插值和误差分析

这是数值分析的最基础问题。使用多个点，拟合成一条曲线：如何拟合？误差如何？

首先明确的是，n 个点拟合成一条曲线，一般而言都是需要 n-1 次方的方程来做。比如 2 个点一条直线，那么就是 1 次方就能穿过；3 个点一般情况下则至少要 2 次方才能穿过。

插值方法主要有两种：拉格朗日和牛顿差分

1. 拉格朗日：知乎上有一篇文章将拉格朗日很好，但是牛顿差分讲的不好。【./材料/1_拉格朗日.htm】
2. 牛顿差分：在网上有一个网页讲的很好。【./材料/1_牛顿差分.html】

拉格朗日和牛顿差分本质上都是一样的，那么用他们的误差是多少呢？张韵华老师的《数值计算与算法》第一章里面就给了结果（不过这本书感觉一般）。不用问为什么直接知道就行。

2. 线性插值误差

定理 1.1 记 $L_1(x)$ 为以 $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))\}$ 为插值点的插值函数，x_0，$x_1 \in [a,b], x_0 \neq x_1$，设 $f(x)$ 一阶连续可导，$f''(x)$ 在 (a,b) 上存在，则对任意给定的 $x \in [a,b]$，至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使

$$R(x) = f(x) - L_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1), \quad \xi \in [x_0, x_1] \tag{1.3}$$

2. n 次插值多项式的误差

定理 1.2 设 $L_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上过 $\{(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \cdots, n\}$ 的 n 次插值多项式，$x_i \in [a,b], x_i$ 互不相同，当 $f \in C^{n+1}[a,b]$ 时，插值多项式的误差

这里和2次插值一样，指一定存在一个点满足这样的公式

$$R_n(x) = \frac{\boxed{f^{(n+1)}(\xi)}}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n), \quad \text{其中 } \xi \in [a,b] \tag{1.9}$$

这个在去马赛克的一篇论文有应用，在去马赛克目录中的系列二有记录：

Bayer Demosaicking With Polynomial Interpolation

Jiaji Wu, Marco Anisetti, Wei Wu, Ernesto Damiani, and Gwanggil Jeon