第一章　排列与组合

1.6 允许重复的组合（多重组合）

允许重复的组合是指从 A={1, 2, ⋯ , n}中取r个元素$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$, $a_i \in A$, $i = 1, 2, \cdots, r$, 而且允许$a_i = a_j$ 。用$\overline{C}(n,r)$记其方案数。

定理 1-2 从n个不同元素中取r个作允许重复的组合，其组合数为$C(n+r-1, r)$。

1.6 允许重复的组合

证明　设$a_1a_2\ldots a_r \in \overline{C}(n,r)$

$1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_r \le n$,

令$\overline{C}(n,r)$上的f，使得$b_i=a_i+i-1, i=1,2,\ldots,r$.

则 $b_1b_2\ldots b_r$满足$1 \le b_1 < b_2 < \ldots < b_r \le n+r-1$

$b_1b_2\ldots b_r \in C(n+r-1, r)$

f：　$a_1a_2\ldots a_r \to b_1b_2\ldots b_r$

显然f是单射，这就证明了每一个1到n取r个作允许重复的组合（ $a_1a_2\ldots a_r$ ）都对应一个从1到n+r-1取r个作不重复的组合（ $b_1b_2\ldots b_r$ ）。

1.6 允许重复的组合

反之，f^{-1}：$b_1b_2\ldots b_r \rightarrow a_1a_2\ldots a_r$

$a_i=b_i-i+1,\quad i=1,2,\ldots,r.$

因为$1\le b_1<b_2<\ldots<b_r\le n+r-1$，

$\therefore\ 1\le a_1\le a_2\le\ldots\le a_r\le n$，而$n\le r$，所以一定是重复的，$\overline{a_1a_2\ldots a_r}\in\overline{C}(n,r)$

f^{-1} 也是单射，即从1到n+r-1中取r个作不允许重复的组合（$b_1b_2\ldots b_r$）对应于一个从1到n取r个作允许重复的组合。

这一证明可说一种“拉伸压缩”技巧。

但不如下面证明更清晰，由此可见组合证明的功效。

1.6 允许重复的组合

允许重复的组合是指从 **A={1, 2, …, n}**中取**r**个元素$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$，$a_i \in A$，$i = 1, 2, \cdots, r$，而且允许$a_i = a_j$。用$\overline{C}(n,r)$记其方案数。

注意：允许重复的组合的典型模型是**r**个球是无标志的，**n**个盒子是有区别的，取出**r**个球放进盒子，每个盒子可多于一个球，也可空盒。

1.6 允许重复的组合

$\overline{C}(n,r)$的计数问题相当于r相同的球放入n个互异的盒子，每盒球的数目不限制的方案的计数。而后一问题又可转换为r个相同的球与n-1个相同的盒壁的排列的问题：

$$\overbrace{0\ldots 0110\ldots 01\ldots 10\ldots 0}^{r\text{个相同的球}}$$

$$\underbrace{\ldots 0110\ldots 01\ldots 1}_{n-1\text{个相同的盒壁}}$$

易知所求计数为 $\dfrac{(n-1+r)!}{r!(n-1)!} = C(n+r-1,r)$

1.6 允许重复的组合

[例]一个邮局卖10种邮票，买8张不同的邮票有几种方案？

$$C_{10}^{8}$$

买12张邮票有几种方案？

$$C_{10+12-1}^{12}$$

1.6 允许重复的组合

[例1-29]试问$(x+y+z)^4$有多少项?

问题相当于4各无标志的球放入3个有标志x，y，z的盒子，一盒可多于1球的方案的计数。 则为C(3+4−1,4)= C(6,4)=15。

1.6 允许重复的组合

［例］一个蛋糕店有8种不同款式的糕点，现打包外卖，每包要装12块糕点，问有多少种不同的打包方案？

$$C_{8+12-1}^{12}$$

1.6 允许重复的组合

定理：线性方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$，n和r都是整数，n≥1，则此方程的非负整数解的个数为：

$$C(n+r-1, r)$$

简单的整数拆分问题！

1.6 允许重复的组合

[例]一个蛋糕店有8种不同款式的糕点，现打包外卖，每包要装12块糕点，问有多少种不同的打包方案？

$$x_1+x_2+\cdots+x_8=12$$

$$x_i\ge 0$$

1.6 允许重复的组合

[例]将1 000 000分解成xyz三个正因数的乘积，有几种方法?

$$1000000 = 2^6 5^6$$

$$x = 2^{x_1} 5^{x_2}, y = 2^{y_1} 5^{y_2}, z = 2^{z_1} 5^{z_2}$$

$$x_1 + y_1 + z_1 = 6 \qquad x_2 + y_2 + z_2 = 6$$

$$(C_{6+3-1}^{6})^2 = 28^2 = 784$$

1.6 允许重复的组合

[例]将1 000 000分解成三个相同正因数的乘积，有几种方法?

$$1000000 = 100 \times 100 \times 100 \qquad 1种$$

将1 000 000分解成三个正因数的乘积，其中恰有两个因数相同，有几种方法?

