ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

_____*_____

TIỂU LUẬN CUỐI KÌ

MÔ HÌNH HÓA THỐNG KÊ

Giảng viên hướng dẫn: **TS. Nguyễn Thị Mộng Ngọc**

Nhóm thực hiện: **Nhóm 4**

Học viên:	**Phan Thị Thùy An**	MSHV: 20C29002
	Đinh Thị Nữ	MSHV: 20C29013
	Lý Phi Long	MSHV: 20C29028
	Đặng Khánh Thi	MSHV: 20C29038

TP. Hồ Chí Minh – Tháng 04, 2021

Mục lục

Chương 1

Dữ liệu tự chọn

- Tên "đề tài", nguồn gốc của dữ liệu, giới thiệu các biến.
- Mô hình chọn được; phân tích kết quả
- Đưa ra những phương pháp/phân tích khác có thể giúp cho kết quả tốt hơn.
- Kết luận.

1.1 Dữ liệu 1: Mô hình hồi quy đa biến

1.2 Dữ liệu 2: Hồi quy thành phần chính

1.2.1 Giới thiệu bộ dữ liệu

Hiện nay, Xe đạp cho thuê được giới thiệu ở nhiều thành phố để nâng cao sự thoải mái khi di chuyển. Điều cần quan tâm khi cho thuê xe đạp là xe đạp phải luôn sẵn sàng và tiếp cận được người dùng vào đúng thời điểm, giúp giảm bớt thời gian chờ. Do đó, việc đảm bảo một nguồn cung cấp xe đạp cho thuê ổn định cho thành phố trở thành mối quan tâm lớn. Phần quan trọng là cần dự đoán được số lượng xe đạp cần thiết tại mỗi giờ, để có được nguồn cung cấp xe đạp cho thuê ổn định.

Nhóm em sử dụng Bộ dữ liệu Nhu cầu thuê xe đạp ở Seoul (**Seoul Bike Sharing Demand Data Set**).

Nguồn: `https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Seoul+Bike+Sharing+Demand?fbclid=IwAR1b9vg38PvINI2V7K9ZfVoJNx0VmP8GUbuLVO4JGsCdEC_-hHVtUKqXX9Y`).

Bộ dữ liệu ghi lại các thông tin về thời tiết, số lượng xe đạp được thuê mỗi giờ theo từng ngày, từ 01/12/2017 đến 31/11/2018. Bộ dữ liệu có 8760 quan trắc, gồm 14 biến.

Date - Ngày ghi lại số lượng xe đạp cho thuê

Rented Bike count - Số lượng xe đạp được thuê được ghi lại theo mỗi giờ

Hour - Giờ trong ngày

Temperature - Nhiệt độ (^oC)

Humidity - Độ ẩm (%)

Windspeed - Tốc độ gió (m/s)

Visibility - Tầm nhìn xa ($10m$)

Dew point temperature - Nhiệt độ điểm sương (^oC)

Solar radiation - Bức xạ mặt trời (Mj/m^2)

Rainfall - Lượng mưa (mm)

Snowfall - Lượng tuyết rơi (cm)

Seasons - Mùa (Winter, Spring, Summer, Autumn)

Holiday - Ngày lễ (Holiday/No holiday)

Functional Day- Ngày làm việc (Yes nếu là ngày làm việc, No nếu ngược lại)

Phân tích và chọn mô hình

Nhận xét và kết luận

Chương 2

Dữ liệu có sẵn

- Chọn mô hình phù hợp nhất giải thích biến phụ thuộc với từng bộ dữ liệu.
- Nêu rõ phương pháp chọn mô hình và lý do chọn phương pháp đó.
- Nói rõ ý nghĩa của mô hình đã chọn.

2.1 Dữ liệu 1

Những thông tin vê các giám đốc điều hành các tập đoàn Hoa Kỳ. Bộ dữ liệu gồm 177 quan trắc và 15 biến.

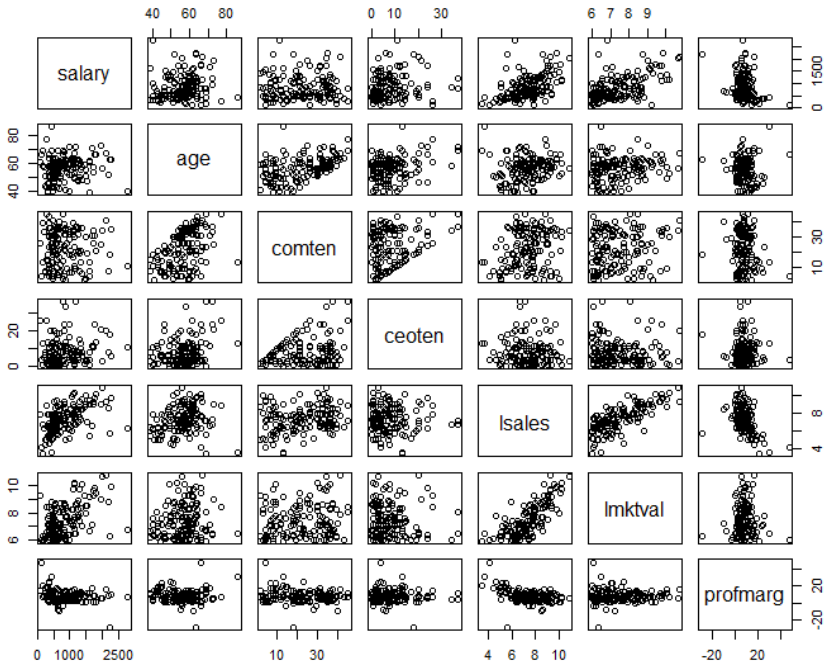
∗ **Phương pháp chọn: Stepwise - tiến; tiêu chuẩn chọn: AIC**.

Tìm hiểu và tiền xử lý dữ liệu

Một số biến trong bộ dữ liệu kiểu số có đơn vị tính lớn như: $sales'$, $profits$, $lmktval$. Nếu đưa những biến này vào phương trình hồi quy có thể dẫn tới hiện tượng bias do tác động của những biến này lên model lấn át những biến khác còn lại như age, $ceoten$.... Nên ta sẽ dùng phương pháp logarit cho 3 biến này trong model tương ứng với 3 biến mới là: $lsales''$, $lmktval$ và $profmarg$. (1)

Từ biểu đồ dưới ta thấy ba biến định lượng $lsales$, $lmktval$ và $profmarg$ xảy ra hiện tượng đa cộng tuyến. Tuy nhiên có xảy ra hiện tượng đa cộng tuyến giữa 2 biến sales và profit luôn (hình 2.1.1).

Tính độ correlation của biến $salary$ với lần lượt 2 biến trên ta có:



Hình 2.1.1: Mối tương quan giữa các biến

```
> cor(train[c("salary", "lsales","lmktval","profmarg")])
             salary     lsales    lmktval    profmarg
salary    1.0000000  0.4912099 0.51978488 -0.24975911
lsales    0.4912099  1.0000000 0.75006264 -0.42949701
lmktval   0.5197849  0.7500626 1.00000000  0.04471558
profmarg -0.2497591 -0.4294970 0.04471558  1.00000000
```

Hình 2.1.2: Mức độ tương quan giữa biến lsales và promarg Correlation

Xét bảng correlation giữa các biến độc lập với nhau và giữa các biến độc lập với biến phụ thuộc, ta thấy: Giữa hai biến *lmktval* và biến *lsales* có mối tương quan rất cao ($\approx$ 0.75). Tuy nhiên biến *lmktval* lại có mối tương quan cao hơn với biến phụ thuộc *salary*. Mặt khác giữa biến *profmarg* và *lsales* cũng có mối tương quan cao ($\approx$ -0.42). Nên ta loại bỏ biến *lsales* khỏi danh sách các biến được xét. (2)

Từ (1) và (2) ta có mô hình với đầy đủ các biến cần lựa chọn như sau:

$$\begin{aligned} salary = \beta_0 + \beta_1 * age + \beta_2 * college + \beta_3 * grad + \beta_4 * comten \\ + \beta_5 * ceoten + \beta_6 * lmktval + \beta_7 * profmarg \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Thực hiện phân rã hai biến phân loại gồm *college* và *grad* trước khi thực hiện phương pháp chọn biến **Stepwise tiến** với **tiêu chuẩn AIC**.

Để đánh giá chất lượng mô hình ta chia tập dữ liệu thành hai phần, training và testing, với tỷ lệ $80:20$ sau đó tiến hành phương pháp chọn biến trên tập training.

