第三章容斥原理与鸽巢原理

引入

例2-54 n个有序的元素应有$n!$个不同的排列，如若一个排列使得所有的元素不在原来的位置上，则称这个排列为错排；也叫重排。

以1，2，3，4四个数的错排为例，分析其结构，找出规律性的东西来。

引入

1 2的错排是唯一的，即2 1。

1 2 3的错排有3 1 2，2 3 1。这二者可以看作是1 2错排，3分别与1，2换位而得的。

即先 1，2错排：　　2 1 3　　2 1 3

3分别与1，2换位：　3 1 2　　2 3 1

引入

1 2 3 4的错排有

4 3 2 1，4 1 2 3，4 3 1 2，
3 4 1 2，3 4 2 1，2 4 1 3，
2 1 4 3，3 1 4 2，2 3 4 1。

第一列是4分别与1，2，3互换位置，其余两个元素错排，由此生成的。

引入

第2列是4分别与312（123的一个错排）的每一个数互换而得到的。即

4/3　1　2　3/4　　　　3　4/1　2　1/4

3　1　4/2　2/4

引入

第三列则是由另一个错排231和4换位而得到，即

4 3 1 2　　　　2 4 1 3

2 3 4 1

引入

上面的分析结果，实际上是给出一种产生错排的方法。

设n个数1，2，…，n错排的数目为D_n，可分为两类:

1）任取一数i，数i分别与其他的n-1个数之一互换，其余n-2个数进行错排，共得$(n-1)D_{n-2}$个错排。

2）先取i以外的n-1个数进行错排，然后i与其中每个数互换得$(n-1)D_{n-1}$个错排。

引入

这两类情况无重复:

1）任取一数 i，数 i 先与 j 互换，其余n-2个数进行错排，排在除了 i 和 j 的n-2个位置上。

2）先取 i 以外的n-1个数进行错排，则可记 j 错排到 k 的位置上，然后 i 与 j 互换，则 i 排在 k 的位置上，而除了 i 和 j 的n-2个数排在除了 i 和 k 的n-2个位置上。

引入

综合以上分析结果得递推关系

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}),$$

$$D_1 = 0, D_2 = 1, \qquad (2\text{-}12)$$

$$\therefore \quad D_0 = 1.$$

引入

（2-12）是一非常系数的递推关系，下面提供一种解法。

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{(n-1)}{n!}(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{(n-1)}{n}\frac{D_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n}\frac{D_{n-2}}{(n-2)!}$$

构造 $E_n = \frac{D_n}{n!}$， $E_0 = 1, E_1 = 0$ ➡ $E_n = \frac{(n-1)}{n}E_{n-1} + \frac{1}{n}E_{n-2}$

引入

$$E_n = \frac{(n-1)}{n} E_{n-1} + \frac{1}{n} E_{n-2}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) E_{n-1} + \frac{1}{n} E_{n-2}$$

$$E_n - E_{n-1} = \left(-\frac{1}{n}\right)(E_{n-1} - E_{n-2})$$

E_n的差成比例。令$F_n=E_n-E_{n-1}$

$$F_n = \left(-\frac{1}{n}\right) F_{n-1} = \left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right) F_{n-2} = \cdots = (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} F_1$$

$$F_1 = E_1 - E_0 = -1$$

引入

故

$$F_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}F_1=(-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$E_n-E_{n-1}=(-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$E_n=(-1)^n\frac{1}{n!}+E_{n-1}=(-1)^n\frac{1}{n!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}+E_{n-2}$$

$$=(-1)^n\frac{1}{n!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}+\cdots+(-1)^2\frac{1}{2!}$$

引入

$$D_n = n!E_n = n!\left[\left(-1\right)^n \frac{1}{n!} + \left(-1\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} + \cdots + \left(-1\right)\frac{1}{1!} + \left(-1\right)^0 \frac{1}{0!}\right]$$

$$= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \left(-1\right)^n \frac{1}{n!}\right]$$

