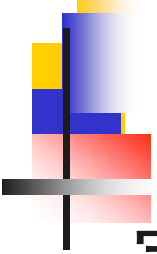




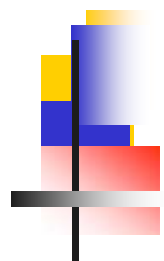
第一章 排列与组合

回顾



定义 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是 n 个不同元素的集合， r 满足 $0 \leq r \leq n$ ，任取 A 中 r 个（不重复的）元素，按次序排列，称为从 n 个中取 r 个的一个（无重）排列。排列的个数用 P_n^r 或 $P(n, r)$ 表示。当 $r=n$ 时称为全排列。一般不说可重即无重。

回顾

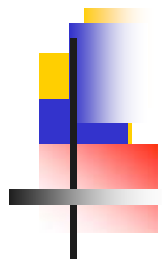


从 n 个中取 r 个的排列的典型例子是从 n 个不同的球中, 取出 r 个, 放入 r 个不同的盒子里, 每盒1个。第1个盒子有 n 种选择, 第2个有 $n-1$ 种选择, \cdots , 第 r 个有 $n-r+1$ 种选择。

故有

$$P(n, r) = n(n-1) \cdots (n-r+1)$$

回顾



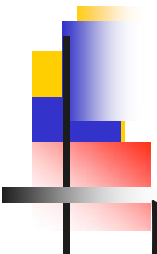
由 $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$, 有

$$P(n, r) = n! / (n-r)!$$

令 $0! = 1$, 所以 $P(n, 0) = 1$, $P(n, n) = n!$

回顾

如果参与排列的元素有重复呢？



例1 (教材1-13) 由5种颜色的星状物，20种不同的花排成如下要求的5个对象的图案：两边是星状物，中间是3朵花。问共有多少种这样的图案？

5种颜色的星状物取2个的排列的个数为

$$P_5^2 = 5 \times 4 = 20,$$

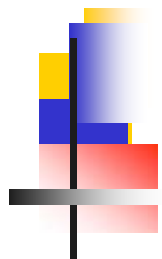
20种不同的花，取3种排列的个数为

$$P_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$$

共有图案数为

$$20 \times 6840 = 136800$$

1.4 多重集合的表示



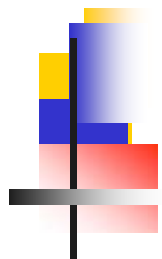
自由多重

$$\mathbf{M} = \{\infty a_1, \infty a_2, \dots, \infty a_n\}$$

受限多重

$$\mathbf{M} = \{k_1 a_1, k_2 a_2, \dots, k_n a_n\}$$

1.5 多重排列



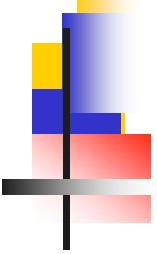
自由多重

$$M = \{\infty a_1, \infty a_2, \dots, \infty a_n\}$$

从中取 r 个作多重排列，排列数为？ n^r

受限情况下呢？

1.5 多重排列




求 k_1 个 a_1 , k_2 个 a_2 , ..., k_n 个 a_n 的排列数, 设
 $k_1+k_2+\dots+k_n=r$, 设此排列数为 $P(r; k_1, k_2, \dots, k_n)$,
对 a_1, a_2, \dots, a_n 分别加下标, 得到

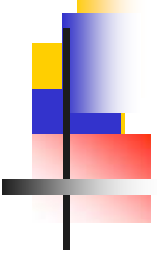
$$P(r; k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{r!}{k_1! k_2! \dots k_n!} = \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_t}$$

这是一种元素重复的全排列!

1.5 多重排列



能否用
隔板法
?




例1-20 红、黄、蓝、绿四种颜色的旗帜各四面，共16面排成一行，问有多少种不同的方案？

[解]先将16面旗帜全部看成是有区别的，有 $16!$ 种排列，但每一种颜色的4面旗帜是相同的，重复度为 $4!$ ，4种颜色重复度为 $(4!)^4$ ，故不同的方案数为

$$16! / (4!)^4 = 63063000$$

1.5 多重排列



例1-21 用 1×1 , 1×2 , 1×3 的方块铺设 1×7 的模块, 试问有几种模式?

