

傅里叶光学和计算成像翻译

Dr. Li

2020 年 5 月 3 日

摘要

用于翻译 Fourier Optics and Computatinal Imaging, 目前自用



1 采样定理

我们经常听到或谈论今天在我们周围看到的数字革命。由于我们每天使用的数字设备，我们的生活在一代人的时间内发生了巨大变化。为了使像手机这样的小工具成为可能，必须开发和整合许多技术。但是为什么我们经常建模为连续函数的信号的数字表示之所以可能的核心思想在于采样定理。在讨论这个之前，我要指出，通过电磁手段进行的通信在 20 世纪初很实用。那时，量化传达某些特定信息所需的资源的问题变得很重要。克劳德·香农（Claude Shannon）为开发形式化以量化信息以进行交流而功劳。他关于该主题的标题为“通信的数学理论”（Bell Systems Tech. Journal 1948）的文章是经典著作。正如我之前已经讨论过的，在成像或相关现象中我们感兴趣的信息被编码在波中将信息从对象传送到我们系统上。尽管我们的大多数波动现象模型都是连续的，但任何测量所需的采样都是在离散点进行的。采样多少是合适的？从直觉上看，抽取的样本越多越好。但是，也很明显，如果您想对语音信号进行采样，那么当感兴趣的最高音频频率最多为几 kHz 时，以 1MHz 或 1GHz 的速率进行采样可能会太多。我们可以以某种方式将这种直觉形式化吗？我们可以确定所需采样率的界限吗？我们将在本章中研究这个重要的基本问题。采样思想在计算成像系统中起着重要作用。图像的离散点通常被表示为图像的像素点。

1.1 泊松求和方程

我们将通过对泊松求和方程的傅里叶变换得出采样定理。有了泊松方程我们就不难获得采样定理。只是在交流信息中这个结果才有意义。我们首先考虑一个信号 $g(x)$ 和对应的傅里叶变换

$$G(f_x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \exp(-i2\pi f_x x) \quad (1.1)$$

首先我们使用 $G(f_x)$ 构造一个周期为 Δ 的周期函数，然后表示为一个傅里叶序列

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f_x + n\Delta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \exp(-i2\pi k f_x / \Delta) \quad (1.2)$$

利用周期函数的傅里叶逆变换可获得 Eq.1.2 系数 g_k 。

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} df_x \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f_x + n\Delta) \exp(i2\pi k f_x / \Delta) \\ &= \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(n-\frac{1}{2})\Delta}^{(n+\frac{1}{2})\Delta} du G(u) \exp(i2\pi k u / \Delta - i2\pi n k) \end{aligned} \quad (1.3)$$

因为 n, k 是整数, 我们可以知道 $\exp(-i2\pi n k) = 1$ 。此外因为 $n : -\infty \rightarrow \infty$, 有效的覆盖了整个 u , 因此周期项可以忽略, Eq.1.3 可以写成

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} du G(u) \exp(i2\pi k u / \Delta) \\ &= \frac{1}{\Delta} g\left(\frac{k}{\Delta}\right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

从以上结果可以知道, 通过对 $G(f_x)$ 添加规则的移位形成的周期函数, 相应的傅立叶级数系数 只是点 $x = k/\Delta$ 处函数 $g(x)$ 的周期采样, k 为整数。

1.2 特殊情况下的采样定理

为了建立采样定理, 我们将定义带限信号。如果信号 $g(x)$ 的傅里叶变换在 $f_x : (-B, B)$ 外消失, 我们就称这个信号是带限信号。现在我们将考虑当信号 $g(x)$ 受到上述带宽限制且 $\Delta = 2B$ 时的泊松求和公式的特例。现在, 傅立叶变换的移位版本不重叠, 我们可以在方程 Eq.1.2 两边相乘一个矩形函数来滤除 $n = 0$ 项:

$$G(f_x) = \frac{1}{2B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{2B}\right) \exp\left(-i2\pi k \frac{f_x}{2B}\right) \text{rect}\left(\frac{f_x}{2B}\right) \quad (1.5)$$

对齐进行逆傅里叶变换可以得到

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{2B}\right) \int_{-\infty}^{\infty} df_x \exp\left[i2\pi f_x \left(x - \frac{k}{2B}\right)\right] \text{rect}\left(\frac{f_x}{2B}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{2B}\right) \text{sinc}\left[2B\left(x - \frac{k}{2B}\right)\right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

它告诉我们, 以 $1/2B$ 分开的离散点处的带限信号 $g(x)$ 的样本包含与连续信号相同的信息。如果我们知道这些离散的样本值, 则可以 通过对样本进行正弦插值 来重建连续信号。这个采样率被称为奈奎斯特率。

1.3 采样公式的其他说明

关于采样定理，需要注意的比较重要的一点是，移动的 sinc 函数集合构成了一组正交完备基。这与其他集合不同（如 Hermite-Gauss 函数），这里是同一个函数不同的移动版本是正交的。这种不寻常的基可以追溯到小波等不寻常基的起源。

这个集合的正交性的证明如下：

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} dx \operatorname{sinc}(2Bx - m) \operatorname{sinc}(2Bx - n) \\
 &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(2B)^2} \operatorname{rect}^2 \left(\frac{f_x}{2B} \right) \right\} \Big|_{x=\frac{m-n}{2B}} \\
 &= \frac{1}{2B} \operatorname{sinc}(m - n) \\
 &= \frac{1}{2B} \delta_{m,n}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

在计算中，我们使用的卷积定理。带限信号 $g(\frac{m}{2B})$ 可以看成 sinc 基下的相关系数，即

$$g\left(\frac{m}{2B}\right) = \frac{1}{2B} \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \operatorname{sinc}(2Bx - m) \tag{1.8}$$

sinc 基集合的完备性可以很简单的证明，观察到：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(2Bx - m) \operatorname{sinc}(2Bx' - m) = \operatorname{sinc}[2B(x - x')] \tag{1.9}$$

使用采样定理应用于 sinc 函数本身。对于每一个带限信号 $g(x)$ ，带宽 $f_x : (-B, B)$ ，我们有

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x') \operatorname{sinc}[2B(x - x')] &= \mathcal{F}^{-1} \left[G(f_x) \frac{1}{2B} \operatorname{rect} \left(\frac{f_x}{2B} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2B} g(x)
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

如果现在将完整性关系用于 $\operatorname{sinc}[2B(x - x')]$ 和 Eq.1.8 的关系，就得出了采样定理。因此，sinc 基可以表示每个带限函数，可以将表达式 $\operatorname{sinc}[2B(x - x')]$ 视为 $\delta(x - x')$ 的带限版本。

1.4 对载频信号的采样

有时通过陈述僵化的规则来简单地解释香农采样定理具有误导性，即正弦信号每个正弦周期需要两个采样。因为如果知道我们采样的是正弦曲线，那么仅应从知道其频率，幅度和初始相位的角度就可以确定波形。实际上，在通信中遇到的一类重要信号，窄带光场表示和光学干涉成像等形式的情况下，也会出现类似情况。这种情况可以表示为：

$$g(x) = a(x) \exp(i2\pi f_0 x) + a^*(x) \exp(-i2\pi f_0 x) \quad (1.11)$$

。这里 $a(x)$ 是信号的复振幅包络， f_0 是载频。此类信号在大多数情况下，包络 $a(x)$ 的有效带宽 $2B$ 是远小于载频 f_0 的，典型的载频信号的傅里叶幅度如图。