引入

下面提供母函数解法。

$$\therefore\ D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}]$$
$$= (-1)^2[D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}]$$
$$= \cdots = (-1)^{n-1}(D_1 - D_0)$$

由于 $D_1 = 0, D_0 = 1,$ 故得关于 D_n 得递推关系

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^n.$$

引入

令

$$G_e(x) = D_0 + D_1 x + \frac{D_2}{2!}x^2 + \frac{D_3}{3!}x^3 + \cdots$$

$$x: \quad D_1 = D_0 + (-1)^1$$

$$\frac{x^2}{2!}: \quad D_2 = 2D_1 + (-1)^2$$

$$\frac{x^3}{3!}: \quad D_3 = 3D_2 + (-1)^3$$

$$+) \qquad \vdots$$

$$G_e(x) - 1 = x\,G_e(x) + e^{-x} - 1$$

引入

还有没有别的办法？

可得 $(1-x)G_e(x)=e^{-x}$

$$G_e(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}=\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots\right)/(1-x).$$

$$\therefore\quad D_n=\left(1-1+\frac{1}{2!}-\cdots(-1)^n\frac{1}{n!}\right)\cdot n!$$

$$=n!-C(n,1)(n-1)!+\cdots+(-1)^l C(n,l)(n-l)!$$

$$+\cdots+(-1)^n C(n,n)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l C(n,l)(n-l)!$$

3.9 错排问题

例3-10(3. 10) n个元素依次给以标号1，2，…，n。

n个元素的全排列中，求每个元素都不在自己原来位置上的排列数。

设A_i为数 i 在第 i 位上的全体排列，i=1，2，…，n。因数字 i 不能动，因而有：

3.9 错排问题

$$\left|A_i\right| = (n-1)!, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

同理

$$\left|A_i \cap A_j\right| = (n-2)!, i = 1,2,\ldots,n, i \neq j$$

……

3.9 错排问题

每个元素都不在原来位置的排列数为

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right| = n! - C(n,1)(n-1)!$$

$$+C(n,2)(n-2)! - \cdots - \pm C(n,n)1!$$

$$= n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots\pm\frac{1}{n!}\right)$$

3.9 错排问题

例2-55 数1，2，…，9的全排列中，求偶数在原来位置上，其余都不在原来位置的错排数目。

解：实际上是1，3，5，7，9五个数的错排问题，总数为：

$$5!-C(5,1)4!+C(5,2)3!-C(5,3)2!+C(5,4)1!$$

$$-C(5,5)=120(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120})=44$$

3.9 错排问题

例2-57 求8个字母A, B, C, D, E, F, G, H的全排列中只有4个元素不在原来位置的排列数。

解：8个字母中只有4个不在原来位置上，其余4个字母保持不动，相当于4个元素的错排，其数目为

3.9 错排问题

$$4!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})$$

$$=24(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24})=9$$

故8个字母的全排列中有4个不在原来位置上的排列数应为：$C(8,4)\cdot 9=630$

3.9 错排问题

例2-56 **在8个字母A, B, C, D, E, F, G, H的全排列中，求使A, C, E, G四个字母不在原来上的错排数目。**

8个字母的全排列中，令 A_1, A_2, A_3, A_4 分别表A, C, E, G在原来位置上的排列，则错排数为：

3.9 错排问题

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\right| = 8! - C(4,1)7! + C(4,2)6!$$

