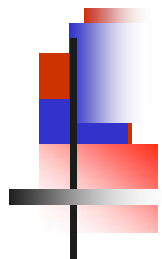


第4章 Burnside引理与Pólya定理



4.4 Burnside引理

4.4.1 若干概念

1. 共轭类

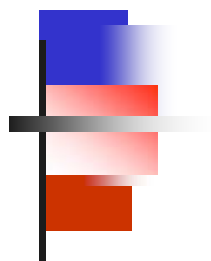
先观察 S_3, A_3, S_4, A_4 ,以增加感性认识。

$$S_3 = \{(1)(2)(3), (23), (12), (13), (123), (132)\}.$$

$$A_3 = \{(1)(2)(3), (123), (132)\}.$$

$$S_4 = \{(1)(2)(3)(4), (12), (13), (14), (23), (24), (34), (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243), (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

$$A_4 = \{(1)(2)(3)(4), (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$



4.4 Burnside引理

S_n 中任一置换 p 可分解成若干互不相交的循环的乘积.

$$p = \underbrace{(a_1 a_2 \cdots a_{k_1}) (b_1 b_2 \cdots b_{k_2}) \cdots (h_1 h_2 \cdots h_{k_l})}_{l \text{ 项}}$$

其中 $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$. 设其中 k 阶循环出现的次数为 c_k , $k=1, 2, \cdots, n$. k 阶循环出现 c_k 次, 用 $(k)^{c_k}$ 表示.

4.4 Burnside 引理

S_n 中的置换 p 可按分解成的格式

$$(1)^{c_1}(2)^{c_2} \dots (n)^{c_n},$$

的不同而分类, 其中 $\sum_{k=1}^n kc_k = n$.

例如 $(1)(23)(4567)$ 属于格式 $(1)^1(2)^1(3)^0(4)^1(5)^0(6)^0(7)^0$, 或省去指数为 0 的项写为 $(1)^1(2)^1(4)^1$.

S_n 中有相同格式的置换全体构成一个共轭类.

定理 4-9 S_n 中属于 $(1)^{c_1}(2)^{c_2} \dots (n)^{c_n}$ 共轭类的元素的个数为

$$\frac{n!}{c_1!c_2! \cdots c_n! 1^{c_1} 2^{c_2} \cdots n^{c_n}}$$

4.4 Burnside 引理

证 $(1)^{c_1}(2)^{c_2} \dots (n)^{c_n}$ 格式为

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{1个} & & \text{2个} & & & & \text{n个} \\
 \underbrace{\quad} & & \underbrace{\quad} & & & & \underbrace{\quad} \\
 (\cdot) \cdots (\cdot) & (\cdot\cdot) \cdots (\cdot\cdot) & \cdots & (\cdot\cdots\cdot) & \cdots & (\cdot\cdots\cdot) \\
 \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & & \underbrace{\quad} & & \underbrace{\quad} \\
 c_1\text{个} & c_2\text{个} & & c_n\text{个}
 \end{array}$$

一个长度为 k 的循环有 k 种表示, c_k 个长度为 k 的循环有 $c_k! k^{c_k}$ 种表示. $1, 2, \dots, n$ 的全排列共有 $n!$ 个, 给定一个排列, 装入格式得一置换, 除以前面所述的重复度得

$n! / (c_1! c_2! \dots c_n! 1^{c_1} 2^{c_2} \dots n^{c_n})$ 个不同的置换.

4.4 Burnside引理

例4-6 S_4 中 $(2)^2$ 共轭类有 $4!/(2!2^2)=3$.

$(1)^1(3)^1$ 共轭类有 $4!/(c_1!c_3!1^13^1)=8$ ($c_1=c_3=1$).

$(1)^2(2)^1$ 共轭类有 $4!/(c_1!c_2!1^22^1)=6$ ($c_1=2, c_2=1$).

$(4)^1$ 共轭类有 $4!/(c_4!4^1)=6$ ($c_4=1$).

2. k 不动置换类

设 G 是 $[1, n]$ 上的一个置换群, $G \subseteq S_n$. $k \in [1, n]$, G 中使 k 保持不变的置换全体, 称为 k 不动置换类, 记做 Z_k . 例如 $G = \{e, (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4)\}$, 注意到 $(1\ 2)$ 为 $(1\ 2)(3)(4)$ 的缩写, 则 $Z_1 = \{e, (3\ 4)\}$.

4.4 Burnside 引理

$$Z_2 = \{e, (3\ 4)\}; Z_3 = Z_4 = \{e, (1\ 2)\}.$$

可以看出 Z_k 是有 “因子” (k) 的置换的全体.

又如 $A_4 = \{e, (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, 则

$$Z_1 = \{e, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\},$$

$$Z_2 = \{e, (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3)\},$$

$$Z_3 = \{e, (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2)\},$$

$$Z_4 = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

4.4 Burnside引理

定理4-10 置换群 G 的 k 不动置换类 Z_k 是 G 的一个子群。

封闭性: $k \xrightarrow{P_1} k \xrightarrow{P_2} k, k \xrightarrow{P_1 P_2} k.$

结合性: 自然。

有单位元: G 的单位元属于 Z_k .

有逆元: $P \in Z_k, k \xrightarrow{P} k$, 则 $k \xrightarrow{P^{-1}} k$,
 $P^{-1} \in Z_k$.

$\therefore Z_k$ 是 G 的一个子群.



4.4 Burnside引理

3. 等价类

先举一个例子。

$G=\{(1)(2)(3)(4), (12), (34), (12)(34)\}$. 在 G 下, 1变为2, 2变为1; 3变为4, 4变为3. 故1与2属于同一类, 3与4则属于另一类, 且这两类中的元素不能在群 G 作用下互相转变.

一般地, $[1, n]$ 上群 G 将 $[1, n]$ 分成若干等价类, 满足等价类的3个条件: (a) 自反性; (b) 对称性; (c) 传递性。

4.4 Burnside引理

一个由 G 定义的关系 R :

若存在 $p \in G$, 使得 $k \xrightarrow{p} j$, 则称 kRj .

显然 kRk ; kRj 则 jRk ; kRj, jRl 则 kRl .

则 R 是 $[1, n]$ 上的一个等价关系。将 $[1, n]$ 划分成若干等价类, 数 k 所属的等价类记为 E_k , 即

$$E_k = \{j \mid j \in [1, n], \text{ 且存在 } p \in G, \text{ 使得 } k \xrightarrow{p} j\}$$



4.4 Burnside引理

例如, $G=\{e,(12),(34),(12)(34)\}$. 1与2属于同一个等价类, 3与4属于另一个等价类, 即

$$E_1 = E_2 = \{1, 2\}, \quad E_3 = E_4 = \{3, 4\}.$$

含元素 k 的在 G 作用下的等价类也称为含 k 的轨道。

4.4 Burnside引理

4.4.2 重要定理

定理4-11 设 G 是 $[1,n]$ 上的一个置换群, E_k 是 $[1,n]$ 在 G 的作用下包含 k 的等价类, Z_k 是 k 不动置换类, 则有 $|E_k||Z_k|=|G|$.

证 设 $|E_k|=l$, $E_k=\{a_1(=k), a_2, \dots, a_l\}$, 由等价类定义, 存在 $p_i \in G$, 使得 $k \xrightarrow{p_i} a_i$, $i=1, 2, \dots, l$.

记 $P=\{p_1, p_2, \dots, p_l\}$, 作 $G_i=Z_k p_i$, $i=1, 2, \dots, l$. 由于 $k \xrightarrow{p_i} a_i$, 故 $k \xrightarrow{pp_i} p'_i \xrightarrow{p_i} a_i$, $i=1, 2, \dots, l$, 即 k 在 $p'_i \in Z_k p_i$ 的作用下变为 a_i .

4.4 Burnside引理

G_i 包含于 G , 且当 $i \neq j$ 时, $G_i \cap G_j = \emptyset$ (否则, 存在 $f \in G_i \cap G_j$, $f: k \rightarrow a_i$, 又有 $f: k \rightarrow a_j$, 产生矛盾). 故 $G_1 + G_2 + \dots + G_l$ 包含于 G .

另一方面, 任意 $p \in G$, 存在 $a_j \in E_k$, 使得 $k \xrightarrow{p} a_j$, 而 $k \xrightarrow{p_j} a_j$, 从而 $a_j \xrightarrow{p_j^{-1}} k$, $k \xrightarrow{p} a_j \xrightarrow{p_j^{-1}} k$, 即得 $pp_j^{-1} \in Z_k$, 故 $p = (pp_j^{-1})p_j \in Z_k p_j = G_j$. 故 G 包含于 $G_1 + \dots + G_l$.

从而, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_l$.

$$\therefore |G| = |G_1| + |G_2| + \dots + |G_l| = |Z_k| \cdot l = |Z_k| \cdot |E_k|$$



4.4 Burnside引理

Burnside引理

设 $G=\{a_1, a_2, \dots, a_g\}$ 是目标集 $[1, n]$ 上的置换群。每个置换都写成不相交循环的乘积。记 $c_1(a_k)$ 为在置换 a_k 的作用下保持不变的元素的个数，也就是1阶循环的个数。

Burnside引理 设 G 是 $[1, n]$ 上的置换群， G 在 $[1, n]$ 上可引出不同的等价类，其不同的等价类的个数为

$$l = [c_1(a_1) + c_1(a_2) + \dots + c_1(a_g)] / |G|$$

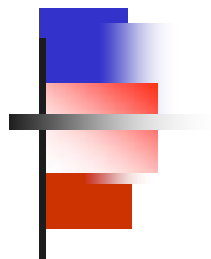
4.4 Burnside 引理

例如, $G=\{e,(12),(34),(12)(34)\}$.

$c_1(a_1)=4, c_1(a_2)=2, c_1(a_3)=2, c_1(a_4)=0$.

$l=[4+2+2+0]/4=2$. 以本例列表分析:

$\begin{matrix} S_{jk} \\ a_j \end{matrix} \backslash k$	k		
	1 2 3 4	$c_1(a_j)$	
$(1)(2)(3)(4)$	1 1 1 1	4	$(1)^4$
$(12)(3)(4)$	0 0 1 1	2	$(1)^2(2)^1$
$(1)(2)(34)$	1 1 0 0	2	$(1)^2(2)^1$
$(12)(34)$	0 0 0 0	0	$(2)^2$
$ Z_k $	2 2 2 2	8	



4.4 Burnside引理

$$\text{其中 } S_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{若 } k \xrightarrow{a_j} k, \\ 0, & \text{若 } k \xrightarrow{a_j} l \neq k. \end{cases}$$

对第 j 行求和得 $c_1(a_j)$, 对第 k 列求和得 $|Z_k|$ 表中元素的总和

$$= \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^n S_{jk} = \sum_{k=1}^n |Z_k| = \sum_{j=1}^g c_1(a_j).$$

一般而言, 与上表相仿, 有下页表格,

$$\text{其中 } S_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{若 } k \xrightarrow{a_j} k, \\ 0, & \text{若 } k \xrightarrow{a_j} l \neq k. \end{cases}$$

4.4 Burnside引理

$a_j \backslash S_{jk} \quad k$	1	2	...	n	$c_1(a_j)$
a_1	S_{11}	S_{12}	...	S_{1n}	$c_1(a_1)$
a_2	S_{21}	S_{22}	...	S_{2n}	$c_1(a_2)$
...
a_g	S_{g1}	S_{g2}	...	S_{gn}	$c_1(a_g)$
$ Z_k $	$ Z_1 Z_2 \dots Z_n \sum_{k=1}^n Z_k = \sum_{j=1}^g c_1(a_j).$				

$\because \sum_{k=1}^n S_{jk} = c_1(a_j), \sum_{j=1}^g S_{jk} = |Z_k|$, 设在 G 作用下,
 $[1, n]$ 分成 l 个等价类。 $[1, n] = E_1 + E_2 + \dots + E_l$.