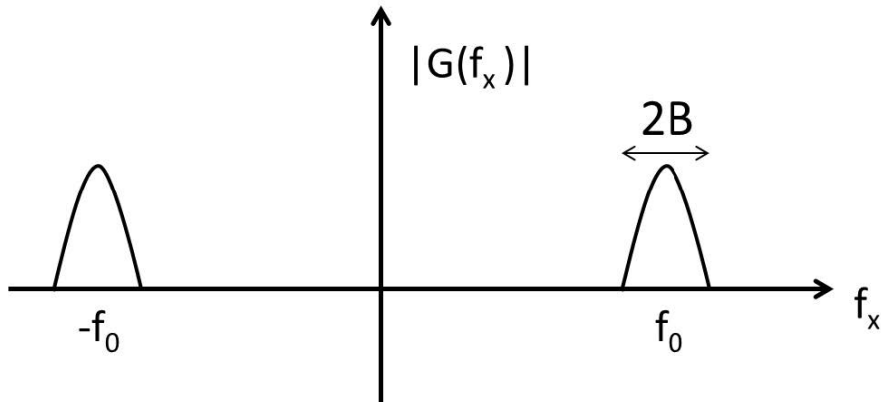


图 1.1: $|G(f_x)|$ 的傅里叶频谱强度

因此包络的有效带宽和载频的比值

$$\frac{f_0}{2B} \geq \frac{f_0}{2B_0} = N + \frac{1}{2} \quad (1.12)$$

，对于一些给定的整数 N (可能是最大值对于确定的 f_0, B)，¹ 这样信号 $g(x)$ 就可以用 $1/(4B_0)$ 的采样间隔来获得采样定理下的信号形式：

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{4B_0}\right) \operatorname{sinc}\left[2B_0\left(x - \frac{k}{4B_0}\right)\right] \cos\left[2\pi f_0\left(x - \frac{k}{4B_0}\right)\right] \quad (1.13)$$

¹这里意思是说对于给定的 B ，总可以找到一个稍微大一些的值 B_0 ，使其满足 f_0 是 $N + \frac{1}{2}$ 倍的 B_0 ，这样 N 可以使用 sinc 函数的频移来表示，剩下的 $\frac{1}{2}$ 就是一个 2 倍于 $2B_0$ 的信号，可以用 $1/4B_0$ 的间隔去采样。

也可以使用低通采样定理类似的论据得出上述结果，并且有时将其称为带通采样定理。此结果的中心思想是有效利用以下事实：即使采样间隔比 $1/2(f_0 + B)$ 大得多，傅里叶空间中的空白区域也不会导致混叠。上式中的余弦项可以表示为两个指数项的总和，而解调后的包络 $a(x)$ 可以表示为一个采样序列：

$$a(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{4B_0}\right) \operatorname{sinc}\left[2B_0\left(x - \frac{k}{4B_0}\right)\right] \exp\left(-2\pi f_0 \frac{k}{4B_0}\right) \quad (1.14)$$

因此，采样率与复杂包络中的波动相当，而不是最大信号带宽。在以上讨论中暗含了对载波频率 f_0 的了解。正如我们将在下一节中讨论的那样，此结果对于量化信号的自由度非常重要。

1.5 信号的自由度：空间带宽积

假设我们有一个长度为 $2L$ 的信号要存储或传输给其他人，需要多少空间？大多数实际信号或图像都是有限范围的，并且严格意义上来讲不能有限长的信号不能同时是带限的。它的傅里叶变换原则上必须在整个频率轴上扩展。因此，带宽的概念需要仔细定义。对于长度在 $x : (-L, L)$ 的信号 $g(x)$ ，我们在频率段 $f_x : (-B, B)$ 定义能量集中比 α 为

$$\alpha = \frac{\int_{-B}^B df_x |G(f_x)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} df_x |G(f_x)|^2} \quad (1.15)$$

。对于带宽的实用的定义为在频率段 $f_x : (-B, B)$ 内，能量集中比接近于实际应用要求的 1（比如 0.999）。需要多少个信号样本才能以相当准确的方式表示它？答案是 $2B \times 2L$ 。 $N = 4BL$ 的乘积称为空间带宽积，他表示信号的自由度。对于 2D 信号或者图像这个数是 N^2 ，即表示图形所需的像素数。

信号和系统的空间带宽积是两个不同的概念。假设我们的对象是放置在玻片内的生物组织样本，需要在显微镜下观察。活细胞是一个非常复杂的对象，感兴趣的细节可以在分子或者纳米尺度上对应于空间频率的数量级是 $10^9 m^{-1}$ ，则对于一个 $1mm \times 1mm$ 物体，空间带宽积为 $(10^{-3})^2 \times (10^9)^2 = 10^{12}$ 。而观测细胞的系统可以具有小的多的空间带宽积。用于可见光的显微镜的分辨率可能只有 $1\mu m$ ，因此该显微系统的空间带宽积是 $(10^{-3})^2 \times (10^6)^2 = 10^6$ 。因此，如果要将 CCD 相机作为探测器放置在显微镜的后端，则 1000×1000 像素的传感器芯片

就足够了。如果我们在弱光条件下运行，则噪声会使来自每个像素的信号有些不可靠。我们可能需要对传感器芯片进行 binning，以便对一个 2×2 像素块进行平均。因此，生成的图像是 500×500 像素，减少了可以从系统设置程序中检索到的信息。因此，空间带宽乘积既取决于系统参数，又取决于信噪比。¹

1.6 Slepian(椭球形) 函数

我们在 Eq.1.15 中定义了能量集中率，以便对带宽做出实际定义。 α 的最大值问题由香农在 1950 年提出。Slepian, Pollak 和 Landau 在 Bell System Tech 的一系列论文中对该问题进行了全面分析。为了纪念 D.Slepianz 这类函数被称为 Slepianz 函数。我们会讨论这些函数一些有趣的性质，然后建立起和采样定理的关联。当我们讨论诸如超分辨或者成像系统的信息承载能力是，Slepian 函数将会比较有用。

对于一个在 $x : (-L, L)$ 上的函数 $g(x)$ ，我们可以利用傅里叶变换将能量集中率 α 表示为：

$$\alpha = \frac{\int_{-B}^B df_x |G(f_x)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} df_x |G(f_x)|^2} \quad (1.16)$$

我们观察到上述 α 的展开是 sinc 核的 Rayleigh-Ritz 系数，则 α 的最大值可以由 $(2B\lambda_0)$ 获得， λ_0 是以下特征方程的特征值。

$$\lambda \phi(x) = \int_{-L}^L dx' \text{sinc}[2B(x-x')] \phi(x') \quad (1.17)$$

通常 prolate 基函数会按照相应特征值的大小降序排列。对于给定的 L, B ，最大的 N 个特征方程可以在能量集中的意义上认为是最佳的基。Slepian 和他的同事在早期工作中认识到，sinc-kernel 的本征函数是在方程 $\chi(c)$ 的离散正值的条件下，椭球面微分方程的角部分的解：

$$(L^2 - x^2) \frac{d^2 \phi}{dx^2} - 2x \frac{d\phi}{dx} + \left(\chi - \frac{c^2 x^2}{L^2} \right) \phi = 0 \quad (1.18)$$

。参数 $c = 2\pi LB$ 被称为香农数，与空间带宽积有关。关于 Slepian 函数的大多数文献都是基于微分方程 Eq.1.18 的解及其根据 c 值的渐近解来研究其性质的。我

¹这里不太正确，应该是空间带宽积还是这么多，但是信号的置信度下降了，导致可以直接获得的真实信息的量减少了，这种是可以通过其他方法恢复的。

们将基于采样定理采用不同的方法。基于微分方程解的讨论在某种程度上是临时的，与诸如采样定理固有相关的空间带宽积之类的思想没有简单的联系。

我们注意到 Eq.1.17 中的特征值是第二类其次 Fredholm 积分方程，该方程的核是厄米对称且平方可积的。此外这个核还是正定的：

$$\int_{-L}^L \int_{-L}^L dx dx' \operatorname{sinc}[2B(x-x')] g(x) g^*(x') = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B df_x |G(f_x)|^2 \geq 0 \quad (1.19)$$