$$2x_1 + z_1 = 6 \qquad 2x_2 + y_2 = 6$$

1.6 允许重复的组合

［例］ 将1 000 000分解成三个正因数的乘积，其中恰有两个因数相同，有几种方法？

$$2x_1 + z_1 = 6 \qquad 2x_2 + y_2 = 6$$

0	0	6
1	1	4
2	2	2
3	3	0

0	0	6
1	1	4
2	2	2
3	3	0

去掉两边都是2，2，2的情况，还剩4×4−1=15种。

1.6 允许重复的组合

[例]将1 000 000分解成三个不同正因数的乘积，有几种方法？

上一题共15种情况，每种情况对应6！/2！=3个不同的顺序，共45种。

$$\frac{784-1-45}{3!}=123$$

1.6 允许重复的组合

注意： 允许重复的组合的典型模型是r个球是无标志的，n个盒子是有区别的，取出r个球放进盒子，每个盒子允许多于一个球，也可空盒。

$$C(n+r-1, r)$$

若r个球也是有区别的呢？

r个球是有区别的，n个盒子是有区别的，取出r个球放进盒子，每个盒子允许多于一个球，也可空盒。n^r

1.6允许重复的组合

[例]一辆公交车上有n位乘客，到达终点还有m站（含终点站），请问旅客有几种下车方案？

$$m^n$$

如果只考虑每站下车的人数，请问有几种下车方案？

$$C_{n+m-1}^{n}$$

1.6允许重复的组合

[例]20本书放到5个书架上，可以有空架。

书有区别，书架有区别，不考虑书顺序。 5^{20}

书有区别，书架有区别。 $\frac{24!}{4!}=P_{24}^{20}$,不确定的排队,4个挡板。

相当于24个位置取20个做排列，剩下4个不参与排列

书没区别，书架有区别。 $C_{20+5-1}^{20}=C_{24}^{20}=\frac{24!}{4!20!}$

书有区别，书架有区别，每个书架放4本,不考虑书顺序。 $\frac{20!}{(4!)^5}$

书有区别，书架没区别，每个书架放4本,不考虑书顺序。 $\frac{20!}{5!(4!)^5}$

书没区别，书架有区别，每个书架放4本。 1

注意前三种情况！第一题5的20次幂远小于第二题5×6×…×24。

第三题的多重组合实际就可以看成第二题的有空组的插板排列。

1.6 允许重复的组合

定理：线性方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$，n和r都是整数，$n\geq 1$，若$x_i\geq 1$，则此方程的非负整数解的个数为：

$$C(n+r-n-1,\ r-n)$$
$$=C(r-1,\ r-n)$$
$$=C(r-1,\ n-1)$$

即多重集合中每个元素至少出现一次的可重复组合。

1.6 允许重复的组合

注意：可理解为r个球是无标志的，n个盒子是有区别的，取出r个球放进盒子，每个盒子允许多于一个球，但不许空盒。

也可以理解为n个无区别的球排成一行，相邻两球有一接触点，共n-1个接触点，从中取m-1个将n个球分成m个非空集合。

如果$x_i \geq ?$约束不同呢？

1.6 允许重复的组合

[例]将12个红球和1个蓝球分给3个人，每人至少分得1个球，多少种方案？

考虑蓝球先分给第一个人，剩下12个红球分给三人

$x_1 + x_2 + x_3 = 12$，$x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$

C_{10+3-1}^{10}，再考虑拿蓝球的人，$3C_{10+3-1}^{10}$

也可以理解为先分13个无区别的球给三个人，每人至少1个，再将其中一个变成蓝球，答案一样。

1.6 允许重复的组合

［例］将12个红球、1个蓝球和1个绿球分给4个人，每人至少分得1个球，多少种方案？

$$P_4^2 C_{10+4-1}^{10} + 4C_{9+4-1}^{9}$$

将12个红球、1个蓝球和1个绿球分给4个人，每人至少分得1个球，且蓝球和绿球必须分给不同的人，多少种方案？

$$P_4^2 C_{10+4-1}^{10}$$

与上页题目一样解法。也可以理解为先分14个无区别的球给四个人，每人至少1个，再将每种情况变成一人有蓝，一人有绿。

1.6 允许重复的组合

[例]有区别的20个球排成一行，从中取6个不相邻的球，有多少种取法？

6个不相邻的球把剩下的14个球分成7段。

$x_1+x_2+\cdots+x_7=14,$

$x_1\ge 0, x_2\ge 1, x_3\ge 1, x_4\ge 1, x_5\ge 1, x_6\ge 1, x_7\ge 0$

C_{9+7-1}^{9}

有区别的20个球排成一行，从中取6个不相邻的球，且任意两两之间相隔至少两球，有多少种取法？

$x_1+x_2+\cdots+x_7=14,$

$x_1\ge 0, x_2\ge 2, x_3\ge 2, x_4\ge 2, x_5\ge 2, x_6\ge 2, x_7\ge 0$

C_{4+7-1}^{4}

1.7 不相邻的组合

不相邻组合是指从 A={1, 2, ⋯, n}中取r个不相邻的数的组合, 即不存在相邻两个数j和j+1的组合。用C' (n,r)记其方案数。

定理 1-3 **从A={1, 2, ⋯, n}中取r个作不相邻的组合，其组合数为C($n-r+1$, r)。**

1.7 不相邻的组合

证明1

任给$a_1a_2\ldots a_r \in C'(n,r)$,　$a_1 < a_2 < \ldots < a_r$

令f:　$a_1a_2\ldots a_r \rightarrow b_1b_2\ldots b_r$

$b_i = a_i - i + 1,\ i = 1,2,\ldots,r.$ （保证b_i是没有重复的）

$1 \le b_1 < b_2 < \ldots < b_r \le n-r+1,$

$b_1b_2\ldots b_r \in C(n-r+1,r)$ （即不允许重复的组合）

$C'(n,r) = C(n-r+1,r)$

1.7 不相邻的组合

证明2 用两种方法计算[1, n]的r个无重不相邻组合**C'(n,r)**的计数问题**(**即定理**1-3).**

解法1

$$\overbrace{0\ldots0\underbrace{10\ldots010\ldots010\ldots01}_{r\text{个}1}0\ldots0}^{\text{共}n\text{位}}$$

其中不可含**11**

1.7 不相邻的组合

①排列以1结尾：

r-1个10与n-1-2(r-1)个0的排列，

$r-1+[n-1-2(r-1)]=n-r$

这样的排列有

$$\frac{(n-r)!}{(r-1)!(n-2r+1)!}=\binom{n-r}{r-1}$$

②以0结尾：

r个10与n-2r个0的排列，$r+n-2r=n-r$

这样的排列有 $\binom{n-r}{r}$ 个

$$\binom{n-r}{r-1}+\binom{n-r}{r}=\binom{n-r+1}{r}$$

1.7 不相邻的组合

证明3

有区别的n个球排成一行，从中取k个不相邻的球，有多少种取法？

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{r+1} = n - r,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, \cdots, x_r \geq 1, x_{r+1} \geq 0$$

$$C_{n-r-(r-1)+(r+1)-1}^{n-r-(r-1)} = C_{n-r+1}^{n-2r+1} = C_{n-r+1}^{r}$$

与多重组合的关联！

回顾

$\overline{C}(m,n)$：从m个不同的元素中可重复地选取n个来组合。相当于n相同的球放入m个互异的盒子，每盒球的数目不限制的方案的计数。而后一问题又可转换为n个相同的球与m-1个相同的盒壁的排列的问题：

$$\overbrace{0\ldots\underbrace{010\ldots01\ldots1}_{m-1\text{个相同的盒壁}}0\ldots0}^{n\text{个相同的球}}$$