$$- C(4,3)5! + C(4,4)4!$$

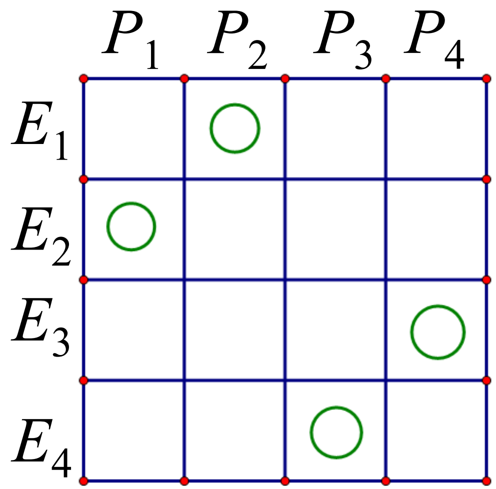
$$= 24024$$

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

例1、有G,L,W,Y四位工作人员，A,B,C,D为四项任务，但G不能从事任务B，L不能从事B,C两项任务，W不能做C,D工作，Y不能从事任务D。若要求每人从事各自力所能及的一项工作，试问有多少种不同方案？

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

对于$X=\{1,2,\ldots,n\}$的一个排列恰好对应了n个棋子在$n\times n$棋盘上的一种布棋方案。



如以棋盘的行表示X中的元素，列表示排列中的位置。如右图这种放棋方案就对应了排列2143.

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

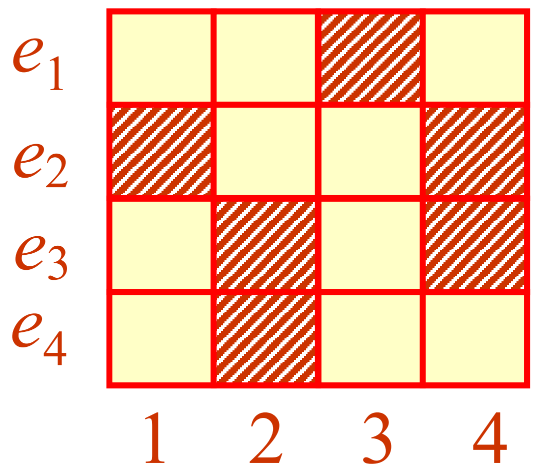
如果在排列中限制元素i不能排在第j个位置则相应的布棋方案中的第i行第j列的方格不许放棋子。把所有这些不许放棋的方格称作**禁区**。

对于{1,2,3,4}的一个排列 $P=e_1e_2e_3e_4$，规定

$e_1 \neq 3$，$e_2 \neq 1,4$，$e_3 \neq 2,4$，$e_4 \neq 2$。

这样的排列对应于有禁区的布子。

如右图有影线的格子表示**禁区**。



有禁区的排列也称为限制位置的排列

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

定理3-3(3.3) 设 r_i 为 i个棋子布入禁区的方案数, $i=1,2,3,\cdots,n$。有禁区的布子方案数（即禁区内不布子的方案数）为

$$r_0 n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \cdots + (-1)^n r_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k r_k (n-k)!$$

用容斥原理来解决！

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

证 设A_i为第i行棋子布入禁区，其他棋子任意布的方案集，i =1 , 2 , 3, …,n。

则所有棋子都不布入禁区的方案数为

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

$$= n! + \sum(-1)^k \sum |\cap A_i|$$

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

$\sum\limits_{I\in \mathcal{C}(n,k)} \left| \bigcap\limits_{i\in I} A_i \right|$ 正是k个棋子布入禁区，其他n－k个棋子任意布的方案数。由假设可知等于$r_k(n-k)$！(注意：布入禁区的棋子也要遵守无对攻规则)．所以

$$\left|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n\right| = n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k r_k(n-k)!$$

例如，r_1是仅放一个棋子的方案，当然包含了这一个棋子放在每一行的情况A_i，所以这里只需要写$r_1(n-1)!$，而无需再乘上C(n,1)。如果乘以C(n,1)，就变成了$r_1 n!$超过了n!。