4.4 Burnside引理

若 k, i 同属一个等价类, 则 $E_i = E_k$, $|E_i| = |E_k|$,
因 $|E_j||Z_j| = |G|$, 故 $|Z_i| = |Z_k|$.

$$\sum_{k \in E_i} |Z_k| = |E_i| |Z_i|$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n |Z_k| = \sum_{i=1}^l \sum_{k \in E_i} |Z_k| = \sum_{i=1}^l |E_i| |Z_i| = \sum_{i=1}^l |G| = l |G|$$

$$\therefore l = \frac{1}{|G|} \sum_{k=1}^n |Z_k| = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^g c_1(a_j).$$

4.4 Burnside引理

例 一正方形分成4格，2着色，有多少种不同的方案？经过转动相同的图像算同一方案。

每格有两种着色选择，故有如下16种图像

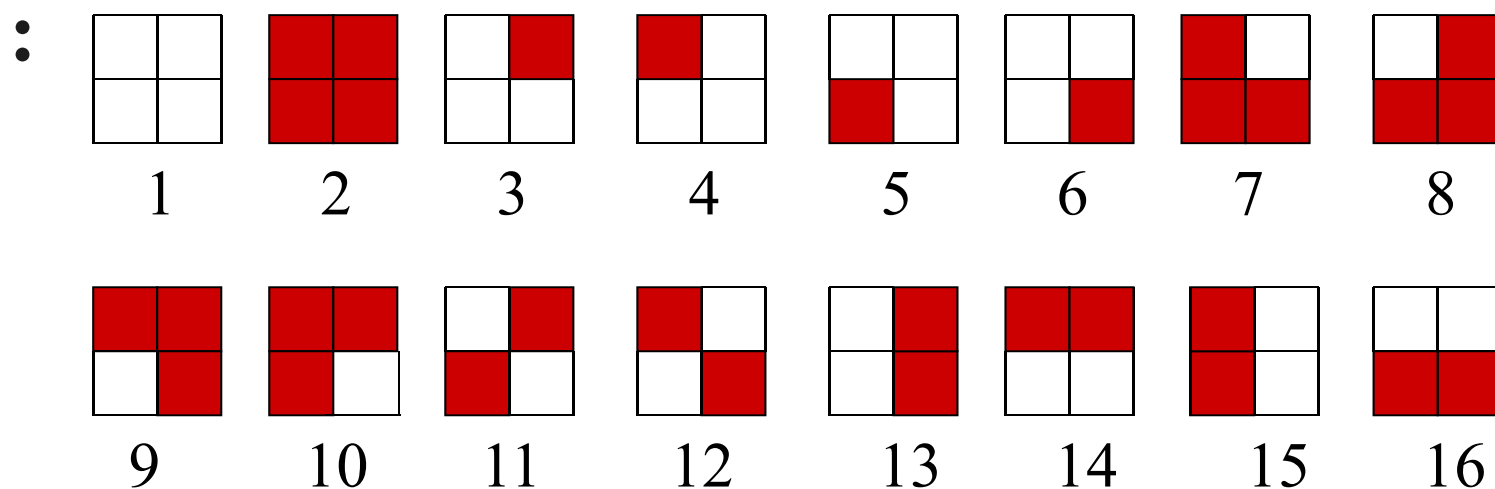


图4-6



4.4 Burnside引理

旋转置换为:

(1)不动: $p_1=(1)(2)\dots(16)$

(2)逆时针转 90° :

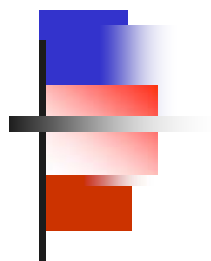
$$p_2=(1)(2)(3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)(11\ 12)(13\ 14\ 15\ 16)$$

(3)顺时针转 90° (对应逆时针转 270°) :

$$p_3=(1)(2)(6\ 5\ 4\ 3)(10\ 9\ 8\ 7)(11\ 12)(16\ 15\ 14\ 13)$$

(4)转 180° :

$$p_4=(1)(2)(3\ 5)(4\ 6)(7\ 9)(8\ 10)(11)(12)(13\ 15)(14\ 16)$$



4.4 Burnside引理

不同的等价类的个数为

$$l = (16 + 2 + 2 + 4) / 4 = 6$$

6种不同的方案如图4-7所示:

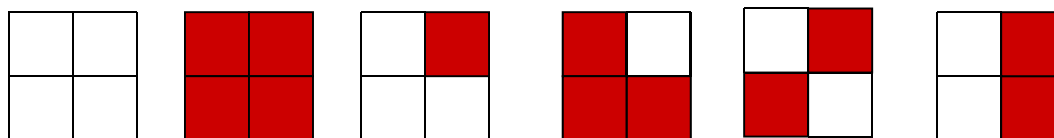


图4-7

4.4 Burnside引理

例4-7 一个圆环,按顺时针方向 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 位置上装一红或蓝的珠子,问有多少不同的等价类.即有多少不同的方案?刚体运动使之吻合的算一种方案.

该问题可以看作是前面正方形分成四方格的情况,如图4-8所示,但正方形是透明的玻璃板,用红、蓝两种颜色着色,问有多少种着色方案?

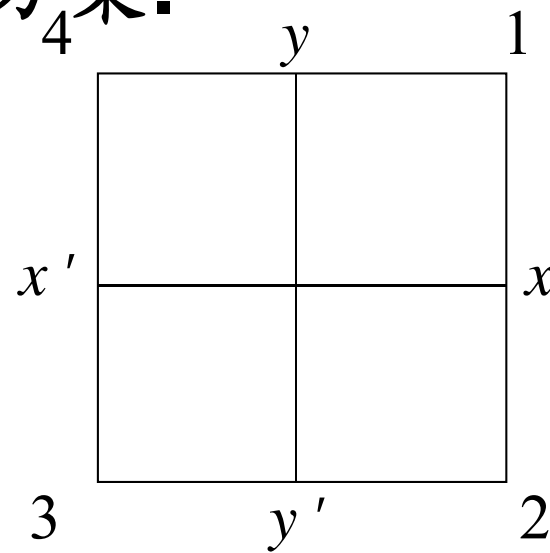


图4-8

4.4 Burnside引理

对应的置换除了和前例一样的 p_1, p_2, p_3, p_4 之外, 还包含

(5)沿 $x'x$ 轴翻转 180° , 对应的置换为:

$$p_5=(1)(2)(3\ 6)(4\ 5)(7\ 10)(8\ 9)(11\ 12)(13)(15)(14\ 16)$$

(6)沿 $y'y$ 轴翻转 180° , 对应的置换为:

$$p_6=(1)(2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)(13\ 15)(14)(16)$$

(7)沿对角线13翻转 180° , 对应的置换为:

$$p_7=(1)(2)(3)(4\ 6)(5)(7)(8\ 10)(9)(11)(12)(13\ 14)(15\ 16)$$

(8)沿对角线24翻转 180° , 对应的置换为:

$$p_8=(1)(2)(3\ 5)(4)(6)(7\ 9)(8)(10)(11)(12)(13\ 16)(14\ 15)$$



4.4 Burnside引理

根据Burnside公式，不同的等价类的个数为

$$l = (16 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8) / 8 = 6$$

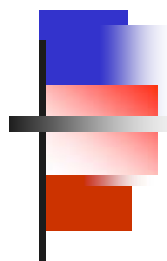
6种不同的方案和前例中图4-7一致，但这里含义有所不同，它包含各种类型的翻转。



4.5 Pólya定理

Burnside引理理论上也可以研究 $m(m>2)$ 种颜色的不同着色方案的计数问题, 但问题变得复杂得多, 比如上节例中, 若为3种颜色着色, 则有 $3^4=81$ 种图像. 针对这一情况, Pólya定理给出了一种相对简便的计数方法.

设有 n 个对象, \bar{G} 是这 n 个对象上的置换群. 现用 m 种颜色涂染这 n 个对象, 问有多少种着色方案? 一般地, 有 m^n 种图像, 但一种图像在 \bar{G} 作用下变为另一种图像, 则着两种图像当作是同一种着色方案.



4.5 Pólya定理

Pólya定理 设 \bar{G} 是 n 个对象上的一个置换群, 用 m 种颜色涂染这 n 个对象, 则不同的染色方案数为

$$l = \frac{1}{|\bar{G}|} [m^{c(\bar{a}_1)} + m^{c(\bar{a}_2)} + \cdots + m^{c(\bar{a}_g)}].$$

其中 $\bar{G} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_g\}$, $c(\bar{a}_k)$ 为置换 \bar{a}_k 的循环节数.

4.5 Pólya定理

n 个对象可用 $1, 2, \dots, n$ 编号, 故 \bar{G} 可当作 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的一个置换群.

分析Pólya定理与Burnside引理之间的关系:

Pólya定理中的群 \bar{G} 是作用在 n 个对象上的置换群, n 个对象上 m 种颜色染色所得图像的集合有 m^n 个元素, 记该集合为 S . 对每个 $\bar{a}_k \in \bar{G}$, 诱导出 S 上的一个置换 a_k , 所有 \bar{a}_k 诱导的 a_k 的集合记为 G , 利用诱导关系可证 G 是 S 上的置换群, 且 $|G| = |\bar{G}|$.

4.5 Pólya定理

由 G 与 \bar{G} 的关系可知, \bar{G} 作用下不同的染色方案数就是 G 作用到 S 上的不同的等价类的个数, 则Pólya定理和Burnside引理所求的数是相同的.

则由Burnside引理, 不同的染色方案数为

$$l = [c_1(a_1) + c_1(a_2) + \dots + c_1(a_g)] / |G|,$$

而 $|G| = |\bar{G}|$. 若能证明 $c_1(a_k) = m^{c(\bar{a}_k)}$, 即知Pólya定理成立.

在证明之前, 先分析前面的例子.

4.5 Pólya定理

图4-9的染色结果见图4-6, 图4-9的置换群记为 $\{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4\}$, 对应 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ 如下:

$$\bar{p}_1 = (1)(2)(3)(4), \quad p_1 = (1)(2)\dots(16)$$

$$\bar{p}_2 = (4321),$$

$$p_2 = (1)(2)(3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)(11\ 12)(13\ 14\ 15\ 16)$$

$$\bar{p}_3 = (1234),$$

$$p_3 = (1)(2)(6\ 5\ 4\ 3)(10\ 9\ 8\ 7)(11\ 12)(16\ 15\ 14\ 13)$$

$$\bar{p}_4 = (13)(24),$$

$$p_4 = (1)(2)(35)(46)(79)(8\ 10)(11)(12)(13\ 15)(14\ 16)$$

$$c(\bar{p}_1) = 4, \text{ 对应 } c_1(p_1) = 16 = 2^{c(\bar{p}_1)}$$

$$c(\bar{p}_2) = 1, \text{ 对应 } c_1(p_2) = 2 = 2^{c(\bar{p}_2)}$$

$$c(\bar{p}_3) = 1, \text{ 对应 } c_1(p_3) = 2 = 2^{c(\bar{p}_3)}$$

$$c(\bar{p}_4) = 2, \text{ 对应 } c_1(p_4) = 4 = 2^{c(\bar{p}_4)}$$

2	1
3	4

图4-9

4.5 Pólya定理

其次,还可以发现,在 p_i 作用下不变的图像正好是对应的 \bar{p}_i 的同一循环节中的对象染以相同的颜色所得的图像. 例如 $\bar{p}_2=(4321)$,对应的 p_2 中一阶循环节为(1)和(2),见图4-10,图像1,2正好是1,2,3,4染以相同的颜色所得的图像.

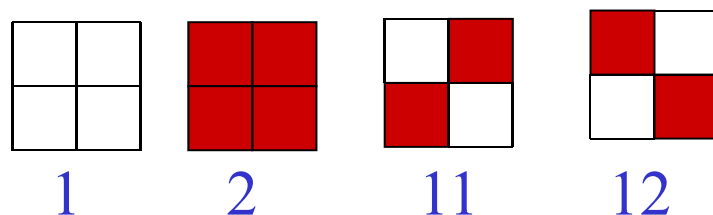


图4-10



4.5 Pólya定理

又如 $\bar{p}_4=(13)(24)$,对应的 p_4 中一阶循环节为(1)(2)(11)(12), 图像1, 2, 11, 12正好是1和3, 2和4分别染以相同的颜色所得的图像(如图4-10所示).

这是因为, \bar{p}_i 作用时,是同一循环节中的对象循环换位,当同一循环节中的对象染以相同的颜色时,对应图像变换的结果是各位置的对象以同颜色的对象替换,因此对应的 p_i 作用下图像当然没有变化.由此可知,上例中的出现的规律总是成立的.



4.5 Pólya定理

对 \bar{a}_k , 若同一循环节着以相同的颜色, 每个循环节有 m 种染色方案, 则 $c(\bar{a}_k)$ 个循环节有 $m^{c(\bar{a}_k)}$ 种染色方案, 由于 \bar{a}_k 同一循环节中的对象染以相同的颜色的方案数就是在 a_k 作用下不变的图像数, 而 a_k 作用下不变的图像数为 $c_1(a_k)$,

$$\therefore c_1(a_k) = m^{c(\bar{a}_k)}.$$

由此即知Pólya定理得证.

4.5 Pólya定理

定理的证明过程概括如下:

假定 n 个对象用 m 种颜色染色所得图像的集合为 S , 显然 $|S| = m^n$.

\bar{G} 的每一个元素 \bar{a}_k 对应 n 个对象的一个排列(置换), 也对应了 S 中的 m^n 个图像的一个排列, 记作 a_k .

这样, n 个对象上的群 \bar{G} , 对应作用于 S 上的群 G , 所以

$$|G| = |\bar{G}|.$$

4.5 Pólya定理

而且有 $c_1(a_k) = m^{c(\bar{a}_k)}$. 从而可得 S 按 G 作用分成的不同的等价类的个数为:

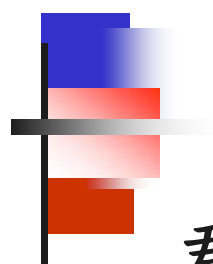
$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{|G|} [c_1(a_1) + c_1(a_2) + \dots + c_1(a_g)] \\ &= \frac{1}{|G|} [m^{c(\bar{a}_1)} + m^{c(\bar{a}_2)} + \dots + m^{c(\bar{a}_g)}]. \end{aligned}$$



4.6 举例

例4-8(4.9) 长为 n 的透明的方格,用红、蓝、黄、绿4种颜色进行染色,试问有多少种不同的方案?

