第二章 递推关系与母函数

回顾

纳入母函数
解法中

1. n个球有区别，m个盒子有区别，有空盒

$$m^n$$

$$G_e(x)=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^m=(e^x)^m$$

的 $\frac{x^n}{n!}$ 项系数

准许划分出空集

2. n个球有区别，m个盒子有区别，无空盒

$$m!S(n,m)$$

$$G_e(x)=(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^m=(e^x-1)^m$$

的 $\frac{x^n}{n!}$ 项系数

不准划分出空集

n个不同元素的集合划分成m个子集，考虑子集的顺序

有序的集合划分

回顾

通过Stirling数间接纳入母函数解法中

3. n个球有区别，m个盒子没区别，有空盒

$$S(n,1)+S(n,2)+\cdots+S(n,m),\quad n\geq m$$

$$S(n,1)+S(n,2)+\cdots+S(n,n),\quad n\leq m$$

准许划分出空集

4. n个球有区别，m个盒子没区别，无空盒

$$S(n,m)$$

不准划分出空集

n个不同元素的集合划分成m个子集，不考虑子集顺序

无序的集合划分

回顾

纳入母函数
解法中

5. n个球无区别，m个盒子有区别，有空盒

$$C(n+m-1,n)$$

$$G(x)=\frac{1}{(1-x)^m}$$ 的x^n项系数

准许
拆分
出零

6. n个球无区别，m个盒子有区别，无空盒

$$C(m+(n-m)-1,n-m)=C(n-1,m-1)$$

$$G(x)=\frac{x^m}{(1-x)^m}$$ 的x^n项系数

不准
拆分
出零

正整数n，拆分成m个正整数，考虑拆分的顺序

有序的整数拆分

回顾

通过Ferrers图像接
纳入母函数解法中

7. n个球无区别，m个盒子无区别，有空盒

$$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

的x^n项系数

准许
拆分
出零

8. n个球无区别，m个盒子无区别，无空盒

$$G(x)=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

的x^n项系数

不准
拆分
出零

正整数n，拆分成m个正整数，不考虑拆分顺序

无序的整数拆分

回顾

对组合来说:

多重组合，如$\{\infty a_1, \infty a_2, \cdots, \infty a_m\}$的n组合，即m个元素重复取n个组合。

$$G(x)=(1+x+x^2+\cdots)^m=\frac{1}{(1-x)^m}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{m+k-1}^{k}x^k$$

级数展开

不重复组合，如$\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$的n组合，即m个元素不重复取n个组合(n<m)。

$$G(x)=(1+x)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k x^k$$

二项式展开

即每个元素最多取1次，不能重复取

回顾

有没有别
的解法？

对组合来说:

如果是有限制重复数的多重组合，如$\{3a_1, 4a_2, 5\ a_3\}$的n组合，即3个a_1 , 4个a_2, 5 个a_3重复取n个组合。

$$G(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$$

$$=(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\frac{1}{(1-x)^3}$$

级数展开变形

$$=(1-x^4-x^5-x^6+x^9+x^{10}+x^{11}-x^{15})\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+2}^k x^k$$

x^{10}的系数为b_{10}= C(10+2,10) – C(6+2,6) – C(5+2,5) – C(4+2,4) + C(1+2,1) + C(0+2,2) = 6

回顾

因此，对**n**个不同元素取**k**个元素进行组合，若每个元素可以出现的次数集合为$\mathbf{M}_i$，则该组合数的母函数为：

$$G(x)=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}x^m\right)$$

类似，对**n**个不同元素取**k**个元素进行排列，若每个元素可以出现的次数集合为$\mathbf{M}_i$，则该排列数的母函数为：

$$G(x)=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right)$$

第三章 容斥原理
与鸽巢原理

3.1 De Morgan 定理

例3-1 求[1，20]中2或3的倍数的个数.

[解] 2的倍数是：2，4，6，8，10，12，14，16，18，20。 10个

3.1 De Morgan 定理

3的倍数是：3，6，9，12，15，18。 6个

但答案不是10+6=16 个，因为6，12，18在两类中重复计数，应减去。故答案是：16-3=13

3.1 De Morgan 定理

容斥原理研究有限集合的交或并的计数。

[DeMorgan定理] 论域U，补集 $\overline{A}$

$\overline{A}=\{x \mid x \in U \text{且} x \notin A\}$,有

(1) $\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$

(2) $\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$

3.1 De Morgan 定理

证：(1)的证明

设 $x \in \overline{A \bigcup B}$ ，则 $x \notin A \bigcup B$

$x \notin A \bigcup B$ 相当于$x \notin A$和 $x \notin B$

同时成立，亦即

$$x \in \overline{A \bigcup B} \Rightarrow x \in \overline{A} \bigcap \overline{B} \quad (3\text{-}1)$$

3.1 De Morgan 定理

反之，若 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$，即$x\in\overline{A}$和$x\in\overline{B}$

故 $x\notin A$和$x\notin B$.亦即$x\notin A\cap B$

$\therefore x\in\overline{A}\cap\overline{B}\Rightarrow x\in\overline{A\cup B}$ (3-1')

由（3-1）和（3-1'）得

$$x\in\overline{A}\cap\overline{B}\Leftrightarrow x\in\overline{A\cup B}$$

(2)的证明和(1)类似，从略.

