

# 傅里叶光学和计算成像翻译

Dr. Li

2020 年 5 月 3 日

## 摘要

用于翻译 Fourier Optics and Computatinal Imaging, 目前自用



## 1 采样定理

我们经常听到或谈论今天在我们周围看到的数字革命。由于我们每天使用的数字设备，我们的生活在一代人的时间内发生了巨大变化。为了使像手机这样的小工具成为可能，必须开发和整合许多技术。但是为什么我们经常建模为连续函数的信号的数字表示之所以可能的核心思想在于采样定理。在讨论这个之前，我要指出，通过电磁手段进行的通信在 20 世纪初很实用。那时，量化传达某些特定信息所需的资源的问题变得很重要。克劳德·香农（Claude Shannon）为开发形式主义以量化信息以进行交流而功劳。他关于该主题的标题为“通信的数学理论”（Bell Systems Tech. Journal 1948）的文章是经典著作。正如我之前已经讨论过的，在成像或相关现象中我们感兴趣的信息被编码在波中将信息从对象传送到我们系统上。尽管我们的大多数波动现象模型都是连续的，但任何测量所需的采样都是在离散点进行的。采样多少是合适的？从直觉上看，抽取的样本越多越好。但是，也很明显，如果您想对语音信号进行采样，那么当感兴趣的最高音频频率最多为几 kHz 时，以 1MHz 或 1GHz 的速率进行采样可能会太多。我们可以以某种方式将这种直觉形式化吗？我们可以确定所需采样率的界限吗？我们将在本章中研究这个重要的基本问题。采样思想在计算成像系统中起着重要作用。图像的离散点通常被表示为图像的像素点。

### 1.1 泊松求和方程

我们将通过对泊松求和方程的傅里叶变换得出采样定理。有了泊松方程我们就不难获得采样定理。只是在交流信息中这个结果才有意义。我们首先考虑一个信号  $g(x)$  和对应的傅里叶变换

$$G(f_x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \exp(-i2\pi f_x x) \quad (1)$$

首先我们使用  $G(f_x)$  构造一个周期为  $\Delta$  的周期函数，然后表示为一个傅里叶序列

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f_x + n\Delta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \exp(-i2\pi k f_x / \Delta) \quad (2)$$

利用周期函数的傅里叶逆变换可获得 Eq.2 系数  $g_k$ 。

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} df_x \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f_x + n\Delta) \exp(i2\pi k f_x / \Delta) \\ &= \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(n-\frac{1}{2})\Delta}^{(n+\frac{1}{2})\Delta} du G(u) \exp(i2\pi k u / \Delta - i2\pi n k) \end{aligned} \quad (3)$$

因为  $n, k$  是整数, 我们可以知道  $\exp(-i2\pi n k) = 1$ 。此外因为  $n : -\infty \rightarrow \infty$ , 有效的覆盖了整个  $u$ , 因此周期项可以忽略, Eq.3 可以写成

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} du G(u) \exp(i2\pi k u / \Delta) \\ &= \frac{1}{\Delta} g\left(\frac{k}{\Delta}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

从以上结果可以知道, 通过对  $G(f_x)$  添加规则的移位形成的周期函数, 相应的傅立叶级数系数只是点  $x = k/\Delta$  处函数  $g(x)$  的周期采样,  $k$  为整数。

## 1.2 特殊情况下的采样定理

为了建立采样定理, 我们将定义带限信号。如果信号  $g(x)$  的傅里叶变换在  $f_x : (-B, B)$  外消失, 我们就称这个信号是带限信号。现在我们将考虑当信号  $g(x)$  受到上述带宽限制且  $\Delta = 2B$  时的泊松求和公式的特例。现在, 傅立叶变换的移位版本不重叠, 我们可以在方程 Eq.2 两边相乘一个矩形函数来滤除  $n = 0$  项:

$$G(f_x) = \frac{1}{2B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{2B}\right) \exp\left(-i2\pi k \frac{f_x}{2B}\right) \text{rect}\left(\frac{f_x}{2B}\right) \quad (5)$$

对齐进行逆傅里叶变换可以得到

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{2B}\right) \int_{-\infty}^{\infty} df_x \exp\left[i2\pi f_x \left(x - \frac{k}{2B}\right)\right] \text{rect}\left(\frac{f_x}{2B}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{2B}\right) \text{sinc}\left[2B\left(x - \frac{k}{2B}\right)\right] \end{aligned} \quad (6)$$

