứu, rèn luyện và ôn tập kiến thức, tăng cường khả năng tự học. Ngoài ra, các hệ thống giải bài tập này còn đưa ra đáp số chính xác trong thời gian ngắn, giúp người dạy, người học đối chiếu nhanh kết quả.

Yêu cầu đặt ra cho các hệ thống này là làm sao để máy tính có thể có trí tuệ, tri thức giống như con người, các bước giải giống cách suy nghĩ và lập luận của con người. Do đó, vấn đề về biểu diễn tri thức *(Knowledge Representation)* trên máy tính luôn được quan tâm nghiên cứu, để đề xuất ra các phương pháp, mô hình biểu diễn tri thức phù hợp.

Ở Việt Nam, **Đại số tuyến tính** là môn học đại cương, đóng vai trò quan trọng đối với các ngành Khoa học tự nhiên. Các kiến thức trong môn Đại số tuyến tính là nền tảng để sinh viên học tiếp các môn học liên quan. Trong Đại số tuyến tính, kiến thức được chia thành ba nội dung lớn: Ma trận, Hệ phương trình tuyến tính, Không gian Vector. Miền tri thức Không gian Vector tuy sử dụng các kiến thức về Ma trận và Hệ phương trình tuyến tính, nhưng lại có nhiều dạng bài tập khác nhau, gây khó khăn cho sinh viên.

Đồ án này sẽ tìm hiểu và nghiên cứu miền tri thức Không gian Vector, để xuất ra các phương pháp và mô hình biểu diễn phù hợp dựa trên những kiến thức đã được học ở môn **Biểu diễn tri thức và Ứng dụng.**

1.2. Các nghiên cứu liên quan

Hiện nay, đã có nhiều trang web, phần mềm, hỗ trợ việc tính toán, chứng minh các bài tập chủ đề Đại số tuyến tính nói chung, và Không gian vector nói riêng. Một số hệ thống giải bài tập thông minh có liên quan đến Không gian Vector như Linear Algebra Toolkit, Ommi Calculator, WolframAlpha sẽ được trình bày trong bảng dưới đây:

Tên ứng dụng	Ưu điểm	Khuyết điểm
Linear Algebra Toolkit	- Bài tập về không gian vector đa dạng. - Bài tập được thiết kế theo từng nội dung giúp người học dễ dàng tìm kiếm. - Dạng bài tập chi tiết, cụ thể. - Các bước hướng dẫn giải, chi tiết từng bước, và có nhận xét cụ thể, cấu trúc bài giảng rõ ràng, tạo cảm giác thân thiện với người học.	- Chỉ giải những bài tập căn bản về đại số tuyến tính: biến đổi tuyến tính, định thức, không gian vector, ma trận. - Giải được bài toán số chiều ma trận có số chiều tối đa là (6 × 6) - Không giải các bài tập như: Xác định tổ hợp tuyến tính.
Ommi Calculator	- Bài tập đa dạng, có thể giải những dạng toán cơ bản và nâng cao. - Hỗ trợ kiến thức liên quan tới các dạng bài tập. - Bài giải dạng tính tổ hợp tuyến tính có hướng dẫn giải, chi tiết từng bước, có nhận xét cụ thể. - Có hệ thống khuyến nghị dạng bài tập tương đương cho người học.	- Chỉ giải được bài tập cho ma trận có số chiều tối đa là (4×4). - Bài giải dạng tìm độc lập tuyến tính không có bước giải chi tiết, không giải thích kết quả.
WolframAlpha	- Có thể giải những dạng toán cơ bản và nâng cao. - Có thể nhập yêu cầu giải toán trực tiếp hoặc upload file. - Có lời giải chi tiết, cụ thể hình ảnh minh hoạ	- Không giải bài tập dạng xác định tổ hợp tuyến tính. - Chỉ giải bài toán tính độc lập, phụ thuộc tuyến tính đối với ma trận có số chiều tối đa là (3×3) - Mất phí để xem được chi tiết lời giải.

1.3. Mục tiêu

Đồ án này sẽ tiến hành thu thập tri thức Không gian vector và các tri thức liên quan, từ đó đề xuất mô hình biểu diễn phù hợp. Sau đó, tiến hành xây dựng hệ thống giải bài tập tự động, dựa trên những tri thức đã thu thập và biểu diễn. Hệ thống cần được thiết kế để giải một số dạng bài toán trong chương Không gian vector, có thể cho lời giải từng bước và tương tự như cách giải của người học.

2. Xây dựng hệ thống giải bài tập không gian vector

2.1. Thu thập tri thức

- **Xác định tri thức cần thu thập:** các nội dung trong chương **"Ma trận"** và **"Không gian vector"** của môn học Đại số tuyến tính
- **Tri thức được thu thập từ**
    - Đại số tuyến tính và Ứng dụng, Tập 1, Bùi Xuân Hải - Trần Ngọc Hội - Trịnh Thanh Đèo - Lê Văn Luyện, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP.HCM.
    - Nguyễn Hữu Việt Hưng, Giáo trình Đại số tuyến tính (Lý thuyết và bài tập), Đại học quốc gia Hà Nội (2008).
- **Tri thức thu thập được và phân loại tri thức** được trình bày trong bảng dưới đây:

Phân mục	Yếu tố tri thức	Nội dung	Keyphrase gốc	Keyphrase liên quan	Phân loại
Ma trận	Khái niệm ma trận	Một ***ma trận*** cấp $m \times n$ trên R là một bảng chữ nhật gồm m dòng, n cột với mn hệ số trong R có dạng: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ Viết tắt: $A = (a_{ij})_{m\times n}$ hay $A = (a_{ij})$, trong đó $a_{ij} \in R$. a_{ij} hay A_{ij} là phần tử ở vị trí dòng i, cột j của A $M_{m\times n}(R)$ là tập hợp tất cả những ma trận cấp $m \times n$ trên R	Ma trận	Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận Hệ phương trình tuyến tính Ma trận khả nghịch Phương trình ma trận	Khái niệm/ Định nghĩa
	Ma trận vuông	Nếu $A \in M_{n\times n}(R)$ (số dòng bằng số cột): $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ Khi đó, đường chứa các phần tử $a_{11}, a_{22},..., a_{nn}$ được gọi là ***đường chéo chính***, hay ***đường chéo*** của A. Phân loại: • ***Ma trận tam giác trên*** nếu mọi phần tử nằm **dưới** đường chéo của A đều bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i > j$). • ***Ma trận tam giác dưới*** nếu mọi phần tử nằm **trên** đường chéo của A đều bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i < j$).	Đường chéo chính Đường chéo Ma trận tam giác trên Ma trận tam giác dưới Ma trận đường chéo	Ma trận	Khái niệm/ Định nghĩa