3.1 De Morgan 定理

De Morgan定理的推广：设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$是U的子集

则 (1) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$

(2) $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$

证明：只证(1). $n=2$时定理已证。

设定理对n是正确的，即假定：

3.1 De Morgan 定理

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n$$ 正确

则
$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}}$$
$$= \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}}$$
$$= \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} \cap \overline{A_{n+1}}$$
$$= (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n) \cap \overline{A}_{n+1}$$
$$= \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n+1}$$

即定理对$n+1$也是正确的。

3.2 容斥原理

最简单的计数问题是求有限集合A和B的并的元素数目。显然有

定理

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

即具有性质A或B的元素的个数等于具有性质A的元素个数与具有性质B的元素个数之和减去具有性质

3.2 容斥原理

A和B的元素个数，如图3.1所示：

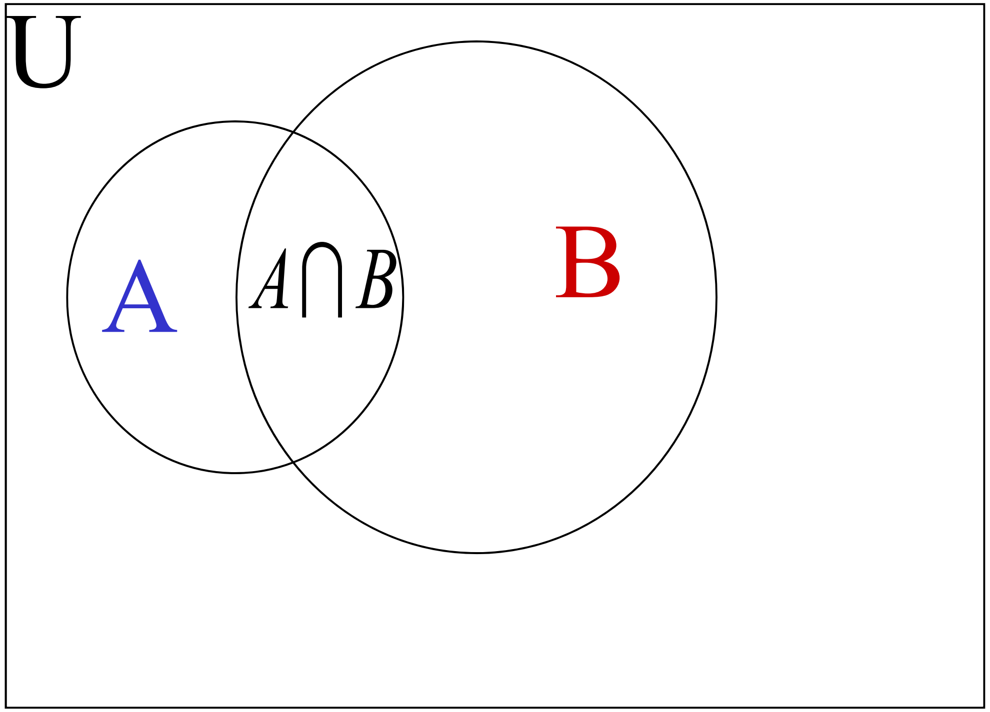

图3-1

3.2 容斥原理

定理3-1：

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B|$$
$$- |\mathrm{A}\cap \mathrm{C}| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

证明：

$$|A\cup B\cup C| = |(A\cup B)\cup C|$$
$$= |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C|$$

3.2 容斥原理

根据 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C|-|A\cap B| \\
&\quad -|(A\cap C)\cup(B\cap C)| \\
&= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C| \\
&\quad +|A\cap B\cap C|
\end{aligned}
$$