问题相当于用 r, b, y, g 构成长为 n 的字符串,将从左到右的字符顺序和从右到左的字符顺序看作是相同的,例如, $y g g r b r$ 和 $r b r g g y$ 看作是相同的.



4.6 举例

群 G :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

根据Pólya定理，不同的方案数应为：

$$N = \frac{1}{2} (4^n + 4^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor})$$

4.6 举例

例4-10(4.11) 图4-12(a)中 v_1, v_2, v_3 是圆圈上三等分点, 用红、蓝、绿3种颜色的珠子镶上, 试问有多少种不同的方案?

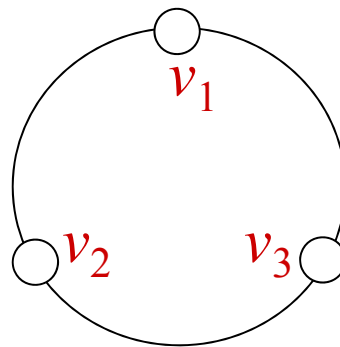


图4-12(a)

4.6 举例

解 图4-12(a)中可以分别绕圆圈中心旋转 0° , 120° , 240° , 以及过一个顶点的垂直于其他两点的连线的垂直线为轴翻转, 得群

$$G = \{(v_1)(v_2)(v_3), (v_1v_2v_3), (v_3v_2v_1), (v_1)(v_2v_3), (v_2)(v_1v_3), (v_3)(v_1v_2)\} \quad (G \text{ 实际上就是 } S_3).$$

G 中: $(1)^3 : 1$ 个;

$(3)^1 : 2$ 个;

$(1)^1(2)^1 : 3$ 个;

故不同的方案数 $l = (3^3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2) / 6 = 10$.

10种方案见图4-12(b).

4.6 举例

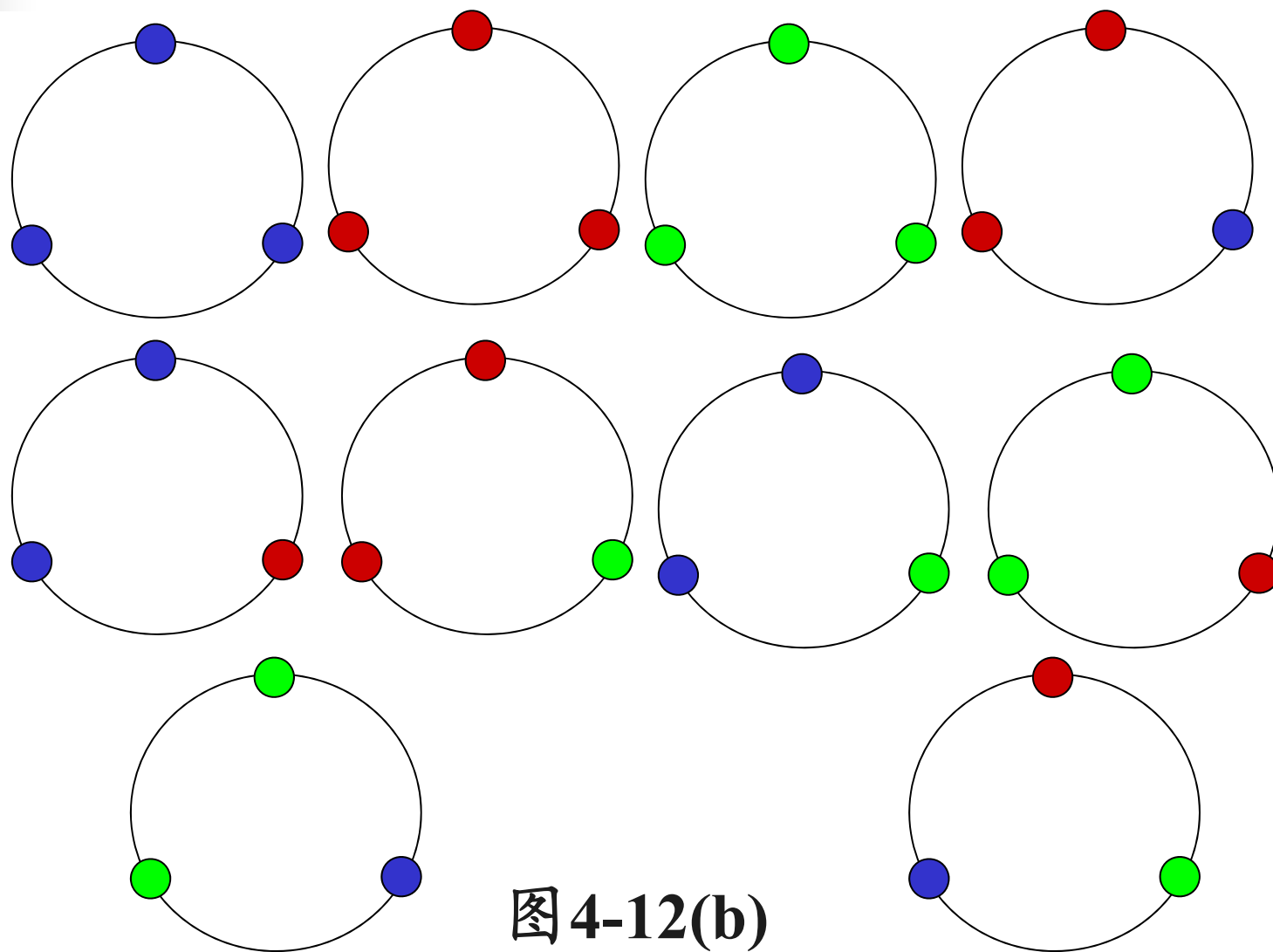


图4-12(b)

4.6 举例

例4-11(4.12) 甲烷 CH_4 的4个H键任意用H, Cl, CH_3 , C_2H_5 之一取代, 有多少种方案?

解 CH_4 的结构是一个正4面体, C原子居于正4面体的中心。图4-13正4面体的旋转群按转动轴分类: **不动:** $(1)^4$ 1个; **顶点-对面的中心:** 转 120° , 240° , $(1)^1(3)^1$ 8个; **棱中点-棱中点:** 转 180° , $(2)^2$ 3个。

故旋转群的元素有12个。

$$l = [4^4 + 8 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^2] / 12 = [64 + 44] / 3 = 36.$$

4.6 举例

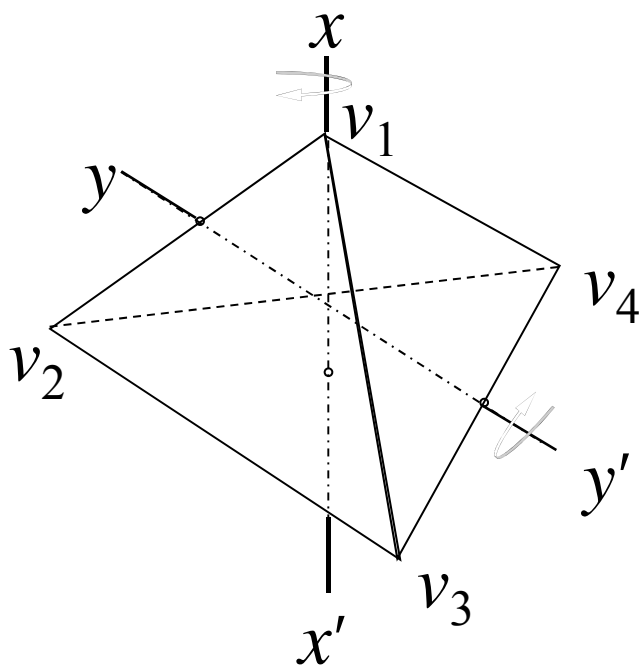


图4-13

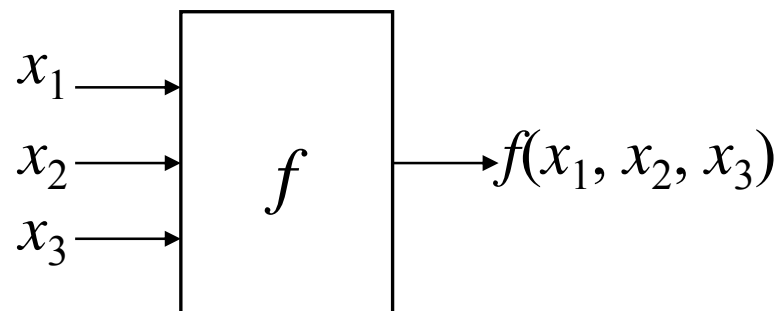
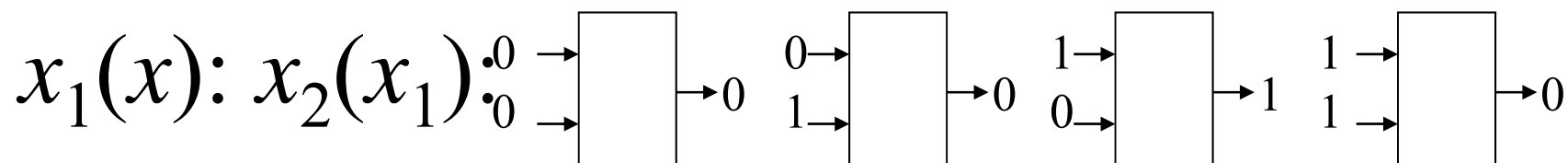


图4-14

4.6 举例

例4-12(13)求3个布尔变量 x_1, x_2, x_3 的布尔函数装置(如图4-14所示)有多少种不同的结构?

3个变量的布尔函数有 $2^{2^3} = 2^8 = 256$ 个,但有些布尔函数可以通过变换输入端表示变量的不同顺序而共用同一装置.下面以2个变量的布尔函数来说明这一点,例如,某装置的输入输出为



若将输入变量的顺序看作 x_1, x_2 , 上装置表示 $f_3 = x_1 \wedge x_2$,

若将输入变量的顺序看作 x_2, x_1 , 上装置表示 $f_5 = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$,
即 f_3, f_5 可共用上一装置.

4.6 举例

解 图4-14中3个输入端的变换群H(即 S_3)为

$$h_1=(x_1)(x_2)(x_3), \quad h_2=(x_1x_2x_3),$$

$$h_3=(x_3x_2x_1), \quad h_4=(x_1)(x_2x_3),$$

$$h_5=(x_2)(x_1x_3), \quad h_6=(x_3)(x_1x_2),$$

3个布尔变量 x_1, x_2, x_3 构成的3位二进制数 $x_1x_2x_3$ 的状态为

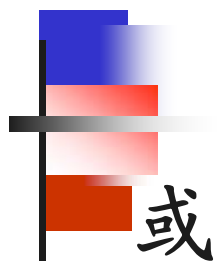
$$a_0=000, a_1=001, a_2=010, a_3=011,$$

$$a_4=100, a_5=101, a_6=110, a_7=111$$

以 $h_2=(x_1x_2x_3)$ 的作用为例, 对应的置换为

$$p_2 = \begin{pmatrix} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ 000 & 010 & 100 & 110 & 001 & 011 & 101 & 111 \end{pmatrix}$$

4.6 举例



$$p_2 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \end{bmatrix}$$

$$=(a_0)(a_1a_2a_4)(a_3a_6a_5)(a_7)$$

若 $h_i \rightarrow p_i$, $i=1, 2, \dots, 6$, 则有

$$p_1 = (a_0)(a_1)(a_2)(a_3)(a_4)(a_5)(a_6)(a_7)$$

$$p_2 = (a_0)(a_1a_2a_4)(a_3a_6a_5)(a_7)$$

$$p_3 = (a_0)(a_1a_4a_2)(a_3a_5a_6)(a_7)$$

$$p_4 = (a_0)(a_1a_2)(a_3)(a_4)(a_5a_6)(a_7)$$

$$p_5 = (a_0)(a_1a_4)(a_2)(a_3a_6)(a_5)(a_7)$$

$$p_6 = (a_0)(a_1)(a_2a_4)(a_3a_5)(a_6)(a_7)$$



4.6 举例

求不同布尔函数装置的问题, 相当于群 $G=\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ 作用下8个顶点 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ 用两种颜色(相当于布尔函数的0,1状态)进行染色的不同方案数. 根据 Pólya定理应有

$$m=(2^8 + 3 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^4)/6=480/6=80.$$

由此可知, 布尔函数装置实质上不同的结构只有80种, 其他的布尔函数可以通过变换输入端表示变量的不同顺序而共用这些装置.

4.6 举例

例4-13(4.14) 正六面体的6个面分别用红, 蓝两种颜色着色, 问有多少种方案?

使正6面体重合的刚体运动群, 有如下几种情况:

(1) 不动置换 $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$, 格式为 $(1)^6$.