Chọn biến bằng phương pháp StepWise tiến và tiêu chuẩn AIC

```
[1] "salary"   "age"      "college"  "grad"     "comten"   "ceoten"   "lmktval"  "profmarg"
> l0 = lm(formula = train$salary ~ 1, data = train) # non independence variable
> l1 = lm(formula =  train$salary ~ ., data = train) # full independence variable
> modbest_Fow = step(l0, scope = list(lower = l0,
+                                     upper = l1), direction = 'forward', k =2)
Start:  AIC=1825.78
train$salary ~ 1

           Df Sum of Sq      RSS    AIC
+ lmktval   1  11242276 42481047 1794.4
+ profmarg  1    993901 52729423 1825.1
+ age       1    833601 52889723 1825.6
+ ceoten    1    816752 52906571 1825.6
+ comten    1    784116 52939207 1825.7
<none>                  53723323 1825.8
+ college   1    225711 53497612 1827.2
+ grad      1      1333 53721991 1827.8

Step:  AIC=1794.44
train$salary ~ lmktval

           Df Sum of Sq      RSS    AIC
+ profmarg  1   1319152 41161895 1792.0
+ ceoten    1   1069953 41411095 1792.8
<none>                  42481047 1794.4
+ grad      1    398593 42082454 1795.1
+ comten    1    199305 42281743 1795.8
+ age       1    177509 42303538 1795.8
+ college   1     90861 42390186 1796.1

Step:  AIC=1791.96
train$salary ~ lmktval + profmarg

          Df Sum of Sq      RSS    AIC
+ ceoten   1   1067048 40094847 1790.2
<none>                 41161895 1792.0
+ grad     1    215822 40946074 1793.2
+ age      1    170753 40991143 1793.4
+ college  1     92712 41069183 1793.6
+ comten   1     33866 41128029 1793.8

Step:  AIC=1790.23
train$salary ~ lmktval + profmarg + ceoten

          Df Sum of Sq      RSS    AIC
<none>                 40094847 1790.2
+ grad     1    142580 39952267 1791.7
+ college  1     38627 40056220 1792.1
+ comten   1     28636 40066211 1792.1
+ age      1         1 40094846 1792.2
```

Hình 2.1.3: Kết quả chọn biến theo phương pháp StepWise tiến với tiêu chuẩn AIC

Tổng quan tiêu chuẩn AIC thì mô hình tốt là mô hình có giá trị AIC nhỏ nhất. Ở mô hình 1, biến *lmktval* được chọn vào mô hình vì có AIC nhỏ nhất trong tất cả các kết hợp với các biến còn lại. Tương tự AIC được tính cho mô hình thêm biến thứ 2, *ceoten*, và biến thứ 3 là *ceoten* (hình 2.1.4).

```
> summary(modbest_Fow)

Call:
lm(formula = train$salary ~ lmktval + profmarg + ceoten, data = train)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-1339.1  -227.0   -72.8   163.7  4351.3

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -950.696    302.598  -3.142  0.00206 **
lmktval      248.204     38.909   6.379  2.5e-09 ***
profmarg     -13.929      6.544  -2.128  0.03508 *
ceoten        11.714      6.113   1.916  0.05738 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 539 on 138 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2537,    Adjusted R-squared:  0.2375
F-statistic: 15.64 on 3 and 138 DF,  p-value: 8.262e-09
```

Hình 2.1.4: Kết quả hồi quy mô hình với các biến được chọn

Với ba biến được chọn ở trên, mô hình 2.1.1 trở thành mô hình mới:

$$salary = -950.6 + 248.2 * lmktval - 13.9 * profmarg + 11.7 * ceoten \tag{2.1.2}$$

Tuy nhiên ta nhận thấy biến *ceoten* có $\rho_{value} \geq \alpha$ $(0.05738 \geq 0.05)$ nên không có ý nghĩa thống kê trong mô hình. Ta tiến hành bỏ biến *ceoten* và hồi quy mô hình với hai biến còn lại kết quả thu được từ phần mềm R như hình 2.1.5:

```
> new_train = train[c("salary", "lmktval", "profmarg")]
> newModel = lm(formula =new_train$salary ~ ., data = new_train )
> summary(newModel)

Call:
lm(formula = new_train$salary ~ ., data = new_train)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-1127.7  -256.6   -85.3   246.7  4404.8

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -830.739    298.886  -2.779   0.0062 **
lmktval      245.323     39.252   6.250 4.71e-09 ***
profmarg     -13.944      6.607  -2.111   0.0366 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 544.2 on 139 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2338,    Adjusted R-squared:  0.2228
F-statistic: 21.21 on 2 and 139 DF,  p-value: 9.143e-09
```

Hình 2.1.5: Kết quả hồi quy mô hình với hai biến còn lại

Mô hình thống kê mới:

$$salary = -830.7 + 245.3 * lmktval - 13.9 * profmarg \tag{2.1.3}$$

Trường hợp này hai biến còn lại có ý nghĩa thống kê. Tuy nhiên mô hình được tạo bởi hai biến này chỉ giải thích được 23% sự biến thiên của biến phụ thuộc (hình 2.1.5). Nguyên nhân dẫn tới kết quả thấp là do số lượng data ít, các biến giải thích ít không tạo nên mô hình đặc trưng được.

Test trên tập test và nhận xét kết quả

Thực hiện dự đoán trên tập dữ liệu test từ kết quả mô hình 2.1.3 và dùng chỉ số đánh giá MSE (trung bình bình phương sai số) ta có:

```
> SE = sum((pred_test-y_test) ^2)
> SE
[1] 15893414
> MSE = SE / nrow(test)
> print(MSE)
[1] 454097.5
```

Hình 2.1.6: Chỉ số đo lường kết quả MSE

Kết quả MSE ≈ 454097 lớn hơn nhiều so với giá trị Mean : 887.5 nên ta có thể thấy hai yếu tố gồm: giá thị trường (*lmktval*) và tỷ lệ phần trăm lợi nhuận (*profmarg*) là chưa đủ để giải thích mức độ tăng giảm của tiền lương của các giám đốc điều hành các tập đoàn Hoa Kỳ.

Để cải thiện kết quả mô hình ta nên tiến hành thu thập thêm dữ liệu và tiến hành lựa chọn biến dựa trên dữ liệu mới này. Bên cạnh đó có thể xem xét tới xem xét tới các nhân tố khác ảnh hưởng tới tiền lương của các giám đốc Hoa kỳ như: Lĩnh vực hoạt động (ngân hàng, hàng không, công nghệ, vận tải...); mức lương trước đó; số năm kinh nghiệm, giới tính,...

2.2 Dữ liệu 2

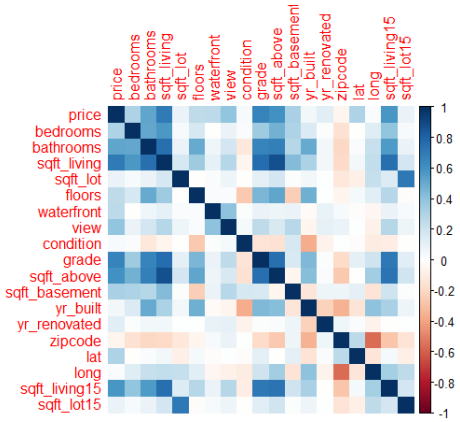
Bộ dữ liệu ghi lại lịch sử về những ngôi nhà được bán từ 5/2014 đến 5/2015 ở quận King, bang Washington, Hoa Kỳ. Bộ dữ liệu bao gồm 21613 quan trắc, gồm 21 biến.

∗ **Phương pháp chọn: Stepwise - lùi; tiêu chuẩn chọn: BIC**.