对于任意平方可积函数 $g(x)$ 。当 $g(x)$ 等于零时，Eq.1.19 的等号成立，因此， sinc 核的特征值为正。我们将首先表明， sinc 核的本征函数满足采样定理，因此受到带宽限制。我们已经注意到， sinc 内核本身是有带宽限制的，因此具有以下采样扩展：

$$\operatorname{sinc}[2B(x-x')] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(2Bx-m) \operatorname{sinc}(2Bx'-m) \quad (1.20)$$

。对 Eq.1.17 使用 sinc 核展开可以得到：

$$\begin{aligned} \lambda \phi(x) &= \int_{-L}^L dx' \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(2Bx-m) \operatorname{sinc}(2Bx'-m) \phi(x') \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(2Bx-m) \times \left(\int_{-L}^L dx' \operatorname{sinc}(2Bx'-m) \phi(x') \right) \\ &= \lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{m}{2B}\right) \operatorname{sinc}(2Bx-m) \end{aligned} \quad (1.21)$$

所以 Eq.1.17 可以写成

$$\begin{aligned} \lambda \phi\left(\frac{m}{2B}\right) &= \int_{-L}^L dx' \operatorname{sinc}(2Bx'-m) \phi(x') \\ &= \int_{-L}^L dx' \operatorname{sinc}(2Bx'-m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{n}{2B}\right) \operatorname{sinc}(2Bx'-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn}^{(0)} \phi\left(\frac{n}{2B}\right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

其中矩阵 $A^{(0)}$ 的元素可以定义为：

$$A_{mn}^{(0)} = \int_{-L}^L dx' \operatorname{sinc}(2Bx'-m) \operatorname{sinc}(2Bx'-n) \quad (1.23)$$

可以发现, sinc 核的连续特征值问题因此等效于矩阵 $A^{(0)}$ 的离散特征值问题。¹ 连续和离散问题共享相同的特征值此外, 矩阵 $A^{(0)}$ 的特征向量与连续椭圆状函数的 Nyquist 样本相同。因此, 可以通过对离散特征向量进行正弦插值来获得连续函数。

1.6.1 $A^{(0)}$ 的性质

为了简洁起见, 我们将矩阵 $A^{(0)}$ 的离散特征向量表示为

$$u_n = \left[\dots \phi_n \left(\frac{m}{2B} \right) \dots \right]^T \quad (1.24)$$

, 符号 T 是行向量的转置。 $A^{(0)}$ 是实对称的所以他的特征值和特征向量是实数。我们将连续函数 $\phi_n(x)$ 归一化为 $x : (-\infty, \infty)$, 可以写成:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_n^2(x) = 1 = \frac{1}{2B} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_n^2 \left(\frac{m}{2B} \right) \quad (1.25)$$

。Eq.1.25来自以下事实, $\phi_n(x)$ 根据 Eq.1.21扩展采样, 进一步使用了 sinc 函数的正交性 Eq.1.7。 $A^{(0)}$ 是关于元素 $A_{00}^{(0)}$ 是对称的。众所周知, 此类矩阵的特征向量具有确定的奇偶性-它们是偶数或奇数。因此, 通过离散特征向量的正插值获得的连续特征函数也具有一定的奇偶性。

矩阵 $A^{(0)}$ 可以被分解为

$$A^{(0)} = U A_d^{(0)} U^T \quad (1.26)$$

。其中 $A^{(0)d}$ 是对角矩阵, 特征值 λ_n 分布在对角线上, 矩阵 U 具有特征向量 u_n 。此外特征向量是正交的:

$$U^T U = 2B \hat{1} = U U^T \quad (1.27)$$

利用这些恒等式 $\phi_n(\frac{m}{2B})$ 可以显式地获得以下关系: 正交性

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_n \left(\frac{m}{2B} \right) \phi_l \left(\frac{m}{2B} \right) = 2B \delta_{nl} \quad (1.28)$$

完备性¹

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \left(\frac{m}{2B} \right) \phi_n \left(\frac{k}{2B} \right) = 2B \delta_{mk} \quad (1.29)$$

¹ $\lambda \phi \left(\frac{n}{2B} \right) = A_{mn}^{(0)} \phi \left(\frac{n}{2B} \right)$

¹ 完备性表示可以用这个基表示整个空间

矩阵 $A^{(0)}$ 的结构非常有趣由于矩阵元素被定义为移位正弦函数乘积上的定积分，因此只有大约 $(2B)(2L)$ 个矩阵元素沿着以矩阵元素为 $A_{00}^{(0)}$ 为中心的矩阵对角线是有效的。这解释了 sinc 核的一个众所周知的性质，即问题的最高特征值只有大约 $4BL$ 是显著的。这对于使用 prolate 函数的信号表示有着有趣的含义。在图

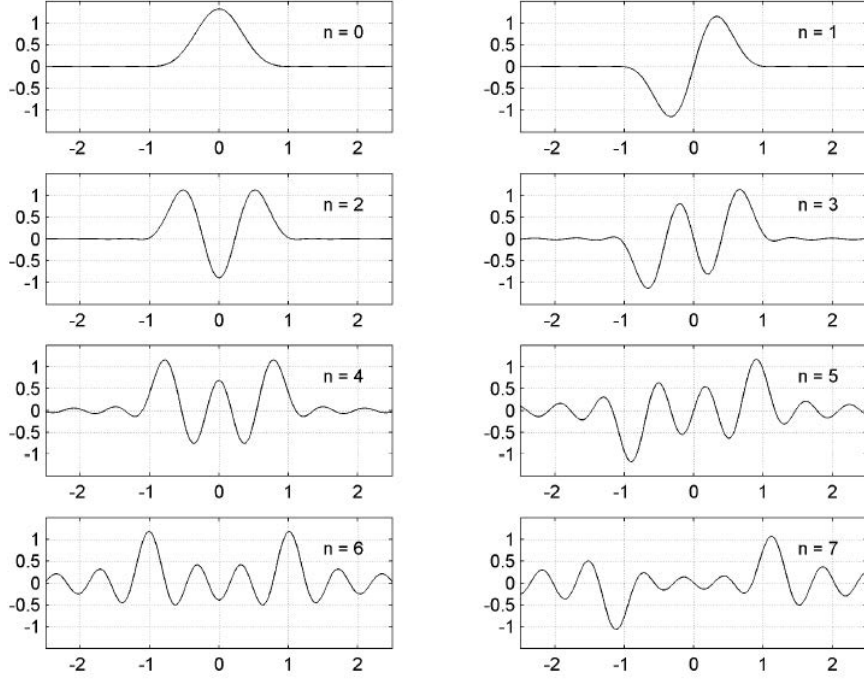


图 1.2: $L = 1, B = 5/\pi$ 时，使用基于采样定理的方法计算的前 8 个 prolate 函数

1.2和图 1.3中我们展示了使用基于采样定理的方法分别计算 prolate 函数及其对应的特征值²。使用以元素 $A_{00}^{(0)}$ 为中心的矩阵 $A^{(0)}$ 的 101×101 近似值，并根据 Eq.1.23中的定义使用标准数值积分方法计算矩阵元素。然后，对由此获得的离散特征向量进行内插，以获得连续的特征函数。总的来说，我们观察到第 n 个长函数在间隔 $x : (-L, L)$ 中有 n 个过 0 点。对于 $n > 4BL$ 阶的函数，这似乎是违反直觉的，其中零交叉点的数量超过了空间带宽积，尽管相应的长函数仍在无限间隔内被带宽限制。与空间带宽乘积相比，这样的函数在有限的时间间隔内具有更多的零交叉，实际上被称为“超振荡”。我们进一步注意到，当索引 n 超过 $4BL$ 时，相应的函数函数中的大多数能量都集中在间隔 $x : (-L, L)$ 之外。