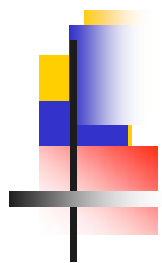
[解](1)用7块 1×1 的成品, 模式为1种;

(2)用5块 1×1 , 1块 1×2 的成品, 模式
 $6!/5!=6$ 种;

(3)用4块 1×1 , 1块 1×3 的成品, 模式
 $5!/4!=5$ 种;

(4)用3块 1×1 , 2块 1×2 , 模式
 $5!/3!/2!=10$ 种;

1.5 多重排列



(5) 用**2**块 1×1 , 1×2 、 1×3 各1块, 模式
 $4!/2!=12$ 种;

(6) 用**1**块 1×1 , 3块 1×2 , 模式 $4!/3!=4$ 种;

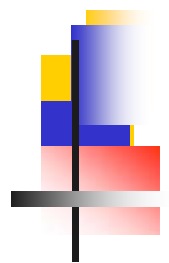
(7) 用**1**块 1×1 , 2块 1×3 , 模式 $3!/2!=3$ 种;

(8) 用**2**块 1×2 , 1块 1×3 , 模式 $3!/2!=3$ 种;

总共有

$1+6+5+10+12+4+3+3=44$ 种模式。

1.5 多重排列

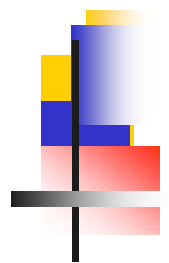


如果不是全排列呢？

由3个a，4个b和5个c构成长度为11的排列，
排列数多少个？

由3个a，4个b和5个c构成长度为10的排列，
排列数多少个？

1.5 多重排列



延伸1：特定排列也会产生多重排列结果

6个人排队，甲、乙、丙三人按

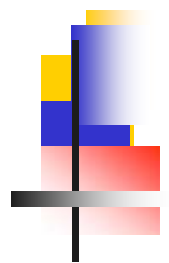
“甲---乙---丙”