易知所求计数为 $\dfrac{(m-1+n)!}{n!(m-1)!}=C(m+n-1,n)$

既是多重排列也是多重组合！

回顾

定理：线性方程$x_1+x_2+\cdots+x_m=n$，n和m都是整数，m≥1，则此方程的非负整数解的个数为：

$$C(m+n-1,\ n)$$

简单的整数有序拆分问题！

所谓简单：是指整数拆分的每项基数都是1，即5=3×1+2×1；

所谓有序：是指拆分出的元素有顺序，即盒子有区别，5=3+2与5=2+3看作不一样。

回顾

定理：**线性方程$x_1+x_2+\cdots+x_m=n$，n和m都是整数，m≥1，则此方程的非负整数解的个数为：**

这其实是同一个问题，若盒子没有区别，那么两个盒子的球一样时也就无法区分。那么n拆分成m盒就可看成n可以分成（基数）从1到m的几种组合。如4可以看成4个1，或2个1，1个2，或1个1，1个3，或2个2，如果m>4，则补0

。

所谓简单：是指整数拆分的每项基数都是1，即$5=3\times1+2\times1$；

所谓有序：是指拆分出的元素有顺序，即盒子有区别，$5=3+2$与$5=2+3$看作不一样。

回顾

定理：线性方程$x_1+x_2+\cdots+x_m=n$，n和m都是整数，$m\geq 1$，若$x_i\geq 1$，则此方程的非负整数解的个数为：

$$C(m+n-m-1,\ n-m)$$
$$=C(n-1,\ n-m)$$
$$=C(n-1,\ m-1)$$

即多重集合中每个元素至少出现一次的可重复组合。

同样可以扩充到盒子没有区别的情况。

总结一下

n个球	m个盒子	有无空盒	方案
有区别	有区别	有	m^n
有区别	有区别	无	?
有区别	无区别	有	?
有区别	无区别	无	?
无区别	有区别	有	C(n+m-1,n)
无区别	有区别	无	C(n-1,m-1)
无区别	无区别	有	整数n的无序拆分
无区别	无区别	无	整数n-m的无序拆分

再想一想

常说的允许重复的组合是自由多重组合!

如果n球无区别，m盒有区别，允许空盒。这等价于m个不同的元素从中取n个作允许重复的组合。

回顾Lec3的内容，换成相同的符号，这种多重组合（允许重复的组合）实际上是自由多重组合。m个不同的元素

$$M=\{\infty a_1, \infty a_2, \cdots, \infty a_m\}$$

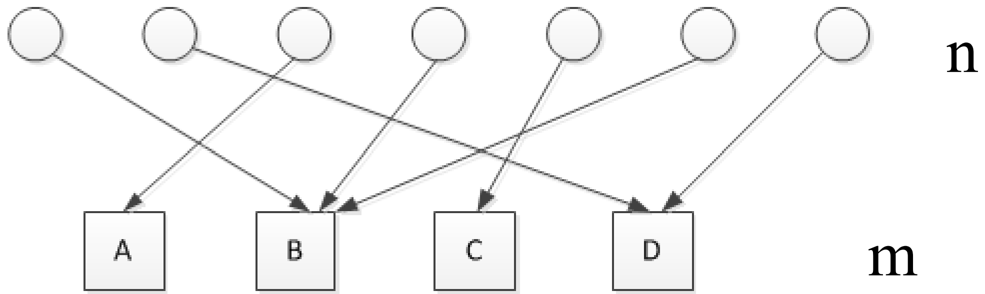
从中取n个作允许重复的组合。

$$\frac{(m-1+n)!}{n!(m-1)!} = C(m+n-1,n)$$

再想一想

常说的允许重复的组合是自由多重组合！

如果n球无区别，m盒有区别，允许空盒。这等价于m个不同的元素从中取n个作允许重复的组合，也就是自由多重组合。如何理解这个过程？看下面的例子



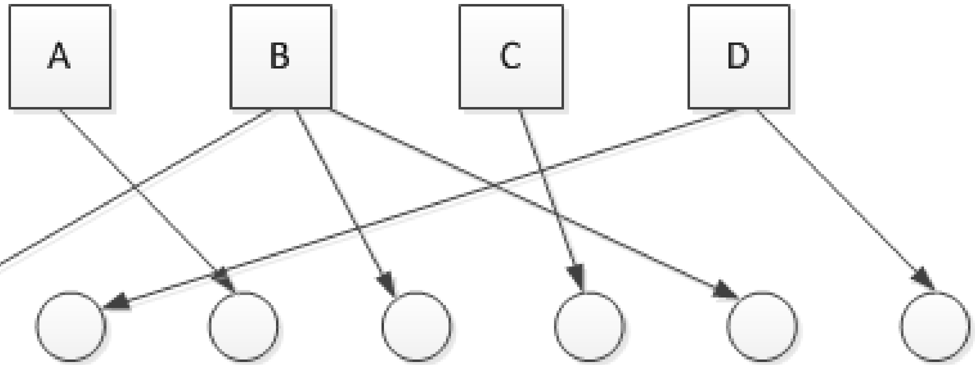
这里将七个无区别的球放到A~D四个盒里。这个过程可以看成A~D四个盒按照进球的数目进行重复抽取。例如，此时的多重组合就是ABBBCDD（无顺序）。答案是**C(4+7−1,7)**。这是上节的内容，具体证明过程略。

再想一想

如果球有区别呢？

常说的允许重复的组合是自由多重组合！

如果n球无区别，m盒有区别，允许空盒。这等价于m个不同的元素从中取n个作允许重复的组合，也就是自由多重组合。如何理解这个过程？看下面的例子



如果倒过来，直观理解为m个元素被重复抽取，那就很难理清了。因为一个球一次只进一个盒子，但是倒过来盒子做多重组合意味着一个盒子可能不止被选中一次。此时每个盒子会不会指向球，会指向几个，这些都不确定。