3.2 容斥原理

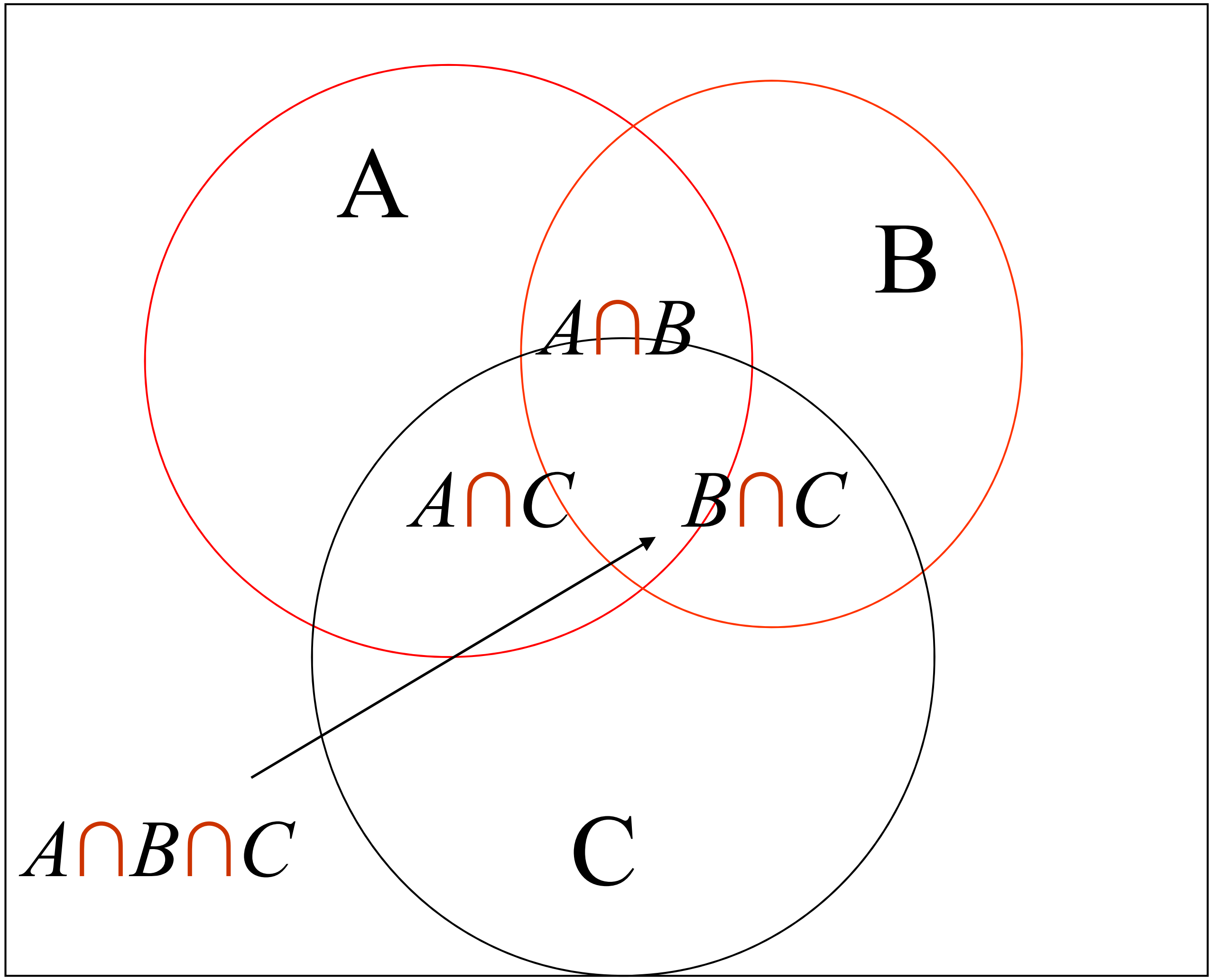

图3-2

3.2 容斥原理

例3-2 一个学校只有三门课程：数学、物理、化学。已知修这三门课的学生分别有170、130、120人；同时修数学、物理两门课的学生45人；同时修数学、化学的20人；同时修物理化学的22人。同时修三门的3人。问这学校共有多少学生？

3.2 容斥原理

令：M为修数学的学生集合；
P 为修物理的学生集合；
C 为修化学的学生集合；

$$|\mathrm{M}| = 170, |P| = 130, |C| = 120, |M \cap P| = 45$$

$$|M \cap C| = 20, |P \cap C| = 22, |M \cap P \cap C| = 3$$

3.2 容斥原理

$$|M \cup P \cup C| = |M| + |P| + |C| - |M \cap P|$$

$$-|M \cap C| - |P \cap C| + |M \cap P \cap C|$$

$$= 170 + 130 + 120 - 45 - 20 - 22 + 3$$

$$= 336$$

即学校学生数为336人。

3.2 容斥原理

同理可推出：

$$|A\cup B\cup C\cup D| = |A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|$$
$$-|A\cap C|-|B\cap C|-|A\cap D|-|B\cap D|+|A\cap B\cap C|$$
$$+|A\cap B\cap D|+|B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|$$

利用数学归纳法可得一般的定理：

3.2 容斥原理

定理3-2　设 c(n,k)是［1,n］的所有k-子集的集合，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{I\in c(n,k)}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

证　对n用归纳法。n=2时，等式成立。

假设对n - 1，等式成立。对于n有

3.2 容斥原理

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A_i}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n\right|$$

$$= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n\right|$$

$$= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{\mathrm{I} \in \mathrm{C(n\text{-}1,k)}} \left|\bigcap_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} A_i\right| + |A_n| - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{\mathrm{I} \in \mathrm{C(n\text{-}1,k)}} \left|\bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_n)\right|$$

3.2 容斥原理

$$= \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{I \in C(n-1,k)} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + |A_n|$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in C(n-1,k-1)} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \cap A_n \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in C(n,k)} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

此定理也可表示为：

3.2 容斥原理

- 定理3-2设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是n个有限集合，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \qquad (4)$$

3.2 容斥原理

证： 用数学归纳法证明。

已知 n=2时有

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

设 n-1时成立，即有：

3.2 容斥原理

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

$$+ (-1)^n \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right|$$

3.2 容斥原理

$$\therefore \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n\right|$$

$$= \left|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n\right|$$

$$= \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}\right| + \left|A_n\right|$$

$$- \left|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n\right|$$

3.2 容斥原理

但

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n$$
$$= (A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n)$$

3.2 容斥原理

$$\therefore \left|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n\right|$$

$$= \left|(A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \ldots \cup (A_{n-1} \cap A_n)\right|$$

$$= \left|A_1 \cap A_n\right| + \left|A_2 \cap A_n\right| + \ldots + \left|A_{n-1} \cap A_n\right|$$

$$- \left|A_1 \cap A_2 \cap A_n\right| - \left|A_1 \cap A_3 \cap A_n\right| - \ldots$$

3.2 容斥原理

$$-\left|A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n\right| + \ldots + (-1)^n \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left|A_i \cap A_n\right| - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \left|A_i \cap A_j \cap A_n\right| + \ldots$$

$$+ (-1)^n \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|$$

3.2 容斥原理

$$\therefore \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

3.2 容斥原理

又 $$\left|\overline{\mathrm{A}}\right| = N - |A|,$$

其中N是集合U的元素个数，即不属于A的元素个数等于集合的全体减去属于A的元素的个数。一般有：

3.2 容斥原理

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right| = N - \left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-1}\cup A_n\right|$$

$$= N - \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\left|A_i\cap A_j\right|$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right| + \ldots$$

$$+(-1)^n\left|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right| \qquad (5)$$

容斥原理指的就是(4)和(5)式，其应用十分丰富多彩。

3.3 容斥原理举例

例3-3 (3. 4) 求从1到600的整数中能被2, 3, 5除尽的数的个数。

解： 令A, B, C分别为从1到600的整数中被2, 3, 5除尽的数的集合

$$|A| = \left\lfloor \frac{600}{2} \right\rfloor = 300, \ |B| = \left\lfloor \frac{600}{3} \right\rfloor = 200,$$

$$|C| = \left\lfloor \frac{600}{5} \right\rfloor = 120, \ |A \cap B| = \left\lfloor \frac{600}{2\times 3} \right\rfloor = 100,$$