如何求r_k呢？

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

棋盘多项式

现在研究落入禁区的情况
计算r_k

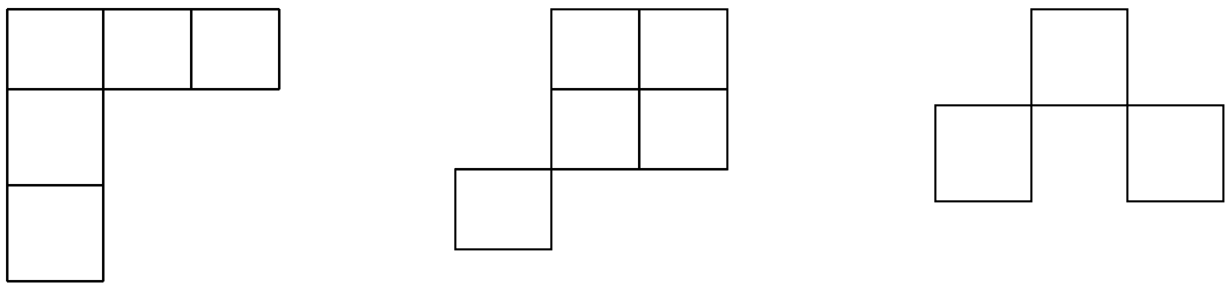
n个不同元素的一个全排列可看做n个相同的棋子在n×n的棋盘上的一个布局。布局满足同一行(列)中有且仅有一个棋子

			○	
○				
		○		
				○
	○			

如图所示的布局对应于排列41352。

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

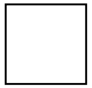
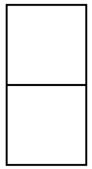
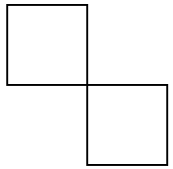
可以把棋盘的形状推广到任意形状：

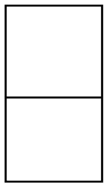
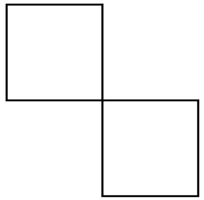


布子规定称为无对攻规则，棋子相当于象棋中的车。

令$r_k(C)$表示k个棋子布到棋盘C上的方案数。如：

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

$r_1($  $)=1$， $r_1($  $)=2$， $r_1($  $)=2$，

$r_2($  $)=0$， $r_2($  $)=1$。

为了形象化起见，（ ）中的图象便是棋盘的形状。

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

定义 设C为一棋盘，称$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)\, x^k$为C的棋盘多项式。

规定 $r_0(C)=1$，包括$C=\varnothing$时。

设C_i是棋盘C的某一指定格子所在的行与列都去掉后所得的棋盘；C_e是仅去掉该格子后的棋盘。

在上面定义下，显然有

$$r_k(C)=r_{k-1}(C_i)+r_k(C_e),$$

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

即对任一指定的格子，要么布子，所得的方案数为 $r_{k-1}(C_i)$；

要么不布子，方案数为 $r_k(C_e)$。

设C有n个格子，则 $r_1(C)=n.$

$r_1(C)=r_0(C_i)+r_1(C_e)$，$\because$ $r_1(C_e)=n-1$

$\therefore$ $r_0(C_i)=1.$ 故规定 $r_0(C)=1$是合理的.

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

即对任一指定的格子，要么布子，所得的方案数为 $r_{k-1}(C_i)$；要么不布子，方案数为 $r_k(C_e)$。从而

$$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)\, x^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}[r_{k-1}(C_i)+r_k(C_e)]x^k$$

$$=x\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C_i)x^k+\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C_e)x^k$$

$$=xR(C_i)+R(C_e) \qquad (*)$$

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

- 例如：

$$R(\square)=1+x;$$

$$R\left(\begin{array}{c}\square\\\square\end{array}\right)=xR(\ )+R(\square)=x+(1+x)=1+2x;$$

$$R\left(\begin{array}{cc}\square & \\ & \square\end{array}\right)=x\,R(\square)+R(\square)$$

$$=x(1+x)+1+x$$

$$=1+2x+x^2$$

$$\begin{array}{cc}\square & \square\\ & \square\end{array}\ ?$$

试试两种布子方案

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

如果C由相互分离的C_1，C_2组成，即C_1的任一格子所在的行和列中都没有C_2的格子。则有：

$$r_k(C)=\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)\, r_{k-i}(C_2)$$