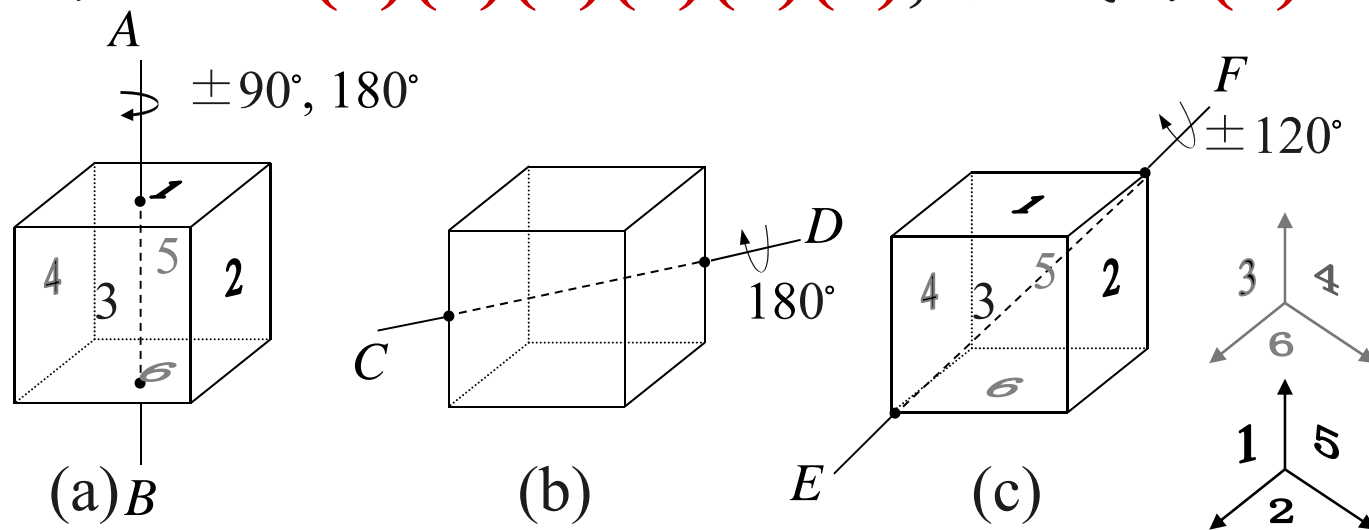


图4-15

4.6 举例

(2) 绕过面1-面6中心的 AB 轴(面心-面心), 旋转 $\pm 90^\circ$, 对应有 $(1)(2\ 3\ 4\ 5)(6)$, $(1)(5\ 4\ 3\ 2)(6)$, 格式为 $(1)^2(4)^1$. 正六面体有3个对面, 故同类的置换有6个.

(3) 绕 AB 轴(面心-面心), 旋转 180° 的有 $(1)(2\ 4)(3\ 5)(6)$, 格式为 $(1)^2(2)^2$, 同类的置换有3个.

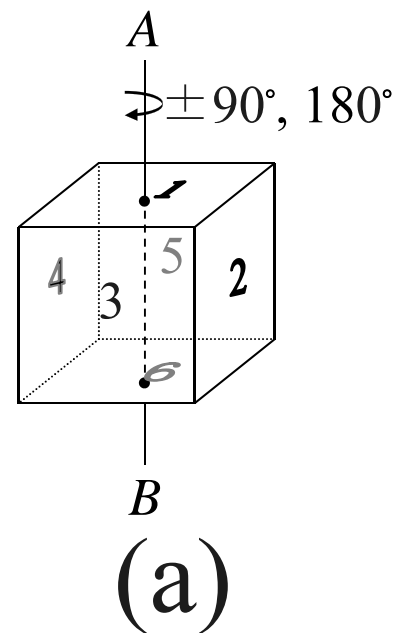
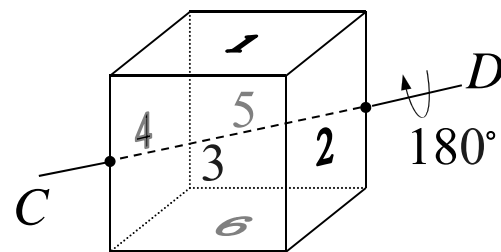


图4-15

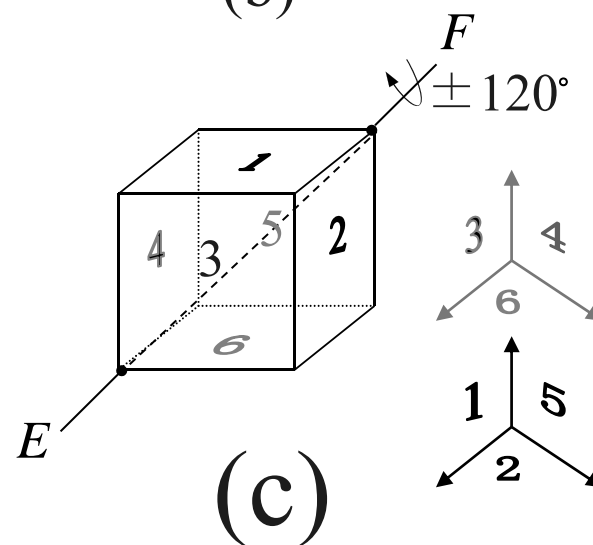
4.6 举例

(4) 绕 CD 轴(棱中-棱中)旋转 180° 的置换为 $(1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$, 格式为 $(2)^3$. 正六面体中对角线位置的平行的棱有 6 对, 故同类的置换有 6 个.

(5) 绕正六面体的对角线 EF (顶点-顶点)旋转 $\pm 120^\circ$, 旋转 120° 的置换为 $(3\ 4\ 6)(1\ 5\ 2)$, 旋转 -120° 的置换为 $(6\ 4\ 3)(2\ 5\ 1)$, 格式为 $(3)^2$, 正六面体的对角线有 4 条, 故同类的置换有 8 个.



(b)



(c)

图4-15



4.6 举例

于是不同的染色的方案为

$$\begin{aligned} M &= [2^6 + 6 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2] / 24 \\ &= [64 + 48 + 48 + 48 + 32] / 24 \\ &= 10 \end{aligned}$$



4.6 举例

例4-14(4.15) 用2种颜色给正6面体的8个顶点着色，有多少方案？

群作用的对象是顶点，使正6面体重合的关于顶点的运动群是

(1)单位元素 $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$ ，格式为 $(1)^8$.

4.6 举例

(2) 绕 xx' 轴(面心-面心), 旋转 $\pm 90^\circ$ 的置换分别为 $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$, $(4\ 3\ 2\ 1)(8\ 7\ 6\ 5)$, 格式为 $(4)^2$, 同类的置换有 6 个.

(3) 绕 xx' 轴(面心-面心), 旋转 180° 的置换为 $(1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)$, 格式为 $(2)^4$, 同类的置换有 3 个.

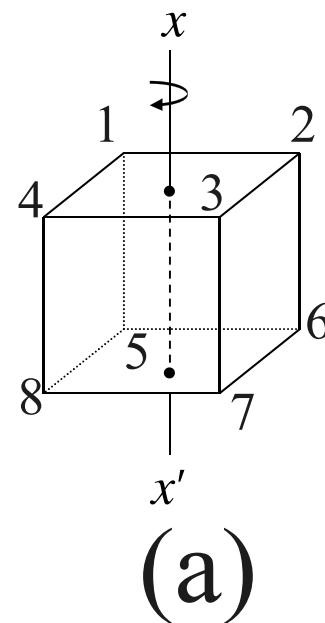


图4-16

4.6 举例

(4)绕 yy' 轴(棱中-棱中)旋转 180° 的置换为

$(1\ 7)(2\ 6)(3\ 5)(4\ 8)$, 格式为 $(2)^4$, 同类的置换有6个.

(5)绕 zz' 轴(顶点-顶点)旋转 $\pm 120^\circ$ 的置换分别为

$(1\ 3\ 6)(4\ 7\ 5)(2)(8)$,
 $(1\ 6\ 3)(4\ 5\ 7)(2)(8)$, 格式为 $(3)^2(1)^2$, 同类的置换有8个.

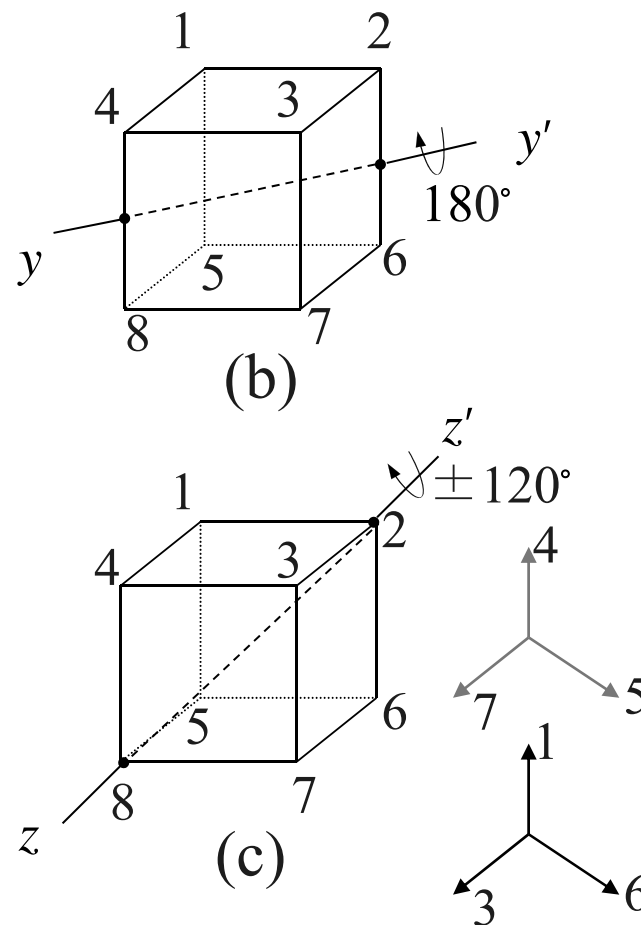


图4-16



4.6 举例

依据Pólya定理, 不同的方案数为

$$\begin{aligned} m &= [2^8 + 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^4] / 24 \\ &= [256 + 24 + 48 + 96 + 128] / 24 \\ &= 552 / 24 \\ &= 23 \end{aligned}$$



4.6 举例

例4-15(4.16) 骰子的6个面分别有 $1, \dots, 6$ 点, 有多少种不同的方案?

解法1

问题相当于对正六面体的6个面, 用6种颜色着色, 要求各面的颜色都不一样, 求不同的方案数.

6个面用6种颜色着色, 要求各面的颜色都不一样, 应有 $6!$ 种方案, 设 $6!$ 种方案为 $S_1, S_2, \dots, S_{6!}$, 但其中经过刚体运动使之重合的作为相同的一种, 从例4-13(4.14)知运动变换群共24个元素. 现考察群元素作用到 $6!$ 种方案上的情况.



4.6 举例

在单位元素作用下有置换

$$(S_1)(S_2) \cdots (S_{6!})$$

由于6个面颜色均不相同,故对其他23个置换没有一种方案能保持不变的.记24个置换中单位元(不动置换)为 p_0 ,其余为 p_1, p_2, \dots, p_{23} ,则有

$$c_1(p_0)=6!,$$

$$c_1(p_1)=c_1(p_2)=c_1(p_3)=\cdots=c_1(p_{23})=0.$$

根据Burnside引理,不同的方案数为

$$m=[6!+0+\cdots+0]/24=6!/24=30.$$



4.6 举例

解法2

用Pólya定理和容斥原理.

使正六面体重合的置换群见例4-13(4.14). 用 m 种颜色对正六面体的6个面着色可得不同方案数为 n_m , 根据Pólya定理有

$$n_m = [m^6 + 3 \cdot m^4 + 12 \cdot m^3 + 8 \cdot m^2] / 24,$$

则有

$$n_1 = [1 + 3 + 12 + 8] / 24 = 1,$$

$$n_2 = [2^6 + 3 \cdot 2^4 + 12 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2] / 24 = 240 / 24 = 10,$$

$$n_3 = [3^6 + 3 \cdot 3^4 + 12 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2] / 24 = 1368 / 24 = 57,$$

4.6 举例

$$n_4 = [4^6 + 3 \cdot 4^4 + 12 \cdot 4^3 + 8 \cdot 4^2] / 24 = 5760 / 24 = 240,$$

$$n_5 = [5^6 + 3 \cdot 5^4 + 12 \cdot 5^3 + 8 \cdot 5^2] / 24 = 19200 / 24 = 800,$$

$$n_6 = [6^6 + 3 \cdot 6^4 + 12 \cdot 6^3 + 8 \cdot 6^2] / 24 = 53424 / 24 = 2226.$$

令 l_i = 用 i 种颜色对正六面体的6个面着色所得不少于 i 种颜色的方案数, 后面的计算需要利用如下形式的容斥原理公式

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = \beta_m + \beta_{m-1} + \cdots + \beta_1 \quad (*)$$

其中 A_k 为 m 种颜色对正六面体的6个面着色的不同方案中使用了第 k 种颜色的方案集合 ($k=1, 2, \cdots, m$), β_i 为 m 种颜色对正六面体的6个面着色的不同方案中恰好使用了 i 种颜色的方案数 ($i=1, 2, \cdots, m$).