3.3 容斥原理举例

$$|A\cap C|=\left\lfloor\frac{600}{10}\right\rfloor=60,\quad |B\cap C|=\left\lfloor\frac{600}{15}\right\rfloor=45,$$

$$|A\cap B\cap C|=\left\lfloor\frac{600}{30}\right\rfloor=20,$$

被2, 3, 5除尽的数的个数为

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|$$

$$-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C|$$

$$=300+200+120-(100+60+40)-20=400$$

3.3 容斥原理举例

如果是求从1到600的整数中不能被2、3和5除尽的数的个数呢？

$$\left|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right| = 600 - |A\cup B\cup C|$$

$$= 600 - \left[|A| + |B| + |C| - (|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|) + |A\cap B\cap C|\right]$$

$$= 600 - [300 + 200 + 120 - (100 + 60 + 40) - 20] = 200$$

3.3 容斥原理举例

例3-4 (3.3) 求a,b,c,d,e,f六个字母的全排列中不允许出现ace和df图象的排列数。

解：设A为ace作为一个元素出现的排列集，B为 df作为一个元素出现的排列集，A∩B为同时出现ace、df的排列数。

$$\therefore |A| = 4!, |B| = 5!, |A \cap B| = 3!.$$

3.3 容斥原理举例

根据容斥原理，不出现ace和df的排列数为：

$$\left|\overline{A}\cap\overline{B}\right|=6!-(5!+4!)+3!=582$$

3.3 容斥原理举例

例3-5 (3. 5)　求由a,b,c,d四个字母构成的n位符号串中，a,b,c(每个)至少出现一次的符号串数目。

3.3 容斥原理举例

解： 令A、B、C分别为n位符号串中不出现a，b，c符号的集合。

由于n位符号串中每一位都可取a，b，c，d四种符号中的一个，故不允许出现a的n位符号串的个数应是 3^n，即

$$|A| = |B| = |C| = 3^n$$

$$|A \cap B| = |A \cap C| = |C \cap B| = 2^n$$

3.3 容斥原理举例

$$|A \cap B \cap C| = 1$$

a，b，c至少出现一次的n位符号串集合即为 $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = 4^n - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B|$$

$$+ |A \cap C| + |C \cap B|) - |A \cap B \cap C|$$

$$= 4^n - 3 \bullet 3^n + 3 \bullet 2^n - 1$$

3.3 容斥原理举例

例3-6 (3. 6) 求不超过120的素数个数。

因 $11^2=121$，故不超过120的合数必然是2、3、5、7的倍数，而且不超过120的合数的因子不可能都超过11。

设 A_i 为不超过120的数 i 的倍数集，$i=2$，3，5，7。

3.3 容斥原理举例

$$|A_2|=\left\lfloor\frac{120}{2}\right\rfloor=60,|A_3|=\left\lfloor\frac{120}{3}\right\rfloor=40,$$

$$|A_5|=\left\lfloor\frac{120}{5}\right\rfloor=24,|A_7|=\left\lfloor\frac{120}{7}\right\rfloor=17,$$

$$|A_2\cap A_3|=\left\lfloor\frac{120}{2\times 3}\right\rfloor=20,|A_2\cap A_5|=\left\lfloor\frac{120}{10}\right\rfloor=12,$$

$$|A_2\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{14}\right\rfloor=8,|A_3\cap A_5|=\left\lfloor\frac{120}{15}\right\rfloor=8,$$

3.3 容斥原理举例

$$|A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{21} \right\rfloor = 5, |A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{35} \right\rfloor = 3,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 4,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = 2,$$

$$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1,$$

3.3 容斥原理举例

$$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 1, |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 0.$$

$$\begin{aligned}
|\overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7}| = 120 &- |A_2| - |A_3| - |A_5| \\
&- |A_7| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_7| \\
&+ |A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_7| + |A_5 \cap A_7| \\
&- |A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_7| \\
&- |A_2 \cap A_5 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\
&+ |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7|
\end{aligned}$$

3.3 容斥原理举例

$$=120-(60+40+24+17)+(20+12+8$$

$$+8+5+3)-(4+2+1+1)$$

$$=27.$$

3.3 容斥原理举例

注意：27并非就是不超过120的素数个数，因为这里排除了2，3，5，7这四个数，又包含了1这个非素数。2，3，5，7本身是素数。故所求的不超过120的素数个数为：

$$27+4-1=30$$

3.3 容斥原理举例

例3–7 (3. 7) 用26个英文字母作不允许重复的全排列，要求排除*dog*，*god*，*gum*，*depth*，*thing*字样的出现，求满足这些条件的排列数。

解：所有排列中，令：

3.3 容斥原理举例

A_1为出现dog的排列的全体；

A_2为出现god的排列的全体；

A_3为出现gum的排列的全体；

A_4为出现$depth$的排列的全体；

A_5为出现$thing$的排列的全体；

3.3 容斥原理举例

出现*dog*字样的排列，相当于把*dog*作为一个单元参加排列，故 $|\mathrm{A}_1| = 24!$

类似有：$|A_2| = |A_3| = 24!$，$|A_4| = |A_5| = 22!$

由于*god*,*dog*不可能在一个排列中同时出现，故：

$$|A_1 \cap A_2| = 0;$$

类似：$|A_2 \cap A_3| = 0$，$|A_1 \cap A_4| = 0$

3.3 容斥原理举例

由于*gum,dog*可以在*dogum*字样中同时出现，故有：$|A_1 \cap A_3| = 22!$

类似有*god*和*depth*可以在*godepth*字样中同时出现，故$|A_2 \cap A_4| = 20!$

*god*和*thing*可以在*thingod*字样中同时出现，从而

$$|A_2 \cap A_5| = 20!$$

3.3 容斥原理举例

$$|A_1 \cap A_5| = 0, \quad |A_4 \cap A_5| = 19!,$$

$$|A_3 \cap A_4| = |A_3 \cap A_5| = 20!,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_5| = 0, \quad |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_5| = 0, \quad |A_1 \cap A_4 \cap A_5| = 0$$