		• ***Ma trận đường chéo*** nếu mọi phần tử nằm ngoài đường chéo bằng 0, kí hiệu $diag(a_1, a_2,..., a_n)$. **Ví dụ.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. $C = \mathrm{diag}(-1, 0, 5) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.			
	Ma trận đơn vị	Ma trận vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo bằng 1, các phần tử nằm ngoài đường chéo bằng 0 được gọi là ma trận đơn vị cấp n, ký hiệu I_n(hoặc I). $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Ma trận đơn vị	Ma trận vuông	Khái niệm/ Định nghĩa
	Các phép toán trên ma trận	***a) So sánh hai ma trận*** Cho $A, B \in M_{m\times n}$, nếu $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$ thì A và B được gọi là hai ma trận bằng nhau, ký hiệu $A = B$. ***b) Chuyển vị ma trận*** Cho $A, B \in M_{m\times n}(R)$. Ta gọi ma trận chuyển vị của A, ký hiệu A^T, là ma trận cấp $n \times m$, có được từ A bằng cách xếp các dòng của A thành các cột tương ứng, nghĩa là $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ thì $A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ • Nếu $A^T = A$ thì ta nói A là ***ma trận đối xứng***.	Phép toán trên ma trận So sánh hai ma trận Chuyển vị ma trận Ma trận đối xứng Ma trận phản xứng Nhân một số với ma trận Ma trận đối Tổng hai ma trận Tích hai ma trận Lũy thừa ma trận Đa thức ma trận	Ma trận	Luật

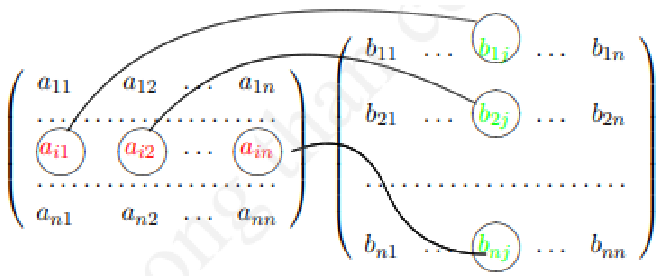
		• Nếu $A^T = -A$ thì nói A là ***ma trận phản xứng***. ***c) Nhân một số với ma trận*** Cho ma trận $A \in M_{m\times n}(R)$, $\alpha \in R$, ta định nghĩa αA là ma trận có từ A bằng cách nhân tất cả các hệ số của A với α: $$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}, \forall i, j$$ Ma trận $(-1)A$ được ký hiệu là $-A$ được gọi là ***ma trận đối*** của A. <u>Tính chất</u>: Cho A là ma trận và $\alpha, \beta \in R$ ta có: • $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ • $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ • $0A = 0$ và $1.A = A$ ***d) Tổng hai ma trận*** Cho $A, B \in M_{m\times n}(R)$, khi đó **tổng** của A và B, kí hiệu $A + B$ là ma trận được xác định bởi: $$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$ <u>Tính chất</u>: Với $A, B, C \in M_{m\times n}(R)$ và $\alpha, \beta \in R$, ta có: • $A + B = B + A$ (giao hoán) • $(A + B) + C = A + (B + C)$(kết hợp) • $0_{m\times n} + A = A + 0_{m\times n} = A$ • $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$ • $(A + B)^T = A^T + B^T$ • $a(A + B) = aB + bB$ • $(a + b)A = aA + aB$			

- $(-a)A = a(-A) = -(aA)$

e) Tích hai ma trận

Cho hai ma trận $A \in M_{m\times n}(R), B \in M_{n\times p}(R)$. Khi đó ***tích*** của A và B (kí hiệu AB) là ma trận thuộc $M_{m\times p}(R)$ được định nghĩa bởi:

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + ... + A_{in}B_{nj}$$



<u>Tính chất</u>:

Với $A \in M_{m\times n}(R)$, $B, B_1, B_2 \in M_{n\times p}(R)$, $C \in M_{p\times q}(R)$, $D_1, D_2 \in M_{n\times p}(R)$, ta có:

i) $I_m A = A$ và $AI_n = A$. Đặc biệt với $A \in M_n(R)$ thì $I_n A = AI_n = A$

ii) $0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$ và $A0_{n\times a} = 0_{m\times q}$. Đặc biệt với $A \in M_n(R)$ thì $0_{n\times n}A = A0_{n\times n} = 0_{n\times n}$

iii) $(AB)^T = B^T A^T$

iv) $(AB)C = A(BC)$

v) $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$,

$(D_1 + D_2)A = D_1 A + D_2 A$

		f) Lũy thừa ma trận Cho $A \in M_n(R)$. Ta gọi ***lũy thừa*** bậc k của A là một ma trận thuộc $M_n(R)$, kí hiệu A^k, được xác định như sau: $A^0 = I_n; A^1 = A; A^2 = AA; \ldots; A^k = A^{k-1}A.$ Vậy $A^k = A ... A$(k lần). <u>Tính chất</u>: Cho $A \in M_n(R)$ và $k, l \in N$. Khi đó i) $I^k = I$ ii) $A^{k+1} = A^k A^l$ iii) $A^{kl} = (A^k)^l$ ***g) Đa thức ma trận*** Cho $A \in M_{m\times n}(R)$ và $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... a_1 x + a_0$ là một đa thức bậc m trên R ($a_i \in R$) khi đó ta định nghĩa: $f(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + ... + a_1 A + a_0 I_n$ và ta gọi $f(A)$ là ***đa thức theo ma trận*** A.			
Các phép biến đổi sơ cấp ma trận	Định nghĩa phép biến đổi sơ cấp ma trận	Cho $A \in M_{m\times n}(R)$ ta gọi ***phép biến đổi sơ cấp trên dòng*** (BĐSCTD) trên A, là một trong ba loại biến đổi sau: • Loại 1: Hoán vị hai dòng i và j ($i \neq j$) Kí hiệu: $d_i \leftrightarrow d_j$ • Loại 2: Nhân dòng i cho một số $a \neq 0$	Các phép biến đổi sơ cấp ma trận	Ma trận	Khái niệm/ Định nghĩa

		Kí hiệu: $d_i := ad_i$ ● Loại 3: Cộng vào một dòng i với β lần dòng j $(j \neq i)$ Kí hiệu: $d_i := d_i + \beta d_j$ Với φ là một phép biến đổi sơ cấp, ký hiệu $\varphi(A)$ chỉ ma trận có từ A qua φ.			
	Tương đương dòng	Cho $A, B \in M_{m\times n}(R)$. Ta nói A ***tương đương dòng*** với B, ký hiệu $A \sim B$, nếu B có được từ A qua hữu hạn phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào đó. Vậy, $A \sim B$ ⇔Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1,..., \varphi_k$ sao cho $$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = B.$$	Tương đương dòng	Ma trận Các phép biến đổi sơ cấp ma trận	Khái niệm/ Định nghĩa
	Ma trận bậc thang	Cho $A \in M_{m\times n}(R)$ phần tử khác không đầu tiên của một dòng kể từ bên trái được gọi là ***phần tử cơ sở*** của dòng đó. Một ma trận được gọi là ***ma trận bậc thang*** nếu nó thỏa mãn hai tính chất sau: ● Dòng không có phần tử cơ sở (nếu tồn tại) thì nằm dưới cùng. ● Phần tử cơ sở của dòng dưới nằm bên phải so với phần tử cơ sở của dòng trên.	Ma trận bậc thang Phần tử cơ sở	Ma trận	Khái niệm/ Định nghĩa
	Ma trận bậc thang rút gọn	Ma trận A được gọi là ***ma trận bậc thang rút gọn*** nếu thỏa các điều kiện sau: ● A là ma trận bậc thang. ● Các phần tử cơ sở đều bằng 1. ● Trên các cột có chứa phần tử cơ sở, tất cả các hệ	Ma trận bậc thang rút gọn	Ma trận bậc thang	Khái niệm/ Định nghĩa