再想一想

自由多重排列就是自由分组！

如果n球有区别，m盒有区别，允许空盒，那么就是m^n，也就是不需要做任何约束的自由分组（这里考虑组有区别）。这等价于m个元素可重复地取n个作排列。

回顾Lec3的内容，换成相同的符号，这种允许重复的排列实际上是自由多重排列。m个不同的元素

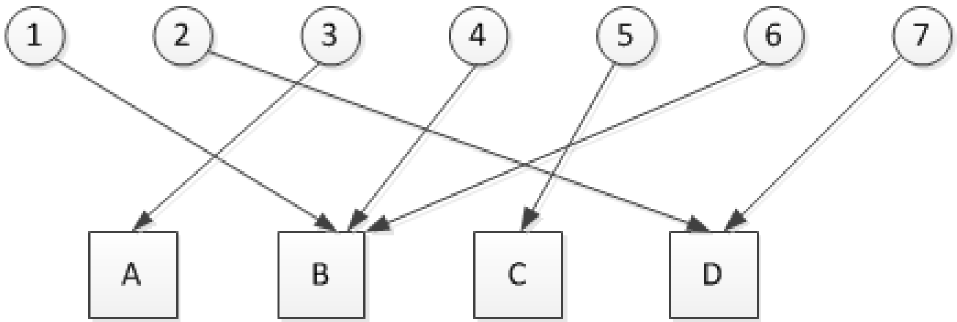
$$M=\{\infty a_1, \infty a_2, \cdots, \infty a_m\}$$

从中取n个作允许重复的排列。

再想一想

自由多重排列就是自由分组！

如果n球有区别，m盒有区别，允许空盒，那么就是m^n，也就是不需要做任何约束的自由分组。这等价于m个元素可重复地取n个作排列，即自由多重排列。如何理解这个过程？看下面的例子

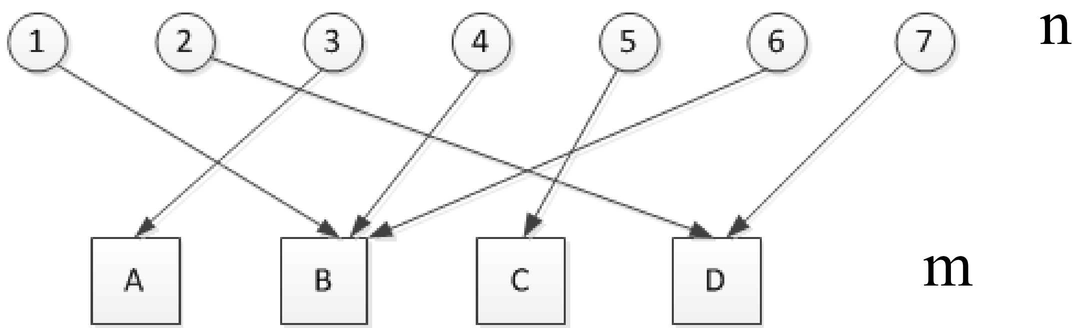


这里将1～7七个球放到A~D四个盒里（自由分组）。这个过程反过来也可以看成A~D四个盒按照1～7七个球的顺序做了一次重复排列，即A～D四个盒子取7个自由排列。例如，此时的排列就是B D A B C B D。所以答案都是4^7

再想一想

自由多重排列就是自由分组！

如果n球有区别，m盒有区别，允许空盒，那么就是m^n，也就是不需要做任何约束的自由分组。这等价于m个元素可重复地取n个作排列，即自由多重排列。如何理解这个过程？看下面的例子

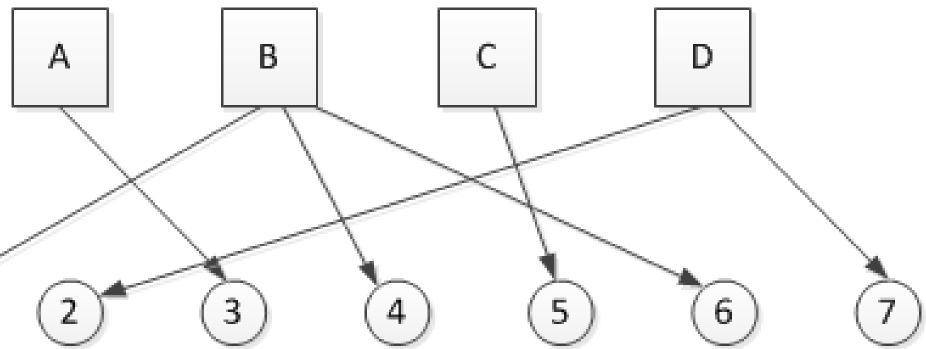


想想看，我们得到自由排列结果m^n的过程也就是这样的思路，即抽取n次，每次都有可能抽到m个元素的任何一个，所以是m^n。这不就是将n个不同的球放到m个不同的盒子里，每个球都有可能进入m个盒子中的任意一个。所以看似完全不同，实际上是一样的。

再想一想

自由多重排列就是自由分组！

如果n球有区别，m盒有区别，允许空盒，那么就是m^n，也就是不需要做任何约束的自由分组。这等价于m个元素可重复地取n个作排列，即自由多重排列。如何理解这个过程？看下面的例子

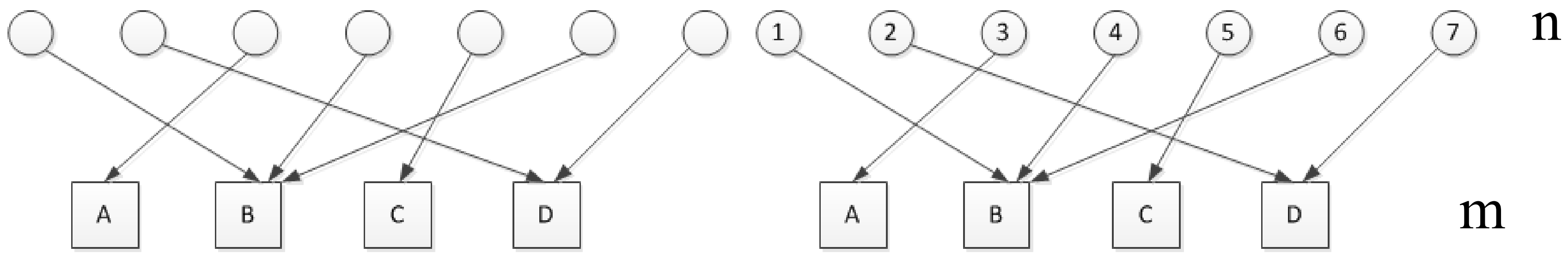


切忌这个过程不能倒过来操作，因为一个球一次只进一个盒子，但是倒过来盒子做重排意味着一个盒子可能不止被选中一次，在这种情况下就不易思考了，每个盒子会不会指向球，会指向几个，这些都不确定。