3.3 容斥原理举例

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0, \quad |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 0$$

由于*god*、*depth*、*thing*不可以同时出现，故有：$|A_2 \cap A_4 \cap A_5| = 0$

但*gum*、*depth*、*thing*可以在*depthingum*中同时出现,故有：

$$|A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 17!$$

其余多于3个集合的交集都为空集。

3.3 容斥原理举例

故满足要求的排列数为：

$$26!-3\times 24!-2\times 22!+22!+4\times 20!+19!-17!$$

$$=26!-3\times 24!-22!+4\times 20!+19!-17!$$

3.3 容斥原理举例

例3-8 (3. 8) 求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

解：设$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$中x_i不出现的布尔函数类为：A_i，$i=1,2,\ldots,n.$

由于n个布尔变量$x_1,x_2,\ldots,x_n$的不同的真值表数目与2^n位2进制数数目相同，故为2^{2^n}个。根据容斥原理，满足条件的函数数目为：

3.3 容斥原理举例

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right| = 2^{2^n} - C(n,1)2^{2^{n-1}}$$

$$+C(n,2)2^{2^{n-2}} - \ldots + (-1)^k C(n,k)2^{2^{n-k}}$$

$$+\ldots+(-1)^n C(n,n)2$$

$n=2$时， 得

$$\left|\mathrm{A}_1\cap A_2\right| = 2^{2^2} - C(2,1)2^2 + C(2,2)2$$

$$=16-8+2=10$$

3.3 容斥原理举例

这10个布尔函数为：

$x_1 \wedge x_2$，$x_1 \wedge \overline{x}_2$，$\overline{x}_1 \wedge x_2$，$\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$，

$x_1 \vee x_2$，$x_1 \vee \overline{x}_2$，$\overline{x}_1 \vee x_2$，$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$，

$(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_2)$，$(\overline{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2)$

3.4 容斥原理的应用

求满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

的非负整数解的数目。

这个问题相当于r个无区别的球放到n个有标志的盒子并允许重复的方案数，故非负整数解的数目为

$$\binom{n+r-1}{r} \qquad (3\text{-}4)$$

即n取r作允许重复的组合数。

3.4 容斥原理的应用

例3-18 对问题

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

$$0 \le x_1 \le 5,\ 0 \le x_2 \le 6,\ 0 \le x_3 \le 7$$

求整数解数目。

若不附加上界条件，由公式(3-4)，解的数目为

$$\binom{3+15-1}{15} = \binom{17}{15} = \binom{17}{2} = 272/2 = 136$$

3.4 容斥原理的应用

- 对于这个有上界条件的问题，可作一变换

$$\xi_1=5-x_1,\ \xi_2=6-x_2,\ \xi_3=7-x_3$$

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=5-x_1+6-x_2+7-x_3$$

$$=18-(x_1+x_2+x_3)=3$$

由$0\le x_1\le 5$导致$\xi_1=5-x_1\ge 0$, 同理$\xi_2\ge 0$, $\xi_3\ge 0$.

于是问题变成

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=3$$

$$\xi_1\ge 0,\ \xi_2\ge 0,\ \xi_3\ge 0.$$

3.4 容斥原理的应用

整数解数目

$$\binom{3+2}{3}=\binom{5}{2}=20/2=10$$

习题3.22

这种作变换方法总是可行的吗？

3.4 容斥原理的应用

回想:$\{3a_1, 4a_2, 5\ a_3\}$的n组合，即3个a_1，4个a_2, 5 个a_3重复取n个组合。有没有办法？

$$x_1+x_2+x_3=n$$

$$x_1\le 3,\ x_2\le 4,\ x_3\le 5$$

设A_1表示$x_1 \ge 4$；A_2表示$x_2 \ge 5$；A_3表示$x_3 \ge 6$。容斥求解。

3.4 容斥原理的应用

可利用容斥原理求解此类问题。

记原问题的非负整数解集为S, $|S|=136$, 令S中具有$x_1 \geq 6$的子集为A_1，$x_2 \geq 7$的子集为A_2, $x_3 \geq 8$的子集为A_3.问题转化为求$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3|$.

3.4 容斥原理的应用

对于A_1，相当于对

$$(x_1+6)+x_2+x_3=15，即\quad x_1+x_2+x_3=9$$

求非负整数解, 则

$$|A_1|=\binom{9+3-1}{9}=\binom{11}{2}=55$$

同理

$$|A_2|=\binom{(15-7)+3-1}{2}=\binom{10}{2}=45$$

$$|A_3|=\binom{(15-8)+3-1}{2}=\binom{9}{2}=36$$

3.4 容斥原理的应用

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{\frac{(15-6-7)+3-1}{2}}{2} = \binom{4}{2} = 6,$$

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{\frac{(15-6-8)+3-1}{2}}{2} = \binom{3}{2} = 3,$$

$$|A_2 \cap A_3| = \binom{\frac{(15-7-8)+3-1}{2}}{2} = \binom{2}{2} = 1,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0,$$

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3|$$

$$= 136 - (55+45+36) + (6+3+1) = 10.$$

3.4 容斥原理的应用

例3-19 如图3-9(3.8)所示，求从(0, 0)点到(10, 5)点的路径中不通过AB,CD,EF,GH的路径数，已知各点坐标为A(2, 2)，B(3, 2), C(4, 2), D(5, 2),E(6, 2),F(6, 3),G(7, 2),H(7, 3).