		số khác đều bằng 0.			
	Hạng ma trận	Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang B thì B được gọi là một ***dạng bậc thang*** của A. Một ma trận A thì có nhiều dạng bậc thang, tuy nhiên các dạng bậc thang của A đều có chung số dòng khác 0. Ta gọi số dòng khác 0 của một dạng bậc thang của A là ***hạng*** của A, ký hiệu $r(A)$. Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang rút gọn B thì B được gọi là ***dạng bậc thang rút gọn*** của A.	Hạng ma trận	Ma trận bậc thang Ma trận bậc thang rút gọn Tương đương dòng	Khái niệm/ Định nghĩa
	Hạng ma trận	Cho $A, B \in M_{m\times n}(R)$ khi đó: • $0 \le r(A) \le m, n$ • $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ • $r(A^T) = r(A)$ • Nếu $A \sim B$ thì $r(A) = r(B)$	Hạng ma trận	Ma trận bậc thang Ma trận bậc thang rút gọn	Luật
Hệ phương trình tuyến tính	Định nghĩa Hệ phương trình tuyến tính	Một ***hệ phương trình tuyến tính*** trên R gồm m ***phương trình***, n ***ẩn số*** là một hệ có dạng: $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (*)$$ trong đó • $a_{ij} \in R$: là các hệ số • $b_i \in R$: là các hệ số tự do • $x_1, x_2, ..., x_n$: là các ẩn số nhận giá trị trong R Nếu $(*)$ có các hệ số tự do bằng 0 thì ta nói $(*)$ là **hệ**	Hệ phương trình tuyến tính Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất	Ma trận	Khái niệm/ Định nghĩa

		phương trình tuyến tính thuần nhất trên R.			
	Nghiệm hệ của phương trình tuyến tính	Ta nói $u = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ là ***nghiệm*** của hệ phương trình $(*)$ nếu ta thay thế $x_1 := \alpha_1, x_2 := \alpha_2, ..., x_n := \alpha_n$ thì tất cả các phương trình trong $(*)$ đều thỏa. Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn có một nghiệm $u = (0, 0, ..., 0)$. Nghiệm này được gọi là ***nghiệm tầm thường***.	Nghiệm hệ của phương trình tuyến tính Nghiệm tầm thường	Hệ phương trình tuyến tính	Khái niệm/ Định nghĩa
	Nghiệm hệ của phương trình tuyến tính	Nếu hai hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng tương đương dòng với nhau thì hai hệ phương trình đó tương đương nhau. Số nghiệm của phương trình tuyến tính chỉ có 3 trường hợp sau: • Vô nghiệm • Duy nhất một nghiệm • Vô số nghiệm	Nghiệm hệ của phương trình tuyến tính Số nghiệm	Hệ phương trình tuyến tính Tương đương dòng	Luật
	Giải hệ phương trình tuyến tính	***Phương pháp Gauss*** Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\overline{A} = (A\|B)$. Bước 2. Đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang R. Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang R mà ta kết luận nghiệm như sau: • TH1: Xuất hiện một dòng $(0\ 0\ 0\ 0\ ...\ 0\ 0\ \|\ \neq\ 0)$ Kết luận hệ phương trình vô nghiệm. • TH2: Ma trận R có dạng	Giải hệ phương trình tuyến tính Phương pháp Gauss Phương pháp Gauss - Jordan Bậc tự do	Hệ phương trình tuyến tính Ma trận bậc thang Ma trận bậc thang rút gọn Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận	Thuật toán

<table>
<tr><td></td><td></td><td>

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & \alpha_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Việc tính nghiệm được thực hiện từ dưới lên trên.

- TH3: Khác 2 trường hợp trên. Khi đó hệ có vô số nghiệm, và:
  - Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
  - Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở sẽ được tính từ dưới lên trên và theo các ẩn tự do.

Phương pháp Gauss - Jordan

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\overline{A} = (A|B)$.

Bước 2. Đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang rút gọn R_A.

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang rút gọn R_A mà ta kết luận nghiệm như sau:

- TH1: Xuất hiện một dòng

$$(0\ 0\ 0\ 0 \dots\ 0\ 0\,|\ \neq\ 0)$$

Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

- TH2: Ma trận R có dạng

</td><td></td><td>Phần tử cơ sở</td><td></td></tr>
</table>

		$$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$
		Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là:
		$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$$
		• TH3: Khác 2 trường hợp trên. Khi đó hệ có vô số nghiệm, và:
		  ○ Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở 1 sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
		  ○ Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở 1 sẽ được tính theo các ẩn tự do.
		Số ẩn tự do được gọi là **bậc tự do** của hệ phương trình.			

Ma trận khả nghịch	Ma trận khả nghịch	Cho ma trận $A \in M_n(R)$. Ta nói A ***khả nghịch*** nếu tồn tại ma trận B sao cho $$AB = BA = I_n$$ Nếu B thỏa mãn điều kiện trên được gọi mà ***ma trận nghịch đảo*** của A. Ma trận nghịch đảo của một ma trận khả nghịch là duy nhất. Ta kí hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}.	Ma trận khả nghịch Ma trận nghịch đảo	Ma trận vuông Ma trận đơn vị	Khái niệm/ Định nghĩa
	Ma trận khả nghịch	Cho $A \in M_n(R)$ giả sử A khả nghịch và có nghịch đảo là A^{-1} khi đó: • A^{-1} khả nghịch và $(A^{-1})^{-1} = A$ • A^T khả nghịch và $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$	Ma trận khả nghịch	Ma trận vuông	Luật

		• $\forall a \in R\backslash\{0\},\ aA$ khả nghịch và $(aA)^{-1} = \frac{1}{a}.A^{-1}$ Cho $A, B \in M_n(R)$nếu A và B khả nghịch thì AB khả nghịch, hơn nữa $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$			
	Ma trận khả nghịch	Cho $A \in M_n(R)$. Khi đó các khẳng định sau tương đương: i) A khả nghịch ii) $r(A) = n$ iii) $A \sim I_n$ iv) Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1,..., \varphi_k$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n: $$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n.$$ Hơn nữa, khi đó qua chính các phép BĐSCTD $\varphi_1,..., \varphi_k$, ma trận đơn vị I_n sẽ biến thành ma trận nghịch đảo A^{-1}: $$I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}.$$	Ma trận khả nghịch	Ma trận vuông Ma trận đơn vị Các phép biến đổi sơ cấp ma trận	Luật
Phương trình ma trận	Phương trình ma trận	Cho các ma trận $A, A' \in M_n(R)$ khả nghịch và $B \in M_{n\times p}(R)$, $C \in M_{m\times n}(R)$, $D \in M_n(R)$. Khi đó i) $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ ii) $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1}$ iii) $AXA' = D \Leftrightarrow X = A^{-1}BA'^{-1}$	Phương trình ma trận	Ma trận Ma trận khả nghịch	Luật
Định thức	Định thức của ma trận	Cho ma trận vuông $A_{n\times n}$ với các phần tử trong trường K. ***Định thức*** của ma trận A, được kí hiệu là det A	Định thức Ma trận vuông	Ma trận	Khái niệm/ Định nghĩa