顺序排的排队方法有多少种？

甲乙丙的特定排列消除了甲乙丙排列的差异

$$\frac{6!}{3!}$$

1.5 多重排列



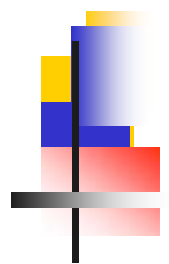
延伸1：特定排列也会产生多重排列结果

4个男生和3个女生，高矮不相等，现在将他们排成一行，要求**从左到右女生从矮到高排列**，有多少种排法。

女生的特定排列消除了女生排列的差异

$$\frac{7!}{3!}$$

Topic 2 分组问题



例1-22

八个人分成四组，每组二人，有几种方案？

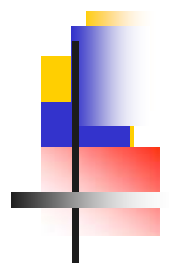
解法1：第一组 $C(8,2)$ ，余下六人

第二组 $C(6,2)$ ，余下四人

第三组 $C(4,2)$ ，余下两人

$C(8,2) C(6,2) C(4,2)/4!$

Topic 2 分组问题



例1-22

八个人分成四组，每组二人，有几种方案？

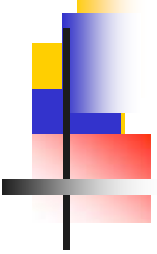
解法2：八个人全排列共4！

每组内可以互换，组内重复2。四个组重复度4！

注意：分组没区别

$$8! / (4! 2^4)$$

Topic 2 分组问题

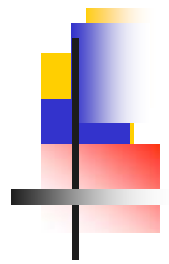


例 6名学生报考研究生，共有3名导师，每个导师招两人，共有多少方案？

注意：导师有区别

$$6! / (2! 2! 2!)$$

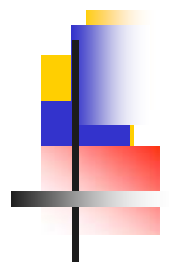
Topic 2 分组问题



例 将52张牌分给13人，每人4张，几种分法？

$$\frac{52!}{(4!)^{13}}$$

Topic 2 分组问题



例 10男10女乘车出游，每车2男2女，几种方案？假设车辆无区别

多队分组

$$\frac{(10!)^2}{5! \times 2^{10}}$$

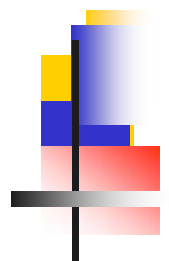
若有一对男女要求同车呢？

$$\frac{(9!)^2}{4! \times 2^8}$$

若有两对男女要求同车呢？

$$\frac{(8!)^2}{4! \times 2^8} + (P_8^2)^2 \frac{(6!)^2}{3! \times 2^6}$$

1.5 多重排列



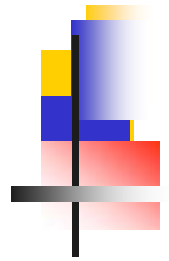
延伸2：多重排列与组合

定义 当从 n 个元素中取出 r 个而不考虑它的顺序时，称为从 n 个中取 r 个的**组合**。其数目记为 $C(n, r)$ ， C^r 或 $\binom{n}{r}$ 。

可以看作分成两组

多重排列既可以看作排列的拓展，也可以看作组合的拓展

Topic 3 配对问题



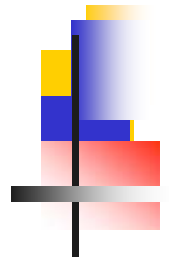
2n个物品两两配对

(同一组之内两两配对, 也就是分组)

$$\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

分成两组配对呢?

Topic 3 配对问题



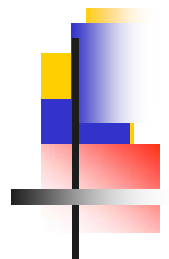
两组物品，每组 n 个不同物品，两两配对
 $n!$

也就是置换（双射）

10男10女参加舞会，男女搭伴跳舞，有多少种配对方案？ $10!$

10男10女参加舞会，男女搭伴跳舞，每对按顺序出场，有多少种配对方案？ $(10!)^2$

Topic 3 配对问题



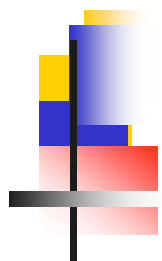
两组物品，一组 n 个不同物品，另一组 m 个不同物品， $n \leq m$ ，两两配成 n 对

$$C_m^n n! = \frac{m!}{(m-n)!} = P_m^n = m \times (m-1) \times \cdots \times (m-n+1)$$

15男10女参加舞会，男女搭伴跳舞，最多有多少种配对方案？ $15 \times 14 \times \cdots \times 6$

15男10女参加舞会，男女搭伴组成5对跳舞，每对按顺序出场，有多少种配对方案？

$$C_{15}^5 C_{10}^5 (5!)^2$$



1.5 多重排列

例17 (教材1-23) 某车站有6个入口处，每个入口处每次只能进一人，一组9个人进站的方案有多少？

[解] 9个人与5个门柱的全排列，再消除门柱的重复度。（一种特殊的分组，与前面的分组问题有什么区别？）

$$\frac{14!}{5!}$$

结论

自由多重排列

$$M = \{\infty a_1, \infty a_2, \dots, \infty a_n\}$$

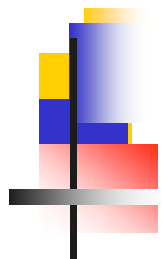
从中取 r 个作多重排列，排列数为 n^r

受限多重排列

$$M = \{k_1 a_1, k_2 a_2, \dots, k_n a_n\}$$

其全排列为 $\frac{(k_1 + \dots + k_n)!}{k_1! \dots k_n!}$

思考



自由多重

$$\mathbf{M} = \{\infty a_1, \infty a_2, \dots, \infty a_n\}$$

受限多重

$$\mathbf{M} = \{k_1 a_1, k_2 a_2, \dots, k_n a_n\}$$

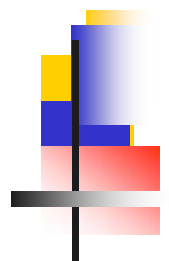
能否多重组合?

作业

要写出简要推导过程

1. 将52张牌分给4人，每人13张，每人有三种不同花色各三张，还有四张都是第4种花色，几种分法？
2. 将52张牌分给4人，每人13张，每人有一个5张牌的同花顺，几种分法？（思考题，选做）
3. 将mathematics的字母加以排列，有多少种不同的字符串。
4. 在alabama的排列中，4个a全不在一起的排列有多少？

作业



5. 在opossum的排列中，p直接在o后面的排列有多少？
6. 在karakule的排列中，没有两个元音并排的排列有多少？
7. 在mississippi的排列中，不存在两个i相邻的排列有多少？
8. 在parallelism的排列中，不改变元音字母顺序的排列有多少？