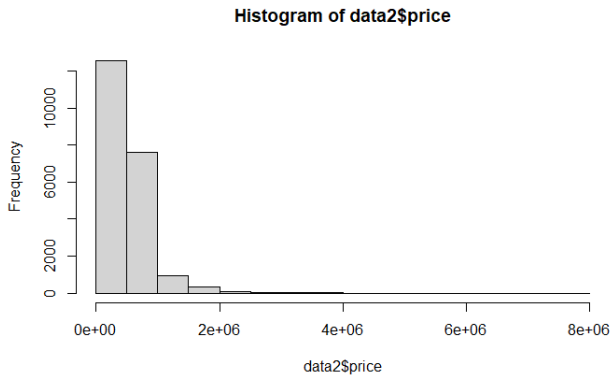
Tìm hiểu dữ liệu

```
> mydata <-read.csv("data2.csv")
> head(mydata)
           id       date   price bedrooms bathrooms sqft_living sqft_lot floors waterfront view
1 7129300520 10/13/2014  221900        3      1.00        1180     5650      1          0    0
2 6414100192  12/9/2014  538000        3      2.25        2570     7242      2          0    0
3 5631500400  2/25/2015  180000        2      1.00         770    10000      1          0    0
4 2487200875  12/9/2014  604000        4      3.00        1960     5000      1          0    0
5 1954400510  2/18/2015  510000        3      2.00        1680     8080      1          0    0
6 7237550310  5/12/2014 1230000        4      4.50        5420   101930      1          0    0
  condition grade sqft_above sqft_basement yr_built yr_renovated zipcode     lat     long
1         3     7       1180             0     1955            0   98178 47.5112 -122.257
2         3     7       2170           400     1951         1991   98125 47.7210 -122.319
3         3     6        770             0     1933            0   98028 47.7379 -122.233
4         5     7       1050           910     1965            0   98136 47.5208 -122.393
5         3     8       1680             0     1987            0   98074 47.6168 -122.045
6         3    11       3890          1530     2001            0   98053 47.6561 -122.005
  sqft_living15 sqft_lot15
1          1340       5650
2          1690       7639
3          2720       8062
4          1360       5000
5          1800       7503
6          4760     101930
```

(a) Một số quan trắc đầu tiên



(b) Hệ số tương quan giữa các biến



(c) Phân bố của biến phụ thuộc

Hình 2.2.1: Một số quan sát ban đầu của bộ dữ liệu

Bộ dữ liệu cung cấp gồm 21 biến, trong đó biến **id** và **date** được loại bỏ khỏi dữ liệu trước khi tiến hành phân tích, vì nhóm em nghĩ các biến này chỉ để ghi lại chỉ số và thời gian mua bán, không mang nhiều ý nghĩa thống kê.

Quan sát ban đầu cho thấy: các biến độc lập **bathrooms** (số phòng tắm), **sqft_living**

(diện tích căn nhà), **grade** (điểm số đánh giá), **sqft_above** (diện tích ngoài tầng hầm), **sqft_living15** (diện tích ngôi nhà vào năm 2015) có mối tương quan cao với biến phụ thuộc **Price** - giá nhà; biến phụ thuộc **Price** phân bố không đều, bị lệch hẳn về một phía và giá trị chủ yếu từ 0 đến 2 000 000.

Phân tích, chọn mô hình

```
> # Create full model
> mod_full_1 = lm(price ~ ., data2) #full model
> summary(mod_full_1)

Call:
lm(formula = price ~ ., data = data2)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1291631   -99089    -9569    77778  4330096

Coefficients: (1 not defined because of singularities)
               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    6.564e+06  2.933e+06   2.238  0.02523 *
bedrooms      -3.556e+04  1.901e+03 -18.707  < 2e-16 ***
bathrooms      4.128e+04  3.268e+03  12.632  < 2e-16 ***
sqft_living    1.496e+02  4.397e+00  34.033  < 2e-16 ***
sqft_lot       1.289e-01  4.792e-02   2.690  0.00714 **
floors         6.474e+03  3.602e+03   1.797  0.07229 .
waterfront     5.833e+05  1.736e+04  33.593  < 2e-16 ***
view           5.278e+04  2.141e+03  24.652  < 2e-16 ***
condition      2.679e+04  2.353e+03  11.387  < 2e-16 ***
grade          9.701e+04  2.161e+03  44.894  < 2e-16 ***
sqft_above     3.129e+01  4.361e+00   7.174 7.53e-13 ***
sqft_basement         NA         NA      NA       NA
yr_built      -2.628e+03  7.272e+01 -36.135  < 2e-16 ***
yr_renovated   1.983e+01  3.656e+00   5.425 5.87e-08 ***
zipcode       -5.819e+02  3.299e+01 -17.635  < 2e-16 ***
lat            6.022e+05  1.074e+04  56.071  < 2e-16 ***
long          -2.156e+05  1.316e+04 -16.385  < 2e-16 ***
sqft_living15  2.116e+01  3.451e+00   6.131 8.88e-10 ***
sqft_lot15    -3.907e-01  7.334e-02  -5.327 1.01e-07 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 201300 on 21579 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7001,    Adjusted R-squared:  0.6999
F-statistic:  2964 on 17 and 21579 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Hình 2.2.2: Mô hình hồi quy đầy đủ ban đầu

Bộ dữ liệu (sau khi loại bỏ id và date) có 18 biến giải thích, do đó nhóm em chọn phương pháp lùi (**stepwise - backward**) cho bộ dữ liệu này. Trong mô hình hồi quy đầy đủ (Hình 2.2.2), đa số các biến giải thích đều có ý nghĩa thống kê, do đó tiến hành phương pháp lùi (loại biến dần dần) sẽ tiết kiệm thời gian hơn so với các phương pháp còn lại. Tiêu chuẩn BIC có xu hướng chọn các mô hình ít phức tạp hơn so với tiêu chuẩn

AIC, đặc biệt khi số lượng quan trắc lớn.

```
> mod_BIC_1$anova
Stepwise Model Path
Analysis of Deviance Table

Initial Model:
price ~ bedrooms + bathrooms + sqft_living + sqft_lot + floors +
    waterfront + view + condition + grade + sqft_above + sqft_basement +
    yr_built + yr_renovated + zipcode + lat + long + sqft_living15 +
    sqft_lot15

Final Model:
price ~ bedrooms + bathrooms + sqft_living + waterfront + view +
    condition + grade + sqft_above + yr_built + yr_renovated +
    zipcode + lat + long + sqft_living15 + sqft_lot15


            Step Df     Deviance Resid. Df   Resid. Dev      AIC
1                                    21579 8.739836e+14 527659.9
2 - sqft_basement  0            0     21579 8.739836e+14 527659.9
3       - floors  1 130842954998     21580 8.741144e+14 527653.1
4     - sqft_lot  1 284802633671     21581 8.743992e+14 527650.2
```

(a) Chọn biến

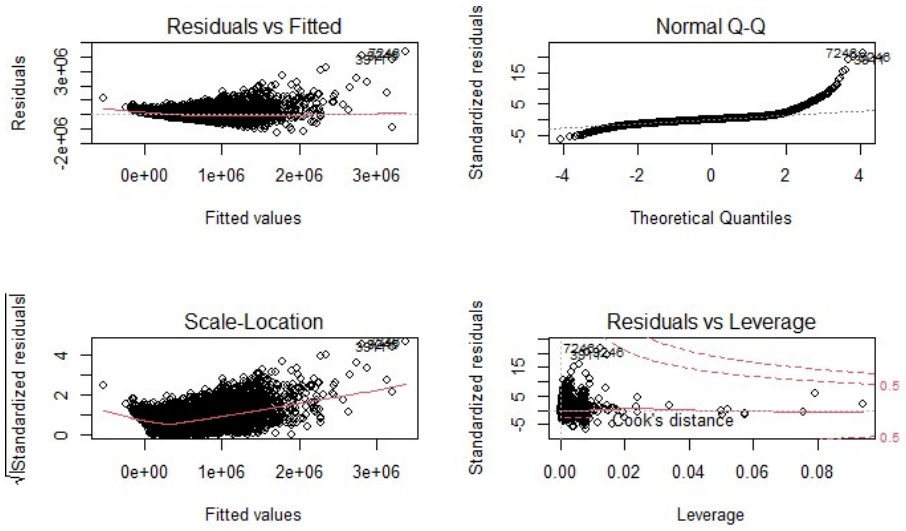
```
> summary(mod_BIC_1)

Call:
lm(formula = price ~ bedrooms + bathrooms + sqft_living + waterfront +
    view + condition + grade + sqft_above + yr_built + yr_renovated +
    zipcode + lat + long + sqft_living15 + sqft_lot15, data = data2)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1284799   -99272    -9674    77773  4326048

Coefficients:
               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    6.017e+06  2.885e+06   2.085   0.0371 *
bedrooms      -3.578e+04  1.900e+03 -18.826  < 2e-16 ***
bathrooms      4.285e+04  3.154e+03  13.587  < 2e-16 ***
sqft_living    1.475e+02  4.181e+00  35.280  < 2e-16 ***
waterfront     5.826e+05  1.736e+04  33.554  < 2e-16 ***
view           5.306e+04  2.140e+03  24.797  < 2e-16 ***
condition      2.645e+04  2.349e+03  11.256  < 2e-16 ***
grade          9.746e+04  2.152e+03  45.284  < 2e-16 ***
sqft_above     3.501e+01  3.910e+00   8.952  < 2e-16 ***
yr_built      -2.609e+03  7.094e+01 -36.779  < 2e-16 ***
yr_renovated   2.003e+01  3.651e+00   5.487 4.14e-08 ***
zipcode       -5.764e+02  3.286e+01 -17.542  < 2e-16 ***
lat            6.027e+05  1.070e+04  56.341  < 2e-16 ***
long          -2.152e+05  1.308e+04 -16.451  < 2e-16 ***
sqft_living15  1.989e+01  3.423e+00   5.811 6.30e-09 ***
sqft_lot15    -2.613e-01  5.311e-02  -4.919 8.74e-07 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 201300 on 21581 degrees of freedom
Multiple R-squared:    0.7,     Adjusted R-squared:  0.6998
F-statistic:  3357 on 15 and 21581 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

(b) Kết quả mô hình

Hình 2.2.3: Mô hình khi chọn bằng tiêu chuẩn BIC

Bằng phương pháp lùi và tiêu chuẩn BIC (Hình 2.2.3), các biến **sqft_basement, floors, sqft_lot** đã bị loại bỏ khỏi mô hình. Mô hình được chọn có $R^2 = 0.7$, $R^2_{adj} = 0.69$, các tham số ước lượng của mô hình đều có ý nghĩa thống kê.