		hoặc $\|A\|$ là phần tử sau đây của trường K $$\det A = \|A\| = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(n)n}$$ Nếu A là một ma trận vuông cấp n thì det A được gọi là một **định thức cấp** n.			
Không gian vector	Định nghĩa Không gian vector	Cho V là một tập hợp với phép toán $+$. V được gọi là ***không gian vector*** trên R nếu mọi $u, v, w \in V$ và $\alpha, \beta \in R$, ta có 8 tính chất sau: 1. $u + v = v + u$; 2. $(u + v) + w = u + (v + w)$; 3. $\exists 0 \in V, 0 + u = 0 + u = u$ 4. $\exists u' \in V: u' + u = u + u' = 0$; 5. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$; 6. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$; 7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$; 8. $1. u = u$. Khi đó, ta gọi: - mỗi phần tử $u \in V$là một ***vector***. - mỗi số $\alpha \in R$ là một ***vô hướng***. - vector 0 là ***vector không***. - vector u' là ***vector đối*** của u.	Không gian vector	Tổ hợp tuyến tính Cơ sở và số chiều Không gian vector con Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở	Khái niệm/ Định nghĩa
	Định nghĩa Không gian vector	Cho V là một không gian vector trên R. Khi đó với mọi $u \in V$ và $\alpha \in R$, ta có: i) $\alpha. u = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0$hay $u = 0)$ ii) $(-1). u = -u$	Không gian vector		Luật
Tổ hợp tuyến tính	Định nghĩa Tổ hợp tuyến tính	Cho $u_1, u_2, ..., u_m \in V$. Một ***tổ hợp tuyến tính*** của $u_1, u_2, ..., u_m$ là một vector có dạng $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m$ với $\alpha_i \in R$	Tổ hợp tuyến tính	Không gian vector Độc lập tuyến tính Phụ thuộc tuyến	Khái niệm/ Định nghĩa

		Khi đó, đẳng thức trên được gọi là ***dạng biểu diễn*** của u theo các vector $u_1, u_2, ..., u_m$.		tính	
	Độc lập và phụ thuộc tuyến tính	Cho $u_1, u_2, ..., u_m \in V$. Xét phương trình: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m = 0 \quad (*)$ ● Nếu (*) chỉ có nghiệm tầm thường $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$ thì ta nói $u_1, u_2, ..., u_m$ (hay $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$) ***độc lập tuyến tính***. ● Nếu ngoài nghiệm tầm thường, (*) còn có nghiệm khác thì ta nói $u_1, u_2, ..., u_m$ (hay $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$) ***phụ thuộc tuyến tính***. Nói cách khác, ➢ Nếu phương trình (*) có nghiệm duy nhất thì $u_1, u_2, ..., u_m$ độc lập tuyến tính. ➢ Nếu phương trình (*) có vô số nghiệm thì $u_1, u_2, ..., u_m$ phụ thuộc tuyến tính.	Độc lập tuyến tính Phụ thuộc tuyến tính	Tổ hợp tuyến tính	Khái niệm/ Định nghĩa
	Tổ hợp tuyến tính	Cho V là không gian vector trên R và $S = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ là tập hợp các vector thuộc V. Khi đó: ● Nếu S phụ thuộc tuyến tính thì mọi tập chứa S đều phụ thuộc tuyến tính. ● Nếu S độc lập tuyến tính thì mọi tập con của S đều độc lập tuyến tính.	Tổ hợp tuyến tính	Không gian vector Độc lập tuyến tính Phụ thuộc tuyến tính	Luật
	Tổ hợp tuyến tính	Cho $u_1, u_2, ..., u_m$ là m vector trong R^n. Gọi A là ma trận có được bằng cách xếp $u_1, u_2, ..., u_m$ thành các dòng. Khi đó $u_1, u_2, ..., u_m$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi A có hạng là $r(A) = m$.	Tổ hợp tuyến tính	Không gian vector Ma trận Hạng ma trận	Luật

Cơ sở và số chiều của không gian vector	Tập sinh	Cho V là không gian vector và $S \subset V$. S được gọi là tập sinh của V nếu mọi vector u của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S sinh ra V hoặc V được sinh bởi S, ký hiệu $V = \ < S >$.	Tập sinh	Không gian vector Tổ hợp tuyến tính	Khái niệm/ Định nghĩa
	Cơ sở	Cho V là không gian vector và B là con của V. B được gọi là một cơ sở của V nếu B là một tập sinh và B độc lập tuyến tính.	Cơ sở	Không gian vector Tập sinh Độc lập tuyến tính	Khái niệm/ Định nghĩa
	Số chiều	Cho V là không gian vector, ***số chiều*** của V, ký hiệu là $\dim V$, là số vector của tập cơ sở. Trong trường hợp vô hạn chiều, ta ký hiệu $\dim V = \infty$.	Số chiều	Cơ sở	Khái niệm/ Định nghĩa
	Số chiều	Cho V là một không gian vector hữu hạn chiều với $\dim V = n$. Khi đó i) Mọi tập con độc lập tuyến tính gồm n vector của V đều là cơ sở của V. ii) Mọi tập sinh của V gồm n vector đều là cơ sở của V.	Số chiều	Cơ sở	Luật
Không gian vector con	Định nghĩa Không gian vector con	Cho W là một tập con khác $\emptyset$ của V. Ta nói W là một ***không gian vector con*** (gọi tắt, ***không gian con***) của V , ký hiệu $W \leq V$, nếu W với phép toán (+,.) được hạn chế từ W cũng là một không gian vector trên R.	Không gian vector con	Không gian vector	Khái niệm/ Định nghĩa
	Định nghĩa Không gian vector con	Cho W là một tập con khác $\emptyset$ của V. Khi đó các mệnh đề sau tương đương: i) $W \leq V$. ii) Với mọi $u, v \in W$; $\alpha \in R$, ta có $u + v \in W$ và $\alpha u \in W$. iii) Với mọi $u, v \in W$; $\alpha \in R$, ta có $\alpha u + v \in W$.	Không gian vector con	Không gian vector	Luật

