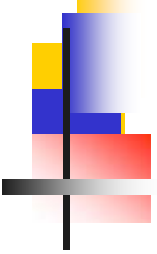




# 第一章 排列与组合

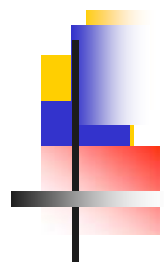
## 1.5 圆周排列



定义 前面讨论的排列是排成一行，如果排列在一个圆周上，则称为圆周排列，或简称为圆排列。

从  $n$  个对象中取  $r$  个沿一周的排列排列数用  $Q_n^r$  或  $Q(n, r)$  表示。

## 1.5 圆周排列

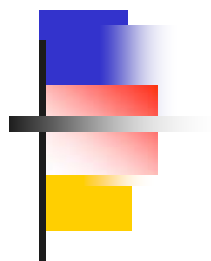


从  $n$  个对象中取  $r$  个沿一周的排列排列数  $Q_n^r$  与  $P_n^r$  的关系是

$$Q_n^r = P_n^r / r$$

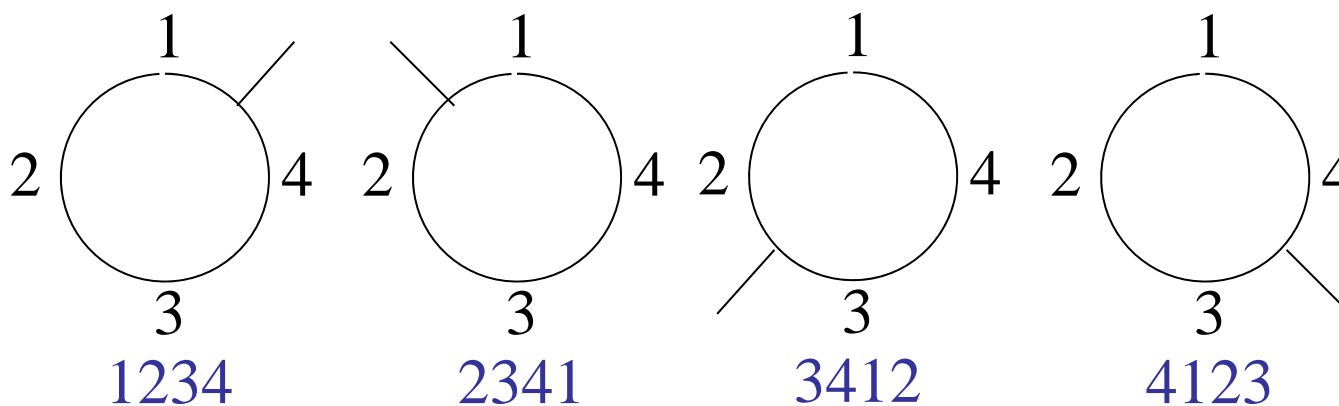
特别地，有  $Q_n^n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$

这是因为，对同一  $r$  个元素的圆排列，从  $r$  个不同的地方断开，可得到  $r$  个不同的  $r$  个元素的排列，即  $r$  个不同的  $r$  个元素的排列对应同一  $r$  个元素的圆排列。

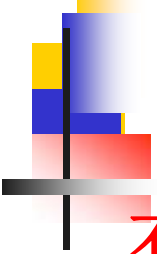


## 1.5 圆周排列

以4个元素为例



## 1.5 圆周排列



例1-25 5颗有区别的红色珠子， 3颗有区别的蓝色珠子装在圆板的四周，试问有多少种方案？若蓝色珠子不相邻又有多少种排列方案？蓝色珠子在一起又如何？（注意：这里珠子有区别，可以看成男生女生）