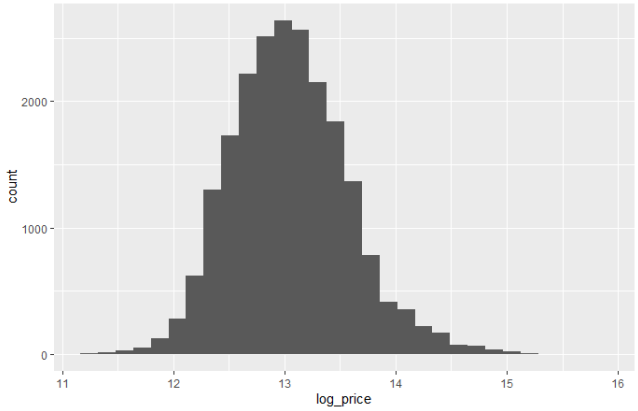
Ta tiến hành kiểm tra xem mô hình này có thỏa mãn các giả thiết của mô hình hồi quy hay không.



Hình 2.2.4: Các biểu đồ kiểm định mô hình

Dựa vào hình 2.2.4, phương sai của sai số không phải là hằng số, kì vọng của sai số bằng 0; sai số có vẻ tuân theo phân phối chuẩn nhưng phần đuôi trên bị lệch khá nhiều.

Kết hợp với nhận xét ban đầu, về việc biến **Price** phân bố không đều, nhóm em tiến hành biến đổi biến này thành **log(Price)**.



Hình 2.2.5: Phân bố của biến **Price** sau khi biến đổi

Sau khi biến đổi, ta tiến hành hồi quy cho: **mô hình 1** mô hình có 15 biến đã chọn bằng tiêu chuẩn BIC trước đó, và **mô hình 2** mô hình đầy đủ rồi áp dụng tiêu chuẩn BIC để chọn biến.

```
> summary(mod_2)

Call:
lm(formula = log(price) ~ bedrooms + bathrooms + sqft_living +
    waterfront + view + condition + grade + sqft_above + yr_built +
    yr_renovated + zipcode + lat + long + sqft_living15 + sqft_lot15,
    data = data2)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.72685 -0.16385  0.00299  0.16386  1.18219

Coefficients:
               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   -1.436e+01  3.645e+00  -3.940 8.18e-05 ***
bedrooms      -1.351e-02  2.400e-03  -5.629 1.83e-08 ***
bathrooms      8.720e-02  3.984e-03  21.891  < 2e-16 ***
sqft_living    1.238e-04  5.282e-06  23.444  < 2e-16 ***
waterfront     3.702e-01  2.193e-02  16.881  < 2e-16 ***
view           6.195e-02  2.703e-03  22.919  < 2e-16 ***
condition      5.984e-02  2.968e-03  20.163  < 2e-16 ***
grade          1.643e-01  2.719e-03  60.449  < 2e-16 ***
sqft_above     2.582e-05  4.939e-06   5.228 1.73e-07 ***
yr_built      -3.126e-03  8.960e-05 -34.882  < 2e-16 ***
yr_renovated   4.008e-05  4.612e-06   8.690  < 2e-16 ***
zipcode       -5.816e-04  4.150e-05 -14.014  < 2e-16 ***
lat            1.414e+00  1.351e-02 104.612  < 2e-16 ***
long          -1.741e-01  1.652e-02 -10.537  < 2e-16 ***
sqft_living15  8.802e-05  4.324e-06  20.355  < 2e-16 ***
sqft_lot15     1.512e-07  6.709e-08   2.254   0.0242 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.2543 on 21581 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.767,     Adjusted R-squared:  0.7668
F-statistic:  4736 on 15 and 21581 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

(a) Mô hình 1

```
> summary(mod_BIC_2)

Call:
lm(formula = log(price) ~ bedrooms + bathrooms + sqft_living +
    sqft_lot + floors + waterfront + view + condition + grade +
    yr_built + yr_renovated + zipcode + lat + long + sqft_living15,
    data = data2)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-1.7953 -0.1615  0.0037  0.1590  1.1735

Coefficients:
               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   -6.932e+00  3.639e+00  -1.905   0.0568 .
bedrooms      -1.174e-02  2.382e-03  -4.930 8.27e-07 ***
bathrooms      7.137e-02  4.047e-03  17.634  < 2e-16 ***
sqft_living    1.403e-04  4.197e-06  33.431  < 2e-16 ***
sqft_lot       3.426e-07  4.355e-08   7.868 3.78e-15 ***
floors         6.979e-02  4.049e-03  17.234  < 2e-16 ***
waterfront     3.686e-01  2.176e-02  16.937  < 2e-16 ***
view           6.148e-02  2.649e-03  23.205  < 2e-16 ***
condition      6.352e-02  2.941e-03  21.594  < 2e-16 ***
grade          1.591e-01  2.682e-03  59.299  < 2e-16 ***
yr_built      -3.419e-03  9.120e-05 -37.494  < 2e-16 ***
yr_renovated   3.650e-05  4.585e-06   7.962 1.78e-15 ***
zipcode       -6.441e-04  4.137e-05 -15.569  < 2e-16 ***
lat            1.404e+00  1.337e-02 104.988  < 2e-16 ***
long          -1.715e-01  1.619e-02 -10.590  < 2e-16 ***
sqft_living15  9.566e-05  4.278e-06  22.359  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.2524 on 21581 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7703,    Adjusted R-squared:  0.7702
F-statistic:  4826 on 15 and 21581 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