		Nếu W_1, W_2 là không gian con của V thì $W_1 \cap W_2$ cũng là một không gian con của V. Ta định nghĩa $$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$ Khi đó $W_1 + W_2$ cũng là một không gian con của V.			
	Không gian sinh bởi tập hợp	Cho V là không gian vector trên R và S là tập con khác rỗng của V. Ta đặt W là tập hợp tất cả các tổ tuyến tính của S. Khi đó: i) $W \leq V$. ii) W là không gian nhỏ nhất trong tất cả các không gian con của V mà chứa S. Không gian W được gọi là không gian con sinh bởi S, ký hiệu $W = < S >$. Cụ thể, nếu $S = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ thì $W = < S > = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m \mid \alpha_i \in R\}$ Cho V là không gian vector và S_1, S_2 là tập con của V. Khi đó, nếu mọi vector của S_1 đều là tổ hợp tuyến tính của S_2 và ngược lại thì $< S_1 > = < S_2 >$. Cho V là một không gian vector hữu hạn chiều sinh bởi S. Khi đó tồn tại một cơ sở B của V sao cho $B \subseteq S$. Nói cách khác, nếu S không phải là một cơ sở của V thì ta có thể loại bỏ ra khỏi S một số vector để được một cơ sở của V.	Không gian sinh bởi tập hợp	Không gian vector con Tập sinh	Luật
	Không gian dòng của ma trận	Cho ma trận $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$	Không gian dòng của ma trận	Không gian vector con	Khái niệm/ Định nghĩa

		$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ Đặt $$\begin{aligned} u_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}); \\ u_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}); \\ &\dots\dots\dots\dots \\ u_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{aligned}$$ và $$W_A = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$$ Ta gọi $u_1, u_2, ..., u_m$ là các ***vector dòng*** của A, và W_A là ***không gian dòng*** của A.			
	Không gian dòng của ma trận	Giả sử $A \in M_{m\times n}(R)$. Khi đó, $\dim W_A = r(A)$ và tập hợp các vector khác không trong dạng ma trận bậc thang của A là cơ sở của W_A.	Không gian dòng của ma trận	Không gian vector con	Luật
	Không gian tổng	Cho V là không gian vector trên R và W_1, W_2 là không gian con của V. Khi đó: i) $W_1 + W_2$ là không gian con của V. ii) Nếu $W_1 = \ < S_1 >$ và $W_2 = \ < S_2 >$ thì $W_1 + W_2 = \ < S_1 \cup S_2 >$.	Không gian tổng	Không gian vector con	Khái niệm/ Định nghĩa
Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính	Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính	Gọi W là tập hợp nghiệm $(x_1, x_2, ..., x_n)$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:	Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính	Không gian vector con	Luật

		$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$ Khi đó, W là không gian con của R^n và số chiều của W bằng số ẩn tự do của hệ. Như vậy $W = \{u \in R^n \mid Au^T = 0\}$ với A là ma trận cho trước và $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$.			
	Không gian giao	Cho V là không gian vector và W_1, W_2 là không gian con của V. Khi đó $W_1 \cap W_2$ là không gian con của V. Hơn nữa nếu $W_1 = \ < S_1 >$ và $W_2 = \ < S_2 >$ thì $u \in W_1 \cap W_2$ khi và chỉ khi u là tổ hợp tuyến tính của S_1 và u là tổ hợp tuyến tính của S_2.	Không gian giao Tổ hợp tuyến tính	Không gian vector con	Khái niệm/ Định nghĩa
	Không gian giao	Cho W_1, W_2 là hai không gian con hữu hạn chiều của V . Khi đó $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$	Không gian giao	Không gian vector con	Luật
Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở	Tọa độ	Cho V là không gian vector và $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó B được gọi là ***cơ sở được sắp*** của V nếu thứ tự các vector trong B được cố định. Ta thường dùng ký hiệu $(u_1, u_2, ..., u_n)$ để chỉ cơ sở được sắp theo thứ tự $u_1, u_2, ..., u_n$.	Tọa độ Cơ sở được sắp	Cơ sở	Khái niệm/ Định nghĩa
	Tọa độ	Cho $B = (u_1, u_2, ..., u_n)$ là cơ sở của V. Khi đó mọi vector $u \in V$ đều được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$.	Tọa độ	Cơ sở	Luật

	Ma trận chuyển cơ sở	Cho V là một không gian vector và $B_1 = (u_1, u_2, ..., u_n), B_2 = (v_1, v_2, ..., v_n).$ là hai cơ sở của V. Đặt $P = ([v_1]_{B_1}\ [v_2]_{B_1} \dots [v_n]_{B_1}).$ Khi đó P được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_1 sang cơ sở B_2 và được ký hiệu $(B_1 \rightarrow B_2)$.	Ma trận chuyển cơ sở	Cơ sở	Khái niệm/ Định nghĩa
	Ma trận chuyển cơ sở	Cho V là một không gian vector hữu hạn chiều và B_1, B_2, B_3 là ba cơ sở của V. Khi đó: i) $(B_1 \rightarrow B_1) = I_n$. ii) $\forall u \in V, [u]B_1 = (B_1 \rightarrow B_2)[u]_{B_2}$. iii) $(B_2 \rightarrow B_1) = (B_1 \rightarrow B_2)^{-1}$. iv) $(B_1 \rightarrow B_3) = (B_1 \rightarrow B_2)(B_2 \rightarrow B_3)$.	Ma trận chuyển cơ sở	Cơ sở	Luật
	Ma trận chuyển cơ sở	Cho $B_1 = (u_1, u_2, ..., u_n)$; $B_2 = (v_1, v_2, ..., v_n)$ là hai cơ sở của không gian R^n. Gọi B_0 là ***cơ sở chính tắc*** của R^n. Ta có: i) $(B_0 \rightarrow B_1) = (u_1^T\ u_2^T \dots\ u_n^T)$. ii) $(B_1 \rightarrow B_0) = (B_0 \rightarrow B_1)^{-1}$. iii) $\forall u \in V, [u]B_1 = (B_0 \rightarrow B_1)^{-1}[u]_{B_0}$. iv) $(B_1 \rightarrow B_2) = (B_0 \rightarrow B_1)^{-1}(B_0 \rightarrow B_2)$	Ma trận chuyển cơ sở Cơ sở chính tắc	Cơ sở	Luật

- **Một số dạng bài toán trong miền tri thức Không gian vector**

Có nhiều vấn đề cần giải quyết trong chương Không gian vector, nhưng đồ án chỉ xem xét trình bày một số dạng bài tính toán cơ bản, ở mức độ thông hiểu, và từ đó xây dựng hệ thống giải tự động cho các dạng bài tập này.

STT	Dạng bài toán	Bài toán	Các tri thức liên quan	Ví dụ
1	Kiểm tra tổ hợp tuyến tính	Kiểm tra vector u có là tổ hợp tuyến tính của các vector $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$	Tổ hợp tuyến tính	Xét xem vector $u = (1, 4 - 3)$ có là **tổ hợp tuyến tính** của các vector $u_1 = (2, 1, 1), u_2 = (-1, 1, -1), u_3 = (1, 1, -2)$ hay không? **<u>Bài giải</u>** Ta có $\left(u_1^T \; u_2^T \; u_3^T \middle\vert u \right) = \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{chuẩn\ hóa} \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Do đó hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 1)$ Vậy vector u là tổ hợp tuyến tính của các vector u_1, u_2, u_3
2	Xác định tính độc lập và phụ thuộc tuyến tính	Kiểm tra tính độc lập và phụ thuộc tuyến tính của tập hợp vector M = { $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ }	Độc lập tuyến tính Phụ thuộc tuyến tính	Xác định tập hợp các vector $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (4, 5, 6)$, $u_3 = (7, 8, 9)$ là **độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính**? **<u>Bài giải</u>** Đặt