²求矩阵 $A_{mn}^{(0)}$ *prolate*

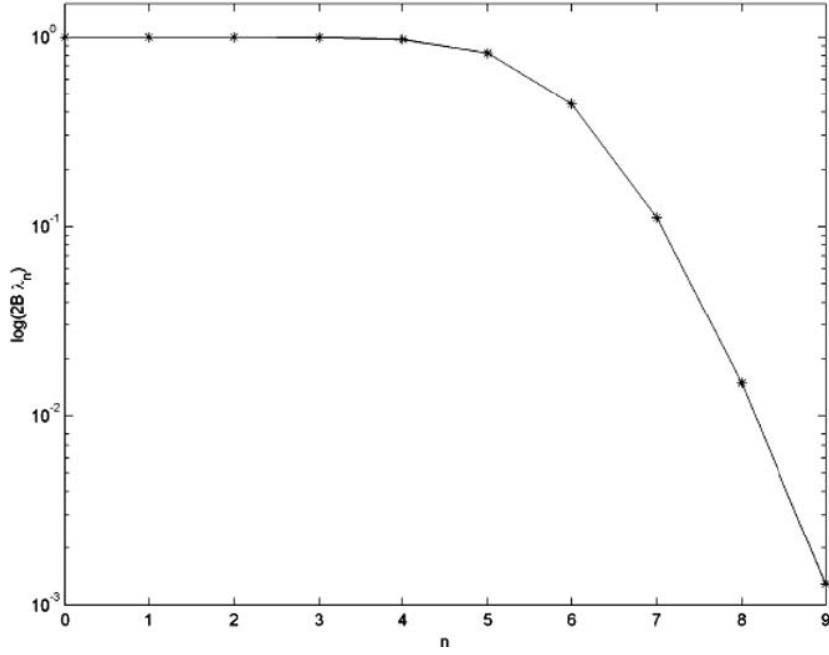


图 1.3: $L = 1, B = 5/\pi$ 时, sinc 核函数的前 10 个特征值

我们将陈述 prolate 函数³的一些有趣特性, 这些特性可以很容易地从 Eq.1.28 和 Eq.1.29 中的离散正交性和完整性关系中得出。

1. 对偶正交性: 曲线函数在 $-\infty, \infty$ 以及正交域 $x : (-L, L)$ 用于定义

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_n(x) \phi_m(x) = \delta_{m,n} \quad (1.30)$$

$$\int_{-L}^L dx \phi_n(x) \phi_m(x) = (2B\lambda_n) \delta_{m,n} \quad (1.31)$$

如果使用 $\phi_n(x)$ 和 $\phi_m(x)$ 的采样扩展, 然后按照 Eq.1.28, 则第一个恒等式

³ $\phi_n(x)$

很容易证明。Eq.1.31的有限区间的第二正交性可以证明如下：

$$\begin{aligned}
 & \int_{-L}^L dx \phi_n(x) \phi_m(x) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n\left(\frac{k}{2B}\right) \int_{-L}^L dx \operatorname{sinc}(2Bx - k) \phi_m(x) \\
 &= \lambda_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_n\left(\frac{k}{2B}\right) \phi_m\left(\frac{k}{2B}\right) \\
 &= 2B \lambda_m \delta_{m,n}
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

2. 完备性：Prolate 函数在函数带宽限制为 $f_x : (-B, B)$ 的情况下在 $-\infty, \infty$ 上具有正交基础，而在 $x : (-L, L)$ 中的平方可积函数具有完整的正交基础。

在考虑带限外推之类的问题时，我们将使用正交性和完整性属性。通常，在本书的整个讨论中，当讨论成像系统的信息传输功能时，我们将有各种场合引用 Prolate 函数。我们注意到，基于采样定理的曲线函数的方法通常同样适用于与带限核相关的特征值问题，并且在一般情况下，可以证明与 Prolate 椭球体类似的一些有趣的数学关系。

1.7 带限函数外推

Prolate 椭球面函数的双重正交性和完整性属性可用于外推截短区域内已知的带限函数。假设在有限范围 $x : (-L, L)$ 内已知一个限制在频带 $f_x : (-B, B)$ 上的函数 $g(x)$ ，则可以使用如下设置的椭球函数扩展它：

$$g(x) = \sum_n a_n \phi_n(x) \tag{1.33}$$

，其中可以使用区域 $x : (-L, L)$ 上的 Prolate 函数的正交性确定系数：

$$a_n = \frac{1}{2B\lambda_n} \int_{-L}^L dx g(x) \phi_n(x) \tag{1.34}$$

另外，原则上可以通过使用相同的系数 a_n 将函数扩展到范围 $x : (-L, L)$ 之外。但是，确定函数超出范围 $x : (-L, L)$ 的可能性实际上取决于我们对 $g(x)$ 的有限范围知识的准确性。例如，如果 $g(x)$ 的值是通过一些实验测量确定的，则它们将

包含一些噪声，这些噪声会转换为系数 a_n 的噪声。在 Eq.1.34 中，系数 a_n 的获得涉及除以相应的特征值 λ_n 。正如我们在上面已经看到的，当索引 $n \gg 4BL$ 和相应的函数函数的大部分能量集中在 $x : (-L, L)$ 范围之外时，特征值通常很小。因此，尽管这样的高阶曲线函数能够在已知函数 $g(x)$ 的有限范围内重建信号，但将它们包含在级数表示中会涉及将相应系数 a_n 除以非常小的特征值。由于系数 a_n 是有噪声的，因此用小数除法会放大噪声，从而使序列表示毫无意义。避免噪声放大的一种简单方法是将序列表示截断为有限数量的项，然后有效地构成超出 $(-L, L)$ 的有限范围的外推。外推的问题严重的依赖于对 $g(x)$ 测量的 SNR。通常可以使用 Slepian 函数根据外推法来制定数字超分辨率成像技术。

在结束本章讨论时，我们注意到通过 sinc 集合或 Slepian 函数基础进行的采样彼此等效。诸如小波之类的相关领域中重要发展的起源可以追溯到本章所涵盖的内容。

2 快速傅立叶变换介绍

2.1 定义

本书将不时遇到傅立叶变换，对于学生和从业人员来说，重要的是要对数值例程或函数具有基本的操作性理解，这些数字例程或函数可用于对离散采样的信号和图像实施傅立叶变换。本章决不讨论离散傅立叶变换和快速傅立叶变换算法的详细信息，对于这些算法，已有很好的文献资料。此处的目的是提供足够的信息，以便在将标准计算工具或库用于 FFT 操作时，用户可以理解结果。沿途还指出了有关使用 2D 傅里叶变换函数模拟光学成像系统的一些重要方面。

通过对第三章中所讨论的采样思想的介绍，我们现在可以用采样来在空间带宽积 $N \approx 4BL$ 表示长度超过 $2L$ 有效带宽超过 $2B$ 的信号 $g(0/2B), g(1/2B), \dots, g((N-1)/2B)$ 。离散的傅里叶变换可以被定义为：

$$G\left(\frac{m}{2L}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} g\left(\frac{n}{2B}\right) \exp(-i2\pi mn/N) \quad (2.1)$$

相应的傅里叶逆变换可以被定义为

$$g\left(\frac{n}{2B}\right) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} G\left(\frac{m}{2L}\right) \exp(i2\pi mn/N) \quad (2.2)$$