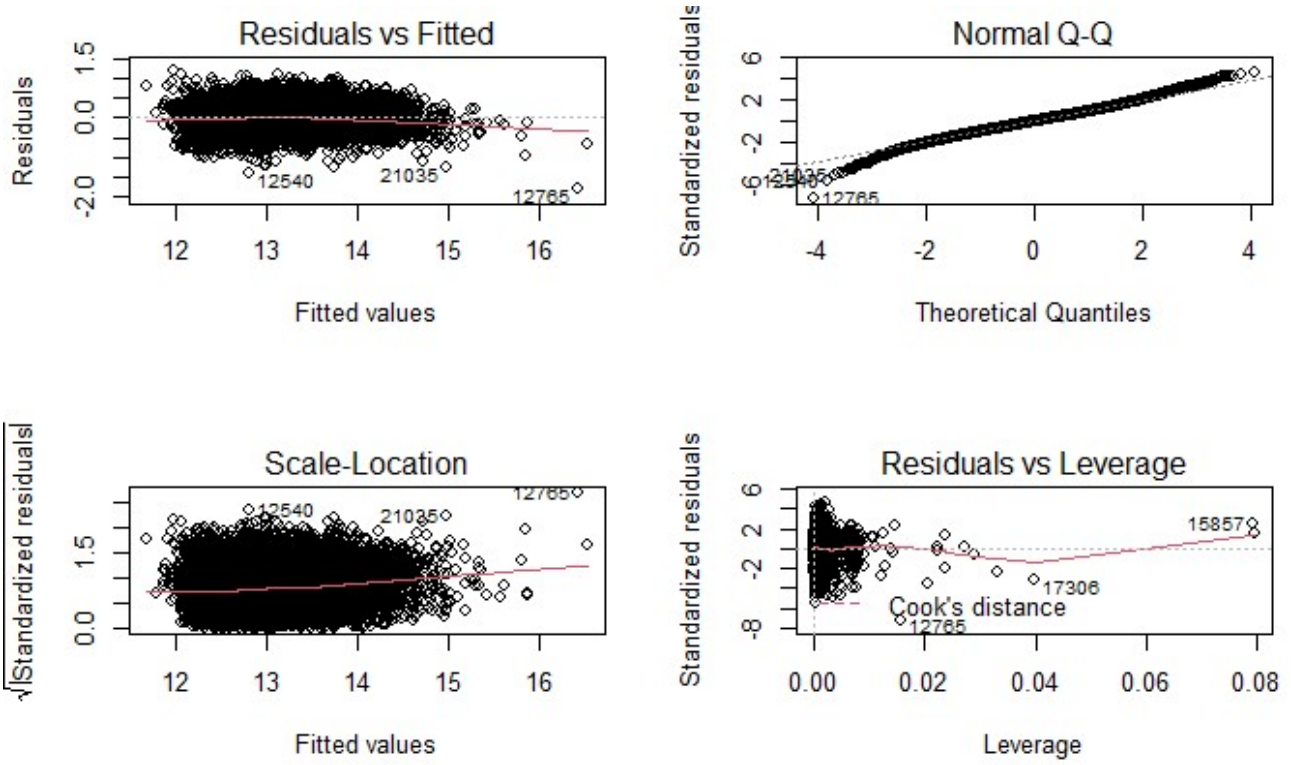
(b) Mô hình 2

Hình 2.2.6: Kết quả khi biến đổi **Price** thành **log(Price)**

Cả hai mô hình đều gồm 15 biến giải thích, mô hình 2 đã loại bỏ các biến **sqft_basement, sqft_above, sqft_lot15** khác với 3 biến đã loại trước khi biến đổi **Price**.

Nhóm em chọn **mô hình 2** là mô hình cuối cùng, vì: mô hình 2 có hệ số xác định lớn hơn ($R^2 = 77.03\%$), các biến liên quan đến diện tích tầng hầm (**sqft_basement**, **sqft_above**) đã được bao gồm trong **sqft_living**, diện tích khu đất vào năm 2015 cũng không mang nhiều ý nghĩa thống kê trong mô hình 1 nên có thể loại bỏ.

Kiểm tra giả thiết mô hình 2: phương sai của sai số không thay đổi, kì vọng bằng 0 và đã tuân theo phân phối chuẩn, chưa phát hiện hiện tượng đa cộng tuyến trong mô hình (các chỉ số VIF < 5) (Hình 2.2.7).



(a) Các biểu đồ kiểm định

```
> vif(mod_BIC_2)
    bedrooms    bathrooms  sqft_living     sqft_lot       floors   waterfront
    1.649892     3.283149     5.032386     1.102209     1.618698     1.202269
        view    condition        grade     yr_built yr_renovated      zipcode
    1.397185     1.241008     3.356002     2.432360     1.150352     1.661301
         lat         long sqft_living15
    1.163852     1.759544     2.912665
```

(b) Kiểm tra đa cộng tuyến

Hình 2.2.7: Kết quả khi biến đổi thành **log(Price)**

Vậy **mô hình cuối cùng được chọn** có các hệ số ước lượng như hình 2.2.8.

```
> coef(mod_BIC_2)
  (Intercept)      bedrooms     bathrooms   sqft_living      sqft_lot        floors
-6.932157e+00 -1.174353e-02  7.137346e-02  1.403104e-04  3.426024e-07  6.978707e-02
   waterfront          view     condition         grade     yr_built  yr_renovated
 3.685686e-01  6.147550e-02  6.351646e-02  1.590506e-01 -3.419313e-03  3.650388e-05
       zipcode           lat          long sqft_living15
-6.441469e-04  1.404181e+00 -1.714684e-01  9.565513e-05
```

Hình 2.2.8: Hệ số mô hình được chọn

$$\begin{aligned}\log(\textbf{Price}) = &-6.93 - 0.011\times \textbf{bedrooms} + 0.071\times \textbf{bathrooms} + 1.403\times 10^{-4}\times \textbf{sqft\_living}\\ &+ 3.426\times 10^{-7}\times \textbf{sqft\_lot} + 0.069\times \textbf{floors} + 0.36\times \textbf{waterfront} + 0.061\times \textbf{view}\\ &+ 0.063\times \textbf{condition} + 0.159\times \textbf{grade} - 3.4196\times 10^{-3}\times \textbf{yr\_built}\\ &+ 3.650\times 10^{-5}\times \textbf{yr\_renovated} - 6.441\times 10^{-4}\times \textbf{zipcode} + 1.404\times \textbf{lat}\\ &- 0.171\times \textbf{long} + 9.565.171\times 10^{-5}\times \textbf{sqft\_living15}\end{aligned}$$

Kết luận

Có 77.06% sự biến thiên của giá nhà ở quận King được giải thích bởi 15 biến độc lập, trong đó các yếu tố ảnh hưởng nhiều nhất gồm *số phòng ngủ, số phòng tắm, diện tích nhà, số tầng, hướng nhà ra bờ sông, tình trạng ngôi nhà (mới/cũ), điểm theo phân loại của quận, vị trí (kinh độ - vĩ độ), năm xây dựng.*

Giá trị của một căn nhà **không bị ảnh hưởng nhiều** bởi các yếu tố: diện tích tầng hầm, diện tích khu đất, diện tích ngoài tầng hầm, năm sửa chữa căn nhà, zipcode (mã vùng) của ngôi nhà. Diện tích của căn nhà cũng có ảnh hưởng, tuy nhiên sự ảnh hưởng là không nhiều.

Số phòng ngủ có mối tương quan nghịch với giá nhà, vì khi số phòng ngủ tăng lên, nhưng các yếu tố còn lại không thay đổi, thì diện tích của mỗi phòng ngủ sẽ giảm đi, gây cảm giác chật chội.

Nhìn vào các kết quả hình 2.2.7, vân thấy có nhiều điểm ngoại lai (**outlier**), hướng nghiên cứu tiếp theo có thể loại bỏ những điểm này ra khỏi bộ dữ liệu, tiến hành quan sát riêng để rút ra thêm các kết luận khác (nếu có).

2.3 Dữ liệu 3

Bộ dữ liệu ghi lại tỷ lệ tai nạn, gồm 39 quan trắc được thực hiện trên vài đoạn đường cao tốc ở tiểu bang Minnesota vùng Trung Tây của Hoa Kỳ.

∗ **Phương pháp chọn: Stepwise tiến lùi; Tiêu chuẩn chọn: BIC**.

Tìm hiểu dữ liệu

Bộ dữ liệu gồm 1 biến phụ thuộc và 13 biến giải thích sau:

– Y : tỷ lệ % tai nạn trên đoạn đường khảo sát.

– $X1$: chiều dài đoạn đường (dặm).

– $X2$: lượng giao thông trung bình hàng ngày (nghìn xe).

– $X3$: tỷ lệ % xe tải trên tổng số.

– $X4$: tốc độ giới hạn cho phép (dặm/giờ).

– $X5$: chiều rộng làn đường (bước chân).

– $X6$: chiều rộng làn đường khẩn cấp (bước chân).

– $X7$: số làn đường thay đổi tự do trên đoạn đường cao tốc.

– $X8$: số làn đường thay đổi (báo hiệu) trên đoạn đường cao tốc.

– $X9$: số cửa vào đoạn đường cao tốc.

– $X10$: tổng số làn đường (trên hai chiều của đường cao tốc).

– $X11$: 1 nếu là tuyến đường liên thông xa lộ và cao tốc, 0 nếu ngược lại.

– $X12$: 1 nếu là tuyến đường lớn của cao tốc, 0 nếu ngược lại.

– $X13$: 1 nếu là tuyến đường cao tốc chính, 0 nếu ngược lại.