				$$A=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{bậc thang}]{\text{đưa về dạng}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $r(A) = 2$ (bé hơn số vector), nên u_1, u_2, u_3 phụ thuộc tuyến tính
3	Kiểm tra cơ sở của không gian vector	Kiểm tra tập hợp vector B = {u_1, u_2, ..., u_m} có là cơ sở của không gian vector R^n hay không	Cơ sở của không gian vector	Kiểm tra $\mathfrak{B}=\{u_1=(1,2), u_2=(3,4)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$ **Bài giải** Đặt $$A=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \ suy\ ra\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$ Ta có $detA = -2 \neq 0$ nên B độc lập tuyến tính. Mà dim $\mathbb{R}^2$=2 = |B|, nên B là cơ sở của $\mathbb{R}^2$.
4	Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi một tập hợp	Tìm cơ sở của không gian vector S sinh bởi tập hợp các vector { u_1, u_2, ..., u_m }	Tập sinh Cơ sở	Tìm một **cơ sở** và **số chiều** cho không gian W **sinh** bởi các vector $u_1 = (1, 2, -3, 4)$, $u_2 = (2, 3, 0, -1)$, $u_3 = (1, 2, -6, 8)$, $u_4 = (3, 1, -9, 7)$. **Bài giải** Ta có $$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -6 & 8 \\ 3 & 1 & -9 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{bậc thang}]{\text{đưa về dạng}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Do đó dimW = 3, và $S=\{(1,2,-3,4), (0,1-6,9), (0,0,3,-4)\}$ là cơ sở của W

2.2. Mô hình biểu diễn

Miền tri thức “Không gian vector” được biểu diễn theo dạng **mô hình tri thức quan hệ** như sau:

(C, R, Rules)

Trong đó:

	Ý nghĩa	Biểu diễn
C	Tập các khái niệm về không gian vector, ma trận	C = {VECTOR, KG_VECTOR, MATRAN}
R	Các quan hệ giữa các khái niệm trong C	R = {thuộc, không gian con, cơ sở, tập sinh, độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính, bằng nhau, tương đương dòng}
Rules	Tập các luật của tri thức không gian vector	Rules = $Rule_{deduce} \cup Rule_{equivalent}$

Cấu trúc các khái niệm trong C:

- VECTOR là khái niệm cơ sở (cấp $C_{(0)}$), được thể hiện bằng $\mathbf{I}_{Vector}$
- KG_VECTOR là khái niệm cấp $C_{(1)}$.

  Cấu trúc khái niệm KG_VECTOR là ***(Attrs, Facts, RulesObj)***. Với:

  Attrs := {dim, L}

  dim: N // số chiều

  $L \subseteq \mathbf{I}_{Vector}$

  Facts := ∅

  RulesObj :={ r1: $\{\forall u, v \in L, \forall \alpha \in R\} \rightarrow \{\alpha u + v \in L\}$

  r2: $\{\forall u \in L\} \rightarrow \exists u' \in L: u + u' = 0\}$

- MATRAN là khái niệm cấp $C_{(1)}$. **Cấu trúc khái niệm MATRAN** là ***(Attrs, Facts, RulesObj)***. Với:

  Attrs := {m, n, a[m][n], rank}

  m: N // số dòng

  n: N // số cột

  a[m][n]: R // mảng 2 chiều, ghi giá trị của ma trận

  rank: N // hạng của ma trận

  Facts := ∅

  RulesObj := ∅

Biểu diễn các quan hệ R

- *Không gian con* ⊆ $\mathbf{I}_{KGVT} \times \mathbf{I}_{KGVT}$: Quan hệ không gian con giữa hai không gian vector.
- *Cơ sở* ⊆ $\mathbf{S}_{VECTOR} \times \mathbf{I}_{KGVT}$: Quan hệ một tập vector là cơ sở của một không gian vector.
- *Độc lập tuyến tính* ∈ $\mathbf{I}^{k}_{VECTOR}$: Quan hệ độc lập tuyến tính giữa k vector.
- *Phụ thuộc tuyến tính* ⊆ $\mathbf{I}^{k}_{VECTOR}$: Quan hệ phụ thuộc tuyến tính giữa k vector.
- *Tổ hợp tuyến tính* ⊆ $\mathbf{I}_{VECTOR} \times \mathbf{S}_{VECTOR}$: Quan hệ một vector là tổ hợp tuyến tính của một tập các vector.
- *Tập sinh* ⊆ $\mathbf{S}_{VECTOR} \times \mathbf{I}_{KGVT}$: Quan hệ một tập vector là tập sinh của không gian vector.
- *Bằng nhau (=)* ⊆ $\mathbf{I}_{MATRAN} \times \mathbf{I}_{MATRAN}$: Quan hệ bằng nhau giữa hai ma trận.
- *Tương đương dòng* ⊆ $\mathbf{I}_{MATRAN} \times \mathbf{I}_{MATRAN}$: Quan hệ tương đương dòng giữa hai ma trận.

Biểu diễn tập các luật Rules:

$$\mathbf{Rules = Rule_{deduce} \cup Rule_{equivalent}}$$

- Các luật dạng luật dẫn - $\mathbf{Rule}_{deduce}$:

[Rule 1] {B: $\mathbf{S}_{VECTOR}$, V: KG_VECTOR, B **cơ sở** V} → V.dim = |B| (số lượng vector trong tập hợp B)

- Các luật tương đương - $\mathbf{Rule}_{equivalent}$:

[Rule 2] {M: $\mathbf{S}_{VECTOR}$, M = {e_1, e_2, ..., e_k} }

M **độc lập tuyến tính** ⇔ ({ $a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ke_k = 0$ } ↔ {$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$})

[Rule 3] {V: KG_VECTOR, B: $\mathbf{S}_{VECTOR}$, B = {e_1, e_2, ..., $e_{V.dim}$} }

B **cơ sở** V ⇔ (B độc lập tuyến tính) AND (B tập sinh V)

[Rule 4] {M: $\mathbf{S}_{VECTOR}$, M = {e_1, e_2, ..., e_k} }

M **phụ thuộc tuyến tính** ⇔ ({ $a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ke_k = 0$ } ↔ {∃(a_1, a_2, ..., a_k) ≠(0, 0, ..., 0) })

[Rule 5] {u: VECTOR, M: $\mathbf{S}_{VECTOR}$, M = {u_1, u_2, ..., u_m} }

u **tổ hợp tuyến tính** M ⇔ ({∃(a_1, a_2, ..., a_m) ≠(0, 0, ..., 0) } ↔ { $u = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_mu_m$ })

[Rule 6] {A: MATRAN, B: MATRAN}

A **tương đương dòng** B ⇔ ∃[f_1, ..., f_n]: dãy các biến đổi sơ cấp dòng, sao cho $f_n(...(f_1(A))...) = B$

2.3. Tổ chức lưu trữ dữ liệu

Cơ sở dữ liệu được thiết kế gồm các bảng sau:

- **vector_spaces**: bảng chứa các không gian vector gồm:
  - id là dãy số duy nhất cho từng không gian vector.
  - symbol là tên của không gian vector, ví dụ V, L...