再想一想

自由多重排列就是自由分组！

如果n球有区别，m盒有区别，允许空盒，那么就是m^n，也就是不需要做任何约束的自由分组。这等价于m个元素可重复地取n个作排列，即自由多重排列。如何理解这个过程？看下面的例子



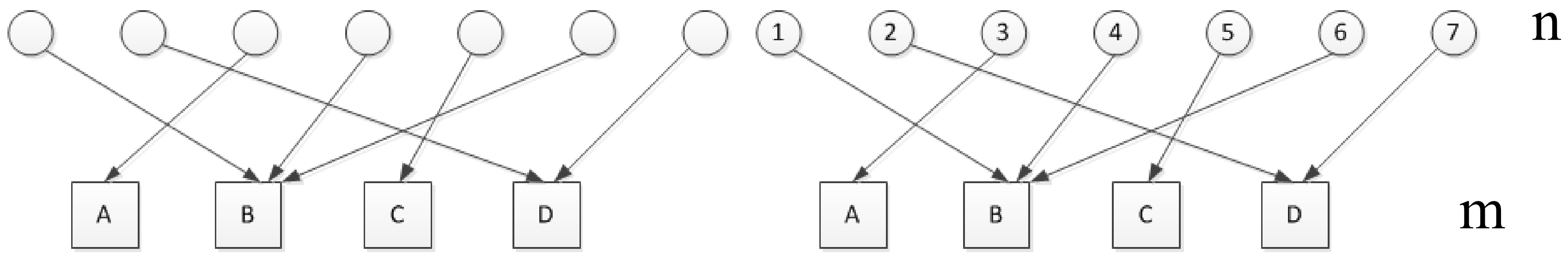
自由多重组合　　自由多重排列

这种困局与自由多重组合是一样，因此破解的思路也是一样的，都是m个不同元素作为盒子放在下层，重复抽取n次看作n个球放在上层，区别仅在于n个球是否有区别。

再想一想

自由多重排列就是自由分组！

如果n球有区别，m盒有区别，允许空盒，那么就是m^n，也就是不需要做任何约束的自由分组。这等价于m个元素可重复地取n个作排列，即自由多重排列。如何理解这个过程？看下面的例子



自由多重组合　　　　自由多重排列

要注意的是：

如果不允许空盒，自由多重组合可以通过公式求解，但自由多重排列暂时还解决不掉，有待后续知识。

再想一想

受限多重排列就是受限分组！

如果上述多重排列过程不是自由的，而是受限的呢？

回顾Lec3的内容，换成相同的符号，这种受限多重排列实际是一种全排列：m个不同的元素

$$M=\{n_1 a_1, n_2 a_2, \cdots, n_m a_m\}$$

即n_1个a_1，n_2个a_2，……，n_m个a_m，所有$n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_m$个元素作允许重复的排列。

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_m!}$$

再想一想

受限多重排列就是受限分组！

这种受限多重排列实际也就是受限分组问题：

n个不同的人分成m个不同的组并事先确定了每个组有几个人。

将n个不同的球放入m个不同的盒子$B_1 \ldots\ldots B_m$里，每个盒子分别放$n_1 \ldots\ldots n_m$个球，$n_1+n_2+\ldots+n_m=n$，则不同放法为：

$$C(n,n_1)\ C(n-n_1,n_2)\ C(n-n_1-n_2,n_3)\ldots\ldots\ C(n_m,n_m)$$

$$=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\cdots n_m!}$$

与受限多重排列答案一样！

再想一想

受限多重排列就是受限分组！

从这个角度来说，一般的组成C(n, r)其实就可以看成是受限的二分组问题：

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

n个不同的元素分成了两组，一组有r个是被选中的组，另一组有n-r个，是剩余组。

也可以看成受限多重排列，r个A类的元素，n-r个B类的元素，一起排列有多少种方案。每种排列其实就对应到n个不同元素的一种抽取方案。

再想一想

受限多重排列就是受限分组！

因此，受限多重（全）排列实际上是n个有区别的球放入m个有区别的盒子里，在给定每盒里球数的情况下的分球方案。也就是一种有约束的球盒模型（事先确定盒内球数），可以理解为“受限分组”。

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}=m^n$$

由上面公式可见，受限多重排列是自由多重排列中的一种情况，同理受限分组也是自由分组的一种情况。

那么有没有受限多重组合呢？那就变成了取n_1个a_1，n_2个a_2，……，n_m个a_m，这就是确定的组合情况，不需要再计算了。

再想一想

受限多重排列就是受限分组！

因此，受限多重（全）排列实际上是n个有区别的球放入m个有区别的盒子里，在给定每盒里球数的情况下的分球方案。也就是一种有约束的球盒模型（事先确定盒内球数），可以理解为“受限分组”。

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!} = m^n$$

要注意的是：受限多重排列如果$M=\{n_1a_1, n_2a_2, \cdots, n_ma_m\}$只是从中取n个，$n<n_1+n_2+\ldots+n_m$，即并非全部参与排列，那就没有固定的计算公式了，需要分情况考虑。

再想一想

再想一想，n个有区别的球的分组是组内不考虑顺序的，所以采用受限多重排列，分母可以消除组内顺序。但这必须事先知道组内有多少个球（受限组合）。

如果不需要知道组内球数，那么就是球盒模型的前两行——自由分组（自由多重排列），但无空盒时，这种不确定的分组暂时解决不掉。

如果n个有区别的球的分组要考虑组内球的顺序？
先讨论自由分组情况下，考虑组内球的顺序。
注意，不能简单地将自由分组（自由多重排列）m^n乘上球的顺序，这会造成大量的重复错误。

再想一想

$\overline{C}(m,n)$：相当于n相同的球放入m个互异的盒子，每盒球的数目不限制的方案的计数。**而后一问题又可转换为n个相同的球与m-1个相同的盒壁的排列的问题：**

$$\overbrace{0\ldots0\underbrace{10\ldots01\ldots1}_{m-1\text{个相同的盒壁}}0\ldots0}^{n\text{个相同的球}}$$