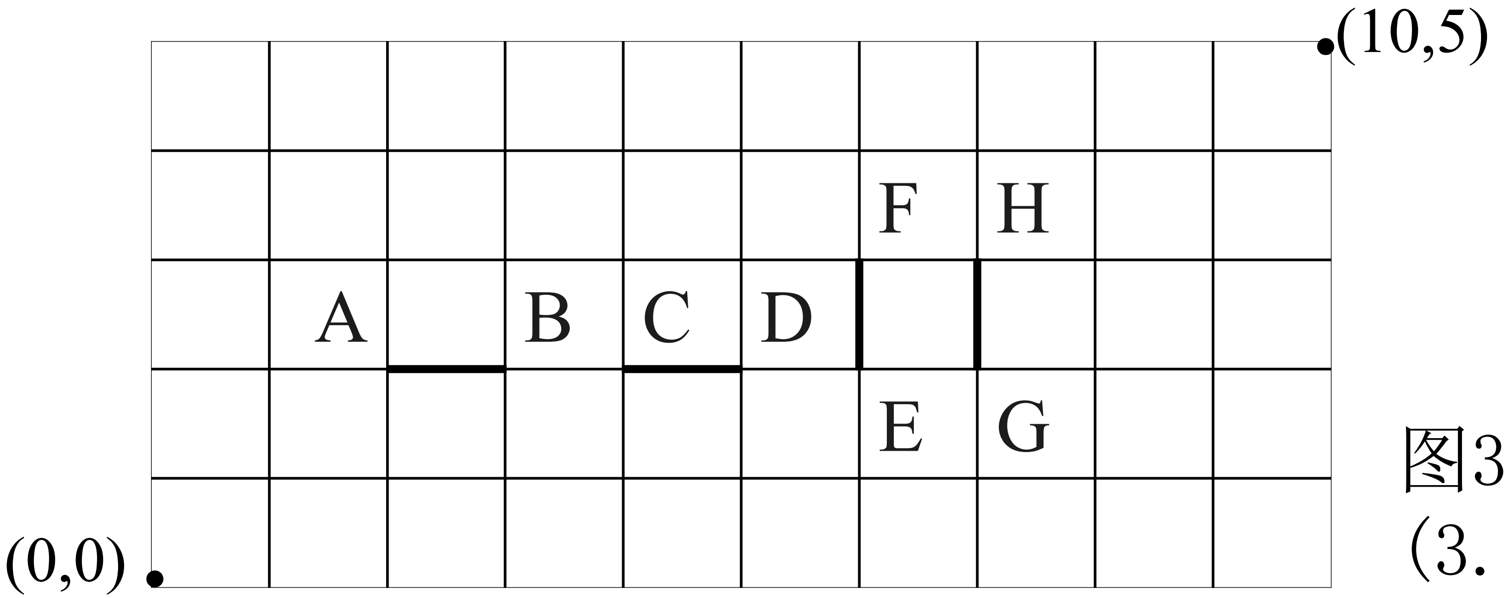

图3-9
(3.8)

3.4 容斥原理的应用

从 (0, 0) 点到 (10, 5) 点的所有路径数为

$\binom{15}{5}=3003$. 令

A_1: 从 (0, 0) 点到 (10, 5) 点过AB的路径,

A_2: 从 (0, 0) 点到 (10, 5) 点过CD的路径,

A_3: 从 (0, 0) 点到 (10, 5) 点过EF的路径,

A_4: 从 (0, 0) 点到 (10, 5) 点过GH的路径,

从 (0, 0) 点到 (10, 5) 点过AB的路径数, 由乘法法则为: 从 (0, 0) 点到 (2, 2) 点的路径数乘以从 (3, 2) 点到 (10, 5) 点的路径数, 因此有

3.4 容斥原理的应用

$$|A_1|=\binom{4}{2}\binom{(10-3)+(5-2)}{5-2}=\binom{4}{2}\binom{10}{3}=6\times 120=720,$$

同理

$$|A_2|=\binom{6}{2}\binom{8}{3}=15\times 56=840,$$

$$|A_3|=\binom{8}{2}\binom{6}{2}=28\times 15=420,$$

$$|A_4|=\binom{9}{2}\binom{5}{2}=36\times 10=360,$$

$$|A_1\cap A_2|=\binom{4}{2}\binom{8}{3}=6\times 56=336,$$

3.4 容斥原理的应用

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{4}{2}\binom{6}{2} = 6 \times 15 = 90,$$

$$|A_1 \cap A_4| = \binom{4}{2}\binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60,$$

$$|A_2 \cap A_3| = \binom{6}{2}\binom{6}{2} = 15 \times 15 = 225,$$

$$|A_2 \cap A_4| = \binom{6}{2}\binom{5}{2} = 15 \times 10 = 150,$$

$$|A_3 \cap A_4| = 0,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{4}{2}\binom{6}{2} = 6 \times 15 = 90,$$

3.4 容斥原理的应用

$$|A_1\cap A_2\cap A_4|=\binom{4}{2}\binom{5}{2}=6\times 10=60,$$

$$|A_2\cap A_3\cap A_4|=0,$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=0,$$

所以

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4|$$

$$=3003-(720+840+420+360)+(336+90+60+225+150)-(90+60)$$

$$=3003-2340+861-150=1374$$

3.5 第二类Stirling数的展开式

第二类Stirling数$S(n,m)$表示**n**个有区别的球放到**m**个相同的盒子中而无一空盒的方案数. $S(n,m)$也就是将n个数拆分成m个非空部分的方案数，也即n个元素的集合划分成m个非空子集的方案数.