vector_spaces		
PK	**id**	**int**
	symbol	varchar(20)

- **vectors**: bảng chứa các vector gồm
  - values là mảng các số nguyên.
  - name là tên của vector, có thể rỗng.

vectors		
PK	**id**	**int**
	values	int[100]
	name	varchar(20) nullable

- **space_relations**: bảng chứa quan hệ giữa không gian vector và các vectors:
  - space_id từ bảng **vector_spaces.**
  - vector_id từ bảng **vectors**.

space_relations		
FK	space_id	int
FK	vector_id	int

- **matrices**: bảng chứa các ma trận gồm:
  - id là dãy số duy nhất cho từng ma trận.
  - name là tên của ma trận.
  - n_rows, n_cols là số dòng, số cột của ma trận.
  - rank hạng của ma trận, nếu rỗng sẽ được tính tự động.

matrices

PK	id	int
	name	varchar(20)
	n_rows	int
	n_cols	int
	rank	int

- **matrix_relations:** bảng chứa quan hệ giữa ma trận và các vectors:
  - matrix_id từ bảng **matrices.**
  - vector_id từ bảng **vectors**.
  - is_free_coef mặc định giá trị false, đánh dấu vector này là hệ số tự do, dùng để giải hệ phương trình.

matrix_relations		
FK	matrix_id	int
FK	vector_id	int
	is_free_coef	bool

2.4. Một số bài toán và thuật giải

Dạng 1: Kiểm tra tổ hợp tuyến tính

BÀI TOÁN: Kiểm tra vector u có là tổ hợp tuyến tính của các vector u_1, u_2, u_3,..., u_n

MÔ HÌNH BÀI TOÁN: **(O, Facts, Goal)**

O = {u, u_1, u_2, u_3,..., u_n : VECTOR}

Facts = { M = {u_1, u_2, u_3,..., u_n} , tọa độ u_1, u_2, ... }

Goal = {"Kiểm tra", u tổ hợp tuyến tính M}

THUẬT GIẢI:

Bước 1: Đặt

$$A = \left(u_1^T \ u_2^T \ \cdots \ u_n^T \;\middle|\; u^T \right)$$

Khi đó ta có dạng hệ phương trình ma trận như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (*)$$

Bước 2: Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa về dạng ma trận bậc thang.

Nếu trong quá trình biến đổi có một dòng xuất hiện dạng

$$\left(0 \ 0 \ \cdots \ 0 \mid a \right)$$

Thì ta kết luận hệ vô nghiệm mà không cần biến đổi tiếp, tức là u không là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3,..., u_n

Nếu không xuất hiện dòng dạng trên thì thuật toán kết thúc ta thu được ma trận hóa của một hệ bậc thang. Tức là u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3,..., u_n

BƯỚC GIẢI:

S1: { u_1, u_2, u_3, ..., u_n; u} = > {hệ phương trình tuyến tính A}

S2: {u_1, u_2, u_3, ..., u_n ; u; hệ phương trình tuyến tính A} => {vô nghiệm hoặc nghiệm duy nhất hoặc vô số nghiệm}

S3:

- $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$; u; hệ phương trình tuyến tính A, vô nghiệm$\}$ => {u không là tổ hợp tuyến tính}
- $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$; u; hệ phương trình tuyến tính A, nghiệm duy nhất hoặc vô số nghiệm$\}$ => {u là tổ hợp tuyến tính}

Dạng 2: Xác định tính độc lập và phụ thuộc tuyến tính

BÀI TOÁN: Kiểm tra tính độc lập và phụ thuộc tuyến tính của tập hợp vector M = { u_1, u_2, u_3,..., u_n }

MÔ HÌNH BÀI TOÁN: **(O, Facts, Goal)**

O = { u_1, u_2, u_3, ..., u_n : VECTOR}

Facts = { M = {u_1, u_2, u_3,..., u_n} , |M| = n, tọa độ u_1, u_2, ... }

Goal = {"Kiểm tra", "M độc lập tuyến tính", "M phụ thuộc tuyến tính" }

THUẬT GIẢI:

Bước 1: Đặt

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Bước 2: Đưa A về dạng bậc thang hoặc dạng chính tắc theo dòng

Bước 3: Xác định hạng của A $r(A)$ là số dòng khác 0 của ma trận bậc thang của A

Bước 4: Kiểm tra điều kiện

- Nếu A.rank = |M| thì M độc lập tuyến tính

- Nếu A.rank < |M| thì M phụ thuộc tuyến tính

BƯỚC GIẢI:

S1: $\{u_1, u_2, u_3,.., u_m\}$ => {Ma trận A, dim(A)}

S2: $\{u_1, u_2, u_3,.., u_m;$ Ma trận A, dim(A)} => {Ma trận bậc thang của A, rank(A)}

S3: $\{u_1, u_2, u_3,.., u_m;$ Ma trận A, dim(A), Ma trận bậc thang của A, rank(A)} => {Độc lập tuyến tính hoặc Phụ thuộc tuyến tính}

Dạng 3: Kiểm tra cơ sở của không gian vector

BÀI TOÁN: Kiểm tra tập hợp vector B = $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ có là cơ sở của không gian vector R^n hay không

MÔ HÌNH BÀI TOÁN: **(O, Facts, Goal)**

O = $\{R^n$: KG_VECTOR, $u_1, u_2, ..., u_m$: VECTOR}

Facts = { R^n.dim = n, M = $\{u_1, u_2, u_3,..., u_m\}$, |M| = n, tọa độ u_1, u_2, ... }

Goal = { "Kiểm tra", B cơ sở R^n }

THUẬT GIẢI:

Bước 1: Đặt

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

Bước 2: Kiểm tra số vector của B có bằng với số chiều của không gian R^n

- Nếu R^n.dim = |B| thì chuyển đến bước 3

- Nếu R^n.dim ≠ |B| thì B không cơ sở R^n

Bước 3: Kiểm tra B có độc lập tuyến tính hay không bằng cách tính định thức của A

- Nếu detA = 0, thì B không độc lập tuyến tính -> B không cơ sở R^n
- Nếu detA ≠ 0, thì B độc lập tuyến tính -> B là cơ sở R^n

BƯỚC GIẢI:

S1: { u_1, u_2, u_3, ..., u_n; R^n} = > {dim(R), ma trận A, dim(A)}

S2: {u_1, u_2, u_3, ..., u_n ; R^n; dim(R), ma trận A, dim(A)} => {dim(R) bằng hoặc khác dim(A)}

S3:

- {u_1, u_2, u_3, ..., u_n ; R^n; dim(R), ma trận A, dim(A), dim(R) bằng dim(A)} => {tập vector đã cho không là cơ sở của R^n}
- {u_1, u_2, u_3, ..., u_n ; R^n; dim(R), ma trận A, dim(A), dim(R) khác dim(A)} => {tập vector đã cho là cơ sở của R^n}

Dạng 4: Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi một tập hợp

BÀI TOÁN: Tìm cơ sở của không gian vector S sinh bởi tập hợp các vector { u_1, u_2, ..., u_m }

MÔ HÌNH BÀI TOÁN: **(O, Facts, Goal)**

O = {S: KG_VECTOR, u_1, u_2, ..., u_m: VECTOR}

Facts = { tọa độ u_1, u_2, ... , M = {u_1, u_2, u_3,..., u_m}, M tập sinh S}

Goal = {“Tìm”, B: S_{VECTOR}, B cơ sở S}

THUẬT GIẢI:

Bước 1: Coi u_1, u_2, u_3,.., u_m là các vector trong R^n

Bước 2: Đặt

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

Bước 3: Đưa A về dạng bậc thanh hoặc dạng chính tắc theo dòng.