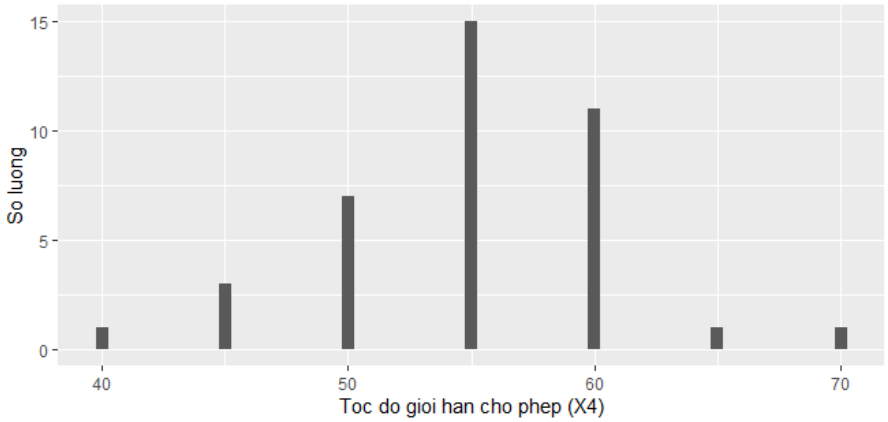
Một vài quan trắc đầu tiên trong bộ dữ liệu được thể hiện trong hình 2.3.1.

```
> head(data3)
  x_i.1 x_i.2 x_i.3 x_i.4 x_i.5 x_i.6 x_i.7 x_i.8 x_i.9 x_i.10 x_i.11 x_i.12 x_i.13  y_i
1  4.99    69     8    55    12    10  1.20  0.00   4.6      8      1      0      0 4.58
2 16.11    73     8    60    12    10  1.43  0.00   4.4      4      1      0      0 2.86
3  9.75    49    10    60    12    10  1.54  0.00   4.7      4      1      0      0 3.02
4  1.65    61    13    65    12    10  0.94  0.00   3.8      6      1      0      0 2.29
5 20.01    28    12    70    12    10  0.65  0.00   2.2      4      1      0      0 1.61
6  5.97    30     6    55    12    10  0.34  1.84  24.8      4      0      1      0 6.87
```

Hình 2.3.1: Một vài quan trắc đầu tiên

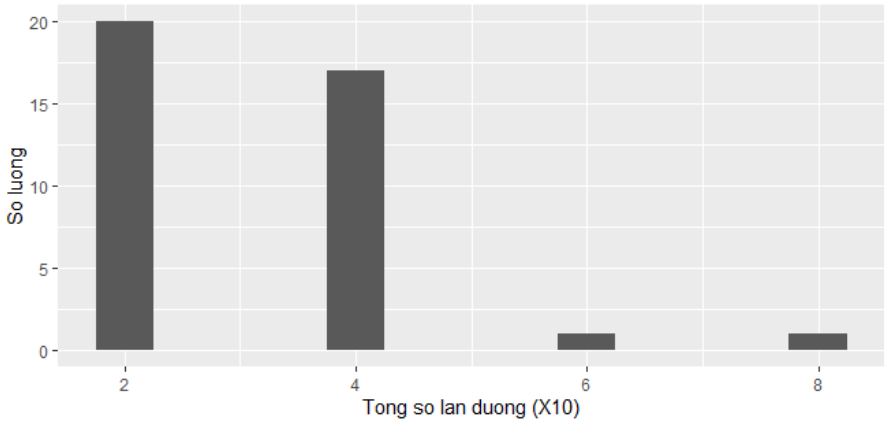
Một số phân bố theo biến:

- $X4$: Có 33 trong 39 quan trắc có tốc độ tối đa là 50, 55 và 60 (hình 2.3.2).



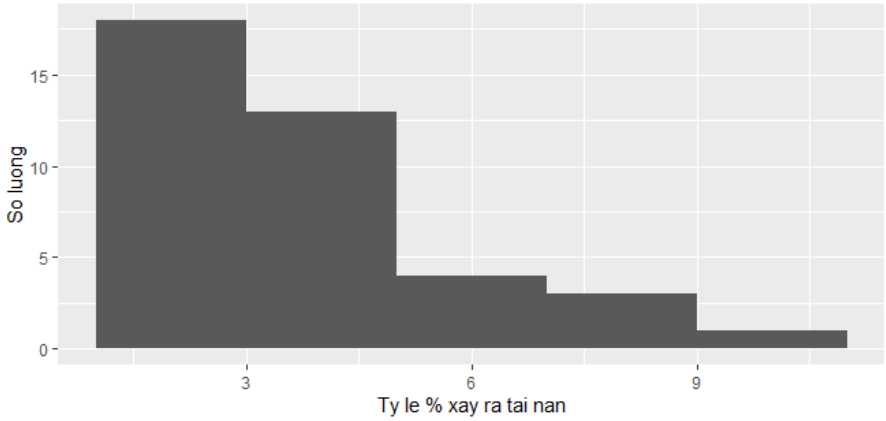
Hình 2.3.2: Phân bố theo tốc độ giới hạn cho phép ($X4$) (dặm/giờ)

- $X10$: Có 32 trong 39 quan trắc có tổng số làn đường là 2 hoặc 4 (hình 2.3.3).



Hình 2.3.3: Phân bố theo tổng số làn đường ($X10$)

- Y: Phần lớn tỷ lệ tai nạn là $1 - 5\%$ (hình 2.3.4).



Hình 2.3.4: Phân bố theo tỷ lệ % tai nạn (Y)

Trung bình của tổng tỷ lệ tai nạn theo các loại tuyến đường (hình 2.3.5) cho thấy loại tuyến đường cao tốc chính có tỷ lệ tai nạn cao nhất.

```
> aggregate(y_i ~ x_i.11 + x_i.12 + x_i.13,data3,mean)
  x_i.11 x_i.12 x_i.13      y_i
1      0      0      0 3.585000
2      1      0      0 2.872000
3      0      1      0 3.608421
4      0      0      1 4.870000
```

Hình 2.3.5: Trung bình của tổng tỷ lệ tai nạn theo các loại tuyến đường

Trung bình của tổng tỷ lệ % tai nạn theo các mức tốc độ giới hạn cho phép (hình 2.3.6) cho thấy giới hạn tốc độ cho phép trên đường cao tốc càng thấp thì xảy ra tai nạn càng nhiều, tỷ lệ tai nạn giảm dần khi giới hạn tốc độ cho phép tăng.

```
> aggregate(y_i ~ x_i.4,data3,mean)
  x_i.4      y_i
1    40 9.230000
2    45 7.283333
3    50 4.055714
4    55 3.985333
5    60 2.750000
6    65 2.290000
7    70 1.610000
```

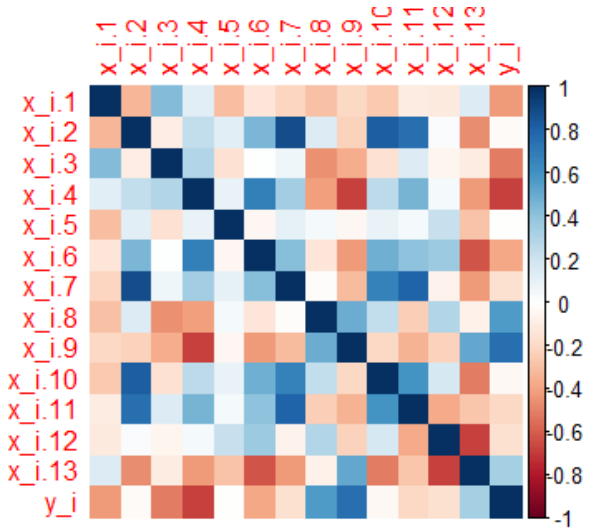
Hình 2.3.6: Trung bình của tổng tỷ lệ % tai nạn theo các mức tốc độ giới hạn cho phép

Trung bình của tổng tỷ lệ % tai nạn theo tổng số làn đường (hình 2.3.7) cho thấy trên đoạn đường có 8 làn đường có tỷ lệ xảy ra tai nạn cao nhất, kế đến là đoạn đường có 2 làn.

```
> aggregate(y_i ~ x_i.10,data3,mean)
  x_i.10      y_i
1      2 4.000500
2      4 3.912941
3      6 2.290000
4      8 4.580000
```

Hình 2.3.7: Trung bình của tổng tỷ lệ % tai nạn theo tổng số làn đường

Ma trận ở hình 2.3.8 thể hiện độ tương quan giữa các biến, cho thấy tốc độ giới hạn cho phép ($X4$) có tương quan nghịch và số cửa đoạn đường cao tốc ($X9$) có tương quan thuận đối với tỷ lệ % tai nạn (Y).