先考虑**n**个有区别的球放到**m**个有标志的盒子，无一空盒的方案数. 令

A_i表示第 i 盒为空盒的子集. i=1, 2, …, m.

记**n**个有区别的球放到**m**个有标志的盒子，可以空盒的事件全体为S.

3.5 第二类Stirling数的展开式

$|S|=m^n$,

$|A_i|=(m-1)^n$, i=1, 2, …, m.

$|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_m|=m(m-1)^n=\binom{m}{1}(m-1)^n$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|=\binom{m}{2}(m-2)^n$$

…

$$\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2>i_1}\cdots\sum_{i_k>i_{k-1}}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=\binom{m}{k}(m-k)^n$$

3.5 第二类Stirling数的展开式

n个有区别的球放到**m**个有标志的盒子，无一空盒的方案数

$$N = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m|$$

$$= m^n - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| - \cdots$$

$$+ (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

3.5 第二类Stirling数的展开式

$$= m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \cdots$$

$$+ (-1)^m \binom{m}{m}(m-m)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k}(m-k)^n$$

3.5 第二类Stirling数的展开式

Stirling数要求盒子是无区别的，所以

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}N=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$$

推论1 因为对$n<m$，有 $S(n,m)=0$， 则

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n=0,\quad 若\ n<m.$$

推论2 因 $S(m,m)=1$， 有

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^m=m!\ .$$

3.6 欧拉函数φ(*n*)

例3-9 (3. 9) 欧拉函数$\varphi(n)$是求小于n且与n互素的数的个数。

解： 若n分解为素数的乘积

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$$

设1到n的n个数中为p_i倍数的集合为A_i， $i = 1, 2, \ldots, k.$

则有

3.6 欧拉函数φ(*n*)

$$\left|A_i\right| = \frac{n}{p_i},\ i = 1,2,\cdots,k$$

由于$p_i \neq p_j, (i \neq j)$,故

$$\left|A_i \cap A_j\right| = \frac{n}{p_i p_j},\ i,j = 1,2,\cdots,k, j > i,$$

$$\left|A_i \cap A_j \cap A_h\right| = \frac{n}{p_i p_j p_h},\ i,j,h = 1,2,\cdots,k, h > j > i,$$

$$\cdots$$

3.6 欧拉函数ϕ(*n*)

$$\varphi(n)=\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_k}\right|$$

$$=n-\left(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\ldots+\frac{n}{p_k}\right)+\left(\frac{n}{p_1p_2}\right.$$

$$\left.+\frac{n}{p_1p_3}+\ldots+\frac{n}{p_1p_n}\right)-\cdots\pm\frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}$$

$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

3.6 欧拉函数φ(*n*)

例如$n=60=2^2\times3\times5$， 则

$$\psi(60)=60(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=16$$

即比60小且与60无公因子的数有16个：7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，49，53，59，此外尚有一个1。

3.7 *n* 对夫妻问题

n 对夫妻围圆桌而坐，每个男人都不和他的妻子相邻，有多少种可能的方案？

n 个人围圆桌而坐，方案数应为$(n-1)!$。

令A_i=第i 对夫妻相邻而坐的集合，$i=1,2,\cdots,n$，则问题为求

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| = N - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} |A_i \cap A_j|$$

$$-\cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

3.7 *n* 对夫妻问题

n 对夫妻有$2n$个人，$2n$个人围圆桌而坐的方案数为$(2n-1)!$。

$|A_i|$相当于将第i对夫妻作为一个对象围圆桌而坐然后换位，故

$|A_i|=2(2n-2)!$,

$|A_i \cap A_j|=2^2(2n-3)!$,

$|A_i \cap A_j \cap A_k|=2^3(2n-4)!$,

$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|=2^n(n-1)!$ (这是n对夫妻围圆桌而坐夫妻相邻的方案数).

3.7 *n* 对夫妻问题

- 故夫妻不相邻方案数为

$$M=(2n-1)!-2\binom{n}{1}(2n-2)!+2^2\binom{n}{2}(2n-3)!$$

$$-\cdots+(-1)^n 2^n\binom{n}{n}(n-1)!$$

$$=\sum_{h=0}^{n}(-1)^h 2^h\binom{n}{h}(2n-h-1)!$$

3.7 *n* 对夫妻问题

n 对夫妻排成一列，每个男人都不和他的妻子相邻，有多少种可能的方案？

$$M=(2n)!-2\binom{n}{1}(2n-1)!+2^2\binom{n}{2}(2n-2)!$$

$$-\cdots+(-1)^n 2^n\binom{n}{n}(2n-n)!$$

$$=\sum_{h=0}^{n}(-1)^h 2^h\binom{n}{h}(2n-h)!$$

3.8 Möbius反演定理

基本想法：$\{a_n\}$ 易算，$\{b_n\}$难算，$\{a_n\}$可用$\{b_n\}$表示，利用反演，将$\{b_n\}$用$\{a_n\}$表示.

1．二项式反演

引理

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{m+k}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m<n\end{cases}$$

3.8 Möbius反演定理

证

$$左边=\sum_{m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

$$=\binom{n}{m}\sum_{0}^{n-m}(-1)^{i}\binom{n-m}{i}$$

$$=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m<n\end{cases}$$

3.8 Möbius反演定理

定理 $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k \Leftrightarrow b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k$

证

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{k}{l} b_l$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} (-1)^k \binom{n}{k} (-1)^l \binom{k}{l} b_l$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k+l} \binom{n}{k} \binom{k}{l} b_l$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+l} \binom{n}{k} \binom{k}{l} b_l = b_n$$

3.8 Möbius反演定理

推论 $a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k \Leftrightarrow b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k$

证 在定理中b_k处用$(-1)^k b_k$代入，即可.