Bước 4: Các vector dòng khác 0 trong dạng bậc thang (hoặc dạng chính tắc theo dòng) của A tạo thành cơ sở của S.

BƯỚC GIẢI:

S1: { u_1, u_2, u_3, ..., u_n; R^n} = > {ma trận A, dim(A)}

S2: {u_1, u_2, u_3, ..., u_n ; R^n; ma trận A, dim(A)} => {ma trận bậc thang của A, rank(A)}

S3: {u_1, u_2, u_3, ..., u_n ; R^n; ma trận bậc thang của A, rank(A)} => {cơ sở cần tìm: v thuộc ma trận bậc thang của A và v khác 0}

3. Thử nghiệm

3.1. Cài đặt chương trình

- Ngôn ngữ: Python 3.8
- Câu lệnh thực thi:

```
> python main.py “đề bài”
```

- Ví dụ:

> python main.py "Trong không gian R^3 cho các vectơ u1 = (1, 2, -3); u2 = (2, 5, -1); u3 = (1, 1, -9). Hỏi u1, u2, u3 độc lập hay phụ thuộc tuyến tính?"

- Màn hình kết quả:

- Phân tích đề bài:

```
+--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------+
| Đề bài: Trong không gian R^3 cho các vectơ u1 = (1, 2, -3); u2 = (2, 5, -1); u3 = (1, 1, -9). Hỏi u1, u2, u3 độc lập hay phụ thuộc tuyến tính? |
+--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------+

Phân tích bài toán:
- Dạng bài toán: Xác định tính độc lập và phụ thuộc tuyến tính
- Dữ liệu:
        Các vectors: (1, 2, -3), (2, 5, -1), (1, 1, -9)
```

- Lời giải chi tiết:

```
Lời giải:

Bước 1: Ma trận hóa

        1       2       -3
        2       5       -1
        1       1       -9

Bước 2: Biến đổi về ma trận bậc thang

  Lần lượt thực hiện phép biến đổi sơ cấp trên các dòng sau:
    - dòng_2 = dòng_2 - (2)*dòng_1
    - dòng_3 = dòng_3 - (1)*dòng_1

        1       2       -3
        0       1       5
        0       -1      -6

  Lần lượt thực hiện phép biến đổi sơ cấp trên các dòng sau:
    - dòng_1 = dòng_1 - (2)*dòng_2
    - dòng_3 = dòng_3 - (-1)*dòng_2

        1       0       -13
        0       1       5
        0       0       -1
```

3.2. Kết quả

Các bài tập được lấy từ sách **Đại số tuyến tính** *(Nguyễn Hữu Việt Hưng)*[4], **Đại số tuyến tính** *(Nguyễn Duy Thuận)*[5], **Đại số tuyến tính** *(Mỵ Vinh Quang)*[6].

Thống kê về số lượng bài tập thử nghiệm được thể hiện trong bảng dưới đây, theo từng dạng và cấp độ:

Độ khó	**Dạng 1**	**Dạng 2**	**Dạng 3**	**Dạng 4**
Đơn giản (số vector, số chiều ≤ 3)	4	4	2	3
Phức tạp (số vector, số chiều > 3)	1	2	3	1
Tổng cộng	**5**	**6**	**5**	**4**

Kết quả thử nghiệm:

Kiến thức	**Số bài giải được**
Tổ hợp tuyến tính	5/5
Độc lập, phụ thuộc tuyến tính	6/6
Cơ sở của không gian vector	5/5
Cơ sở cho không gian sinh bởi tập hợp	4/4

4. Kết luận

Trong khuôn khổ bài tập lớn này, nhóm đã đề xuất ra các mô hình hỗ trợ giải lớp bài tập về vector trong chương trình học bậc Đại học môn Đại số Tuyến tính. Hệ thống đã đạt được mục tiêu ban đầu đề ra, giúp nâng cao quá trình tự học của sinh viên bậc Đại học với môn Đại số tuyến tính.

Một số ưu điểm có thể kể đến:

- Hệ thống không giới hạn chiều mà ma trận có thể nhập vào.
- Hệ thống trình bày từng bước giải, rõ ràng và mạch lạc.
- Có thể trích xuất được thông tin ma trận từ đề bài đầu vào dưới dạng Rules base
- Hệ thống có thể cho thấy sự liên kết giữa các mô hình tri thức.

Tuy nhiên, do thời gian nghiên cứu còn hạn chế nên nhóm chỉ dừng lại lớp các bài tập tính toán của chương Không gian Vector, hệ thống vẫn chưa đi sâu vào lớp bài tập chứng minh. Hy vọng trong thời gian tới, nhóm sẽ có thể ứng dụng các mô hình về NLP để hỗ trợ việc trích xuất thông tin để bài cũng như hiểu thêm về đề bài. Qua đó, hệ thống có thể làm việc được với các bài toán chứng minh các cơ sở tri thức.

5. Hướng phát triển

- Cải thiện, hỗ trợ thêm cho số thập phân và phân số, một số dạng bài tập khác.
- Thêm chức năng tra cứu tri thức theo chương.
- Phát triển thành một ứng dụng hoàn chỉnh, có giao diện thân thiện và tương tác với người dùng.
- Kết hợp công nghệ AI như là chatbot nhằm hỗ trợ, tương tác trực tiếp với người dùng, để có thể đánh giá mức độ thấu hiểu và tìm hiểu sâu cũng như ôn tập kiến thức ở từng bước giải bài toán.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Đình Hiển, Đỗ Văn Nhơn và Phạm Thi Vương. (2017). Xây dựng hệ hỗ trợ giải toán đại số tuyến tính trên cơ sở tri thức gồm các miền tri thức phối hợp, *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ, Số chuyên đề: Công nghệ thông tin (2017): 10-18*.
2. Trịnh Thanh Đèo (2019), Bài giảng môn Đại số Tuyến tính dành cho Sinh viên khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG-HCM.
3. Bùi Xuân Hải - Trần Ngọc Hội - Trịnh Thanh Đèo - Lê Văn Luyện, Đại số tuyến tính và Ứng dụng, Tập 1, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP.HCM.
4. Nguyễn Hữu Việt Hưng, Giáo trình Đại số tuyến tính (Lý thuyết và bài tập), Đại học quốc gia Hà Nội (2008).
5. Nguyễn Duy Thuận, Phí Mạnh Ban, Nông Quốc chinh. Đại số tuyến tính. Nhà xuất bản Đại học sư phạm. (2003).
6. Mỵ Vinh Quang, Đại số tuyến tính, Tài liệu ôn thi Cao học. (2004).