我们注意到，当信号仅通过离散样本集定义在 $x : (-L, L)$ 上时，上述离散傅里叶变换操作近似于傅里叶变换的连续积分形式。空域样本的周期为 $1/(2B)$ ，而频域周期为 $1/(2L)$ 。在大多数情况下，通常会省略 $2B, 2L$ ，但在这里我们保留这个参数。可以观察到正向和反向 DFT 是线性变换，可以以矩阵形式编写。例如使用符号

$$\omega = \exp(i2\pi/N) \quad (2.3)$$

, 对于 N 个以 1 为开始的变换 Eq.2.1 可以写成

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}\mathbf{g} \quad (2.4)$$

或者

$$\begin{pmatrix} G\left(\frac{0}{2L}\right) \\ G\left(\frac{1}{2L}\right) \\ \vdots \\ G\left(\frac{N-1}{2L}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \cdots & \omega^{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \cdots & \omega^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g\left(\frac{0}{2B}\right) \\ g\left(\frac{1}{2B}\right) \\ \cdot \\ g\left(\frac{N-1}{2B}\right) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

我们可以注意到 ω 满足

$$\omega^{(N-m)} = \omega^{-m} \quad (2.6)$$

结果，频率 $0/(2L), 1/(2L), \dots, (N-1)/(2L)$ 形成离散傅立叶变换 G 的自变量可以被重新排序为正和负频率。用于定义正和负频率的典型约定如下：

1. N 为基数： $\nu = 0/(2L)$ 是零频率或 dc 项， $\nu = 1/(2L)$ 到 $\nu = (N/2)/2L$ 被视为正频率，而 $\nu = (N/2) + 1/(2L)$ 到 $\nu = (N-1)/2L$ 被视为负频率。
2. N 为偶数， $\nu = 0/(2L)$ 是零频率或 dc 项， $\nu = 1/(2L)$ 到 $\nu = ((N+1)/2)/2L$ 被视为正频率，而 $\nu = ((N+3)/2)/2L$ 到 $\nu = (N-1)/2L$ 被视为负频率。

定义了负频率之后，根据 Eq.2.6 的 ω 的性质， $\nu = (N-1)/2L$ 等效于 $\nu = -1/2L$ ，并依此类推。

2.2 使用 2D 快速傅立叶变换解决光学问题

在不考虑变换矩阵 F 的任何属性的情况下，我们注意到计算离散傅里叶变换将需要 N^2 乘法运算。Cooley 和 Tukey 在 1965 年发布了一种利用 F 矩阵的对称性并将乘法运算的数量减少到 $N \log N$ 数量级的算法时，取得了长足的进步。用于计算 DFT 的相应算法称为快速傅立叶变换 (FFT)。FFT 算法的思想可以追溯到高斯 (Gauss) 的出版物，但是在 Cooley 和 Tukey 的工作之后，这一意义得到了重视。FFT 现在已成为基准，在计算复杂度方面经常将其与其他算法进行比较。我们将不提供 FFT 理论背后的详细讨论，而只会向读者介绍使用 FFT 算法的操作方面，而 FFT 算法现在可以在广泛使用的计算工具（例如 MATLAB, SciLab, NumPy 等）中使用。

正如我们将在本书的后续章节中看到的那样，傅立叶变换自然发生在光波传播，光学信息处理方法等的研究中。在光学和其他成像系统进行建模，分析和合成的数字处理方法中广泛的用到 FFT 算法。在这些应用中，重要的是要了解任何标准二维 FFT 工具提供的结果的含义以及正确使用功能，以便从物理学的角度来看这些结果有意义。

我们将提供 2D rect 函数的 2D 傅里叶变换的计算示例。如图 2.1 所示，在大

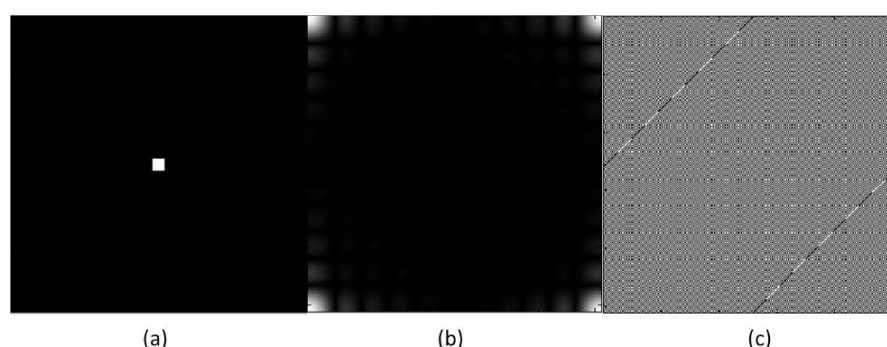


图 2.1: 2 维矩形函数的 2 维傅里叶变换。(a)rect 函数；傅里叶变换后的振幅是 (b) 相位为 (c)。相位函数中的暗像素和亮像素分别对应于 0 和 π 的相位值。

小为 255×255 的 2D 网格上定义了大小等于 11 个像素的 rect 函数。

图图 2.1 (b) 和 (c) 分别显示了通过简单应用上述标准计算工具中的函数 *fft2* 获得的图像的幅度和相位。结果看起来不像预期的 2D Sinc 函数。我们注意到，sinc 函数的中央波瓣现在分布在所得图像的拐角附近。这是因为标准 FFT

工具的零频分量在合成矢量的开头而不是其中心处。一个常见的解决方法是在结果上使用 `fftshift` 功能，该功能可使零频率回到图像中心。在 `rect` 函数上应用序

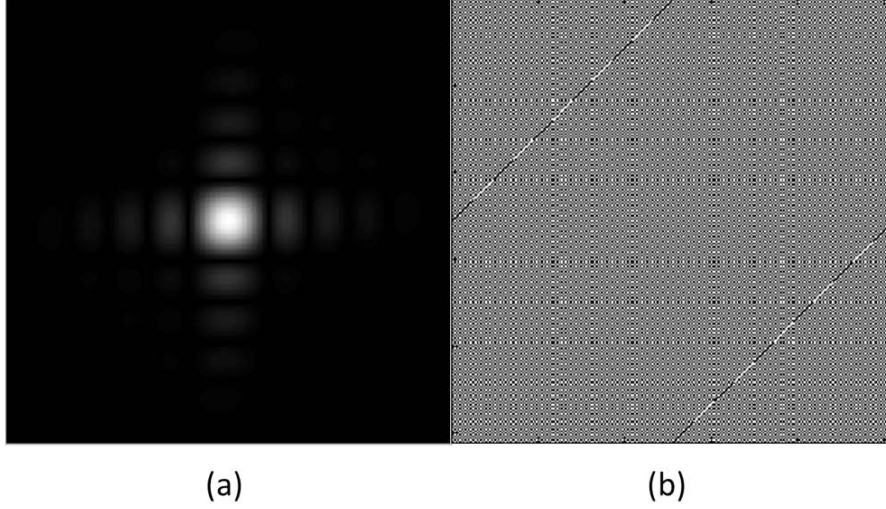


图 2.2: 在 2D 矩形函数对象上应用序列 $fftshift(fft2(...))$ 的结果

列 $fftshift(fft2(...))$ 分别得到如图 2.2 (a) 和 (b) 所示的幅度和相位。这里的幅度部分看起来很合理，但是相位仍然不是期望的正弦函数。这个结果可以理解如下，将傅立叶变换计算为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \text{rect} \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right) \exp [-i2\pi (f_x x + f_y y)] \quad (2.7)$$

应用于 `rect` 函数中心的正确相位值对应于零（因为 $x = 0, y = 0$ ）。但是，根据标准 FFT 约定，该点的相位应用于图像的一角。因此，必须使用标准的 `ifftshift` 函数对要进行傅里叶变换的初始图像进行适当的修改，该函数通过交换象限将图像的中心移到角落。因此，要在大多数编程平台中 2D FFT 的适当顺序对于从物理角度来看有意义的结果（例如在描述衍射现象）中有意义，应该使用的计算顺序是 $fftshift(fft2(ifftshift(...)))$ 。用此序列计算出的 `rect` 函数的 2D FFT 的幅度和相位如图 2.3(a),(b) 所示。现在，振幅和相位都是光学中的常规要求。因此，合适的逆傅里叶变换可以是 $fftshift(ifft2(ifftshift(...)))$ 。

