第三章容斥原理与鸽巢原理

3.13 鸽巢原理举例

常见类型一:整除问题

如果有n+1个正整数，而这些整数是小于或等于2n，是否一定会有一对数是互素的？为什么？

例：证明，如果从{1,2, …, 2n}中选择n+1个整数，那么存在两个整数，它们之间差为1。

路易·波萨(**Louis Pósa**)是匈牙利的年青 数学家, **14**岁时就已能够发表有相当深度的数学论文。大学还没有读完, 就已获得 科学博士的头衔。

3.13 鸽巢原理举例

常见类型一:整除问题

证明:

设选择的n+1个整数为a_1，a_2，…，a_{n+1})、，

令$b_1=a_1+1$，$b_2=a_2+1$，…，$b_n=a_n+1$，

则 $1<b_1<b_2<\ldots<b_n<=2n$。

a_1，a_2，…，a_{n+1}，b_1，b_2，…，b_n

这2n+1个数中至少有一对相等，且$b_j=a_j+1$，

$b_j=a_k$ 所有 a_k和a_j只相差1

3.13 鸽巢原理举例

常见类型一:整除问题

例3-26(3.19) 从1到2n的正整数中任取n+1个，则这n+1个数中，至少有一对数，其中一个是另一个的倍数。

证明 设n+1个数是 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$。每个数去掉一切2的因子，直至剩下一个奇数为止。组成序列 $r_1, r_2, \cdots, r_{n+1}$。这n+1个数仍在[1, 2n]中，且都是奇数。而[1, 2n]中只有n个奇数. 故必有 $r_i = r_j = r$，对应地有 $a_i = 2^{\alpha i} r$, $a_j = 2^{\alpha j} r$，若$\alpha_i > \alpha_j$ 则 a_i 是 a_j 的倍数。

3.13 鸽巢原理举例

常见类型二:图形问题

例：在边长为1的等边三角形内任意选择5个点，存在2个点，其间距离至多为1/2

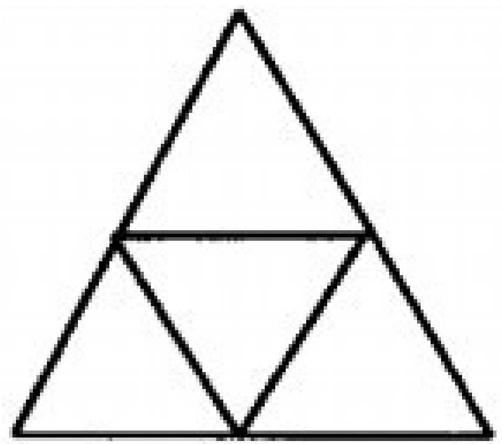
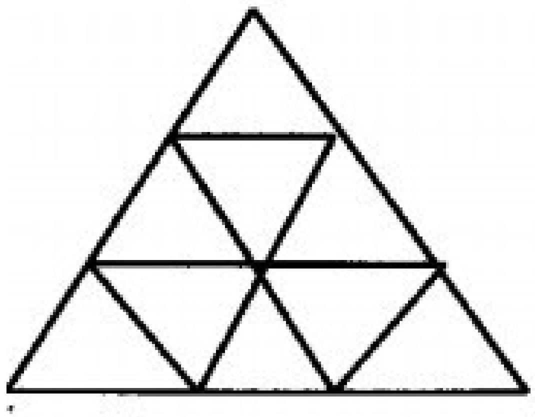


图 1　4 个抽屉

3.13 鸽巢原理举例

常见类型二:图形问题

例：证明在边长为1的等边三角形内任意选择10个点，存在两个点，其间距离至多为1/3。



3.13 鸽巢原理举例

常见类型二:图形问题

例：在直径为5的圆内任意给定10个点，证明存在两点，它们之间的距离小于2。

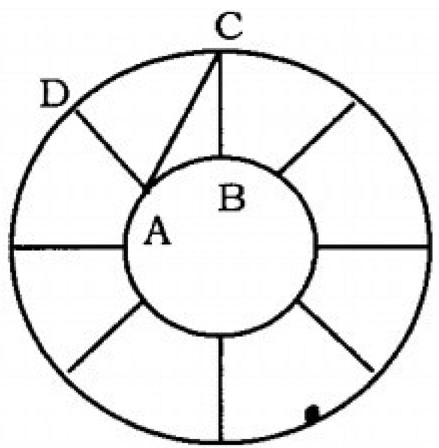


图 3　9 个抽屉

$$|CD| = \sqrt{2-\sqrt{2}}R = \sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot 5 < 1.92 < 2$$