4.6 举例

由 A_k, β_i 的定义知公式(*)成立, 且有

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = n_m, \beta_i = \binom{m}{i} l_i \quad (i=1, 2, \cdots, m).$$

则有

$$l_1 = n_1 = 1,$$

$$l_2 = n_2 - \binom{2}{1} l_1 = n_2 - 2l_1 = 10 - 2 = 8,$$

$$l_3 = n_3 - \binom{3}{2} l_2 - \binom{3}{1} l_1 = n_3 - 3l_2 - 3l_1 = 57 - 3 \cdot 8 - 3 = 30,$$

$$\begin{aligned} l_4 &= n_4 - \binom{4}{3} l_3 - \binom{4}{2} l_2 - \binom{4}{1} l_1 = n_4 - 4l_3 - 6l_2 - 4l_1 \\ &= 240 - 4 \cdot 30 - 6 \cdot 8 - 4 = 68, \end{aligned}$$



4.6 举例

$$\begin{aligned}l_5 &= n_5 - \binom{5}{4}l_4 - \binom{5}{3}l_3 - \binom{5}{2}l_2 - \binom{5}{1}l_1 \\&= n_5 - 5l_4 - 10l_3 - 10l_2 - 5l_1 \\&= 800 - 5 \cdot 68 - 10 \cdot 30 - 10 \cdot 8 - 5 \\&= 800 - 340 - 300 - 80 - 5 = 75,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l_6 &= n_6 - \binom{6}{5}l_5 - \binom{6}{4}l_4 - \binom{6}{3}l_3 - \binom{6}{2}l_2 - \binom{6}{1}l_1 \\&= n_6 - 6l_5 - 15l_4 - 20l_3 - 15l_2 - 6l_1 \\&= 2226 - 6 \cdot 75 - 15 \cdot 68 - 20 \cdot 30 - 15 \cdot 8 - 6 \\&= 2226 - 450 - 1020 - 600 - 120 - 6 = 30.\end{aligned}$$

4.6 举例

对Burnside引理和Pólya定理的一个注解:

Burnside引理中, 不同的方案数为

$$l = [c_1(a_1) + c_1(a_2) + \cdots + c_1(a_g)] / |G| = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^g c_1(a_j)$$

公式中 $c_1(a_j)$ 实际上是 a_j 作用下不变的着色方案的个数, $\sum_{j=1}^g c_1(a_j)$ 是 a_1, a_2, \cdots, a_g 作用下不变的着色方案数的总和, 由此可得定理一种更一般的表述方式: 不同的方案数为

$$l = \frac{1}{|G|} [G \text{ 中各置换作用下不变的着色方案数的总和}]$$

4.6 举例

记 G 中各置换作用下不变的着色方案数的总和为 S^* .

在Burnside引理中, S^* 用 $\sum_{j=1}^g c_1(a_j)$ 来计算;

在Pólya定理中, S^* 又用 $\sum_{j=1}^g m^{c(\bar{a}_j)}$ 来计算;

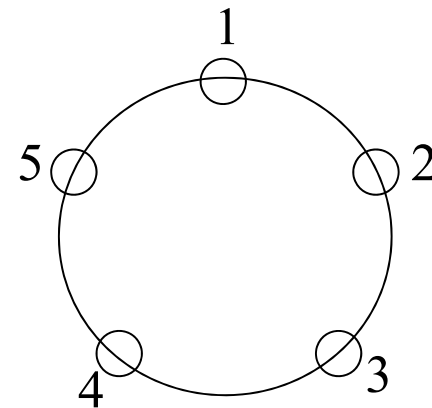
这都是一些典型情况.但在一些非典型情况下,若能直接计算出 S^* ,即可得 $l=S^*/|G|$,而不必计算 $\sum_{j=1}^g c_1(a_j)$ 或 $\sum_{j=1}^g m^{c(\bar{a}_j)}$.上例解法1中实际采用了这一做法.

例4-9(4.10)也要采用这一思想来求解.

4.6 举例

例4-9(4.10)用3个红珠子、2个蓝珠子镶嵌在圆环上(如图4-11所示),试问有多少种不同的方案?

G : (1)(2)(3)(4)(5),
(1 2 3 4 5), (1 3 5 2 4),
(1 4 2 5 3), (1 5 4 3 2),
(1)(2 5)(3 4), (2)(1 3)(4 5),
(3)(1 5)(2 4), (4)(1 2)(3 5),
(5)(1 4)(2 3).



(a)

图4-11

4.6 举例

有没有别的办法?

借鉴Burnside引理:

用3红2蓝镶嵌在圆环上的图像有 $C(5,3)=10$ 种, 在 $g_0=(1)(2)(3)(4)(5)$ 作用下都不变, 在 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ 等4个 $(5)^1$ 格式的置换作用下不变图像数为0, 在5个 $(1)^1(2)^2$ 格式的每个置换作用下不变图像数为2, 故

$$N=[10+5\times 2]/10=2$$

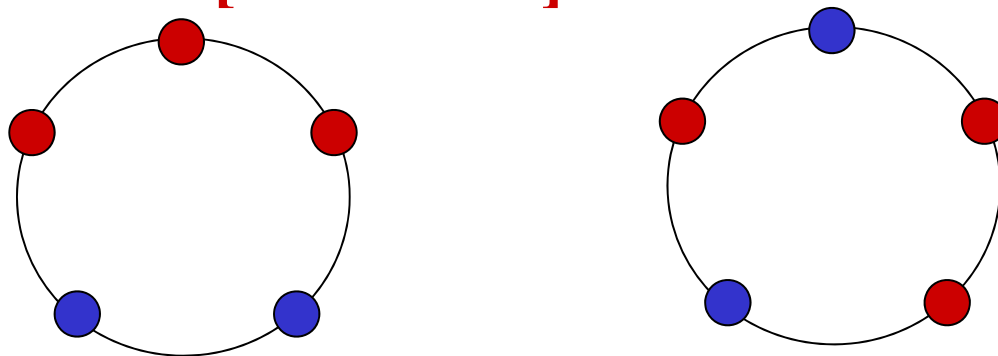


图4-11 (b)



4.7 母函数形式的Pólya定理

前面介绍的Pólya定理主要用于计数,这一节里我们将把Pólya定理推广到母函数形式,它不仅可用于计数,还可以用其对状态进行列举.

分析 n 个对象用 m 颜色着色的几种情况:

以 $n=4, m=3$ 为例,即4个对象用3种颜色着色,考察不同情况的不同方案数. 记4个对象集合为 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 三种颜色为 b, g, r .

4.7 母函数形式的Pólya定理

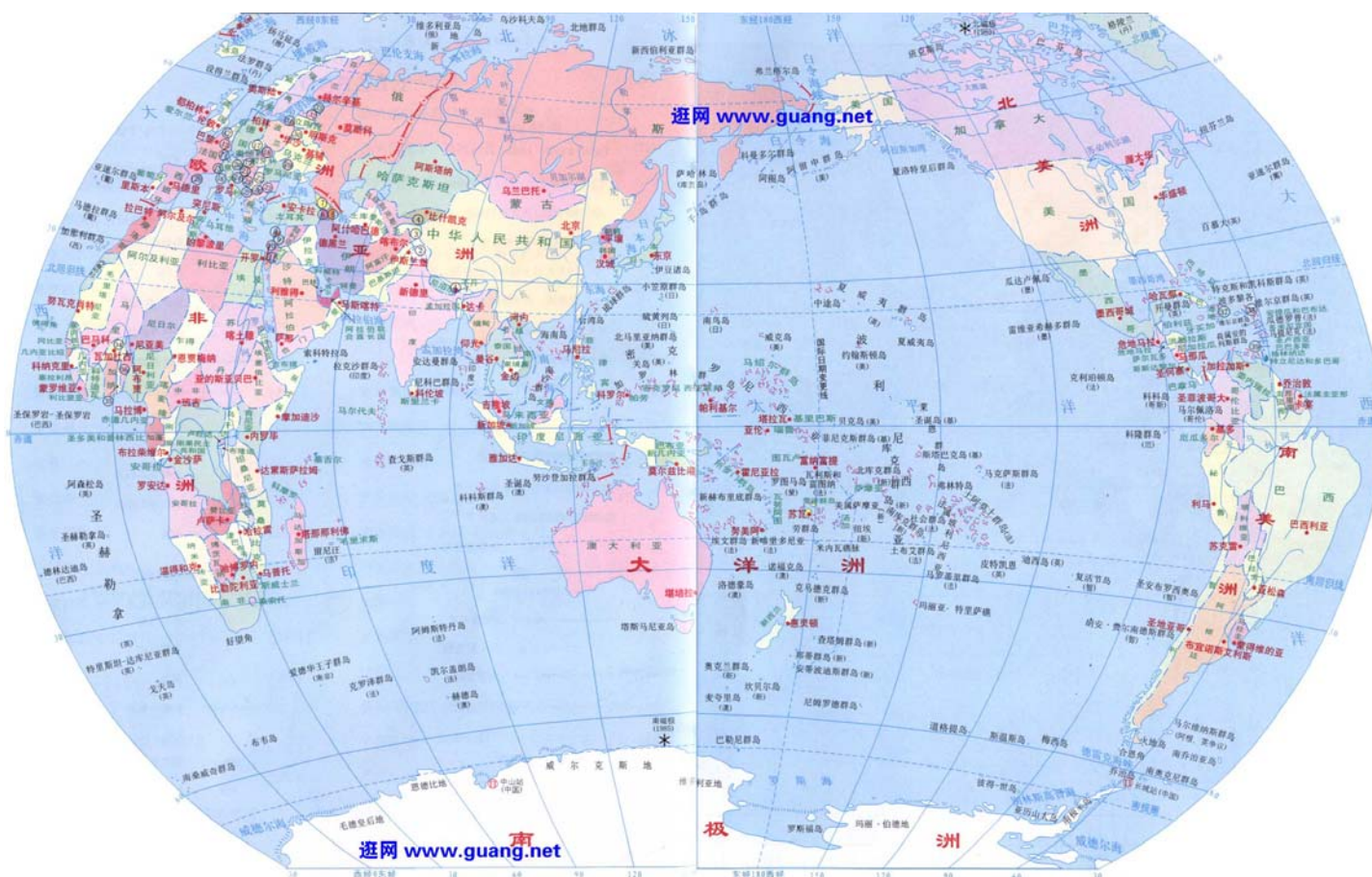
情况1. 4个对象有区别. 着色方案及计数可用下面母函数求出:

$$(b+g+r)^4 = \underbrace{(b+g+r)}_{\substack{\text{对应 } a_1 \\ \text{的着色}}} \cdot \underbrace{(b+g+r)}_{\substack{\text{对应 } a_2 \\ \text{的着色}}} \cdot \underbrace{(b+g+r)}_{\substack{\text{对应 } a_3 \\ \text{的着色}}} \cdot \underbrace{(b+g+r)}_{\substack{\text{对应 } a_4 \\ \text{的着色}}}$$

由于4个对象有区别, 上式中乘法不可交换, 例如 $bgrb$ 与 b^2gr 的意义不同, $bgrb$ 表示: a_1 着 b , a_2 着 g , a_3 着 r , a_4 着 b ; b^2gr 表示: a_1 、 a_2 着 b , a_3 着 g , a_4 着 r . 因此上母函数展开式有 $3^4=81$ 项, 代表 81 种不同的着色方案. 一般为 m^n 种.

4.7 母函数形式的Pólya定理

例如,世界地图上用3种颜色着色,中国,美国,澳大利亚,巴西4国的着色方案有81种.



4.7 母函数形式的Pólya定理

情况2. 4个对象无区别. 典型例子是用3种颜色对4个无区别的球着色, 其不同方案与计数的母函数为:

$$(b+g+r)^4 = b^4 + g^4 + r^4 + 6b^2g^2 + 6b^2r^2 + 6g^2r^2 + 4b^3g + 4b^3r + 4bg^3 + 4g^3r + 4br^3 + 4gr^3 + 12b^2gr + 12bg^2r + 12bgr^2$$

上面的乘法是可交换的, 每一个字母项表示一种颜色的组合方案, 有 $C(3+4-1, 4) = C(6, 4) = 15$ 个字母项, 代表 15 种不同的颜色组合方案, 即有 15 种不同的着色方案. 字母项前面的系数给出了当 4 个对象有区别时, 该字母项代表的颜色组合方案下的不同的着色方案数. 总数为 $3 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 12 = 81$.



4.7 母函数形式的Pólya定理

情况3. 4个对象在一定条件下无区别. 例如在置换群 G 下着色图像(方案)可互相转化的不加区别. 这种情况介于情况1的完全有区别与情况2的完全无区别之间.

置换群 G 下不同着色方案的计数可用Pólya定理得出, 例如如图4-9的4个对象在 $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4$ 下着3色的不同方案数为

$$l = [3^4 + 2 \cdot 3 + 3^2] / 4 = [81 + 6 + 9] / 4 = 96 / 4 = 24.$$

4.7 母函数形式的Pólya定理

符合关系式:

(情况2)对象完全无区别的不同着色方案数
($C(m+n-1, n)$)

≤ (情况3)对象在在置换群 G 下不区别的不同着色方案数(由Pólya定理计数)

≤ (情况1)对象完全有区别的不同着色方案数
(m^n).