函数 `fftshift` 和 `ifftshift` 对于偶数维矢量通常是相同的，但对于奇数维矢量则相差一个像素。而无论所涉及的矢量的维数是偶数还是奇数，上述正向和反向 FFT 的两个序列都可以按照光学的标准惯例用于产生正确的相位行为。我

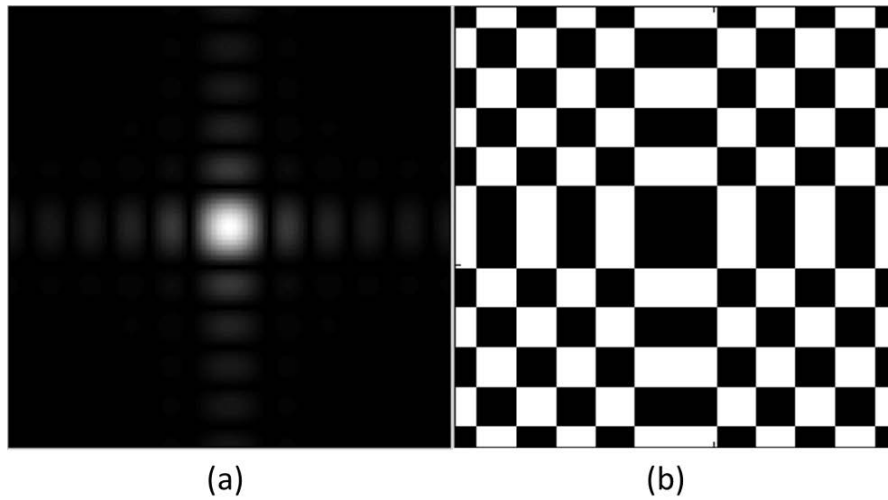


图 2.3: 在 2D 矩形函数对象上应用序列 $\text{fftshift}(\text{fft2}(\text{ifftshift}(\dots)))$ 的结果

们已经为研究人员常用的计算工具提供了 FFT 例程的操作介绍。此处通过示例说明了有关 fftshift 和 ifftshift 函数以及 fft 例程的用法的细微之处。这些主题已在此处进行了讨论，因为当初学者或学生开始研究与光学成像和衍射现象有关的基于 FFT 的仿真时，它们似乎是常见的错误来源。

3 线性系统的形式和成像逆问题介绍

借助傅立叶变换理论，我们可以掌握诸如 delta 函数（以及其他广义函数）和采样定理之类的思想。现在我们可以开发线性系统形式，这将在研究诸如衍射现象，成像系统，光息处理等方面非常有用。线性系统的示意图。这张图片涉及到本书几个有趣的问题。假设一个输入信号 $g_i(x', y')$ 可以被表示为某些波面的复振幅或者强度。这些输入由系统变换至输出 $g_o(x, y)$ 。现在，我们将简单地假设输入和输出通常是复杂值的函数，而无需为其赋予任何物理意义。当我们研究衍射，成像和其他相关主题时，其物理含义将很清楚。这里线性的含义是，假设我们有两个输入 g_{1i}, g_{2i} 对应的输出为 g_{1o}, g_{2o} 。对于任意的线性叠加 $(\alpha g_{1i} + \beta g_{2i})$ ，系统的输出为 $(\alpha g_{1o} + \beta g_{2o})$ 。在本书的后面，我们将把输入和输出功能与系统输入和输出处的光波场相关联。有助于描述光波（电磁波）传播的麦克斯韦方程组本质上是线性的，因此线性系统模型在成像应用中的重要性并不令人惊讶。线性

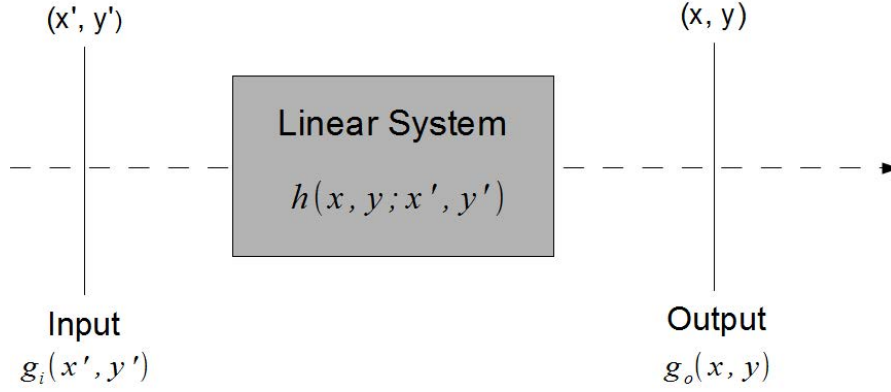


图 3.1: 线性系统模型

属性表明，与其使用任意输入函数，不如使用某些基本函数集，它们构成了表示输入信号的合适基。然后，对系统的分析简化为研究系统对基本功能的响应。一个有趣的基础集是位于输入平面每个点上的 spikes 或 delta 函数集。例如，我们可以将输入表示为 delta 函数的总和：

$$g_i(x', y') = \iint du dv g_i(u, v) \delta(x' - u, y' - v) \quad (3.1)$$

为了找到系统 $g_o(x, y)$ 的输出，我们现在要做的就是找到系统对位于每个点 (u, v) 的 delta 函数的响应，通过输入 $g_i(u, v)$ 的值加权响应，然后在 (u, v) 平面上积分，我们可以用 $h(x, y; x', y')$ 表示系统对增量峰值的响应。换句话说，如果系统的输入是在 (x', y') 处的 delta 函数，则系统的响应将由 (x, y) 平面中的函数 h 给出。假设我们有一个显微镜在观察“点”源，输出是某种点的模糊（例如艾里环），就是函数 h 。如果我们将要成像的对象视为点源的集合，那么生成的图像将是与对象和图像平面中的点对 $(x', y'), (x, y)$ 对应的模糊函数的总和。我们将 $h(x, y; x', y')$ 称为系统的脉冲响应。系统的输出可以表示为

$$g_o(x, y) = \iint du dv g_i(u, v) h(x, y; u, v) \quad (3.2)$$

脉冲响应的想法在工程和科学的许多分支中都很常见，在物理学文献中该概念的另一个名称是格林函数。

3.1 空不变系统脉冲响应

当系统具有空间不变性的附加属性时, 脉冲响应的想法特别有用。如果脉冲响应的功能形式不取决于 δ 函数在输入平面中的位置, 则系统是空间不变的。在输入平面上移动 δ 脉冲的结果只是在输出平面上转换响应函数-它不会改变其形式或形状。如果系统是空间不变的, 我们可以将脉冲响应表示为:

$$h(x, y; x', y') = h(x - x', y - y') \quad (3.3)$$

假设位于 $(x', y') = (0, 0)$ 的单位强度的点源产生输出 $h(x, y)$ 。空间不变性意味着将输入点源移至 $(x', y') = (a, b)$ 将产生输出 $h(x - a, y - b)$ 。对于大多数常见的光学成像系统, 此空间不变性模型是一个很好的近似值, 但是该模型并不精确。对于典型的成像系统, 空间不变性保持在光轴附近。对于远离光轴的点, 可能会观察到 h 形式的畸变 (像差)。出于所有实际目的, 我们将假定空间不变性近似是有效的, 因为这将使我们能够使用傅立叶变换理论-特别是卷积性质-并开发出形式形式, 以理解和分析成像现象。通过空间不变性, 线性系统的输入输出关系为卷积关系:

$$g_o(x, y) = \iint dx' dy' g_i(x', y') h(x - x', y - y') \quad (3.4)$$

可以使用傅立叶变换的卷积属性来写傅立叶空间中的等效关系:

$$G_o(f_x, f_y) = H(f_x, f_y) G_i(f_x, f_y) \quad (3.5)$$

。 G_o, H 和 G_i 分别表示输出 G_o 的 2D 傅里叶变换, 脉冲响应 h 和输入 G_i 。 $H(f_x, f_y)$ 描述了系统对空间频率空间中输入的影响, 通常被称为系统的传递函数。一般而言, 上述关系非常重要, 对于研究衍射和成像现象至关重要。注意在设计新系统时, 频率空间上的乘法对于概念的理解比卷积要容易得多。传递函数赋予各个空间频率一个权重, 该权重通常同时具有振幅和相位。它们只是移位的 δ 函数基础的傅立叶变换-或复指数 $\exp[i2\pi(f_x x + f_y y)]$ 。我们可以认为成像系统的操作如下: 根据复指数分解输入和输出, 并通过传递函数的数值将输入和输出的各个空间频率分量相关联。然后可以通过逆傅立叶变换所得乘积来计算最终输出 g_o 进入 (x, y) 域。当无法在整个视场上进行空间不变性近似时, 可以将图像划分为小块, 以使空间不变性大致保持在图像块上

3.2 反问题的不适定性

在上一节中，我们描述了与成像现象相关的常用线性系统模型。随着计算方法成为成像系统的组成部分，讨论一些基本问题是非常重要的，这些基本问题在解决使用输出的全部或部分测量来获得输入函数 g_i 的反问题时会出现。我们首先观察到 g_o 通常使用某些检测器来测量行程。如果我们关联输出场 g_o ，那么任何光学检测器通常会检测与 $|g_o|^2$ 成正比的光强度。

为了简单起见并为了讨论的目的，我们可以假设在实验室中可以测量 g_o ，例如。通过干涉测量装置。重要的是要注意，测量过程本质上是统计上的，我们通常可以使用的输出函数包括噪声 $n(x, y)$ ，其最简单的形式可以被认为是可加的。

$$\tilde{g}_o(x, y) = \iint dx' dy' g_i(x', y') h(x - x', y - y') + n(x, y) \quad (3.6)$$

噪声是由于检测过程的统计性质的结合以及与光波本身相关的基本统计波动而产生的。在任何实际系统中，噪声 $n(x, y)$ 永远都不理想地为零。让我们进一步考虑与三角函数输入相关的脉冲响应 $h(x, y)$ 的名义形式。对于任何实际系统，传递函数 $H(f_x, f_y)$ 都在有限的空间频率范围内扩展，并且脉冲响应函数 $h(x, y)$ 的展宽与传递函数在空间频率上的展宽成反比。因此，从对象到图像空间的向前操作通常是模糊操作。

我们观察到基于测量 $\tilde{g}_o(x, y)$ 获得 $g_i(x, y)$ 的反问题的重要性质。考虑一个系统 $g_i(x, y)$ ，该方案理想情况下会在系统的输出处生成 $g_o(x, y)$ 。有趣的是，任何形式的 $g_i(x, y) + A \cos(\omega_x x + \omega_y y)$ 的任何其他方案，对于足够大的 ω_x, ω_y 值，因为 $h(x, y)$ 的模糊性导致高振荡的加权平均项平均为零。

在如此宽泛的解决方案之间进行区分并不容易，因为它们在输出端的噪声限制内产生几乎相同的输出。这种差异很大的输入功能可能在实验室环境中产生几乎无法区分的输出的可能性通常称为 ill-posedness。Hadamard 在 1920 年代首次正式讨论了不适定性作为实际反问题的一般属性。为了解决 ill-posedness 带来的困难，需要精心设计反问题，以便可以通过任何实际的计算成像来获得针对当前问题的有意义的解决方案。在以下各节中，我们将说明这方面的一些重要方法。

3.3 逆滤波

逆滤波器是解决从测量的输出 \tilde{g}_o 获得输入 $g_i(x, y)$ 的问题的一种简单解决方案。此处包含此方法，因为它清楚地说明了上一部分中讨论的由于不适而造成

的困难。忽略输出中的噪声并使用等 Eq.3.5，名义上可以将逆解写为：

$$g_i(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{G_o(f_x, f_y)}{H(f_x, f_y)} \right] \quad (3.7)$$

函数 $1/H(f_x, f_y)$ 在这里被称为逆滤波器。不幸的是，我们无法知道 $G_o(f_x, f_y)$ ，而只能访问它的噪声版本 $\tilde{G}_o(f_x, f_y) = \mathcal{F}[\tilde{g}_o(x, y)]$ 。使用噪声输出 $\tilde{g}_i(x, y)$ 的估计可以写为：

$$\tilde{g}_i(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\tilde{G}_o(f_x, f_y)}{H(f_x, f_y)} \right] \quad (3.8)$$

在数值计算中，可以用小的常数替换 H 中的任何零值，以避免被零除。图 3.2 中

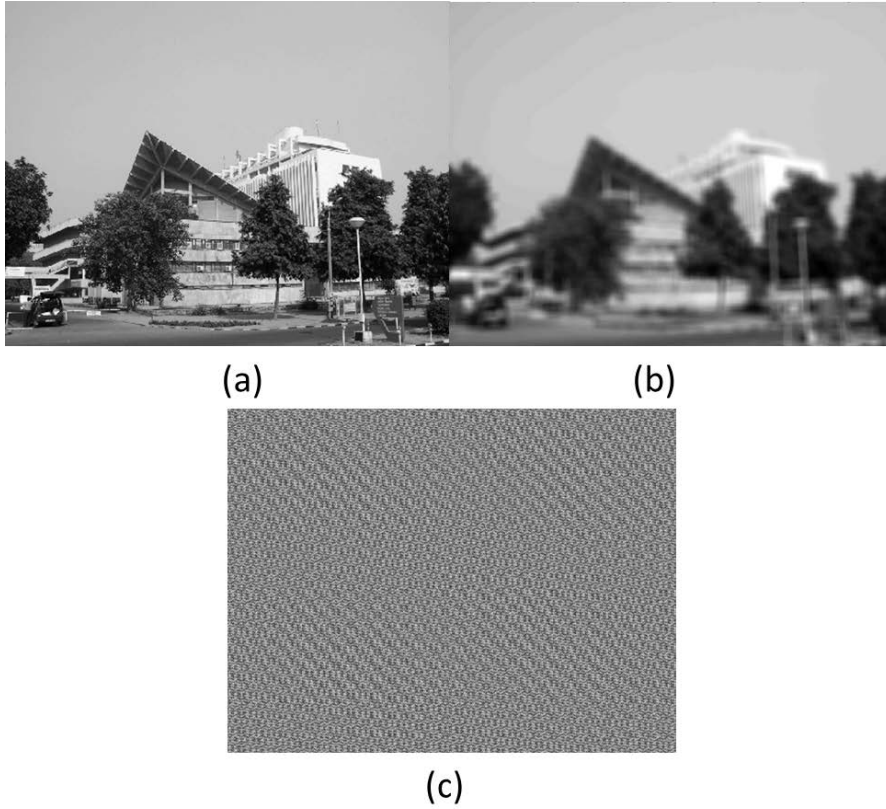


图 3.2: 简单逆滤波的例子。(a) 原始图 (b) 使用 20×20 的平均并且添加均匀随机噪声。(c) 逆滤波复原图

的插图显示了 20×20 像素平方平均滤波器（具有 1% 的附加噪声）对图片的影响，然后尝试使用简单的逆滤波器进行图像恢复。滤波器 $h(x, y)$ 和相应的传递