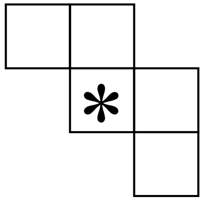
故 $$R(C)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)\, r_{k-i}(C_2)\right) x^k$$

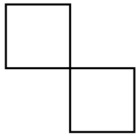
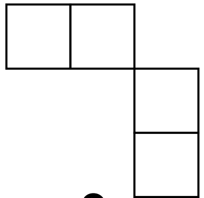
$$=\left(\sum_{i=0}^{n} r_i(C_1)\, x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} r_j(C_2)\, x^j\right)$$

$$\therefore\quad R(C)=R(C_1)\, R(C_2) \qquad (**)$$

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

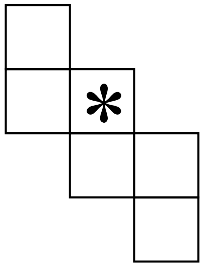
- 利用(*)和(**)式,可以把一个比较复杂的棋盘逐步分解成相对比较简单的棋盘，从而得到其棋盘多项式。

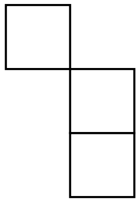
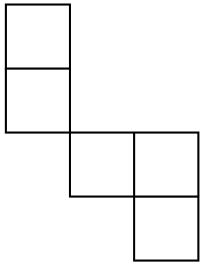
例 R (

) = xR()+R()

$= x(1+x)^2 + (1+2x)^2$

$= 1+5x+6x^2+x^3$

R(

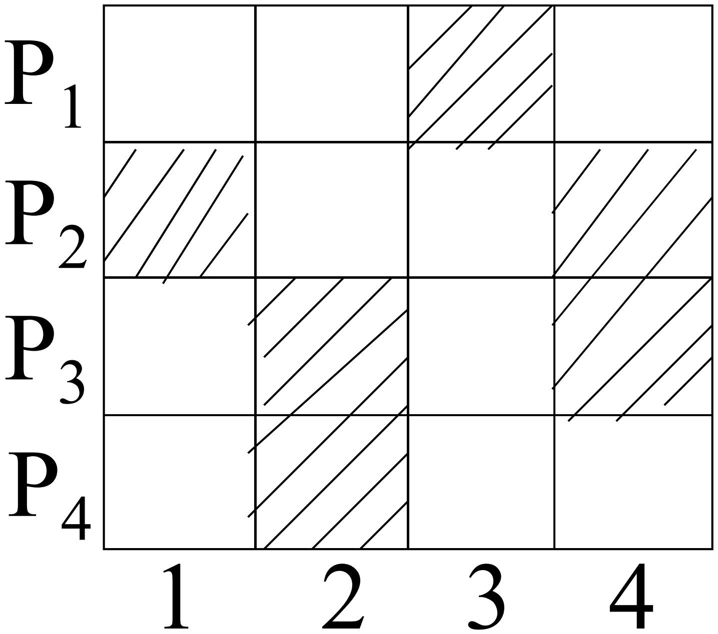
) = xR() + R()

$= 1+6x+10x^2+4x^3$

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

例设对于排列$P=P_1P_2P_3P_4$，规定$P_1 \neq 3$，$P_2 \neq 1$、4，$P_3 \neq 2$、4，$P_4 \neq 2$。