它告诉我们, 以  $1/2B$  分开的离散点处的带限信号  $g(x)$  的样本包含与连续信号相同的信息。如果我们知道这些离散的样本值, 则可以通过对样本进行正弦插值来重建连续信号。这个采样率被称为奈奎斯特率。

### 1.3 采样公式的其他说明

关于采样定理，需要注意的比较重要的一点是，移动的 sinc 函数集合构成了一组正交完备基。这与其他集合不同（如 Hermite-Gauss 函数），这里是统一个函数不同的移动版本是正交的。这种不寻常的基可以追溯到小波等不寻常基的起源。

这个集合的正交性的证明如下：

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} dx \operatorname{sinc}(2Bx - m) \operatorname{sinc}(2Bx - n) \\
 &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(2B)^2} \operatorname{rect}^2 \left( \frac{f_x}{2B} \right) \right\} \Big|_{x=\frac{m-n}{2B}} \\
 &= \frac{1}{2B} \operatorname{sinc}(m - n) \\
 &= \frac{1}{2B} \delta_{m,n}
 \end{aligned} \tag{7}$$

在计算中，我们使用的卷积定理。带限信号  $g(\frac{m}{2B})$  可以看成 sinc 基下的相关系数，即

$$g\left(\frac{m}{2B}\right) = \frac{1}{2B} \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \operatorname{sinc}(2Bx - m) \tag{8}$$

sinc 基集合的完备性可以很简单的证明，观察到：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(2Bx - m) \operatorname{sinc}(2Bx' - m) = \operatorname{sinc}[2B(x - x')] \tag{9}$$

使用采样定理应用于 sinc 函数本身。对于每一个带限信号  $g(x)$ ，带宽  $f_x : (-B, B)$ ，我们有

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x') \operatorname{sinc}[2B(x - x')] &= \mathcal{F}^{-1} \left[ G(f_x) \frac{1}{2B} \operatorname{rect} \left( \frac{f_x}{2B} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2B} g(x)
 \end{aligned} \tag{10}$$

如果现在将完整性关系用于  $\operatorname{sinc}[2B(x - x')]$  和 Eq.8 的关系，就得出了采样定理。因此，sinc 基可以表示每个带限函数，可以将表达式  $\operatorname{sinc}[2B(x - x')]$  视为  $\delta(x - x')$  的带限版本。

### 1.4 对载频信号的采样

有时通过陈述僵化的规则来简单地解释香农采样定理具有误导性，即正弦信号每个正弦周期需要两个采样。因为如果知道我们采样的是正弦曲线，那么仅应

从知道其频率，幅度和初始相位的角度就可以确定波形。实际上，在通信中遇到的一类重要信号，窄带光场表示和光学干涉成像等形式的情况下，也会出现类似情况。这种情况可以表示为：

$$g(x) = a(x) \exp(i2\pi f_0 x) + a^*(x) \exp(-i2\pi f_0 x) \quad (11)$$

。这里  $a(x)$  是信号的复振幅包络， $f_0$  是载频。此类信号在大多数情况下，包络  $a(x)$  的有效带宽  $2B$  是远小于载频  $f_0$  的，典型的载频信号的傅里叶幅度如图。因

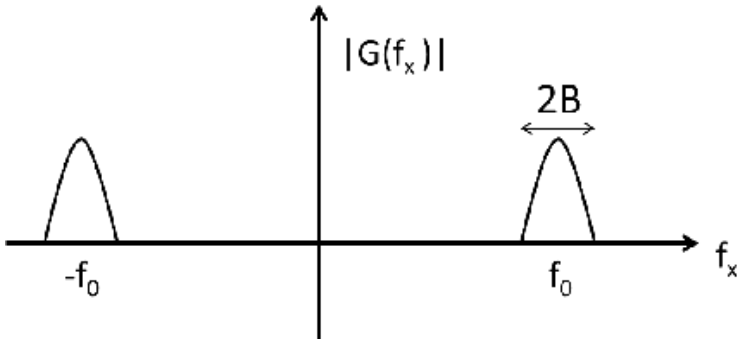


图 1:  $|G(f_x)|$  的傅里叶频谱强度

此包络的有效带宽和载频的比值

$$\frac{f_0}{2B} \geq \frac{f_0}{2B_0} = N + \frac{1}{2} \quad (12)$$

，对于一些给定的整数  $N$  (可能是最大值对于确定的  $f_0, B$ )<sup>1</sup> 这样信号  $g(x)$  就可以用  $1/(4B_0)$  的采样间隔来获得采样定理下的信号形式：