例 $n!=\sum\binom{n}{k}D_{n-k}$，$D_n=b_n$，

令$n-k=l$，则 $n!=\sum\binom{n}{k}D_l$

$$D_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k!$$

$$=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}$$

$$=n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

3.8 Möbius反演定理

2. Möbius反演

定义 设 $n \in Z^+$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{若 } n = 1; \\ 0, & \text{若} n = p_1^{\alpha 1} p_2^{\alpha 2} \cdots p_k^{\alpha k} \text{ 存在} \alpha_i > 1 \\ (-1)^k, & \text{若} n = p_1 p_2 \cdots p_k \end{cases}$$

如 $\mu(30) = \mu(2 \cdot 3 \cdot 5) = (-1)^3$

$\mu(12) = 0;$

3.8 Möbius反演定理

定理 设$n \in Z^{+}$

则 $$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\begin{cases}1, & 若n=1;\\ 0, & 若n>1;\end{cases}$$

证 若$n=1$，$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\mu(1)=1$,成立.

若 $n>1$，设$n=p_1^{\alpha 1}p_2^{\alpha 2}\cdots p_k^{\alpha k}$，$n'=p_1p_2\cdots p_k$

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\sum_{d\mid n'}\mu(d)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{I\in C(k,j)}\mu\Big(\prod_{i\in I}p_i\Big)+\mu(1)$$

$$=1+\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j=(1-1)^k=0$$

3.8 Möbius反演定理

推论 $\varphi(n) = n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$

证 $n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d} = n\sum_{d|n'}\frac{\mu(d)}{d}$

$$= n\cdot\{\ 1+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\sum_{I\in\mathcal{C}(k,j)}(\prod_{i\in I}p_i)^{-1}\}$$

$$= n\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i}) = \varphi(n)$$

3.8 Möbius反演定理

定理 (Möbius反演定理)设 $f(n)$和$g(n)$是定义在正整数集合上的两个函数.

$$f(n)=\sum_{d\mid n} g(d)=\sum_{d\mid n} g\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (M_1)$$

$$g(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\, f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d\mid n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) \qquad (M_2)$$

则 $(M_1) \Longleftrightarrow (M_2)$

3.8 Möbius反演定理

证 “⇦”设（M_1）成立。

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)\, f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\sum_{d_1\mid \frac{n}{d}} g(d_1)$$

$$=\sum_{d\mid n}\sum_{d_1\mid \frac{n}{d}}\mu(d)\; g(d_1)=\sum_{dd_1\mid n}\mu(d)\, g(d_1)$$

$$=\sum_{d_1\mid n}\sum_{d\mid \frac{n}{d_1}}\mu(d)\, g(d_1)=\sum_{d_1\mid n} g(d_1)\sum_{d\mid \frac{n}{d_1}}\mu(d)$$

$$=\sum_{d\mid \frac{n}{d_1}}\mu(d)=\begin{cases}1, & d_1=n\\ 0, & d_1<n\end{cases}=g(n)$$

3.8 Möbius反演定理

“⇐”：设(M_2)成立。

$$\sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} g(d)$$

$$= \sum_{d|n} \sum_{d_1|\frac{n}{d}} \mu(d) f(d_1) = \sum_{dd_1|n} \mu(d) f(d_1)$$

$$= \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d|\frac{n}{d_1}} \mu(d)$$

$$= \sum_{d|\frac{n}{d_1}} \mu(d) = \sum_{d|\frac{n}{d_1}} \mu(d) = \begin{cases} 1, & d_1 = n \\ 0, & d_1 < n \end{cases}$$

$$= f(n)$$

3.8 Möbius反演定理

例 圆排列问题

设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是一个圆排列，即 $a_2a_3\cdots a_na_1$ ，⋯ ，$a_na_1\cdots a_{n-1}$，看作是相同的。为了加以区别，必要时把原先的排列称为线排列。一个圆排列在 n 个位置短开形成的 n 个线排列在元素可重复的情况下，未必都不相同。

例如，$d \mid n$时，由不重复的$a_1a_2\cdots a_d$重复 n/d次构成的圆排列

3.8 Möbius反演定理

$$\underbrace{(\ a_1a_2\cdots a_d\ )\cdots(\ a_1a_2\cdots a_d\ )}_{n/d\text{ 组}}$$

只能形成 d 个不同的线排列。

若一个圆排列可由一个长度为 k 的线排列重复若干次形成，则这样的 k 中最小者成为该圆排列的周期。一个圆排列中元素的个数(重复出现的按其重复次数计)称为它的长度

3.8 Möbius反演定理

设集合$\{1, 2, \cdots, m\}$中元素形成的长度与周期都是 d 的圆排列的个数为M(d)。

设 n 是一给定的正整数。

若 $d \mid n$，每个长度与周期都是 d的圆排列可在 d 个位置上断开，重复 n / d 次形成d个长度为 n 的可重排列。因此有

$$\sum_{d \mid n} d\,M(d) = m^n$$

由Möbius反演定理

$$n\,M(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d)\, m^{\frac{n}{d}}$$

故 $$M(n) = \frac{1}{n}\sum_{d \mid n} \mu(d)\, m^{\frac{n}{d}}$$

3.8 Möbius反演定理

- 设长度为 n 的圆排列的个数为T(n), 则

$$T(n) = \sum_{d \mid n} M(d)$$

例 $m = \{1, 2\}$, $n = 7$ 则

$$M(7) = \frac{1}{7}(2^7 - 2) = 18$$

$$T(7) = \sum_{d \mid 7} M(d) = M(1) + M(7) = 20$$

作业

习题1、15、16、23、40