但情况3的各方案的组成结构尚不知. 需要给出情况3的母函数来确定各方案的组成结构及相关计数, 这就导出了母函数形式的Pólya定理



4.7 母函数形式的Pólya定理

设对 n 个对象用 m 种颜色 b_1, b_2, \dots, b_m 进行着色. 由Pólya定理, 不同着色方案数为

$$l = \frac{1}{|G|} [m^{c(a_1)} + m^{c(a_2)} + \dots + m^{c(a_g)}]. \quad (*)$$

现在分析对应于 $m^{c(a_i)}$ ($i=1, 2, \dots, g$)着色的母函数. 对应于 $m^{c(a_i)}$ 的特征是: a_i 的同一循环节中的对象着以相同的颜色, 则, 对一个1阶循环, 着色的母函数为 $b_1 + b_2 + \dots + b_m$, $c_1(a_i)$ 个1阶循环对应的母函数为 $(b_1 + b_2 + \dots + b_m)^{c_1(a_i)}$.

4.7 母函数形式的Pólya定理

一般地, 一个 k 阶循环用 k 个相同的颜色着色, 对应的母函数为 $(b_1^k + b_2^k + \cdots + b_m^k)$, 则 $c_k(a_i)$ 个 k 阶循环对应的母函数为 $(b_1^k + b_2^k + \cdots + b_m^k)^{c_k(a_i)}$. 则 $m^{c(a_i)}$ 对应的母函数为

$(b_1 + b_2 + \cdots + b_m)^{c_1(a_i)} (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_m^2)^{c_2(a_i)} \cdots$
 $(b_1^k + b_2^k + \cdots + b_m^k)^{c_k(a_i)} \cdots (b_1^n + b_2^n + \cdots + b_m^n)^{c_n(a_i)}.$
记 $s_k = (b_1^k + b_2^k + \cdots + b_m^k)$, 从而可得(*)对应的母函数为

$$P(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^g \prod_{k=1}^n s_k^{c_k(a_i)}.$$



4.7 母函数形式的Pólya定理

即

$$P(G) = \frac{1}{|G|} [s_1^{c_1(a_1)} s_2^{c_2(a_1)} \cdots s_n^{c_n(a_1)} + s_1^{c_1(a_2)} s_2^{c_2(a_2)} \cdots s_n^{c_n(a_2)} \\ + \cdots + s_1^{c_1(a_g)} s_2^{c_2(a_g)} \cdots s_n^{c_n(a_g)}].$$

4.7 母函数形式的Pólya定理

例4-16(4.17)有3种不同颜色的珠子，串成4颗珠子的项链，问有哪些方案？

解 如图4-17所示，使之重合的运动有关于圆环中心旋转 $\pm 90^\circ$ 和 180° ；有关于 xx' 和 yy' 翻转 180° 等. 故有置换群 G 为

$(v_1)(v_2)(v_3)(v_4), (v_1v_2v_3v_4),$
 $(v_1v_3)(v_2v_4), (v_4v_3v_2v_1),$
 $(v_2)(v_4)(v_1v_3),$
 $(v_1)(v_3)(v_2v_4),$
 $(v_1v_4)(v_2v_3), (v_1v_2)(v_3v_4).$

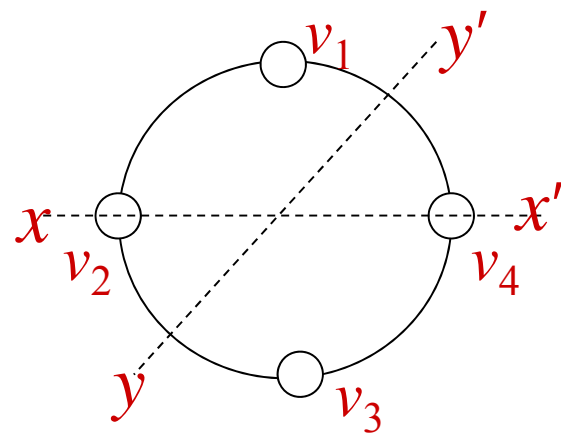


图4-17

4.7 母函数形式的Pólya定理

(这里的8个元素和例4-7的8个元素对应的刚体运动是一致的)其中格式为 $(1)^4$ 的1个, $(4)^1$ 的2个, $(2)^2$ 的3个, $(1)^2(2)$ 的2个.由Pólya定理,不同方案数为

$$m = \frac{1}{8} \times (3^4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3) = 21$$

母函数为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{8} \times [(b+g+r)^4 + 2(b^4+g^4+r^4) + 3(b^2+g^2+r^2)^2 \\ &\quad + 2(b+g+r)^2(b^2+g^2+r^2)] \\ &= b^4 + g^4 + r^4 + b^3g + b^3r + bg^3 + br^3 + g^3r + gr^3 \\ &\quad + 2b^2g^2 + 2b^2r^2 + 2g^2r^2 + 2b^2gr + 2bg^2r + 2bgr^2 \end{aligned}$$

4.7 母函数形式的Pólya定理

其中 b^2gr 的系数为2, 即由两颗蓝色珠子、红和绿各一颗组成的方案有两种, 如图4-18所示

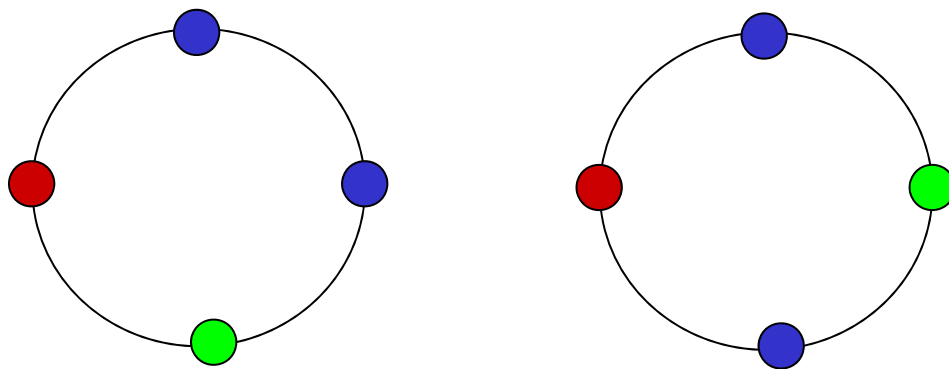


图4-18

4.7 母函数形式的Pólya定理

例4-18(4.19) 4颗红色珠子嵌在正6面体的4个顶点上，有多少方案？

解 相当于对顶点2着色. 无珠设为 **b** . 由例4-14(4.15)知, 置换群的阶数=**24**, 格式为 **$(1)^8$** 的1个; **$(4)^2$** 的6个; **$(2)^4$** 的9个; **$(1)^2(3)^2$** 的8个.

$$P=[(b+r)^8+6(b^4+r^4)^2+9(b^2+r^2)^4+8(b+r)^2(b^3+r^3)^2]/24$$

其中 **b^4r^4** 的系数为

$$\begin{aligned} & [C(8,4) + 6C(2,1) + 9C(4,2) + 8C(2,1)C(2,1)]/24 \\ &= \frac{1}{24} \left[\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4!} + 12 + 9 \times \frac{4 \times 3}{2!} + 32 \right] \end{aligned}$$

4.7 母函数形式的Pólya定理

$$= \frac{1}{24} [70 + 12 + 54 + 32] = \frac{168}{24} = 7.$$

相应的7种方案如图4-20所示

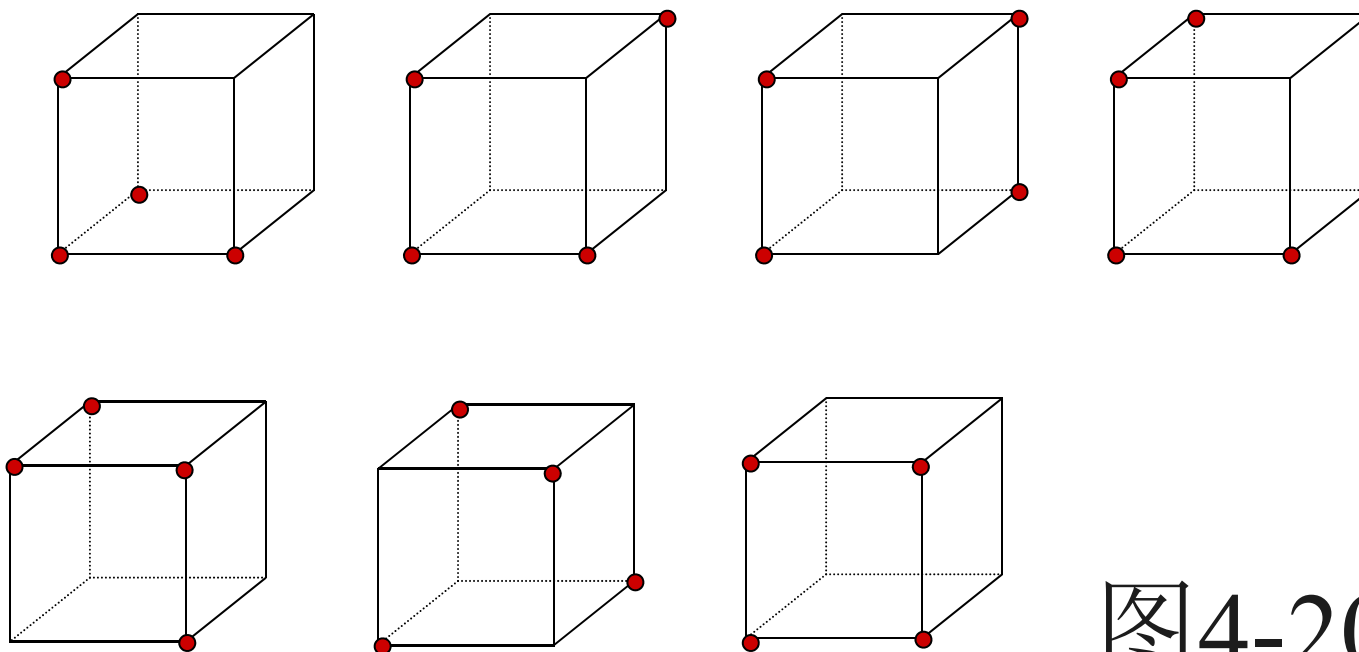


图4-20



4.7 母函数形式的Pólya定理

注：为了计算简便, 这里的母函数可以采用一种简化的形式而不丢失任何信息. 例如上例的母函数可写为

$$P(x)=[(1+x)^8+6(1+x^4)^2+9(1+x^2)^4+8(1+x)^2(1+x^3)^2]/24$$

其中 x^4 的系数相当于上面 b^4r^4 的系数的意义, 也为

$$[C(8,4) + 6C(2,1) + 9C(4, 2) + 8C(2,1)C(2,1)]/24 \\ =7.$$

4.7 母函数形式的Pólya定理

例4-17(4.18) 用5个*4个○对 3×3 的格子进行布子, 试问有多少种不同的布局? 旋转翻转使之一致作为相同处理.

置换群格式:

$(1)^9$ 的1个;

翻转: $(1)^3(2)^3$ 的4个;

旋转 $\pm 90^\circ$: $(1)^1(4)^2$ 的2个;

旋转 180° : $(1)^1(2)^4$ 的1个.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

4.7 母函数形式的Pólya定理

采用简化形式的母函数

$$P(x) = \frac{1}{8} \times [(1+x)^9 + 4(1+x)^3(1+x^2)^3 + 2(1+x)(1+x^4)^2 + (1+x)(1+x^2)^4]$$

(1) 对应于 $(1)^9$, $(1+x)^9$ 中 x^5 项的系数为:

$$C(9, 5) = 126,$$

(2) 对应于 $(1)^3(2)^3$, $4(1+x)^3(1+x^2)^3$ 中 x^5 项的系数为: $4[C(3, 1)C(3, 2) + C(3, 3)C(3, 1)] = 48,$

(3) 对应于 $(1)^1(4)^2$, $2(1+x)(1+x^4)^2$ 中 x^5 项的系数为: $2C(2, 1) = 4,$

(4) 对应于 $(1)^1(2)^4$, $(1+x)(1+x^2)^4$ 中 x^5 项的系数为: $C(4, 2) = 6.$

4.7 母函数形式的Pólya定理

故 x^5 项的系数为

$$\frac{1}{8} \times [126 + 48 + 4 + 6] = \frac{1}{8} \times 184 = 23.$$

相应的布局如图4-19所示.