若不加限制，则有  $Q_8^8 = 7!$  种排列方案。若要求蓝色珠子在一起，其实是把它们看作同一元素进行圆排列，则为

$$Q_6^6 \times 3! = 5! \times 3!$$

## 1.5 圆周排列

最后讨论蓝色珠子不相邻的情况。5颗红色的珠子的圆排列有 $4!$ 种。

第1个蓝色珠子有5种选择的可能（见图1.9）；第2个蓝色珠子为了避免与第1个蓝色珠子相邻，只能有4种选择；第3个蓝色珠子只有3种可能，故有

$$4! \times 5 \times 4 \times 3 = 1440$$

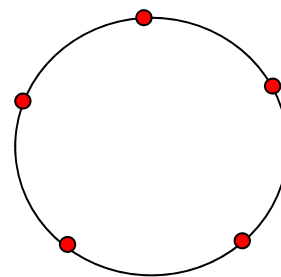



图1.9

## 1.5 圆周排列



例1-26 5对夫妇出席一宴会，围一圆桌坐下。试问有几种不同的方案？若要求每对夫妇相邻又有多少种方案？

5对夫妻10个人围圆桌而坐，则此问题相当于求

$$Q_{10}^{10} = 9! = 362880$$

若加上限制条件：夫妻相邻而坐，则可以考虑为5个元素的圆排列，排列数为 $4!$ 。但夫妇二人可以交换座位。故根据乘法法则，总方案数为

$$2^5 \times 4! = 32 \times 24 = 768$$

## 1.5 圆周排列

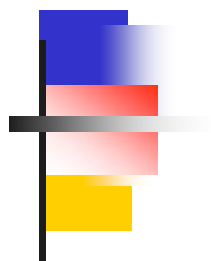


例 主人夫妇邀请另外三对夫妇共进晚餐，围一圆桌均匀而坐。

- 1 随意入座
- 2 男女相间入座
- 3 男女相间入座，且每对夫妻都相邻
- 4 男女相间入座，但每对夫妻不全相邻
- 5 男女相间入座，但每对夫妻都不相邻
- 6 男女相间入座，但主人夫妇不相邻

即并非每  
对夫妻都  
相邻





## 1.5 圆周排列

如果是正方形的桌子呢？

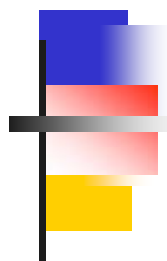
每边都是 $n/4$ 个人，每边是全排列，

$$\frac{P_n^n}{4}$$

如果是正 $k$ 边形呢？

$$\frac{P_n^n}{k}$$

$n$ 个人围一个圆桌实际可以简化为 $n$ 边形的桌子，每人一边。



## 1.5 圆周排列

5个红球，6个蓝球，7个黄球串成一个**项链**，多少种方案？**假定同色球无区别**

$18!$

这个答案有问题吗？

---

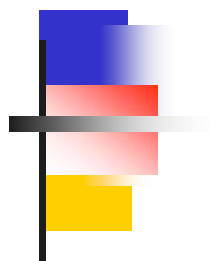
$$5! \times 6! \times 7! \times 18 \times 2$$

若取其中三个球串成一环，有几种方案？

3个相同颜色：3种。

3个不同颜色：**1种（项链）**

3个两种颜色： $P(3,2)$ （一种颜色2个球，一种颜色1个球，所以选取两种颜色有区别）



## 1.5 圆周排列

5个红球，6个蓝球，7个黄球串成一个项链，多少种方案？假定同色球无区别

$$18!$$

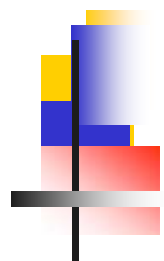
---

$$5! \times 6! \times 7! \times 18 \times 2$$

若取其中三个球串成一环，有几种方案？

$$3 + 1 + P(3, 2)$$

# 作业



1. 用7颗不同的珠子串成项链，有几种方式？
2. 用2颗红色的珠子和5颗蓝色的珠子，可组成几种不同的项链。
3. 一群客人围圆桌而坐，如果每个人的邻座客人都相同就看成是同一种方案，问
  - (1) 4个客人有几种方案？
  - (2) 7个客人有几种方案？
  - (3) 7个客人中有两人A和B一定要相邻，有几种方案？
  - (4) 7个客人中有两人A和B一定不相邻，有几种方案？