这样的排列对应于有禁区的布子。



如右图,有影线的格子表示禁区。可求得禁区棋盘多项式为

$$R(C)=1+6x+11x^2+7x^3+x^4$$

图3.4

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

- 可求得上例(图3.4所示)的方案数为
  $4!-6(4-1)!+11(4-2)!-7(4-3)!$
  $+1(4-4)!=4$

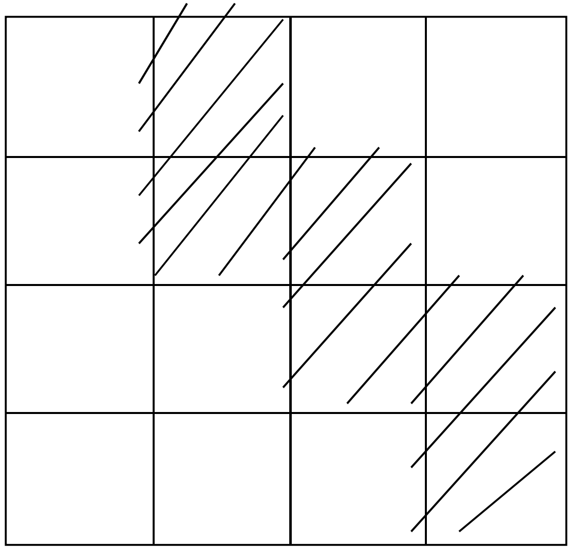
例3-14 (3. 12) 1,2,3,4四位工人，A, B, C, D四项任务。条件如下：
1不干B；2不干B、C；
3不干C、D；4不干D。
问有多少种可行方案？

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

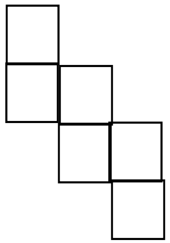
解　由题意，可得如下棋盘：

A　B　C　D

1
2
3
4



其中有影线的格子表示禁区。

R()$=1+6x+10x^2+4x^3$

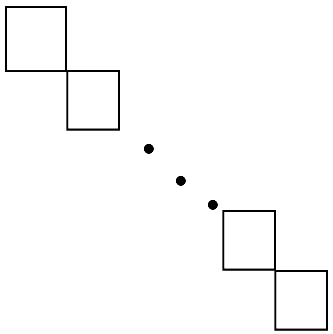
方案数$=4!-6(4-1)!+10(4-2)!-4(4-3)!+0(4-4)!=4$

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

例3-14 (3. 12) 三论错排问题

错排问题对应的是n×n的棋盘的主对角线上的格子是禁区的布子问题。

$\bar{C} =$



$$R(\bar{C}) = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad 则 r_k = \binom{n}{k}$$

