第一章　排列与组合

回顾

定义　　设$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是n个不同元素的集合，r 满足$0\leqslant r\leqslant n$, 任取 A 中r 个（不重复的）元素，按次序排列，称为从n个中取r个的一个（无重）排列。排列的个数用 P_n^r 或 $P(n, r)$表示。当r=n时称为全排列。一般不说可重即无重。

回顾

从n个中取r个的排列的典型例子是从n个不同的球中，取出r个，放入r个不同的盒子里，每盒1个。第1个盒子有n种选择，第2个有n-1种选择，……，第r个有n-r+1种选择。

故有

$$P(n,r)=n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

回顾

由 $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$，有

$$P(n,r)=n!/(n-r)!$$

令 $0!=1$，所以$P(n,0)=1$，$P(n,n)=n!$

回顾

如果参与排列的元素有重复呢?

例1(教材1-13) 由5种颜色的星状物，20种不同的花排成如下要求的5个对象的图案：两边是星状物，中间是3朵花。问共有多少种这样的图案？

5种颜色的星状物取2个的排列的个数为

$$P_5^2=5\times4=20,$$

20种不同的花，取3种排列的个数为

$$P_{20}^3=20\times19\times18=6840$$

共有图案数为

$$20\times6840=136800$$

1.4 多重集合的表示

自由多重

$$M=\{\infty a_1, \infty a_2, \cdots, \infty a_n\}$$

受限多重

$$M=\{k_1 a_1, k_2 a_2, \cdots, k_n a_n\}$$

1.5 多重排列

自由多重

$$M=\{\infty a_1, \infty a_2, \cdots, \infty a_n\}$$

从中取r个作多重排列，排列数为？ n^r

受限情况下呢？

1.5 多重排列

求k_1个a_1，k_2个a_2，…，k_n个a_n的排列数，设$k_1+k_2+\ldots+k_n=r$,设此排列数为$P(r;k_1,k_2,\ldots,k_n)$,对a_1，a_2，…，a_n分别加下标，得到

$$P(r;\ k_1,k_2,\ldots,k_n)=\frac{r!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}=\binom{n}{k_1\ k_2\ldots\ k_t}$$

这是一种元素重复的全排列！

1.5 多重排列

能否用隔板法?

例1-20 红、黄、蓝、绿四种颜色的旗帜各四面，共16面排成一列，问有多少种不同的方案?

[解]先将16面旗帜全部看成是有区别的，有16！种排列，但每一种颜色的4面旗帜是相同的，重复度为4！，4种颜色重复度为$(4!)^4$，故不同的方案数为

$$16! / (4!)^4=63063000$$

1.5 多重排列

例1-21 用1×1, 1×2, 1×3的方块铺设1×7的模块，试问有几种模式?

[解](1)用7块1×1的成品，模式为1种；

(2) 用5块1×1, 1块1×2的成品, 模式 6!/5!=6种；

(3) 用4块1×1, 1块1×3的成品, 模式 5!/4!=5种；

(4) 用3块1×1, 2块1×2, 模式 5!/3!/2!=10种；

1.5 多重排列

(5) 用**2块**1×1，1×2、1×3各1**块**，模式 $4!/2!=12$种；
(6) 用**1块**1×1，3**块**1×2，模式$4!/3!=4$种；
(7) 用**1块**1×1，2**块**1×3，模式$3!/2!=3$种；
(8) 用**2块**1×2，1**块**1×3，模式$3!/2!=3$种；
总共有

$$1+6+5+10+12+4+3+3=44\text{种模式。}$$

1.5 多重排列

如果不是全排列呢？

由3个a，4个b和5个c构成长度为11的排列，排列数多少个？

由3个a，4个b和5个c构成长度为10的排列，排列数多少个？

1.5 多重排列

延伸1：特定排列也会产生多重排列结果

6个人排队，甲、乙、丙三人按

“甲---乙---丙”

顺序排的排队方法有多少种？

甲乙丙的特定排列消除了甲乙丙排列的差异

$$\frac{6!}{3!}$$

1.5 多重排列

延伸1：特定排列也会产生多重排列结果

4个男生和3个女生，高矮不相等，现在将他们排成一行，要求**从左到右女生从矮到高排列**，有多少种排法。

女生的特定排列消除了女生排列的差异

$$\frac{7!}{3!}$$

Topic 2 分组问题

例1-22

八个人分成四组，每组二人，有几种方案?