换个思路，从自由多重组合入手。

考虑到组也是有区别的，那么这个模型实际上可以看成n个球自由分组，只是这里的球没有区别。

再想一想

$\overline{C}(m,n)$：相当于n相同的球放入m个互异的盒子，每盒球的数目不限制的方案的计数。**而后一问题又可转换为n个相同的球与m-1个相同的盒壁的排列的问题：**

$$\overbrace{0\ldots0\underbrace{10\ldots01\ldots1}_{\text{m-1个相同的盒壁}}0\ldots0}^{\text{n个相同的球}}$$

也就是n个球排成一排，用m-1个相同的盒壁隔开，准许有空盒。

那么如果加入球有区别的条件，就是n个有区别的球分组并考虑组内顺序，因此只要加入球的顺序就可以了

再想一想

$\overline{C}(m,n)$：相当于n相同的球放入m个互异的盒子，每盒球的数目不限制的方案的计数。而后一问题又可转换为n个相同的球与m-1个相同的盒壁的排列的问题：

n个相同的球

0…010…01…10…0

m-1个相同的盒壁

这个式子也可以看成m-1个元素是重复的，剩下的n个元素不同，一起重排。

所以n个有区别的球分组并考虑组内顺序：

$$n!C(n+m-1,n) = \frac{(n+m-1)!}{(m-1)!}$$

“9个人去6个窗口买票”

再想一想

$\overline{C}(m,n)$：相当于n相同的球放入m个互异的盒子，每盒球的数目不限制的方案的计数。而后一问题又可转换为n个相同的球与m-1个相同的盒壁的排列的问题：

$$\overbrace{\underbrace{0\ldots010\ldots01\ldots10\ldots0}_{m-1\text{个相同的盒壁}}}^{n\text{个相同的球}}$$

n个不同的球放入m个不同的盒子（分组），不允许空盒且盒内有序呢？
可以看成n个有区别的球排成一排，在n-1个间隔中选m-1个插入盒壁隔开，则不会有空盒。

再想一想

$\overline{C}(m,n)$：相当于**n**相同的球放入**m**个互异的盒子，每盒球的数目不限制的方案的计数。**而后一问题又可转换为n个相同的球与m-1个相同的盒壁的排列的问题：**

n个相同的球

$$\overbrace{0\ldots010\ldots01\ldots10\ldots0}$$

m-1个相同的盒壁

注意这里已经考虑了每组内的顺序，因为m个任选且已排序。

也可以看成n个有区别的球排成一排，先取m个排序给每盒里放一个，然后对剩下n-m个球做前一个问题。

$$n!C(n-1,m-1) = m!C(n,m)(n-m)!C(n-1,m-1)=\frac{n!(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}$$

总结一下

n个球	m个盒子	有无空盒	盒内有序	盒内无序
有区别	有区别	有	n!C(n+m-1,n)	m^n
有区别	有区别	无	n!C(n-1,m-1)	?
有区别	无区别	有	?	?
有区别	无区别	无	?	?
无区别	有区别	有	——	C(n+m-1,n)
无区别	有区别	无	——	C(n-1,m-1)
无区别	无区别	有	——	整数n的无序拆分
无区别	无区别	无	——	整数n-m的无序拆分

总结一下

将是否有空盒，推广为每盒至少k个球，$k>0$

n个球	m个盒子	每盒至少k个	盒内有序	盒内无序
有区别	有区别	有空盒	——	——
有区别	有区别	无空盒	?	?
有区别	无区别	有空盒	——	——
有区别	无区别	无空盒	?	?
无区别	有区别	有空盒	——	——
无区别	有区别	无空盒	——	$C(n-km+m-1,m-1)$
无区别	无区别	有空盒	——	——
无区别	无区别	无空盒	——	?

回顾

例：**n个有区别的球，m个有区别的盒子。盒内有序，每盒至少2个。**

n!C(n-m-1,m-1)

回顾

例：n个男人，m个女人，排成一排，每人都与自己的同性相邻。

先排男人，同性相邻就是每盒至少2个。排队意味着盒内有序，所以假设男的分成k组

n!C(n-k-1,k-1)

再排女人，假设女的分成l组

m!C(m-l-1,l-1)

回顾

例：**n**个男人，**m**个女人，排成一排，每人都与自己的同性相邻。

然后考虑四种情况：

男人分组比女人分组多**1**；

女人分组比男人分组多**1**；

男人分组与女人分组一样多，但男先；

男人分组与女人分组一样多，但女先；

后两种情况的数目一样多。

回顾

也就是n-m个无区别的球放进m+1个有区别的盒子，首尾两个盒子可以空盒，其他盒子不允许空。

不相邻组合

有区别的n个球排成一行，从中取m个不相邻的球，有多少种取法？

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = n - m,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, \cdots, x_r \geq 1, x_{m+1} \geq 0$$

$$C_{n-m-(m-1)+(m+1)-1}^{n-m-(m-1)} = C_{n-m+1}^{n-2m+1} = C_{n-m+1}^{m}$$

注意：这里有个前提，就是n个球已经排成了一行，而不用考虑这n个球是怎么排列的。

回顾

也可以看成n-m个有区别球已排成一行，将另外排好m个有区别的球按序放入n-m个球的间隔和两侧，注意这里插入的是球，只需按照已经排好的顺序插入即可，无需再考虑排列。

不相邻组合

有区别的n个球排成一行，从中取m个不相邻的球，有多少种取法？

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = n - m,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, \cdots, x_r \geq 1, x_{m+1} \geq 0$$

$$C_{n-m-(m-1)+(m+1)-1}^{n-m-(m-1)} = C_{n-m+1}^{n-2m+1} = C_{n-m+1}^{m}$$

注意：这里有个前提，就是n个球已经排成了一行，而不用考虑这n个球是怎么排列的。

回顾

此时也可以看成n个有区别球里选n-m个排成一行，将剩下m个有区别的球放入n-m个球的间隔和两侧，注意这里需要考虑了放入后球的顺序。C(n,n-m)(n-m)!P(n-m+1,m)

不相邻组合

有区别的n个球排成一行，从中取m个不相邻的球，有多少种取法？

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = n - m,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, \cdots, x_r \geq 1, x_{m+1} \geq 0$$

$$C_{n-m-(m-1)+(m+1)-1}^{n-m-(m-1)} = C_{n-m+1}^{n-2m+1} = C_{n-m+1}^{m}$$

如果还要考虑球怎么排成一行的，就要写成n!C(n-m+1,m)

回顾

n个台阶，一次跨一阶或两阶，多少方案？

解法1：设**k**次一步上两个台阶

则上台阶的方案就是**n-2k**个一阶和**k**个两阶的全排列。

$$\frac{(n-2k+k)!}{k!\,(n-2k)!} = C(n-k,k)$$

回顾

n个台阶，一次跨一阶或两阶，多少方案?