错排的方案数: $n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} = D_n$$

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

例3-16（3. 14） A,B,C,D四位工人，P,Q,R,S四项任务。但他们不适宜的工作如图3-7(3.7)的影线所示。

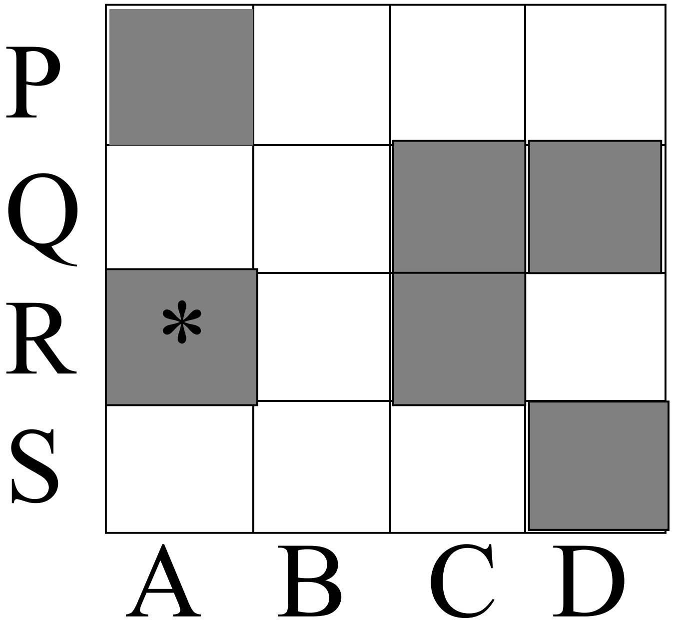
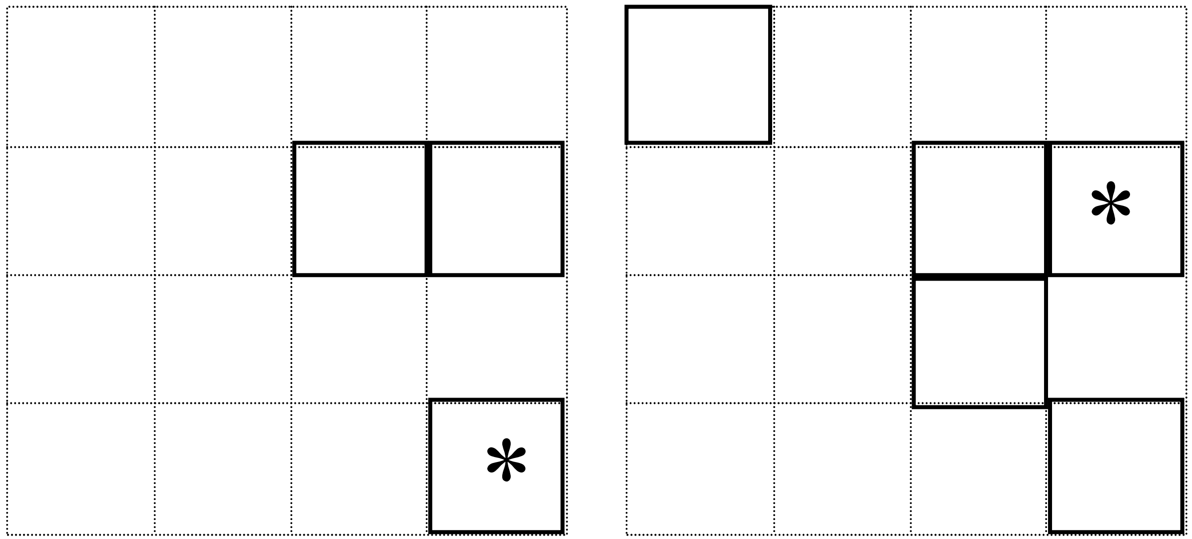


图3-7(3.7)

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

- 关键在于求出禁区的棋盘多项式。



(a) $C_{(i)}$　　(b) $C_{(e)}$

图3-8

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

$$R(C_{(i)})=xR(\square)+R(\square\square)=x(1+x)+1+2x$$
$$=1+3x+x^2$$

$$R(C_{(e)})=xR\begin{pmatrix}\square & \\ & \square\end{pmatrix}+R\begin{pmatrix}\square & & \\ & \square & \\ & \square & \\ & & \square\end{pmatrix}$$
$$=x(1+x)^2+(1+x)^2(1+2x)$$
$$=x+2x^2+x^3+1+4x+5x^2+2x^3$$
$$=1+5x+7x^2+3x^3$$
$$R(C)=x(1+3x+x^2)+1+5x+7x^2+3x^3$$
$$=1+6x+10x^2+4x^3$$

3.10 棋盘多项式和有禁区排列

不同的安排方案数为

$$4!-6(4-1)!+10(4-2)!-4(4-3)!+0(4-4)!$$

$$=24-36+20-4=4$$

四种安排为：

①(A, Q)，(B, P)，(C, S)，(D, R)；

②(A, Q)，(B, R)，(C, S)，(D, P)；

③(A, Q)，(B, S)，(C, P)，(D, R)；

④(A, S)，(B, Q)，(C, P)，(D, R)；

3.11 有限制排列

例3-12 (3. 11) 4个x , 3个y, 2个z的全排列中, 求不出现xxxx, yyy, zz图象的排列数.