*	*	*
*	*	○
○	○	○

*	*	*
*	○	*
○	○	○

*	*	*
*	○	○
*	○	○

*	*	*
*	○	○
○	*	○

*	*	*
*	○	○
○	○	*

*	*	*
○	*	○
*	○	○

*	*	*
○	*	○
○	*	○

*	*	*
○	○	○
*	*	○

*	*	*
○	○	○
*	○	*

*	*	○
*	*	*
○	○	○

4.7 母函数形式的Pólya定理

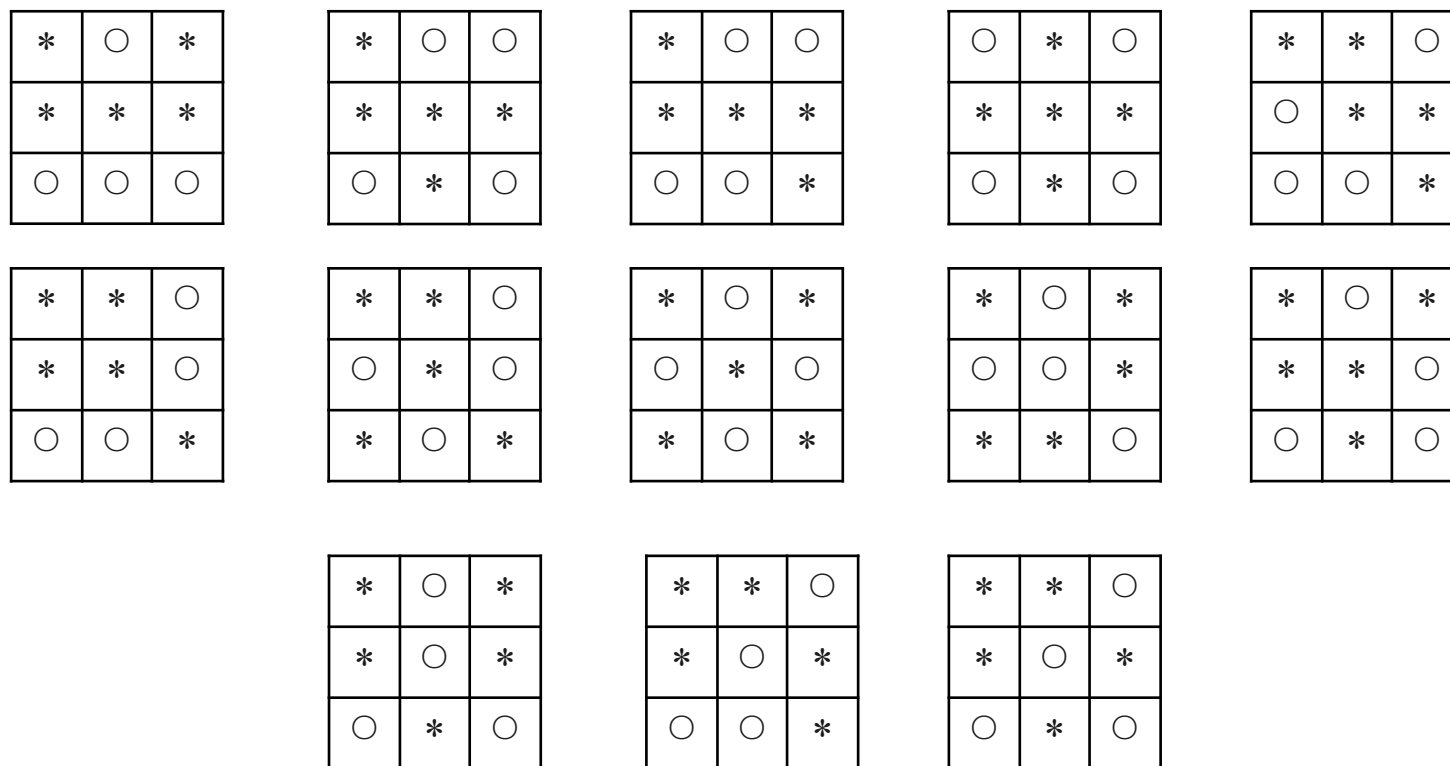


图4-19

4.7 母函数形式的Pólya定理

例4-19(4.20) 4.6节例4-15(4.16)求骰子的不同的方案数, 还可利用母函数形式的Pólya定理理解之如下:

$$P(x) = \frac{1}{24} \times [(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^6 + 6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^2(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4 + x_6^4) + 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^2 + 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^3 + 8(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3)^2],$$

其中 x_i 表示第 i 种颜色, $i=1, 2, \dots, 6$.



4.7 母函数形式的Pólya定理

问题是要求6种颜色各用一次, 即求

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$$

项的系数. 它只能在

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^6$$

展开式中出现, 根据多项式展开公式, 可得不同的骰子方案数为:

$$6!/24=30.$$

4.7 母函数形式的Pólya定理

例4-9(4.10)也可用母函数形式的Pólya定理简便求解:

置换格式: $(1)^5 \times 1, (5)^1 \times 4, (1)(2)^2 \times 5$.

采用简化形式的母函数

$$P(x) = \frac{1}{10} \times [(1+x)^5 + 4(1+x^5) + 5(1+x)(1+x^2)^2]$$

(1) $(1+x)^5$ 中 x^2 项的系数为: $C(5,2)=10$,

(2) $1+x^5$ 中 x^2 项的系数为: 0,

(3) $(1+x)(1+x^2)^2$ 中 x^2 项的系数为: $C(2,1)=2$,

故 x^2 项的系数为 $\frac{1}{10} [10 + 5 \times 2] = 2$, 即方案数为 2.



4.8 图的计数

n 个顶点的简单图, 同构(同形)的图是作为相同的, 共有多少种不同的图?

设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 是两个图, 两图同构的意义: 两顶点集合一一对应, 即存在 V_1 到 V_2 置换 p , 且 p 保持边的对应关系: $(v_1, v_2) \in E_1 \Leftrightarrow (p(v_1), p(v_2)) \in E_2$, 即顶点集合间的置换群引起边集合间的置换群 S .



4.8 图的计数

n 个顶点的无向完全图有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 条边, 不同的图就在于这 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 条边的出现与否的不同组合而得到.

将出现的边对应一种颜色 x , 不出现的边对应另一种颜色 y , 则, 求 n 个顶点的不同构的图的个数问题化为:

求对 n 个顶点的完全图的边用两种颜色着色, 在置换群 S 下不同的着色方案数.



4.8 图的计数

利用母函数形式的Pólya定理可求出 n 个顶点的不同构的图的个数,还可得出某种结构的图的数目,进一步可列举出所有不同的图.

4.8 图的计数

例4-20(4.21) 3个顶点的无向图的计数. 顶点集合上的置换群为

$$G = \{(v_1)(v_2)(v_3), (v_1v_2v_3), (v_3v_2v_1), (v_1)(v_2v_3), (v_2)(v_1v_3), (v_3)(v_1v_2)\}$$

利用图4-21的记号, 可得边集合上的置换群为

$$S = \{(e_1)(e_2)(e_3), (e_1e_2e_3), (e_3e_2e_1), (e_1)(e_2e_3), (e_2)(e_1e_3), (e_3)(e_1e_2)\}$$

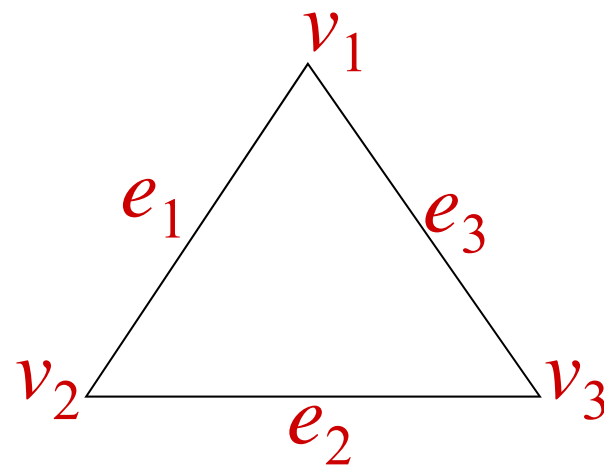


图4-21



4.8 图的计数

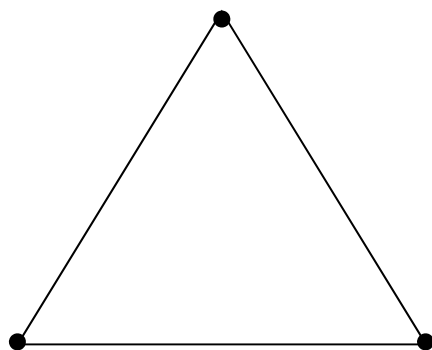
格式: $(1)^3$ 1个, $(1)^1(2)^1$ 3个, $(3)^1$ 2个,

$$P(x,y) = \frac{1}{6} [(x+y)^3 + 3(x+y)(x^2+y^2) + 2(x^3+y^3)] \\ = x^3 + y^3 + xy^2 + x^2y$$

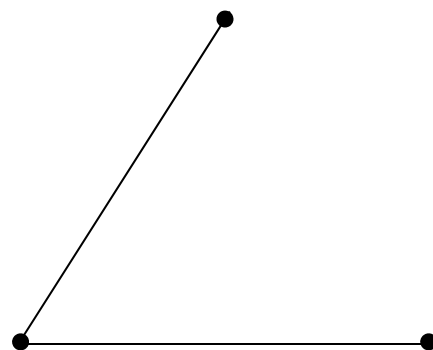
从 $P(x,y)$ 可知, 对图4-21的边着色, 其中3条边都着以色 x 的有1; 两条边, 或1条边, 或无一边着以色 x 的方案各1.

图4-21中把着以色 y 的边消除即得3个顶点的所有不同的图, 如图4-22所示:

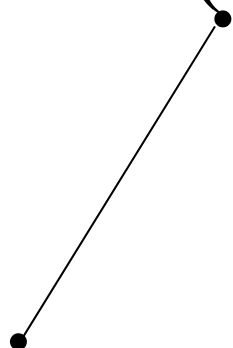
4.8 图的计数



(a)



(b)



(c)



(d)

图4-22

4.8 图的计数

例4-21(4.22) 4个顶点的无向图的计数. 顶点集合上的置换群为对称群 S_4 . 因为

$$\begin{aligned} e_1 &= (v_1, v_2), e_2 = (v_3, v_4), e_3 = (v_2, v_3), \\ e_4 &= (v_1, v_4), e_5 = (v_1, v_3), e_6 = (v_2, v_4). \end{aligned}$$

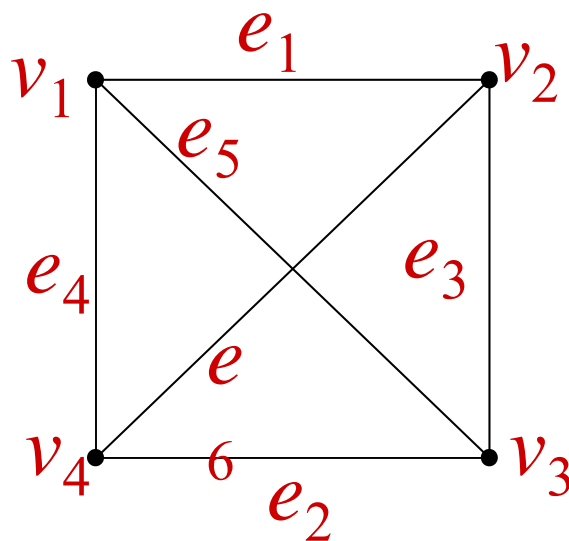


图4-23



4.8 图的计数

下面观察在 S_4 作用下, $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ 的置换群. 例如, 对应于置换 $(v_1 v_2)=(v_1 v_2)(v_3)(v_4)$, $e_1=(v_1, v_2)$ 不变, $e_2=(v_3, v_4)$ 不变, 而

$$e_3=(v_2, v_3) \rightarrow (v_1, v_3)=e_5,$$
$$e_4=(v_1, v_4) \rightarrow (v_2, v_4)=e_6,$$
$$e_5=(v_1, v_3) \rightarrow (v_2, v_3)=e_3,$$
$$e_6=(v_2, v_4) \rightarrow (v_1, v_4)=e_4,$$

故 $(v_1 v_2)$ 对应边的置换为

4.8 图的计数

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_1 & e_2 & e_5 & e_6 & e_3 & e_4 \end{pmatrix} = (e_1)(e_2)(e_3 e_5)(e_4 e_6)$$

另外, 利用顶点变换前后两个图形的边的对应也可得出上面边的置换, 如图4-24所示.

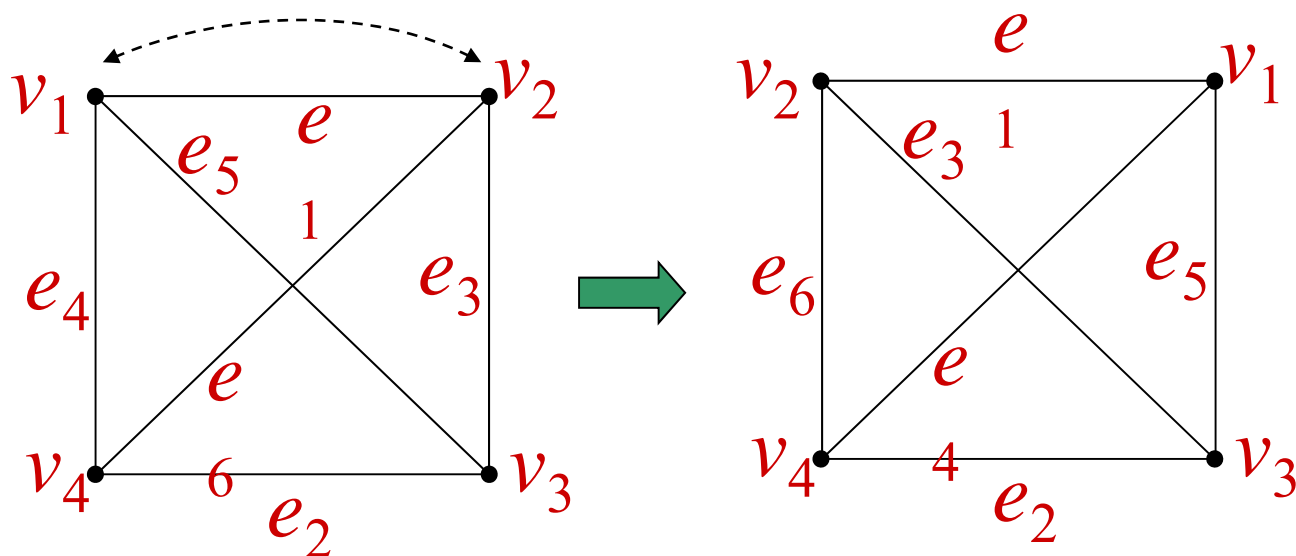


图4-24



4.8 图的计数

注：由上可得,从顶点的置换得到保持顶点间的邻接关系的边的置换有两种方式:

1.将边表示为顶点的偶对,由顶点的变换确定偶对的变换,从而确定边的变换;

2.作出顶点变换前后两个图形,利用两个图形的边的对应得出边的置换.