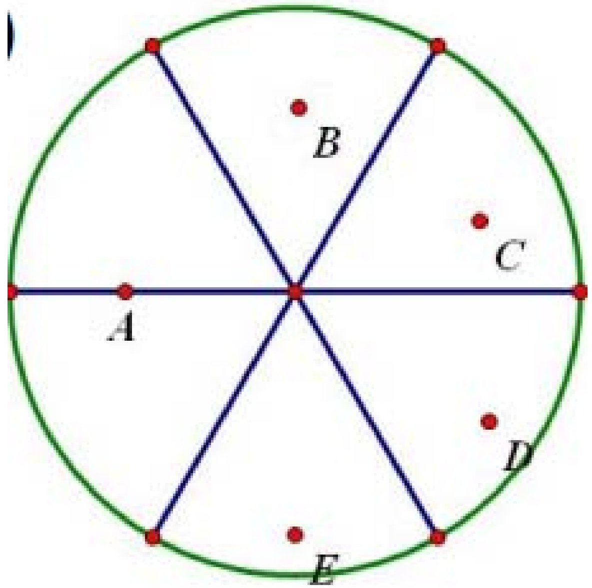
$$|AC| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2.5^2 + 1^2 - 2\times 2.5\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}} < 1.93 < 2$$

3.13 鸽巢原理举例

常见类型二:图形问题

例：在一个半径为1单位的圆板上钉7个钉，使得两个钉的 距离是大于 或等于1，那么这7个钉一定会有一个位置恰好是在圆心上。



3.13 鸽巢原理举例

常见类型三:连续累加问题

例3-27(3.20) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$是正整数序列,则至少存在k和 l, $1\le k< l\le m$, 使得和 $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$ 是m的倍数。

证明 设$S_h=\sum_{i=1}^{h} a_i$, $S_h\equiv r_h \bmod m$, $0\le r_h\le m-1$, $h=1, 2, \cdots, m$. 若存在 l, $S_l\equiv 0 \bmod m$ 则命题成立. 否则,$1\le r_h\le m-1$. 但$h=1, 2, \cdots, m$. 由鸽巢原理, 故存在 $r_k = r_h$, 即 $S_k\equiv S_h \bmod m$, 不妨设 $h>k$. 则

$$S_h-S_k = a_{k+1} + a_{k+2} +\ldots + a_h \equiv 0 \bmod m$$

3.13 鸽巢原理举例

常见类型三:连续累加问题

例：一个孩子每天至少做一题，总共做7周，每周总共不超过11题。

证明：必存在连续若干天在此期间这个孩子恰好做了20题。

类似的：生产产品，看电视，做运动等

3.13 鸽巢原理举例

例3-30(3.23) 设$a_1, a_2, \cdots, a_{100}$是由 1和2组成的序列，已知从其任一数开始的顺序10个数的和不超过16. 即

$$a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+9} \le 16,\ 1 \le i \le 91$$

则至少存在 h 和 k，k > h, 使得

$$a_h + a_{h+1} + \ldots + a_k = 39$$

证 令 $S_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$, j =1 , 2 , … ,100 显然

$S_1 < S_2 < \ldots < S_{100}$, 且 $S_{100} = (a_1 + \ldots + a_{10}) + (a_{11} + \ldots + a_{20}) + \ldots + (a_{91} + \ldots + a_{100})$

3.13 鸽巢原理举例

根据假定有 $S_{100} \leq 10 \times 16 = 160$

作序列S_1, S_2, …, S_{100}, S_1+39, …, $S_{100}+39$.