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{4B_0}\right) \operatorname{sinc}\left[2B_0\left(x - \frac{k}{4B_0}\right)\right] \cos\left[2\pi f_0\left(x - \frac{k}{4B_0}\right)\right] \quad (13)$$

也可以使用低通采样定理类似的论据得出上述结果，并且有时将其称为带通采样定理。此结果的中心思想是有效利用以下事实：即使采样间隔比  $1/2(f_0 + B)$  大

<sup>1</sup>这里意思是说对于给定的  $B$ ，总可以找到一个稍微大一些的值  $B_0$ ，使其满足  $f_0$  是  $N + \frac{1}{2}$  倍的  $B_0$ ，这样  $N$  可以使用  $\operatorname{sinc}$  函数的频移来表示，剩下的  $\frac{1}{2}$  就是一个 2 倍于  $2B_0$  的信号，可以用  $1/4B_0$  的间隔去采样。

得多，傅里叶空间中的空白区域也不会导致混叠。上式中的余弦项可以表示为两个指数项的总和，而解调后的包络  $a(x)$  可以表示为一个采样序列：

$$a(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{4B_0}\right) \text{sinc}\left[2B_0\left(x - \frac{k}{4B_0}\right)\right] \exp\left(-2\pi f_0 \frac{k}{4B_0}\right) \quad (14)$$

因此，采样率与复杂包络中的波动相当，而不是最大信号带宽。在以上讨论中暗含了对载波频率  $f_0$  的了解。正如我们将在下一节中讨论的那样，此结果对于量化信号的自由度非常重要。

### 1.5 信号的自由度：空间带宽积

假设我们有一个长度为  $2L$  的信号要存储或传输给其他人，需要多少空间？大多数实际信号或图像都是有限范围的，并且严格意义上来讲不能有限长的信号不能同时是带限的。它的傅里叶变换原则上必须在整个频率轴上扩展。因此，带宽的概念需要仔细定义。对于长度在  $x : (-L, L)$  的信号  $g(x)$ ，我们在频率段  $f_x : (-B, B)$  定义能量集中比  $\alpha$  为

$$\alpha = \frac{\int_{-B}^B df_x |G(f_x)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} df_x |G(f_x)|^2} \quad (15)$$

。对于带宽的实用的定义为在频率段  $f_x : (-B, B)$  内，能量集中比接近于实际应用要求的 1（比如 0.999）。需要多少个信号样本才能以相当准确的方式表示它？答案是

$$2L \quad (16)$$

。  $N = 4BL$  的乘积称为空间带宽积，他表示信号的自由度。对于 2D 信号或者图像这个数是  $N^2$ ，即表示图形所需的像素数。信号和系统的空间带宽积是两个不同的概念。假设我们的对象是放置在玻片内的生物组织样本，需要在显微镜下观察。活细胞是一个非常复杂的对象，感兴趣的细节可以在分子或者纳米尺度上对应于空间频率的数量级是  $10^9 m^{-1}$ ，则对于一个  $1mm \times 1mm$  物体，空间带宽积为  $(10^{-3})^2 \times (10^9)^2 = 10^{12}$ 。而观测细胞的系统可以具有小的多的空间带宽积。用于可见光的显微镜的分辨率可能只有  $1\mu m$ ，因此该显微系统的空间带宽积是  $(10^{-3})^2 \times (10^6)^2 = 10^6$ 。因此，如果要将 CCD 相机作为探测器放置在显微镜的后端，则  $1000 \times 1000$  像素的传感器芯片就足够了。如果我们在弱光条件下运

行，则噪声会使来自每个像素的信号有些不可靠。我们可能需要对传感器芯片进行 binning，以便对一个  $2 \times 2$  像素块进行平均。因此，生成的图像是  $500 \times 500$  像素，减少了可以从系统设置程序中检索到的信息。因此，空间带宽乘积既取决于系统参数，又取决于信噪比。<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>这里不太正确，应该是空间带宽积还是这么多，但是信号的置信度下降了，导致可以直接获得的真实信息的量减少了，这种是可以通过其他方法恢复的。