Hình 2.3.8: Ma trận tương quan giữa các biến

Phân tích, chọn mô hình

Đầu tiên, ta xét mô hình đầy đủ có dạng:

$$\begin{aligned} Y = \beta_0 &+ \beta_1 X1 + \beta_2 X2 + \beta_3 X3 + \beta_4 X4 + \beta_5 X5 + \beta_6 X6 + \beta_7 X7 \\ &+ \beta_8 X8 + \beta_9 X9 + \beta_{10} X10 + \beta_{11} X11 + \beta_{12} X12 + \beta_{13} X13 + \epsilon \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Mô hình hồi quy đầy đủ có các thông số ở hình 2.3.9, ta thấy được gần như tất cả 13 biến đều không có ý nghĩa thống kê. Ta tiến hành kiểm tra hiện tượng đa cộng tuyến có trong mô hình này sử dụng phương pháp tính hệ số VIF. Kết quả ở hình 2.3.10 cho thấy hiện tượng đa cộng tuyến xảy ra nặng nề giữa các biến, có 7/13 biến giải thích vượt ngưỡng chấp nhận được với hệ số VIF là 5 theo quy ước chung.

```
> summary(mod_full)

Call:
lm(formula = y_i ~ ., data = data3)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.00773 -0.63409 -0.04212  0.63969  2.53722

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 13.7129031  6.9126865   1.984   0.0584 .
x_i.1       -0.0589293  0.0314673  -1.873   0.0728 .
x_i.2       -0.0054182  0.0337952  -0.160   0.8739
x_i.3       -0.1106588  0.1134557  -0.975   0.3387
x_i.4       -0.1266860  0.0817554  -1.550   0.1338
x_i.5       -0.1196817  0.5985717  -0.200   0.8431
x_i.6        0.0183357  0.1628311   0.113   0.9112
x_i.7       -0.3882033  1.1811637  -0.329   0.7451
x_i.8        0.7087845  0.5245588   1.351   0.1887
x_i.9        0.0654378  0.0427391   1.531   0.1383
x_i.10       0.0006672  0.2864299   0.002   0.9982
x_i.11       0.5033821  1.7304348   0.291   0.7735
x_i.12      -0.9602033  1.1124585  -0.863   0.3963
x_i.13      -0.5605308  0.9784518  -0.573   0.5718
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.202 on 25 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7589,    Adjusted R-squared:  0.6335
F-statistic: 6.053 on 13 and 25 DF,  p-value: 6.176e-05
```

Hình 2.3.9: Mô hình hồi quy đầy đủ ban đầu

```
> vif(mod_full)
    x_i.1     x_i.2     x_i.3     x_i.4     x_i.5     x_i.6     x_i.7     x_i.8     x_i.9
 1.588934 10.400300  1.875948  6.011025  1.957449  6.426287  6.226508  2.901934  4.169496
   x_i.10    x_i.11    x_i.12    x_i.13
 3.993268  9.029566  8.341780  5.739884
```

Hình 2.3.10: Hiện tượng đa cộng tuyến giữa các biến trong mô hình

Vì số lượng biến giải thích khá ít, chỉ có 13 biến và có hiện tượng đa cộng tuyến, nên nhóm em sử dụng phương pháp hồi quy Stepwise từng bước để dễ dàng thêm bớt các biến khi chọn mô hình. Đối với tiêu chuẩn đánh giá mô hình, vì bộ dữ liệu này có cỡ mẫu nhỏ, chỉ có 39 quan trắc, nên nhóm em dùng tiêu chuẩn BIC cho cỡ mẫu $n = 39$.

Dùng phần mềm R cho phương pháp Stepwise tiến lùi và tiêu chuẩn BIC, ta có kết quả ở hình 2.3.11, mô hình lựa chọn có dạng:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X1 + \beta_4 X4 + \beta_9 X9 + \epsilon \tag{2.3.2}$$

Trong quá trình chọn mô hình, đa số các biến đã bị loại bỏ hết chỉ trừ 3 biến $X1$, $X4$, và $X9$ lần lượt giải thích cho chiều dài đoạn đường, tốc độ giới hạn cho phép và số cửa vào đoạn đường cao tốc. Mô hình 2.3.2 có hệ số xác định $R^2 = 0.6986$ và hệ số hiệu

chỉnh $R^2_{adj} = 0.6728$, các tham số ước lượng của mô hình đều có ý nghĩa thống kê.

```
> mod_BIC$anova
Stepwise Model Path
Analysis of Deviance Table

Initial Model:
y_i ~ x_i.1 + x_i.2 + x_i.3 + x_i.4 + x_i.5 + x_i.6 + x_i.7 +
    x_i.8 + x_i.9 + x_i.10 + x_i.11 + x_i.12 + x_i.13

Final Model:
y_i ~ x_i.1 + x_i.4 + x_i.9


      Step Df     Deviance Resid. Df Resid. Dev      AIC
1                                 25   36.13832 48.31775
2  - x_i.10  1 7.842963e-06        26   36.13832 44.65420
3   - x_i.6  1 1.832986e-02        27   36.15665 41.01041
4   - x_i.2  1 3.865013e-02        28   36.19530 37.38852
5  - x_i.11  1 1.087909e-01        29   36.30409 33.84200
6   - x_i.5  1 1.650067e-01        30   36.46910 30.35530
7   - x_i.7  1 3.370845e-01        31   36.80619 27.05056
8  - x_i.13  1 5.567483e-01        32   37.36293 23.97251
9   - x_i.3  1 1.547066e+00        33   38.91000 21.89127
10 - x_i.12  1 3.612807e+00        34   42.52281 21.69049
11  - x_i.8  1 2.647338e+00        35   45.17014 20.38236
```

(a) Chọn biến

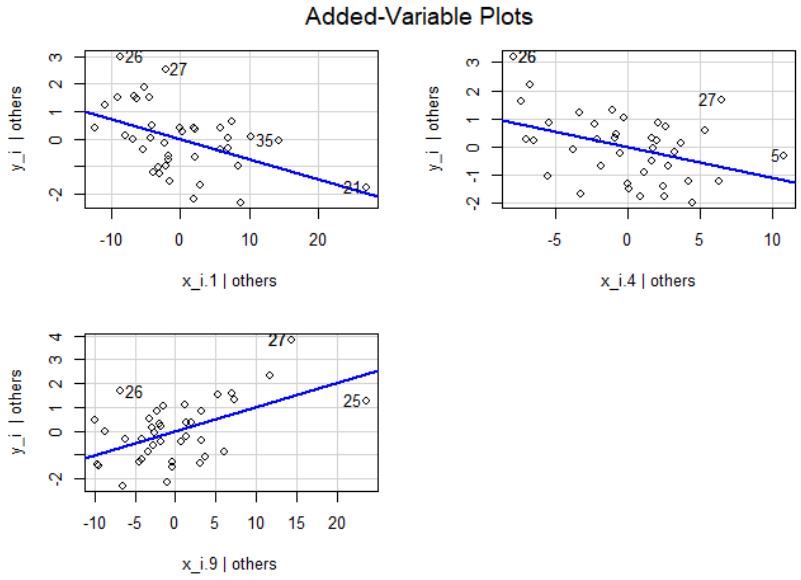
```
> summary(mod_BIC)

Call:
lm(formula = y_i ~ x_i.1 + x_i.4 + x_i.9, data = data3)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.0344  -0.7593   0.1639   0.8400   2.3836

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  9.61318    2.63889   3.643 0.000865 ***
x_i.1       -0.07352    0.02410  -3.050 0.004342 **
x_i.4       -0.10871    0.04306  -2.525 0.016268 *
x_i.9        0.10112    0.02738   3.693 0.000752 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.136 on 35 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6986,    Adjusted R-squared:  0.6728
F-statistic: 27.05 on 3 and 35 DF,  p-value: 3.121e-09
```

(b) Kết quả mô hình

Hình 2.3.11: Chọn mô hình với tiêu chuẩn BIC

Mô hình 2.3.2 giải thích được 69.86% sự biến thiên của tỷ lệ % tai nạn được giải thích bởi 3 biến độc lập. Các hệ số của mô hình lần lượt là: $\hat{\beta}_0 = 9.613, \hat{\beta}_1 = -0.073, \hat{\beta}_4 = -0.109, \hat{\beta}_9 = 0.101$.

Mối tương quan giữa từng biến giải thích trong mô hình và biến phụ thuộc có quan hệ tuyến tính được biểu diễn trong hình 2.3.12. Hiện tượng đa cộng tuyến giữa các biến cũng không còn tồn tại trong mô hình được biểu diễn trong hình 2.3.13.