解法2：设**k**次一步上两个台阶

考虑每两个台阶之间的间隔点，若选中该间隔点表示一次跨两个台阶。

显然，不可能连续选两个间隔点（没办法两步都跨两阶却总共只过3阶）

所以就是**n-1**取**k**作不允许相邻的组合

$$C(n-1-k+1,k) = C(n-k,k)$$

回顾

n个台阶，一次跨一阶或两阶，多少方案？

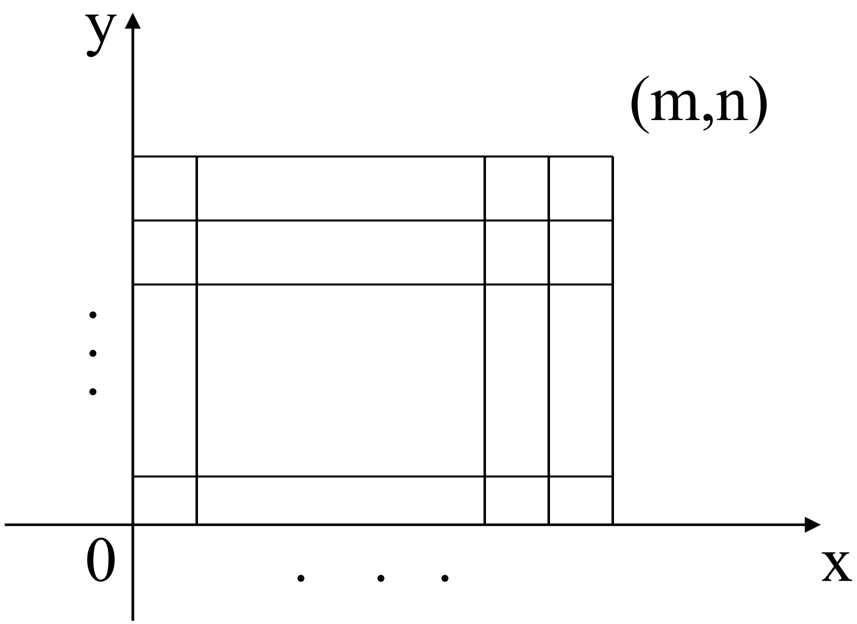
解法**3**：？？

1.8 组合意义

组合意义或组合证明，含意强弱的不同。承认组合证明与其他证明有相同的“合法性”。

1.8 组合意义

例1-30 简单格路问题 $|(0,0)\to(m,n)|=\binom{m+n}{m}$
从 (0,0)点出发沿x轴或y轴的正方向每步走一个单位，最终走到(m,n)点，有多少条路径？



1.8 组合意义

无论怎样走法，在x方向上总共走m步，在y方向上总共走n步。若用一个x表示x方向上的一步，一个字母y表示y方向上的一步。

则$(0,0)\rightarrow(m,n)$的每一条路径可表示为m个x与n个y的一个有重排列。将每一个有重排列的x与y分别编号，可得$m!n!$个$m+n$元的无重全排列。

1.8 组合意义

设所求方案数为p(m+n; m, n)

则P(m+n; m, n)·m!·n!=(m+n)!

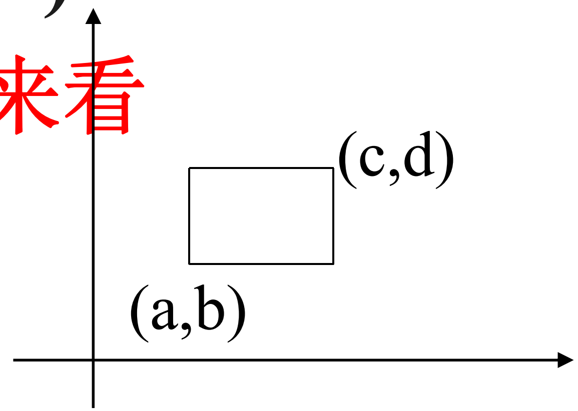
故$P(m+n;m,n)=\dfrac{(m+n)!}{m!n!}=\binom{m+n}{m}=\binom{m+n}{n}$

$=C(m+n,m)$

设c≥a,d≥b,则由(a,b)到(c,d)的简单格路数为

$|(a,b)\rightarrow(c,d)|=\binom{(c-a)+(d-b)}{c-a}$

也可以直接从组合角度来看



1.8若干等式及其组合意义

1(例1-31). $C(n,r)=C(n,n-r)$ (1.7.1)

从[1,n]去掉一个r子集，剩下一个(n-r)子集。由此建立C(n,r)与C(n,n-r)的一个一一对应。

故$C(n,r)=C(n,n-r)$

1.8若干等式及其组合意义

2(例1-32). $C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$ (1.7.2)

从$[1,n]$取$a_1,a_2,\ldots,a_r$.设$1\le a_1<a_2<\ldots<a_r\le n$,对取法分类：$a_1=1$,有$C(n-1,r-1)$种方案

$a_1>1$,有$C(n-1,r)$种方案

共有$C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$种方案，故

$$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$$

1.8若干等式及其组合意义

杨辉三角除了(0,0)点，都满足此递推式

$$C(m+n,m)=C(m+n-1,m)+C(m+n-1,m-1)$$

$$\{(0,0)\rightarrow(m,n)\}$$

$$=\{(0,0)\rightarrow(m,n-1)\}\cup\{(0,0)\rightarrow(m-1,n)\}$$

1.8若干等式及其组合意义

3. $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+r}{n}=\binom{n+r+1}{n+1}$ **(1.7.3)**

也即

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}$$

——**(例1-33)**

1.8若干等式及其组合意义

[意义1] 可从(1.7.2)推论，也可做一下组合解释:从[1,n+r+1]取$a_1a_2\ldots a_na_{n+1}$，

设$a_1<a_2<\ldots<a_n<a_{n+1}$，

可按a_1的取值分类：$a_1=1,2,3,\ldots r,r+1$.