图 3.3: (a) 图 5.2 中使用的 20 20 像素平均滤波器 $h(x, y)$ 和 (b) 相应的传递函数 $H(f_x, f_y)$ 的绝对值。

函数 $H(f_x, f_y)$ 的绝对值如图 3.3 所示。图 3.2 中的恢复似乎完全没有意义。这是因为我们仅将模糊图像的傅立叶变换除以 H 傅立叶变换。函数 $H(f_x, f_y)$ 在有限区域或孤立的线/点上具有零（或非常小的值），如图 3.3 所示，并且除以这些小值会大大增强相应的频率分量。特别是在存在噪音的情况下，其中一些组件可能会在恢复过程中产生完全不希望的大振荡，如图 3.2 所示。要注意的是，如果将平均滤波器 $h(x, y)$ 应用于该恢复，则其产生的结果与图 3.2 (b) 中的模糊图片几乎相同。因此，这是一种与模糊图像数据一致的解决方案，但从实际角度来看，这种恢复根本没有用。该图显示了由于反问题的不适定性造成的困难。因此，诸如逆滤波器之类的简单解决方案是不合适的。必须构造一种解决方案，该解决方案可提供视觉上有趣的结果，并与模糊图像数据合理地保持一致。我们观察到，即使对于一个简单的问题，也需要对逆进行更复杂的处理来以获得有用的图像恢复。

3.4 维纳滤波

Norbert Wiener 首次提出了使用噪声的统计特性来设计适当的逆恢复滤波器的想法。我们将假设一个滤波器 $w(x, y)$ 使得当将其应用于输出 $\tilde{g}_o(x, y)$ 时，解 $\tilde{g}_i(x, y)$ 的估计为

$$\tilde{g}_i(x, y) = \iint dx' dy' \tilde{g}_o(x', y') w(x - x', y - y') \quad (3.9)$$

为了获得与噪声数据一致的信号，进一步的解决方案是预期的最小二乘误差：

$$\epsilon = \langle \|g_i(x, y) - \tilde{g}_i(x, y)\|^2 \rangle \quad (3.10)$$

是最小的。符号 $\|...\|$ 表示标准得 L2 范数， $\langle ... \rangle$ 表示集合平均。为了导出滤波器，我们将通过利用 Parseval 定理⁴，在傅立叶变换中表达误差 ϵ 。

$$\begin{aligned} \epsilon &= \langle \|G_i(f_x, f_y) - \tilde{G}_i(f_x, f_y)\|^2 \rangle \\ &= \langle \|G_i(f_x, f_y) - W(f_x, f_y) [G_i(f_x, f_y) H + N(f_x, f_y)]\|^2 \rangle \\ &= \langle \|(1 - WH)G_i - WN\|^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.11)$$

这里 $W(f_x, f_y), N(f_x, f_y)$ 是 $\omega(x, y), n(x, y)$ 的傅里叶变换。我们将展开上述表达式中的项，并将包含 $\langle G_i(f_x, f_y) N^*(f_x, f_y) \rangle$ 或其复共轭的交叉项等同为零。这是有道理的，因为预计噪声不会与我们要恢复的输入对象函数 $g_i(x, y)$ 相关。此外，我们将与物体和噪声相关的功率谱表示为： $S_{obj}(f_x, f_y) = \langle |G_i(f_x, f_y)|^2 \rangle$ ， $S_{noise}(f_x, f_y) = \langle |N(f_x, f_y)|^2 \rangle$ 。上面的平方误差现在可以更明确地写为：

$$\begin{aligned} \epsilon &= \iint df_x df_y [|1 - W(f_x, f_y) H(f_x, f_y)|^2 S_{obj}(f_x, f_y) \\ &\quad + |W(f_x, f_y)|^2 S_{noise}(f_x, f_y)] \end{aligned} \quad (3.12)$$

我们注意到，误差 ϵ 是 W, W^* 的函数。为了找到使误差最小的适当 $W(f_x, f_y)$ ，我们必须将 $\nabla_{W^*} \epsilon$ 等于 0，并且得到的 $W(f_x, f_y)$ 解由下式给出：

$$W(f_x, f_y) = \frac{H^*(f_x, f_y)}{|H(f_x, f_y)|^2 + \frac{S_{noise}(f_x, f_y)}{S_{obj}(f_x, f_y)}} \quad (3.13)$$

有关为了最小化目的而针对共轭 W^* 采取梯度的更多详细信息，读者将必须等到下一章约束优化。滤波器明确包含对象和噪声功率谱。上面分母中的第二项是特定空间频率 (f_x, f_y) 处的信噪比 (SNR) 的倒数。对于 SNR 高的空间频率，我们得到的表达式接近于逆滤波器，而当 SNR 非常低时，滤波器有效地从恢复中消除了相应的空间频率。对物体和噪声功率谱的大概了解足以满足大多数实际目的。功率谱可以基于与特定类别的图像（例如自然风光，面部，文本等）相关联的平均傅立叶谱，该特定类别的图像可能对解决特定问题。在图 3.4 (a) 中，使

$$\begin{aligned} &\frac{\int_{-\infty}^{\infty} df_x |G(f_x)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x) g^*(x) \delta(x - x')} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |g(x)|^2 \end{aligned}$$

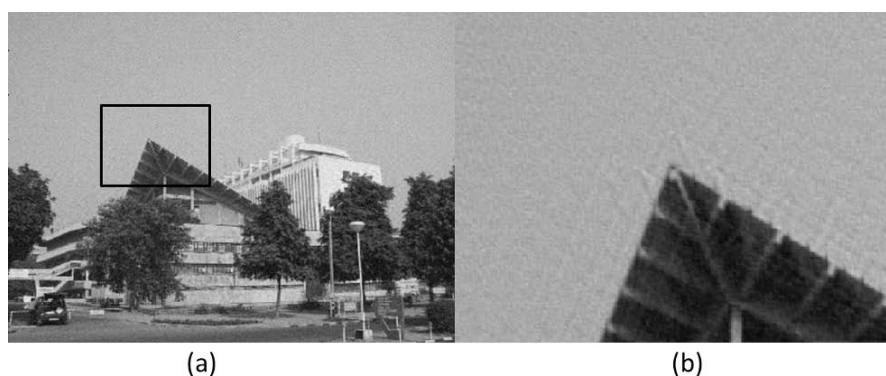


图 3.4: (a) 使用维纳滤镜进行图像恢复, (b) 恢复图像的放大部分

用了与上一节的相同示例, 我们显示了使用维纳滤波器的图像恢复。

我们注意到, 与图 3.2(c) 相比, 现在的恢复更有意义。滤波器已恢复在模糊过程中丢失的细节。如图 3.4 (b) 所示, 结果在外观上也有些嘈杂, 并且在尖锐边缘附近有一些振铃伪影, 这是图 3.4 (a) 中一小部分恢复后的放大图。这些伪像是维纳过滤器恢复过程的典型特征。尽管维纳滤波器考虑了噪声功率谱, 但是恢复图像的感知质量不一定是最佳的。例如, 具有低局部噪声的图像仍保留清晰的边缘, 具有更好的视觉质量。可以通过选择适当的约束将这种要求合并到重构算法中, 这将在下一章中进行介绍。

从此处所示的模糊和嘈杂的版本恢复合理的图像, 使我们可以考虑计算光学成像系统, 其中记录的原始数据不能很好地表示我们希望恢复的图像。然后去模糊操作 (例如使用维纳滤波器) 恢复更合适的图像。系统设计涉及针对原始数据记录的受控模糊处理, 通过对图像进行去模糊处理, 可以在设计中提供很大的灵活性, 并允许有趣的应用程序, 例如扩展的景深成像, 这将在本书的后面部分进行介绍。

4 图像恢复中的约束优化算法