解法1：第一组C(8,2)，余下六人

第二组C(6,2)，余下四人

第三组C(4,2)，余下两人

C(8,2) C(6,2) C(4,2)/4！

Topic 2 分组问题

例1-22

八个人分成四组，每组二人，有几种方案？

解法2：八个人全排列共4！

每组内可以互换，组内重复2。四个组重复度4！

注意：分组没区别

$$8!/(4!\,2^4)$$

Topic 2 分组问题

例 6名学生报考研究生，共有3名导师，每个导师招两人，共有多少方案？

注意：导师有区别

$$6!/(2!\,2!\,2!)$$

Topic 2 分组问题

例 将52张牌分给13人，每人4张，几种分法？

$$\frac{52!}{(4!)^{13}}$$

Topic 2 分组问题

例 10男10女乘车出游，每车2男2女，几种方案？假设车辆无区别

多队分组 $$\frac{(10!)^2}{5!\times 2^{10}}$$

若有一对男女要求同车呢？ $$\frac{(9!)^2}{4!\times 2^{8}}$$

若有两对男女要求同车呢？ $$\frac{(8!)^2}{4!\times 2^{8}}+(P_8^2)^2\frac{(6!)^2}{3!\times 2^{6}}$$

1.5 多重排列

延伸2：多重排列与组合

定义　　当从n个元素中取出r个而不考虑它的顺序时，称为从n个中取r个的组合。其数目记为$C(n, r)$，C^r 或$\binom{n}{r}$。

可以看作分成两组

多重排列既可以看作排列的拓展，也可以看作组合的拓展

Topic 3 配对问题

2n个物品两两配对

（同一组之内两两配对，也就是分组）

$$\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

分成两组配对呢？

Topic 3 配对问题

两组物品，每组**n**个不同物品，两两配对

$n!$

也就是置换（双射）

10男**10**女参加舞会，男女搭伴跳舞，有多少种配对方案？ 10!

10男**10**女参加舞会，男女搭伴跳舞，每对按顺序出场，有多少种配对方案？ $(10!)^2$

Topic 3 配对问题

两组物品，一组n个不同物品，另一组m个不同物品，n≤m，两两配成n对

$$C_m^n n! = \frac{m!}{(m-n)!} = P_m^n = m\times(m-1)\times\cdots\times(m-n+1)$$

15男10女参加舞会，男女搭伴跳舞，最多有多少种配对方案？ $15\times14\times\cdots\times6$

15男10女参加舞会，男女搭伴组成5对跳舞，每对按顺序出场，有多少种配对方案？

$$C_{15}^5 C_{10}^5 (5!)^2$$

1.5 多重排列

例17(教材1-23) 某车站有6个入口处，每个入口处每次只能进一人，一组9个人进站的方案有多少？

[解] 9个人与5个门柱的全排列，再消除门柱的重复度。（一种特殊的分组，与前面的分组问题有什么区别？）

$$\frac{14!}{5!}$$

结论

自由多重排列

$$M=\{\infty a_1, \infty a_2, \cdots, \infty a_n\}$$

从中取r个作多重排列，排列数为n^r

受限多重排列

$$M=\{k_1 a_1, k_2 a_2, \cdots, k_n a_n\}$$

其全排列为 $\dfrac{(k_1+\cdots+k_n)!}{k_1!\cdots k_n!}$

思考

自由多重

$$M=\{\infty a_1, \infty a_2, \cdots, \infty a_n\}$$

受限多重

$$M=\{k_1 a_1, k_2 a_2, \cdots, k_n a_n\}$$

能否多重组合?

作 业

要写出简要推导过程

1. 将52张牌分给4人，每人13张，每人有三种不同花色各三张，还有四张都是第4种花色，几种分法？

2. 将52张牌分给4人，每人13张，每人有一个5张牌的同花顺，几种分法？（思考题，选做）

3. 将mathematics的字母加以排列，有多少种不同的字符串。

4. 在alabama的排列中，4个a全不在一起的排列有多少？

作业

5. 在opossum的排列中，p直接在o后面的排列有多少？

6. 在karakule的排列中，没有两个元音并排的排列有多少？

7. 在mississippi的排列中，不存在两个i相邻的排列有多少？

8. 在parallelism的排列中，不改变元音字母顺序的排列有多少？