共200项. 其中最大项 $S_{100}+39 \leq 160+39$

由鸽巢原理, 必有两项相等. 而且必是前段中某项与后段中某项相等. 设

$S_k = S_h + 39$, $k>h$ $S_k - S_h = 39$ 即

$a_h + a_{h+1} + \ldots + a_k = 39$

3.13 鸽巢原理举例

常见类型四:集合问题

例3-31(3.24) X是9个正整数的集合，$E\subseteq X$，$S(E)$是集合E的元素的和，n是X的元素的最大值. 求n的值，使X至少存在2个集合A和B，使$S(A)=S(B)$.

E是X的任意子集

$$S(E)\le n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-8)=9n-36$$

这说明不同的$S(E)$值最多为$9n-36$个.

X的非空子集的数目为$2^9-1=511$.

3.13 鸽巢原理举例

常见类型四:集合问题

由鸽巢原理

$$511 \geq 9n - 36 \qquad (*)$$

是至少存在2个子集的和相等的充分条件.

这里, $2^9-1=511$看作是鸽子数, $9n-36$是鸽巢数目的界.

$9 \leq n \leq 60 \Rightarrow (9n \leq 547)$使不等式(*)成立.

3.13 鸽巢原理举例

常见类型四:集合问题

例3-28(3.21) 已知$X=\{1, 2, \cdots, 9\}$,任意将 X剖分两个部分P和Q, 其中至少存在一个集合含有3个等差的数。

证明 用反证法.

不妨设$5 \in P$, 由于1, 9不能再同时属于P, 故可分为以下3种情况:(1)$\{1,5\}\subseteq P$, $9 \in Q$; (2)$\{5, 9\}\subseteq P$, $1\in Q$; (3)$5\in P$, $\{1, 9\}\subseteq Q$;

3.13 鸽巢原理举例

对情况 (1):

$$\{1, 5, 6, 2, \quad\quad \} \subseteq P,\ \{9, 3, 4, 7, \quad\quad \} \subseteq Q;$$

$$2, 3, 4, 6, 7, 8 \in ?$$

对情况 (2):

$$\{5, 9, 4, 2, \quad\quad \} \subseteq P,\ \{1, 7, 3, 6, \quad\quad \} \subseteq Q;$$

$$2, 3, 4, 6, 7, 8 \in ?$$

3. 13 鸽巢原理举例

对情况 (3):

$\{5, \qquad\} \subseteq P$, $\{1, 9, \qquad\} \subseteq Q$;

2, 3, 4, 6, 7, 8

可分为两种情况:

情况 (3a):

$\{5, 2, 7, 4, \qquad\} \subseteq P$, $\{1, 9, 8, 6, \qquad\} \subseteq Q$;

3,∈? 4, 6, 7, 8

情况 (3b):

$\{5, 3, 6, \qquad\} \subseteq P$, $\{1, 9, 2, 4, \qquad\} \subseteq Q$;

3, 4, 6, 7,∈? 8

3.13 鸽巢原理举例

即各种情况下都不可能将 X剖分成两个部分 P和Q，其中P和Q都不含有3个等差的数。因此，只能是P和Q中至少存在一个集合包含一个等差序列 $a, a+d, a+2d$。

类似的方法可证

$$X=\{1, 2, 3, \cdots, 2^8\},$$

任意剖分两个部分P和Q，其中至少存在一个集合包含一个等比序列

$$a, ar, ar^2 .$$

3.13 鸽巢原理举例

常见类型五:奇偶问题

例3-29(3.22) 设 a_1, a_2, a_3为任意3个整数, $b_1b_2b_3$为a_1, a_2, a_3的任一排列, 则 a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3中至少有一个是偶数.

证 由鸽巢原理, a_1, a_2, a_3必有两个同奇偶. 设这3个数被2除的余数为 xxy, 于是b_1, b_2, b_3中被2除的余数有2个x, 一个y. 这样a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3被2除的余数必有一个为0(a_i的余数中只有一个y, b_i的余数中有两个x, 故a_i-b_i的余数中必有x−x).

作业

3. 习题 44

4. 习题 55

5. $a_1, a_2\ldots a_n$是正整数序列，$a_1+a_2+\ldots+a_n=2n$，试证明存在正整数h和k，k>h，使得$a_{h+1}+\ldots+a_k=n$