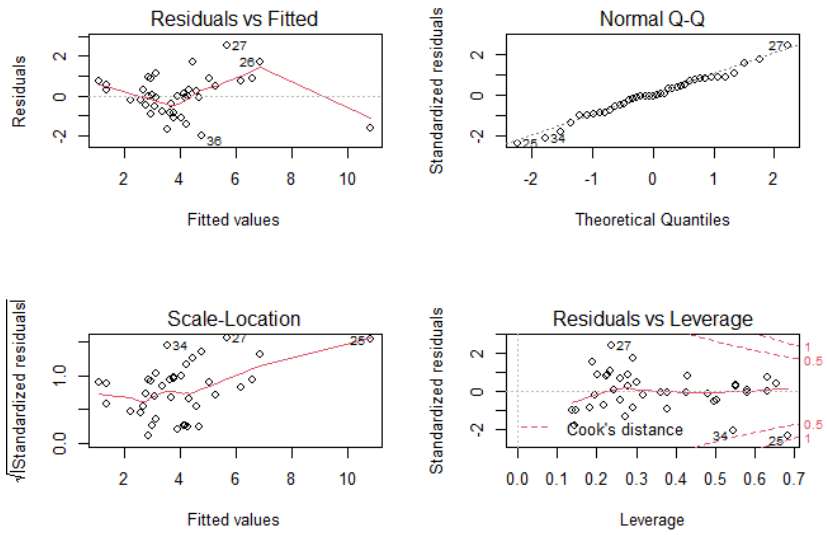


Hình 2.3.12: Mối tương quan giữa từng biến giải tích và biến phụ thuộc

```
> vif(mod_BIC)
   x_i.1    x_i.4    x_i.9
1.044222 1.867700 1.917150
```

Hình 2.3.13: Hiện tượng đa cộng tuyến giữa các biến trong mô hình được chọn

Tuy nhiên, biểu đồ phần dư ở hình 2.3.14 cho thấy mối liên quan giữa biến phụ thuộc và các biến giải thích không tuân theo hàm tuyến tính. Nhưng quan sát thấy có một số giá trị ngoại lai (*outlier*) tồn tại trong dữ liệu, nhóm em sử dụng phương pháp kiểm tra là tính dao động phần dư (*residuals*) và chuẩn hóa dữ liệu sao cho có trung bình 0 và phương sai 1, rồi từ đó tìm đối tượng nào có dao động phần dư chuẩn hóa cao hơn |2|.



Hình 2.3.14: Các biểu đồ của mô hình đầy đủ

Dùng phần mềm R tính toán, ta có kết quả ở hình 2.3.15, xác định được quan trắc thứ 26 và 27 là các giá trị ngoại lai.

```
> data_res = residuals(mod_BIC)
> data_crit = 2*sd(data_res)
> data_outlier = ifelse(abs(data_res>data_crit),1,0); data_outlier
 1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32
 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  1  0  0  0  0  0
33 34 35 36 37 38 39
 0  0  0  0  0  0  0
```

Hình 2.3.15: Kiểm tra các giá trị ngoại lai trong mô hình đầy đủ

Ta thử loại bỏ các biến này và tiến hành chọn lại mô hình với phương pháp Stepwise

và tiêu chuẩn BIC, ta có kết quả từ phầm mềm R ở hình 2.3.16. Mô hình lựa chọn thứ hai đã được thêm một biến $X8$ là số làn đường thay đổi (báo hiệu) trên đoạn đường cao tốc, mô hình này có dạng:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X1 + \beta_4 X4 + \beta_8 X8 + \beta_9 X9 + \epsilon \tag{2.3.3}$$

```
> summary(new_mod_full)

Call:
lm(formula = y_i ~ ., data = new_data)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.53969 -0.54568 -0.05226  0.61573  1.73194

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.556e+01  5.880e+00   2.646   0.0145 *
x_i.1       -4.372e-02  2.658e-02  -1.645   0.1136
x_i.2       -5.889e-05  2.807e-02  -0.002   0.9983
x_i.3       -1.154e-01  9.466e-02  -1.219   0.2353
x_i.4       -8.676e-02  7.006e-02  -1.238   0.2281
x_i.5       -4.560e-01  5.047e-01  -0.903   0.3756
x_i.6       -1.074e-01  1.395e-01  -0.770   0.4493
x_i.7       -3.986e-01  9.793e-01  -0.407   0.6877
x_i.8        3.788e-01  4.492e-01   0.843   0.4078
x_i.9        8.194e-02  3.785e-02   2.165   0.0410 *
x_i.10       1.091e-01  2.397e-01   0.455   0.6533
x_i.11       4.498e-01  1.438e+00   0.313   0.7572
x_i.12      -5.255e-01  9.307e-01  -0.565   0.5778
x_i.13      -1.085e+00  8.237e-01  -1.317   0.2008
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.9967 on 23 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7878,    Adjusted R-squared:  0.6678
F-statistic: 6.566 on 13 and 23 DF,  p-value: 4.983e-05
```

(a) Mô hình hồi quy đầy đủ

```
> summary(new_mod_BIC)

Call:
lm(formula = y_i ~ x_i.1 + x_i.4 + x_i.8 + x_i.9, data = new_data)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-1.5208 -0.6412 -0.1565  0.6998  1.5248

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  8.71314    2.41591   3.607  0.00104 **
x_i.1       -0.05079    0.02103  -2.415  0.02164 *
x_i.4       -0.09801    0.03904  -2.510  0.01731 *
x_i.8        0.56615    0.29097   1.946  0.06051 .
x_i.9        0.07244    0.02612   2.773  0.00918 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.946 on 32 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.734,     Adjusted R-squared:  0.7007
F-statistic: 22.07 on 4 and 32 DF,  p-value: 8.008e-09
```

(b) Mô hình lựa chọn mới với tiêu chuẩn BIC

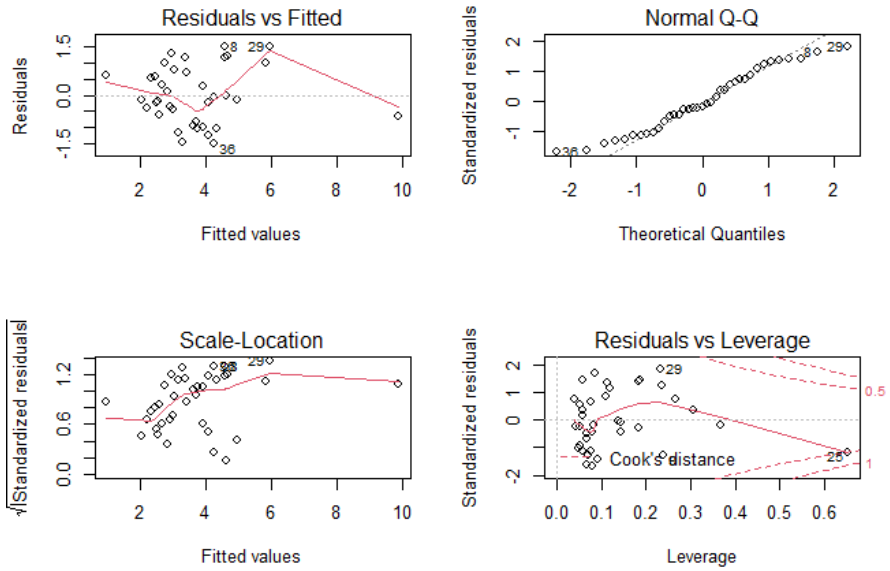
Hình 2.3.16: Mô hình đầy đủ và lựa chọn sau khi loại quan trắc 26, 27

Ta nhận thấy tỷ lệ phần trăm sự biến thiên giải thích được của biến phụ thuộc:

- Đối với mô hình đầy đủ, có cải thiện từ 75.89% thành 78.78% và hệ số R^2 hiệu chỉnh cũng tăng tương đối từ 0.6335 lên 0.6678.

- Đối với mô hình mới 2.3.3, có cải thiện đáng kể từ 69.86% thành 73.4% và hệ số R^2 hiệu chỉnh cũng tăng tương đối từ 0.6728 lên 0.7007.

Dù vậy, các biến trong mô hình lựa chọn mới 2.3.3 lại kém có ý nghĩa thống kê hơn mô hình lựa chọn cũ. Nếu chúng ta dự trên tỷ lệ phần trăm giải thích được cho mô hình thì mô hình mới vẫn là một lựa chọn không tồi. Tuy nhiên biểu đồ phần dư cũng không thay đổi nhiều so với mô hình cũ (hình 2.3.17).



Hình 2.3.17: Các biểu đồ của mô hình lựa chọn mới

Kết luận

Vậy mô hình lựa chọn cuối cùng có thể giải thích 73.4% phương sai của biến phụ thuộc Y. Nói cách khác, có 73.4% phần trăm sự biến thiên của tỷ lệ tai nạn (Y) được giải thích bởi chiều dài đoạn đường ($X1$), tốc độ giới hạn cho phép ($X4$), số làn đường thay đổi tự do trên đoạn đường cao tốc và số cửa vào đường cao tốc.

Tuy nhiên, dù giải pháp loại bỏ giá trị ngoại lai là cần thiết, nhưng vì dữ liệu quá ít, lý do vì sao bộ dữ liệu có những giá trị ngoại lai này vẫn chưa thể giải thích được chúng có thật sự là giá trị ngoại lai. Vì vậy, chúng ta cần nhiều dữ liệu hơn để mô hình có thể cho kết quả hồi quy tốt và chính xác hơn.

2.4 Dữ liệu 4