$a_1=r+1$, $a_2\ldots a_{n+1}$取自$[r+2,n+r+1]$有$\binom{n}{n}$种取法

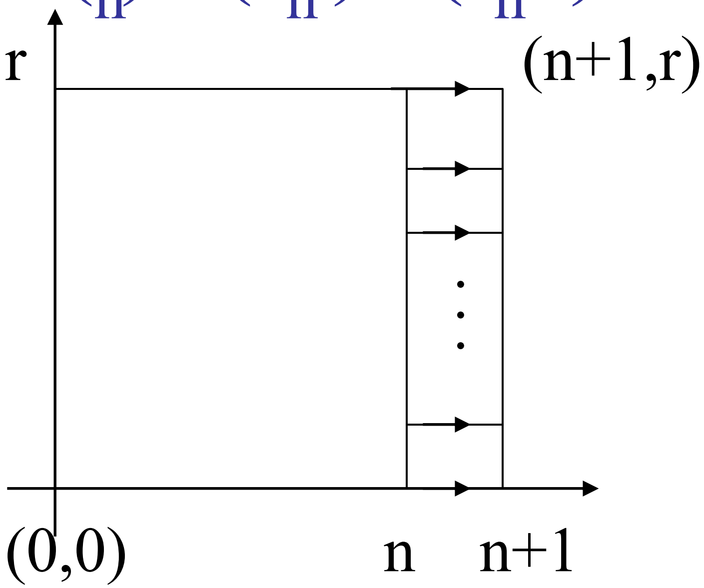
也可按含1和不含1，含2和不含2,…，含r和不含r的不断分类计数*.

1.8若干等式及其组合意义

[意义2]从(0,0)到(n+1,r),过且仅过一条带箭头的边,而过这些边的路径有(从下到上)

$\binom{n}{n},\binom{n+1}{n},\ldots,\binom{n+r}{n}$

故有. $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+r}{n}=\binom{n+r+1}{n+1}$



1.8若干等式及其组合意义

[意义3] 可重组合.

$[1,n+2]$的$\overline{C}(n+2,r)$模型 $\binom{n+r+1}{r}$

不含1,含1个1,含2个1,…,含r个1

$\overline{C}\binom{n+1}{r},\overline{C}\binom{n+1}{r-1},\overline{C}\binom{n+1}{r-2},\ldots,\overline{C}\binom{n+1}{0}$

$\binom{n+r}{r},\binom{n+r-1}{r-1},\binom{n+r-2}{r-2},\ldots,\binom{n}{0}$

1.8若干等式及其组合意义

4(例1-34). $\binom{n}{l}\binom{l}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{l-r}$ (1.7.4)

①选政治局,再选常委, n个中央委员选出l名政治局委员,再从其中选出r名常委

②选常委,再选非常委政治局委员

两种选法都无遗漏,无重复地给出可能的方案，应该相等。

1.8若干等式及其组合意义

5(例1-35). $\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{m}=2^m$, $m\geq 0$, (1.7.5)

证1 $(x+y)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k y^{m-k}$, 令x=y=1, 得(1.7.5)

意义1 [1, m]的所有子集方案. 每一子集都由取k∈[1, m]或不取所得, 这样有2^m个方案. 另可有0-子集(空集), 1-子集, ..., m-子集.

意义2 从(0, 0)走m步有2^m种走法, 都落在直线x+y=m上, 而到(m, 0), (m-1, 1), (m-2, 2), ..., (2, m-2), (1, m-1), (0, m)各点的走法各有

$\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \ldots, \binom{m}{m-2}, \binom{m}{m-1}, \binom{m}{m}$种

1.8若干等式及其组合意义

6(例1-36). $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots\pm\binom{n}{n}=0$ **(1.7.6)**

证1 在

$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ 中令 $x=1,\ y=-1$ 即得.

1.8若干等式及其组合意义

证2 在[1, n]的所有组合中，含1的组合↔不含1的组合，有一一对应关系。

在任一含1组合及与之对应的不含1组合中，必有一奇数个元的组合与一偶数个元的组合。将含奇数个元的组合组成集，将含偶数个元的组合组成另一集。此二集的元数相等。

$$\sum_{i奇}\binom{n}{i}=\sum_{i偶}\binom{n}{i}$$

1.8若干等式及其组合意义

7(例1-37). $\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\dots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$

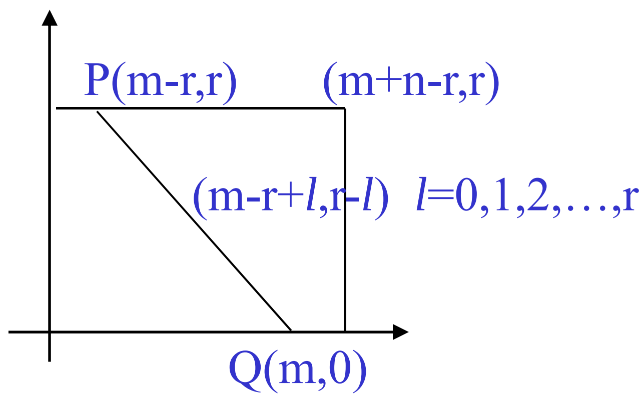
(1.7.7) 即Vandermonde恒等式, $r\le\min\{m,n\}$.

证1 从m个互异红球和n个互异蓝球中取r个球, 按r个球中红球的个数分类.

组合证法：(0, 0) 到 (m+n-r,r) 点的路径.

$$(0,0)\xrightarrow[\binom{m}{r-l}]{}(m-r+l,\ r-l)\xrightarrow[\binom{n}{l}]{}(m+n-r,\ r)$$

$$\binom{m+n}{r}=\sum_{l=0}^{r}\binom{m}{r-l}\binom{n}{l}$$



1.8若干等式及其组合意义

8(例1-38).

在7.中令**r=m≤n**,再将$\binom{m}{k}$换成$\binom{m}{m-k}$

得$\binom{m+n}{m}=\binom{m}{0}\binom{n}{0}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\ldots+\binom{m}{m}\binom{n}{m}$

特别地，当**m=n**时，有

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2$$

1.8若干等式及其组合意义

在(1.7.3) $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+r}{n}=\binom{n+r+1}{n+1}$

中记 **n+r=m**, 即得

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{m}{n}=\binom{m+1}{n+1}$$

再将**n** 改记为**r**, **m**改记为**n**,即得

$$\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\binom{r+2}{r}+\ldots+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}$$

上式即例**1-39**的等式