解 设出现xxxx的排列的集合记为A_1,

$$|A_1|=\frac{6!}{1!\cdot 3!\cdot 2!}=60;$$

设出现yyy的排列的集合记为A_2,

$$|A_2|=\frac{7!}{4!2!}=105;$$

3.11 有限制排列

设出现zz的排列的集合记为A_3，

$|A_3|=\frac{8!}{4!\cdot 3!}=280$；

$|A_1\cap A_2|=\frac{4!}{2!}=12$；$|A_1\cap A_3|=\frac{5!}{3!}=20$；

$|A_2\cap A_3|=\frac{6!}{4!}=30$； $|A_1\cap A_2\cap A_3|=3!=6$；

全排列的个数为：$\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}=1260$；

所以：

$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=1260-(60+105+280)$

$+(12+20+30)-6$

$=871$

3.11 有限制排列

注：

有禁区排列是对元素排列位置的限制，计算的是**绝对**禁用位置；

有限制排列讲的是**相对**禁用位置，它限制的是对元素之间的相邻关系的限制 。也称为有限制条件（模式）的排列

这里谈的有限制排列与前面章节提到的“受限多重排列”不同。

3.11 有限制排列

例2、求集合$A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$的全排列中，abc和$efgh$均不出现的全排列个数。

解：设S为集合A的所有全排列的集合，令A_1, A_2分别表示出现abc和$efgh$的排列集合。

根据题意有$|S|=8!$，A_1的排列相当于集合$\{abc,d,e,f,g,h\}$的排列，有$|A_1|=6!$，同理$|A_2|=5!$，$|A_1 \cap A_2|=3!$。

根据容斥原理，所求的全排列个数为

$$|S|-(|A_1|+|A_2|)+|A_1 \cap A_2|=39486$$

3.11 有限制排列

如$\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$为$\{1,2,\ldots,n\}$的一排列，计算其不允许出现12,23,…,$(n\text{-}1)n$的全排列个数，即**该类模式**的相对位置有限制的排列数，记为Q_n。

8位同学排成一队，重新排队，每位同学前面的同学都更换了。

3.11 有限制排列

与错排并不一样！

12345678

31542876　符合要求 但这个不是错排

25834761　不符合要求 但这个是错排

3.11 有限制排列

当$n\geq 1$时，有$Q_n=n!-C(n-1,1)\times(n-1)!+C(n-1,2)\times(n-2)!+\ldots+(-1)^{n-1}C(n-1,n-1)\times 1!$

证明：令$\{1,2,\ldots,n\}$的所有排列集合为S，有$|S|=n!$。令$A_i(i=1,2,\ldots, n-1)$为具有形式$i(i+1)$的排列的集合，故有 $Q_n=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_{n-1}}|$ 。由于A_i表示具有形式$i(i+1)$的排列的集合，相当于$i(i+1)$作为一个元素出现

3.11 有限制排列

|Ai|=(n-1)!(i=1,2,…,n-1)。

而Ai∩Aj可分为（不妨设i＜j）：

①i+1=j，相当于i(i+1)(i+2)作为一个元素出现；

②i+1＜j，相当于i(i+1)、j(j+1)分别作为一个元素出现，均有|Ai∩Aj|=(n-2)! (i,j=1,2,…,n-1;i≠j)。

一般地，n个数字中有k个数字i1,i2,…,ik具有形式ij(ij+1)(j=1,2,…,k;k=1,2,…,n-1)，相当于n-k个元素的排列，有$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$

3.11 有限制排列

对于k=1,2,…,n，在n-1个数字中取k个共有C(n-1,k)种方法。由乘法法则和容斥原理得

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_{n-1}}| &= |S|-\sum_{i=1}^{n-1}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j| \\
&\quad -\sum_{i\neq j\neq l}|A_i\cap A_j\cap A_l|+\ldots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}| \\
&= n!-\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-1}{2}(n-2)!-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!
\end{aligned}
$$

作业

习题10，62，71，72