下面把群 S_4 的元素及其对应的边的置换群 G_6 的元素一一列举如下:

4.8 图的计数

1. $(v_1)(v_2)(v_3)(v_4) \rightarrow (e_1)(e_2)(e_3)(e_4)(e_5)(e_6)$

2. $(v_1v_2) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_1 & e_2 & e_5 & e_6 & e_3 & e_4 \end{pmatrix} = (e_1)(e_2)(e_3e_5)(e_4e_6)$

3. $(v_1v_3) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_3 & e_4 & e_1 & e_2 & e_5 & e_6 \end{pmatrix} = (e_1e_3)(e_2e_4)(e_5)(e_6)$

4. $(v_1v_4) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_6 & e_5 & e_3 & e_4 & e_2 & e_1 \end{pmatrix} = (e_1e_6)(e_2e_5)(e_3)(e_4)$

5. $(v_2v_3) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_5 & e_6 & e_3 & e_4 & e_1 & e_2 \end{pmatrix} = (e_1e_5)(e_2e_6)(e_3)(e_4)$

4.8 图的计数

6. $(v_2 v_4) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_4 & e_3 & e_2 & e_1 & e_5 & e_6 \end{pmatrix} = (e_1 e_4)(e_2 e_3)(e_5)(e_6)$

7. $(v_3 v_4) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_1 & e_2 & e_6 & e_5 & e_4 & e_3 \end{pmatrix} = (e_1)(e_2)(e_3 e_6)(e_4 e_5)$

8. $(v_1 v_2 v_3) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_1 & e_2 \end{pmatrix} = (e_1 e_3 e_5)(e_2 e_4 e_6)$

9. $(v_1 v_2 v_4) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_6 & e_5 & e_2 & e_1 & e_3 & e_4 \end{pmatrix} = (e_1 e_6 e_4)(e_2 e_5 e_3)$

10. $(v_1 v_3 v_2) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_5 & e_6 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix} = (e_1 e_5 e_3)(e_2 e_6 e_4)$

4.8 图的计数

11. $(v_1 v_3 v_4) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_3 & e_4 & e_6 & e_5 & e_2 & e_1 \end{pmatrix} = (e_1 e_3 e_6)(e_2 e_4 e_5)$

12. $(v_1 v_4 v_2) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_4 & e_3 & e_5 & e_6 & e_2 & e_1 \end{pmatrix} = (e_1 e_4 e_6)(e_2 e_3 e_5)$

13. $(v_1 v_4 v_3) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_6 & e_5 & e_1 & e_2 & e_4 & e_3 \end{pmatrix} = (e_1 e_6 e_3)(e_2 e_5 e_4)$

14. $(v_2 v_3 v_4) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_5 & e_6 & e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \end{pmatrix} = (e_1 e_5 e_4)(e_2 e_6 e_3)$

15. $(v_2 v_4 v_3) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_4 & e_3 & e_6 & e_5 & e_1 & e_2 \end{pmatrix} = (e_1 e_4 e_5)(e_2 e_3 e_6)$

4.8 图的计数

16. $(v_1 v_2 v_3 v_4) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_3 & e_4 & e_2 & e_1 & e_6 & e_5 \end{pmatrix} = (e_1 e_3 e_2 e_4)(e_5 e_6)$

17. $(v_1 v_2 v_4 v_3) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_6 & e_5 & e_4 & e_3 & e_1 & e_2 \end{pmatrix} = (e_1 e_6 e_2 e_5)(e_3 e_4)$

18. $(v_1 v_3 v_2 v_4) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_2 & e_1 & e_6 & e_5 & e_3 & e_4 \end{pmatrix} = (e_1 e_2)(e_3 e_6 e_4 e_5)$

19. $(v_1 v_3 v_4 v_2) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_5 & e_6 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \end{pmatrix} = (e_1 e_5 e_2 e_6)(e_3 e_4)$

20. $(v_1 v_4 v_2 v_3) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_2 & e_1 & e_5 & e_6 & e_4 & e_3 \end{pmatrix} = (e_1 e_2)(e_3 e_5 e_4 e_6)$



4.8 图的计数

$$21. (v_1 v_4 v_3 v_2) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_4 & e_3 & e_1 & e_2 & e_6 & e_5 \end{pmatrix} = (e_1 e_4 e_3 e_2)(e_5 e_6)$$

$$22. (v_1 v_2)(v_4 v_3) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_1 & e_2 & e_4 & e_3 & e_6 & e_5 \end{pmatrix} = (e_1)(e_2)(e_3 e_4)(e_5 e_6)$$

$$23. (v_1 v_3)(v_2 v_4) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3 & e_5 & e_6 \end{pmatrix} = (e_1 e_2)(e_3 e_4)(e_5)(e_6)$$

$$24. (v_1 v_4)(v_2 v_3) \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_2 & e_1 & e_3 & e_4 & e_6 & e_5 \end{pmatrix} = (e_1 e_2)(e_3)(e_4)(e_5 e_6)$$



4.8 图的计数

从上面列举的结果可知, 群 G_6 的元素格式为 $(1)^6$ 1个, $(1)^2(2)^2$ 9个, $(2)^1(4)^1$ 6个, $(3)^2$ 8个.

故依据母函数形式的Pólya定理

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{1}{24} [(x+y)^6 + 9(x+y)^2(x^2+y^2)^2 \\ &\quad + 6(x^2+y^2)(x^4+y^4) + 8(x^3+y^3)^2] \\ &= x^6 + x^5y + 2x^4y^2 + 3x^3y^3 + 2x^2y^4 + xy^5 + y^6 \end{aligned}$$

4.8 图的计数

对应的图像如图4-25所示, 其中虚线表示消失的边.

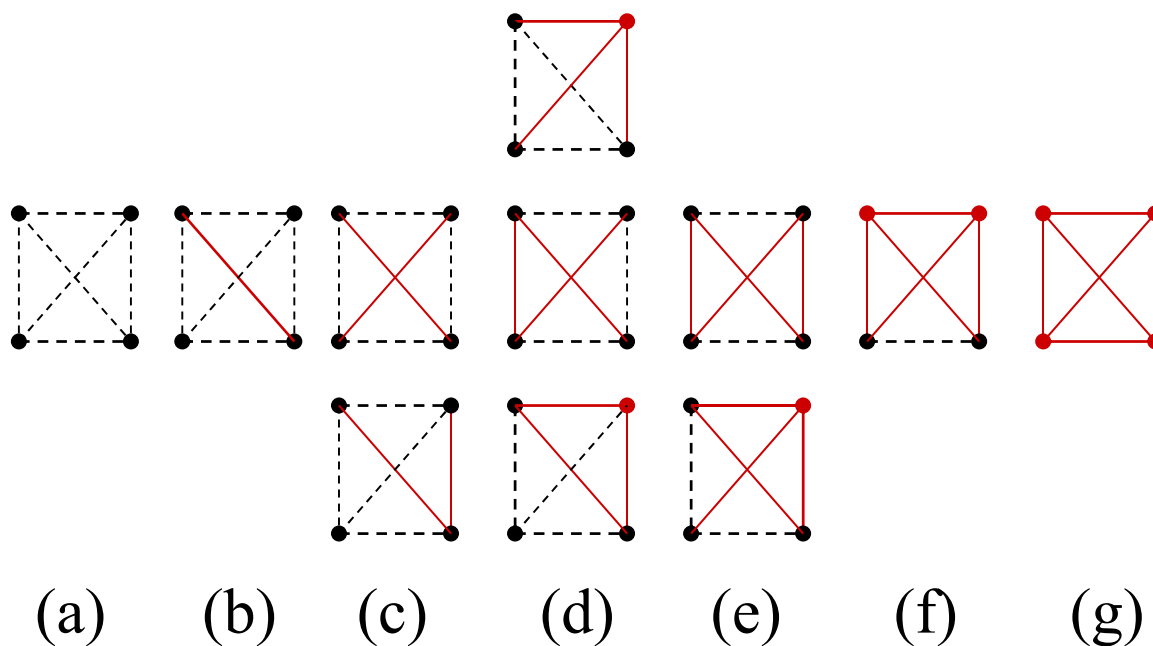


图4-25

4.8 图的计数

例4-22(4.23) 求4个顶点的不同构的有向图的个数。

解 4个顶点的有向图的边有12条, 如图4-26所示。

与上例类似, 可以从 S_4

导出关于 e_1, e_2, \dots, e_{12} 的24阶置换群, 其格式为 $(1)^{12}$ 1个, $(1)^2(2)^5$ 6个, $(3)^4$ 8个, $(2)^6$ 3个, $(4)^3$ 6个。

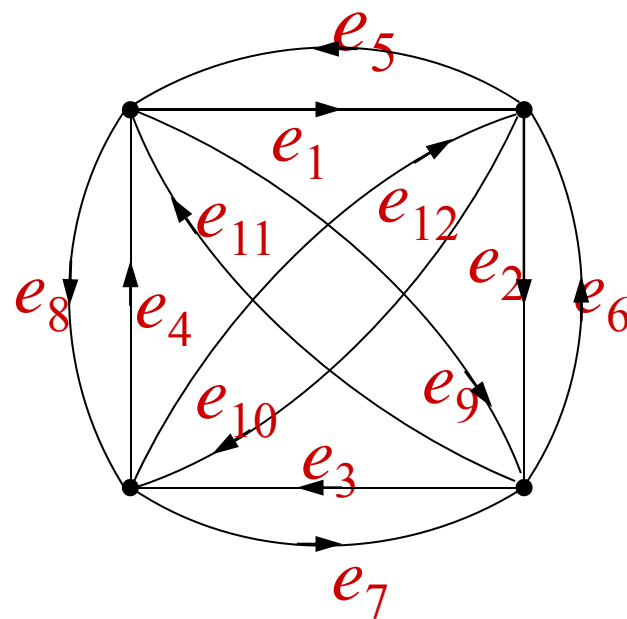


图4-26

4.8 图的计数

根据母函数形式的Pólya定理可得:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{1}{24} [(x+y)^{12} + 6(x+y)^2(x^2+y^2)^5 + 8(x^3+y^3)^4 \\ &\quad + 3(x^2+y^2)^6 + 6(x^4+y^4)^3] \\ &= x^{12} + x^{11}y + 5x^{10}y^2 + 13x^9y^3 + 27x^8y^4 \\ &\quad + 38x^7y^5 + 48x^6y^6 + 38x^5y^7 + 27x^4y^8 \\ &\quad + 13x^3y^9 + 5x^2y^{10} + xy^{11} + y^{12} \end{aligned}$$



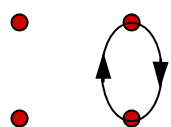
4.8 图的计数

x^2y^{10} 的系数为**5**:

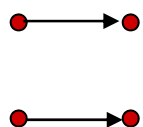
$$\begin{aligned} & \frac{1}{24} [C(12,10) + 6(C(2,0)C(5,5) + C(2,2)C(5,4)) \\ & \quad + 0 + 3C(6,5) + 0] \\ &= \frac{1}{24} \left[\frac{12!}{2!10!} + 6\left(1 + \frac{5!}{4!}\right) + 3\frac{6!}{5!} \right] = \frac{1}{24} [66 + 36 + 18] \\ &= \frac{120}{24} = 5 \end{aligned}$$

4.8 图的计数

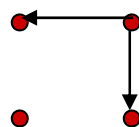
即有两条边的4个顶点的有向图有5种, 如图4-27所示.



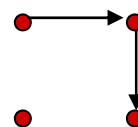
(a)



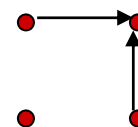
(b)



(c)

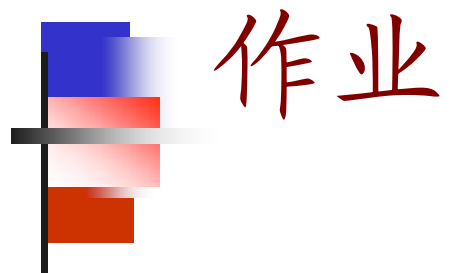


(d)



(e)

图4-27



习题 13、14、17、18、28